Universidade Federal da Paraíba
Universidade Federal de Campina Grande
Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática
Doutorado em Matemática

Graduações e Identidades Graduadas nas Álgebras das Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

por

Alex Ramos Borges

Campina Grande - PB
Fevereiro/2019

Graduações e Identidades Graduadas nas Álgebras das Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

por

Alex Ramos Borges

sob orientação do

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Campina Grande - PB

Fevereiro/2019

Universidade Federal da Paraíba

Universidade Federal de Campina Grande

Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática

Doutorado em Matemática

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em:

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov - UNICAMP

Profª. Dra. Manuela da Silva Souza - UFBA

Prof. Dr. Claudemir Fidelis Bezerra Júnior - UFCG

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG

Orientador

Tese apresentada ao Corpo Docente do Programa Associado de Pós-Graduação em Matemática - UFPB/UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Fevereiro/2019

Resumo

Neste trabalho buscamos resolver dois problemas centrais. O primeiro é descrever as classes dos isomorfismos da álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos graduadas por um grupo abeliano finito e sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Sob as mesmas hipóteses, A. Valenti e M. Zaicev provaram que qualquer graduação em uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos é isomorfa a um produto tensorial $A \otimes B$ de uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos A com uma graduação elementar e uma álgebra de matrizes graduada com divisão B. Nós provamos que este resultado é válido sem a hipótese do grupo ser finito. O segundo problema é mostrar que as identidades graduadas de $A \otimes B$, determinam, a menos de isomorfismo, a própria álgebra $A \otimes B$. Conseguimos reduzir este problema ao caso das graduações elementares nesta álgebra, que foi estudado anteriormente por O. M. Di Vincenzo e E. Spinelli.

Palavras-chave: Álgebras Graduadas; Identidades Polinomiais Graduadas; Álgebra de Matrizes Triangulares Superiores em Blocos; Isomorfismos de Álgebras Graduadas.

Abstract

In this work we seek to solve two central problems. The first is the description of the isomorphism classes of upper block triangular matrix algebras graded by a finite abelian group over an algebraically closed field of characteristic zero. Under the same hypothesis, A. Valenti and M. Zaicev proved that any grading on an algebra of upper block-triangular matrices is isomorphic to the tensor product $A \otimes B$ of an elementary grading A on an upper block-triangular matrix algebra and a division grading B on a matrix algebra. We prove that this result holds without the hypothesis that the group is finite. The second problem is show that the graded identities in $A \otimes B$, determine, up to isomorphism, $A \otimes B$. We reduce this question to the case of elementary gradings on algebras of upper block-triangular matrix which was previously studied by O. M. Di Vincenzo and E. Spinelli.

Keywords: Graded Algebras; Graded Polinomial Identities; Algebra of Upper Block-Triangular Matrices; Isomorphism of Graded Algebras.

Agradecimentos

A Deus, pois sem ele não daria nem o primeiro passo nesta minha caminhada, chamada vida e muito menos os primeiros passos necessários nesta vida tão árdua e gratificante, chamada matemática. Ele esteve ao meu lado em todo o percusso e sempre me ajudou nos momentos mais difíceis, sou muito grato e sempre serei.

A minha mãe, Silvania Ramos de Lima, por ter me apoiado e ajudado sempre em todos os momentos da minha vida. Ela é um espelho de força, garra e perseverança, virtudes que foram essenciais na minha caminhada.

A minha esposa, Cyntia Rachel Fernandes de Andrade, por todo o companheirismo, paciência e apoio dado no decorrer de mais um degrau alcançado em minha vida. O tempo vai passar e acho que não serei capaz de devolver todo o bem que ela me fez e toda ajuda por ela dada.

Ao meu orientador, Diogo Diniz Pereira Silva e Silva, por toda a ajuda e paciência comigo durante todo este doutorado e até mesmo antes do início do mesmo. Sinceramente, se não fosse por ele, não sei se teria chegado a conclusão deste trabalho, pois ele acreditou em mim, se dispondo a me orientar e me aceitando como seu primeiro orientando em nível de doutorado. Só tenho a agradecer e me desculpar pelo trabalho dado.

Ao meu grande amigo, Claudemir Fidelis Bezerra Júnior, por toda ajuda, conversas e discussões que tivemos durante o decorrer do doutorado e até mesmo antes disto. Agradeço, pois ele sempre foi minha ajuda para todos os momentos, como por exemplo para discutir os temas da minha qualificação e até mesmo ler minha tese antes da mesma está pronta, dando dicas cruciais para o bom desenvolvimento da mesma.

A duas pessoas que foram essenciais na minha vida e que infelizmente não estão mais entre nós. A primeira delas é meu avô, Geraldo Doarte Borges, que sempre foi uma inspiração de pessoa e sempre me ajudou quando eu precisei. A segunda, é meu padrinho, Otávio Camará Ramos, que também foi uma inspiração e um espelho para mim. Lembro-me que quando fui fazer o meu primeiro verão, em 2008, até o final de semana antes do início do mesmo, eu não sabia se iria, pois não tinha dinheiro para me manter no decorrer do curso. Porém, ambos me ofereceram a ajuda financeira necessária e incentivaram minha ida, e graças a este primeiro passo, pude cursar o mestrado e agora concluir o doutorado.

Ao meu pai, José Geova Doarte Borges, por toda a ajuda e incentivo que me deu durante esta caminhada. Além das ótimas conversas e concelhos dados.

Por fim, gostaria de agradecer a todos que ajudaram e contribuíram de alguma maneira para a conclusão desta caminhada. A minha madrinha, Olivia Olindina, minha tia Estelita; a minhas irmãs, Amanda e Vanessa. Aos amigos Brito e Natan, pelas ótimas conversas. Aos professores Manoela e Plamen que se disponibilizaram a participar da banca e, aos professores e funcionários da UPE Caruaru que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho, o meu muito obrigado a todos.

"A álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu."

Jean Le Rond d'Alembert

Dedicatória

Ao meu avô e ao meu padrinho

Sumário

Introdução

Na álgebra moderna existe um ramo que estuda a estrutura algébrica chamada de **anel**. Dentro deste estudo se destaca a teoria dos anéis não-comutativos, e como uma vertente deste estudo temos a teoria das identidades polinomiais ou PI-teoria (que vem do inglês Polynomial Identities). No início, as identidades polinomiais eram estudadas sobre os anéis, porém com o aprofundamento da teoria, elas passaram a ser estudadas sobre uma estrutura mais elaborada, chamada de **álgebra**. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$, com as variáveis não comutativas e com os coeficientes sobre um corpo $\mathbb{K}$, é dito uma identidade polinomial (ou simplesmente PI) para uma álgebra A quando $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Quando existe uma PI não nula para uma álgebra A dizemos que esta álgebra é uma PI-álgebra. Existem muitas classes de álgebras que são PI, como por exemplo, as álgebras comutativas, as com dimensão finita, as nilpotentes, entre outras.

Dentre os vários ramos de pesquisa dentro da PI-teoria, podemos destacar 3 vertentes principais. A primeira, estuda as principais características de uma álgebra, sabendo que a mesma é uma PI-álgebra. A segunda, pesquisa sobre as variedades de álgebras que satisfazem um determinado sistema de identidades polinomiais. Por fim, a terceira procura estabelecer uma base para o T-ideal (ideal das identidades polinomiais) de uma determinada álgebra. Porém, vale destacar, estes três ramos não são independentes, assim como a PI-teoria utiliza-se de muitos conceitos e resultados de outras áreas, como por exemplo, de Teoria de Representações de Grupos, Álgebra Linear, Combinatória, dentre outras. Uma discussão mais detalhada sobre o desenvolvimento da PI-teoria pode ser encontrada, por exemplo, em [16, 18, 34, 40].

O estudo de identidades polinomiais para álgebras ganhou força com o artigo de Amitsur e Levitzki [3], publicado em 1950. Neste artigo foram utilizados métodos combinatórios para provar que o polinômio standart de grau 2n é uma identidade de menor grau para a álgebra das matrizes de ordem n sobre um corpo $\mathbb{K}$, $M_n(\mathbb{K})$. Uma das questões centrais no estudo das identidades polinomiais é a descrição de um conjunto gerador denominado base para o T-ideal de uma álgebra, e com visão neste estudo Specht, em 1950, conjecturou que toda álgebra associativa tem uma base finita para o seu T-ideal, sob a hipótese do corpo ser de característica zero. A demonstração deste fato só foi realizada em 1987, por Kemer ([25, 26]).

Uma álgebra A é dita graduada por um grupo G se $A = \oplus_{g\in G} A_g$, onde A_g é um subespaço de A, para qualquer $g \in G$, e $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Podemos ver a álgebra associativa G-graduada livre unitária $K_G\langle X\rangle$ (álgebra dos polinômios G-graduados em variáveis associativas e não comutativas com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$) como sendo uma álgebra G-graduada e seus polinômios $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n})$ como sendo polinômios graduados. Definimos uma identidade graduada para uma álgebra G-graduada A, como sendo um polinômio G-graduado $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n})$ tal que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{g_i}$, para $i = 1, \ldots, n$. O estudo das identidades graduadas foi motivado pela sua importância na estrutura dos T-ideais (veja [27]) e ao longo das últimas décadas importantes resultados foram obtidos. Por exemplo, foi provado em [5] que sendo G um grupo finito, então uma álgebra G-graduada A é uma PI-álgebra se, e somente se, A_e é uma PI-álgebra, onde e é o elemento neutro de G.

Dentre as várias álgebras graduadas uma que podemos destacar é a álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{K})$. Nesta álgebra uma G-graduação é dita **elementar** se existe uma n-upla $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que cada matriz elementar E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ é homogênea e o grau de E_{ij} igual a $g_i g_j^{-1}$ (denotaremos este grau por $\deg(E_{ij})$). Dentre vários autores que abordaram este tema, devemos destacar Năstăsescu e o van Oystaeven que em [31] abordaram vários tópicos sobre os anéis graduados, incluindo os anéis graduados primitivos, nos quais tal álgebra se inclui. Em [14] os autores mostraram que uma graduação nesta álgebra de matrizes sobre um corpo algebricamente fechado e com grupo abeliano livre de torção é sempre elementar. Os autores em [6] provaram para um corpo algebricamente fechado de característica zero e G um grupo finito qualquer, que qualquer álgebra de matrizes graduada é isomorfa a um produto tensorial de uma álgebra de matrizes com uma graduação fina e uma álgebra de matrizes com uma graduação elementar. Diniz e Bianchi [15] provaram que, se $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, G é abeliano e A e B são duas álgebras G-graduadas simples de dimensão finita, então A e B são isomorfas como álgebras G-graduadas se, e somente se, têm as mesmas identidades G-graduadas.

Tendo em vista o que foi provado para a álgebra das matrizes, podemos nos perguntar se o mesmo ocorre para as álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos. As graduações por grupos abelianos finitos nas álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos foram descritas por Valenti e Zaicev [38]. Já Bărăscu e Dăscălescu [12] determinaram quando duas graduações elementares destas álgebras são isomorfas. No trabalho citado anteriormente, surge um conceito que será muito utilizado nesta tese, que é o conceito de flag graduada. Posteriormente Di Vincenzo e Spinelli [19] demonstraram que, sob certas condições, duas álgebras de matrizes triangulares superiores em bloco com G-graduadas satisfazem as mesmas identidades graduadas se, e somente se, são isomorfas como álgebras graduadas.

Nesta tese, temos dois objetivos principais, que estão relacionados. O primeiro deles é descrever, a menos de isomorfismo, todas as graduações em uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos $UT(m_1, \ldots, m_r)$. Em seguida, de posse desta descrição, o nosso objetivo é provar que duas destas álgebras são isomorfas, como álgebras graduadas se, e somente se, têm as mesmas identidades graduadas. Para atingirmos os nossos objetivos, este trabalho foi divido em 4 capítulos.

Nos dois primeiros capítulos apresentamos conceitos básicos para o desenvolvimento dos demais, para tanto, se faz necessário que o leitor tenha um conhecimento prévio de álgebra linear e teoria de anéis básica. No primeiro capítulo, iniciamos com os conceitos de álgebras e homomorfismo de álgebras, que é um ponto central no desenvolvimento da nossa tese. Em seguida, definimos o que vem a ser uma identidade ordinária para uma álgebra e finalizamos apresentando o conceito de ação de grupos. No segundo capítulo iremos abordar os conceitos que envolvem graduações, iniciando com a definição de álgebras graduadas, homomorfismos graduados e identidades graduadas. Finalizamos este capítulo com as definições e os principais conceitos em torno dos espaços vetoriais graduados e dos módulos graduados sobre álgebras com divisão.

No terceiro capítulo, atingimos o nosso primeiro objetivo. Para isso, descrevemos os isomorfismos no anel dos endomorfismos das flags graduadas, sobre uma álgebra graduada com divisão. Em [38], sob a hipótese do grupo ser abeliano finito e sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, os autores provam que qualquer álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos com uma graduação elementar é isomorfa a um anel de endomorfismos de uma flag sobre o corpo. Nós mostramos neste capítulo que qualquer uma destas álgebras é isomorfa a um anel de endomorfismos de uma flag graduada sobre uma álgebra com divisão, não necessariamente com uma graduação elementar. Em [8], é provado que duas graduações elementares em uma álgebra de matrizes triangulares superiores são isomorfas se, e somente se, os respectivos anéis de endomorfismos das respectivas flags graduadas são isomorfos a menos de uma shift e nós provamos este fato para uma graduação qualquer, porém, as flags são sobre uma álgebra com divisão.

Uma álgebra graduada simples que satisfaz a condição de cadeia descendente de ideais à esquerda graduados, é isomorfa a um anel de endomorfismos de um espaço vetorial graduado sobre uma álgebra graduada com divisão (veja [20, 31]). Isomorfismos de anéis de endomorfismos de espaços vetoriais graduados são descritos em termos de isomorfismo de pares. Já um dos nossos principais resultados (Teorema 3.2.6) prova um resultado análogo para o anel dos endomorfismos de flags graduados. As graduações na álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos, são descritas em [38] como sendo o produto tensorial de uma álgebra de matrizes com uma graduação com divisão e uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos com uma graduação elementar. Como consequência deste resultado, nós determinamos (Corolário 3.3.3), em termos desta decomposição, quando duas álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos são isomorfas. Os resultados obtidos neste capítulo geraram um artigo com título: Graded Isomorphisms on Upper Block Triangular Matrix Algebras [10], publicado na revista Linear Algebra and its Applications, no ano de 2018 em parceria com os professores Claudemir Fidelis e Diogo Diniz.

No quarto capítulo, iremos abordar o nosso segundo objetivo. Em [22], os autores provaram que o T-ideal das identidades ordinárias de uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos é o produto dos ideais das identidades de cada bloco. Na primeira parte deste capítulo generalizamos o resultado da A. Valenti e M. Zaicev [38], temos a decomposição de $UT(m_1, \ldots, m_r)$, descrita no parágrafo anterior, porém nós provamos que o resultado continua válido sem a hipótese do grupo ser finito. Entretanto, vale destacar que recentemente Yasumura [39] generalizou ainda mais este resultado com algumas restrições sobre a característica do corpo. Na seção seguinte, considerando $R = A \otimes B$ e $R' = A' \otimes B'$, onde A e A' são álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos com graduações elementares e, B e B' são álgebras graduadas com divisão, abordamos a seguinte questão: se R e R' satisfazem as mesmas identidades graduadas, então elas são isomorfas? A versão graduada do teorema de Wedderburn-Artin implica que qualquer álgebra graduada simples que satisfaz a condição de cadeia descendente nos ideais graduados à esquerda é o produto tensorial de uma álgebra de matrizes com uma graduação elementar e uma álgebra graduada com divisão. Em [15], para um corpo algebricamente fechado e um grupo abeliano, os autores provaram que as álgebras graduadas simples são determinadas, a menos de isomorfismo, por suas identidades graduadas. Em [19] os autores consideraram a álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos com uma graduação elementar e provaram que este resultado é válido sob certas condições. Em nosso principal resultado reduzimos a questão anterior ao caso da graduação elementar. Como consequência do resultado do Di Vincenzo e do Spinelli concluímos, por exemplo que as álgebras R e R' são isomorfas como álgebras graduadas se o número de blocos em A for igual a um 1 ou 2. Um dos principais resultados desta seção é que se $Id_G(R) = Id_G(R')$, então $\operatorname{supp} B = \operatorname{supp} B'$ e $Id_H(B) = Id_H(B')$, onde $H = \operatorname{supp} B$ (veja o Corolário 4.2.7 e a Proposição 4.2.13). Agora, assumindo que H é um subgrupo finitamente gerado de G, desde que o corpo seja algebricamente fechado, isso implica que B é isomorfo a B' como álgebras G-graduadas. Foi provado por D. S. Passmann em [32] que uma álgebra de grupo de um grupo solúvel sobre um corpo de característica zero é semissimples. Utilizamos este resultado para concluir que se uma álgebra graduada com divisão satisfaz uma identidade polinomial ordinária, então ela satisfaz as mesmas identidades ordinárias que uma álgebra de matrizes (veja o Corolário 4.2.18). Como consequência deste resultado, nós provamos que se B e B' satisfazem as mesmas identidades polinomiais ordinárias, então o coarsenings ${}^{\alpha}R$ e ${}^{\alpha}R'$, induzidos pela projeção canônica $\alpha : G \to G/H$, satisfazem as mesmas identidades que álgebras de matrizes triangulares superior em blocos com graduações elementares adequadas U e U' (descritas no Teorema 4.2.21). Em outro resultado, Teorema 4.2.21, provamos que $Id_{G/H}(U) = Id_{G/H}(U')$ e que se U e U' são isomorfas como álgebras G/H-graduadas, então R e R' são isomorfas como álgebras G-graduadas. Por fim, os resultados deste capítulo geraram um artigo com título: Graded Identities and Isomorphisms on Algebras of Upper Block-Triangular Matrices [11], publicado na revista Journal of Algebra, no inicío deste ano, em parceria com o professor Diogo Diniz.

Notação e terminologia

- Em todo o texto, $\mathbb{K}$ denotará um corpo arbitrário; G sempre denotará um grupo qualquer, a menos que se mencione o contrário.
- Usaremos $UT(m_1, \ldots, m_r)$ para representar a álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos, veja a Definição em 1.1.5. Já $M_n(\mathbb{K})$ denotará a álgebra das matrizes de ordem n. As matrizes elementares de $M_n(\mathbb{K})$ serão representadas por E_{ij}, estas são as matrizes que têm 1 na entrada da linha i e coluna j, além de zero nas demais entradas.
- O polinômio $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n})$ indicará um polinômio na álgebra graduada livre com $x_i^{g_i}$ sendo uma variável de grau g_i. Em um polinômio, quando na variável não aparecer com a indicação do grau, iremos admitir que o grau desta variável é o ϵ, o elemento neutro do grupo G.

Capítulo 1

Conceitos Básicos I

Neste primeiro capítulo nos dedicaremos a descrever todos os conceitos básicos, notações e resultados, nos casos ordinários, ou seja sem graduações, necessários para o bom desenvolvimento dos demais capítulos. Para a leitura deste trabalho, faz-se necessário um conhecimento básico de álgebra linear e teoria de anéis.

1.1 Álgebras

Iniciaremos com um conceito de suma importância para o desenvolvimento de nossa tese, o conceito de álgebra.

Definição 1.1.1. Dizemos que um par $(A, *)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra, sempre que A for um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $* : A \times A \longrightarrow A$ for uma aplicação bilinear (chamada de produto), ou seja, se tivermos as seguintes propriedades:

(i) $a * (b + c) = a * b + a * c$

(ii) $(a + b) * c) = a * c + b * c$

(iii) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Representamos uma $\mathbb{K}$-álgebra $(A, *)$, sempre que o produto for óbvio, simplesmente por A, omitindo-se o produto. Além disso, também podemos omitir sobre que corpo tal álgebra está definida, chamando-a apenas de álgebra. Iremos representar o produto $a * b$ simplesmente por ab. Além disso, dizemos que um subconjunto β de uma álgebra A é uma base, quando β é uma base de A como um espaço vetorial. Consequentemente, definimos a dimensão de A, como sendo a sua dimensão como espaço vetorial.

Definição 1.1.2. Dizemos que uma álgebra A é:

(i) **Associativa**, quando o seu produto for associativo, ou seja, $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.

(ii) **Comutativa**, quando o seu produto for comutativo, ou seja, $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$.

(iii) **Unitária**, (ou com unidade) se o produto de A tiver unidade, ou seja, se existir $1_A \in A$, tal que $1_A a = a 1_A = a$, para qualquer $a \in A$.

Observação 1.1.3. A partir de agora, sempre que falarmos de álgebras, estaremos nos referindo à álgebras associativas e unitárias.

Exemplo 1.1.4 (Álgebra de Matrizes)**.** Seja $n \in \mathbb{N}$. O espaço vetorial $M_n(\mathbb{K})$ munido de seu produto usual é uma álgebra associativa com unidade (a matriz identidade Id_n). Destacamos nesta álgebra as matrizes elementares E_{ij} , que possuem 1 na entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna e 0 nas demais. É fácil verificar que o conjunto destas matrizes é uma base para $M_n(\mathbb{K})$, o qual é chamada base canônica desta álgebra. De modo mais geral, se A é uma álgebra, consideramos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes de ordem n com entradas em A. O produto de matrizes em $M_n(A)$ é análogo ao produto de matrizes com entradas em $M_n(\mathbb{K})$. Temos então uma estrutura de álgebra em $M_n(A)$.

Agora iremos apresentar o principal exemplo, tendo em vista que nos próximos capítulos iremos trabalhar sobre esta álgebra.

Exemplo 1.1.5 (Matrizes Triangulares Superiores em Blocos)**.** Considere o conjunto $UT(m_1, \ldots, m_r)$ das matrizes

$$\begin{pmatrix} M_{m_1}(\mathbb{K}) & B_{12} & \ldots & B_{1r} \\ 0 & M_{m_2}(\mathbb{K}) & \ldots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & M_{m_r}(\mathbb{K}) \end{pmatrix}$$

de ordem $n = m_1 + \cdots + m_r$, onde M_{m_i} e uma matriz de ordem m_i e B_{ij} são matrizes sobre $\mathbb{K}$ com as ordens correspondentes. Note que este conjunto munido com as operações usuais de matrizes é uma $\mathbb{K}$-álgebra, chamada de álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos.

Considere $I_1 = \{1, \ldots, m_1\}$, $I_2 = \{m_1+1, \ldots, m_1+m_2\}$, $\ldots$, $I_r = \{m_1+m_2+\cdots+m_{r-1}+1, \ldots, m_1+m_2+\cdots+m_r\}$. Observe que uma matriz elementar E_{ij} pertence a $UT(d_1, \ldots, d_r)$, quando $i \in I_p$, $j \in I_q$, sempre que $p \leq q$. Ademais, temos que o conjunto formado por estas matrizes elementares é uma base para $UT(m_1, \ldots, m_r)$.

Para um melhor entendimento do exemplo anterior, considere a seguinte álgebra $A = UT(2,1,2)$, observe que ela é formada pelas matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

com $a_{ij} \in \mathbb{K}$, para $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$. Assim, $I_1 = \{1,2\}$, $I_2 = \{3\}$ e $I_3 = \{4,5\}$. Perceba que $E_{24} \in A$, pois $2 \in I_p$ e $4 \in I_q$, onde $p = 1$, $q = 3$ e $p \leq q$. Porém, note que $E_{42} \notin A$ e sendo $p = 3$, $q = 1$, temos $p > q$.

Exemplo 1.1.6 (Operadores Lineares)**.** Sejam V um espaço vetorial e $L(V)$ o espaço vetorial dos operadores lineares de V . Temos que $L(V)$, munido da composição de funções é uma álgebra associativa com unidade, chamada de álgebra dos operadores lineares de V.

Exemplo 1.1.7 (Álgebra de Grupo)**.** Para o grupo G, considere o conjunto das somas formais $\sum_{g \in G} \lambda_g g$ quase nulas, ou seja, apenas uma quantidade finita de $\lambda_g \in \mathbb{K}$ é diferente de zero. Este conjunto será representado por $\mathbb{K}G$. Definimos em $\mathbb{K}G$ as operações

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$

$$\lambda \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} (\lambda \alpha_g) g$$

onde $\alpha_g, \beta_g, \lambda \in \mathbb{K}$, para quaisquer $g \in G$. Estas operações fazem de $\mathbb{K}G$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ que tem como base G. Ademais, podemos definir neste espaço vetorial a seguinte operação:

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) = \sum_{g,h \in G} (\alpha_g \beta_h)(gh).$$

Com esta operação, $\mathbb{K}G$ é uma álgebra associativa e com unidade, denominada álgebra sobre $\mathbb{K}$ do grupo G. Observe que a dimensão desta álgebra é igual a ordem de G e que se G for abeliano, ela será comutativa.

Exemplo 1.1.8. Sejam A e B dois espaços vetoriais . Um espaço vetorial C envolvido na aplicação $\cdot : (x_1, x_2) \longrightarrow x_1 \cdot x_2$ de $A \times B$ em C é chamada de produto tensorial de A e B se as seguintes duas condições são satisfeitas:

(i) $x_1 \cdot x_2$ é linear em cada uma das variáveis x_1 e x_2.

(ii) Se $\beta_1 = \{e_i \mid i \in I\}$ e $\beta_2 = \{e_j \mid j \in I\}$ são bases de A e B, então $\{e_i \cdot e_j \mid i \in I, j \in J\}$ formam uma base para C.

É fácil mostrar que existe este espaço vetorial e que ele é único a menos de isomorfismo, este espaço será denotado por $A \otimes B$, chamado de produto tensorial de A e B. Observe que, pela segunda condição, temos que $dim(A \otimes B) = dimA \cdot dimB$.

Além disso, se V é um espaço vetorial e $f : A \times B \longrightarrow V$ é uma aplicação bilinear, então existe uma única transformação linear $T_f : A \otimes B \longrightarrow V$ satisfazendo $T_f(a \otimes b) = f(a, b)$ (propriedade universal do produto tensorial). Para maiores detalhes, veja [4] e [35].

Consideremos agora A e B como sendo duas álgebras. Dados $a \in A$ e $b \in B$, arbitrários, a aplicação $f_{a,b} \colon A \times B \to A \otimes B$ dada por $f_{a,b}(x, y) = ax \otimes by$, é bilinear e assim existe $T_{a,b} \in \mathcal{L}(A \otimes B)$ tal que $T_{a,b}(x \otimes y) = ax \otimes by$. Observando agora que a aplicação

$$\begin{aligned} T \colon A \times B &\to \mathcal{L}(A \otimes B) \\ (a, b) &\mapsto T_{a,b} \end{aligned}$$

é bilinear, concluímos que existe uma única transformação linear $F \colon A \otimes B \to \mathcal{L}(A \otimes B)$ tal que $F(a \otimes b) = T_{a,b}$. Logo o produto

$$\begin{aligned} \cdot \colon (A \otimes B) \times (A \otimes B) &\to A \otimes B \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cdot \beta = F(\alpha)(\beta) \end{aligned} \tag{1.1}$$

é bilinear e satisfaz

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = F(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = T_{a_1,b_1}(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2,$$

para quaisquer a_1, $a_2 \in A$ e b_1, $b_2 \in B$.

O espaço vetorial $A \otimes B$, munido do produto (1.1), é uma álgebra, chamada de **produto tensorial das álgebras** A **e** B. Além disso, observe que sua unidade é $1_A \otimes 1_B$.

Definição 1.1.9. Seja A uma álgebra. Então dizemos que:

(i) Um elemento de $a \in A$ é invertível quando existe $b \in B$, tal que $ab = ba = 1_A$.

(ii) A é um álgebra com divisão se todos os seus elementos não nulos forem invertíveis.

Exemplo 1.1.10. Todo corpo é uma álgebra com divisão. Logo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são álgebras com divisão. A álgebra dos quarténios reais é também uma álgebra com divisão não comutativa.

Definição 1.1.11. Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Dizemos que:

(i) Um subespaço B de A é uma subálgebra de A, se é fechado com respeito a multiplicação, isto é, $b_1 b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$;

(ii) Um subespaço I de A é um ideal à esquerda (direita) de A se $AI \subseteq I$ ($IA \subseteq I$), ou seja, se $ax \in I$ ($xa \in I$) para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$. Se I for um ideal à esquerda e à direita ao mesmo tempo, diremos que I é um ideal bilateral, ou simplesmente um ideal.

(iii) Um ideal próprio à esquerda I de A é dito maximal, quando não existir um ideal próprio à esquerda J de A de tal maneira que $I \subsetneq J$. De maneira inteiramente análoga, podemos definir ideal maximal à direita e ideal maximal de A.

(iv) Definimos o radical de Jacobson de A, representado por $J(A)$, como sendo a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de A.

Teorema 1.1.12. ([24, Teorema 4.1, pg. 196]) As seguintes caracterizações do radical de Jacobson de uma álgebra A são equivalentes:

(i) a interseção entre todos os ideais maximais à esquerda de A;

(ii) a interseção entre todos os ideais maximais à direita;

(iii) o conjunto de todos os elementos $x \in A$ tais que $1 - xy$ é invertível em A, para todo $y \in A$.

Com este teorema, é fácil perceber que o radical de Jacobson de qualquer álgebra é um ideal bilateral da mesma.

Exemplo 1.1.13. A álgebra $UT(d_1, \ldots, d_r)$ é uma subálgebra de $M_n(\mathbb{K})$, onde $n = d_1 + \cdots + d_r$.

Exemplo 1.1.14. Em uma álgebra qualquer A temos que $\{0\}$ e A são ideais desta álgebra, chamados de ideais triviais.

Exemplo 1.1.15. O conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem n, denotado por $UT_n(\mathbb{K})$ é uma subálgebra de $M_n(\mathbb{K})$. Além disso, o conjunto das matrizes triangulares estritamente superiores é o radical de $UT_n(\mathbb{K})$. Este último fato é provado utilizando o item (iii) do teorema anterior e observando que o produto de uma matriz em $UT_n(\mathbb{K})$ por uma matriz triangular estritamente superior é igual a uma matriz triangular estritamente superior, sendo assim, este resultado quando subtraído da matriz identidade é uma matriz invertível.

Em uma álgebra A, um elemento x é dito nilpotente quando existe $n \in \mathbb{N}$, tal que, $x^n = 0$. Um ideal I de uma álgebra A é dito nil quando todos os seus elementos são nilpotentes. Além disto, I é dito nilpotente quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$ e o menor inteiro que satisfaz esta condição é chamado de índice de nilpotência.

Exemplo 1.1.16. Na álgebra $UT(d_1, \ldots, d_r)$ das matrizes triangulares superiores em blocos, o conjunto I das matrizes cujos blocos diagonais são nulos é um ideal nilpotente. De fato, é fácil perceber que I é um subespaço de A. Além disso,

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \ldots & A_{1r} \\ 0 & 0 & \ldots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{d_1}(\mathbb{K}) & B_{12} & \ldots & B_{1r} \\ 0 & M_{d_2}(\mathbb{K}) & \ldots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & M_{d_r}(\mathbb{K}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & \ldots & C_{1r} \\ 0 & 0 & \ldots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

logo I absorve produto pela direita; e de maneira inteiramente análoga, mostra-se que ele absorve produto pela esquerda. Ademais, observando a multiplicação acima, também é fácil ver que se multiplicarmos r matrizes de I, o resultado será a matriz nula. Além disto, r é o índice de nilpotência deste ideal.

Proposição 1.1.17. Se I é um ideal nil de uma álgebra A, então $I \subseteq J(A)$.

Demonstração. Sendo $x \in I$, então, como I é um ideal, temos que $xy \in I$, para qualquer $y \in A$. Daí, $1 - xy$ é invertível e seu inverso é $1 + (xy)^2 + (xy)^3 + \cdots + (xy)^{k-1}$, onde $k \in \mathbb{N}$ é tal que $(xy)^k = 0$. Logo, pelo terceiro item do teorema anterior, concluímos que $x \in J(A)$ e pela arbitrariedade do x, podemos concluir que $I \subseteq J(A)$ $\square$

Definição 1.1.18. Uma álgebra A é dita simples, quando $A^2 \neq 0$ e quando os seus únicos ideais são os triviais.

Exemplo 1.1.19. A álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{K})$ é uma álgebra simples. De fato, seja $I \neq 0$ um ideal de $M_n(\mathbb{K})$ e a uma matriz não nula em I. Sejam i_0, j_0 tais que a entrada $a_{i_0 j_0}$ de a é não nula. Temos que $E_{ii} = a_{i_0 j_0}^{-1}(E_{ii_0} a E_{j_0 i}) \in I$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Deste modo segue que a matriz identidade $I = E_{11} + \cdots + E_{nn}$ pertence a I, portanto $I = M_n(\mathbb{K})$.

A seguir apresentamos a noção de anel semisimples em [23] e que é utilizada nesta tese.

Definição 1.1.20. Uma álgebra A é dita semissimples se $J(A) = 0$.

Teorema 1.1.21. Sendo D uma álgebra com divisão e $M_n(D)$ uma álgebra de matrizes com entradas em D, então $M_n(D)$ é simples.

Demonstração. Veja [30, Teorema 3.3, pg. 31]. $\square$

Os teoremas a seguir apresentam uma importante caracterização dos anéis artinianos semissimples.

Teorema 1.1.22. Um anel Artiniano semissimples é a soma de uma número finito de anéis Artinianos simples.

Demonstração. Veja [23, Teorema 1.4.4, pg. 34]. $\square$

Teorema 1.1.23 (Teorema de Wedderburn-Artin)**.** Seja R um anel Artiniano simples. Então R isomorfo a $M_n(D)$, onde D é um anel com divisão. Ademais, n e D são únicos, a menos de isomorfismos. Consequentemente, para qualquer anel com divisão D, $M_n(D)$ é um anel Artiniano simples.

Demonstração. Veja [23, Teorema 2.1.6, pg. 48]. $\square$

Considere I um ideal de uma álgebra A. Então, podemos obter o anel quociente A/I. Além disso, podemos obter também o espaço vetorial A/I de maneira natural. Com estas duas estruturas A/I é uma álgebra, chamada de álgebra quociente de A em relação a I. Observe que ideais de A/I são exatamente J/I, onde J é um ideal de A que contém I. O mesmo vale para as subálgebras, os ideais à esquerda, os ideais à direita, além dos ideais maximais de A/I. Se $I \subseteq J(A)$, temos que $J(A)/I \subseteq J(A/I)$, pois se $\overline{x} \in J(A)/I$, então $1 - xy$ é invertível em A, para todo $y \in A$ e consequentemente $\overline{1} - \overline{xy}$ também será em A/I, daí, $\overline{x} \in J(A/I)$. Além disso, teremos a inclusão contrária e consequentemente a igualdade. De fato, como $J(A/I)$ é a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de A/I, e esta por sua vez é a interseção de todos os ideais maximais de A que contém o I, quocientados pelo próprio I. Mas como $I \subseteq J(A)$, esta interseção é exatamente $J(A)$ quocientado I, de onde podemos concluir que $J(A/I) \subseteq J(A)/I$.

Com o intuito de encontrarmos o radical de Jacobson de uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos enunciaremos e provaremos o seguinte resultado.

Proposição 1.1.24. Se I é um ideal de uma álgebra A tal que $I \subseteq J(A)$ e A/I é semissimples, então $J(A) = I$.

Demonstração. Como por hipótese $I \subseteq J(A)$, temos que $J(A)/I = J(A/I)$. Agora, supondo que A/I é semissimples, temos pelo lema anterior que $J(A/I) = \overline{0}$ e assim $J(A)/I = J(A/I) = \overline{0}$. Logo, podemos concluir que $J(A) = I$. □

Exemplo 1.1.25. Sejam $A = UT(d_1, \ldots, d_r)$ e I o conjunto das matrizes em A cujos blocos diagonais são todos nulos. Já provamos que I é um ideal nilpotente de A, particularmente será um ideal nil, logo $I \subseteq J(A)$. Além disso, temos que $A = B \oplus I$, onde $B \cong M_{d_1}(\mathbb{K}) \oplus \cdots \oplus M_{d_r}(\mathbb{K})$. Daí $A/I \cong B$ e assim A/I é semissimples. Pela proposição anterior, temos que $I = J(A)$, ou seja, o radical da Jacobson de uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos é igual ao ideal formado pela matrizes cujos blocos diagonais são todos nulos.

Exemplo 1.1.26 (Centro de uma Álgebra)**.** Seja A uma álgebra associativa. O conjunto

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \text{para todo } x \in A\}$$

é uma subálgebra de A chamada de centro de A. É fácil verificar que dado $n \in \mathbb{N}$, $Z(M_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Definição 1.1.27. Sejam A e B duas álgebras. Dizemos que uma transformação linear de $\phi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras se ela preserva produto, ou seja, se $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, para quaisquer $a, b \in A$. Se as álgebras forem unitárias, exigimos que $\phi(1_A) = 1_B$.

Seja $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Dizemos que ϕ é um monomorfismo (ou mergulho), se ϕ for injetivo; que é um epimorfismo, se ϕ é sobrejetivo; e isomorfismo se ϕ é bijetivo.

Diremos que ϕ é um endomorfismo de A, se ele é um homomorfismo de A em A e que é um automorfismo de A, se ϕ é um endomorfismo bijetivo de A. Denotamos por $End(A)$ e $Aut(A)$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos da álgebra A, respectivamente. Quando existe um isomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por$A \cong B$. Seja $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Denotamos o núcleo de ϕ por $Ker\phi = \{a \in A; \phi(a) = 0\}$ e a imagem de ϕ por $Im\phi = \{\phi(a); a \in A\}$. É de fácil mostrar que $Ker\phi$ é um ideal de A e a $Im\phi$ é uma subálgebra de B.

Proposição 1.1.28. Sejam A e B álgebras e S um conjunto gerador de A como espaço vetorial. Seja $\phi : A \longrightarrow B$ uma transformação linear (satisfazendo $\phi(1_A) = 1_B$). Então,

ϕ é um homomorfismo de álgebras se, e somente se, $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para quaisquer $x, y \in S$.

Demonstração. Suponhamos que $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para quaisquer $x, y \in S$, e tomemos a_1 e a_2 elementos arbitrários de A, tais que $a_1 = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ e $a_2 = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m$, com $\lambda_i, \alpha_j \in \mathbb{K}$ e $x_i, y_j \in S$, e assim

$$\phi(a_1 a_2) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{1}^{m} \lambda_i \alpha_j x_i y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{1}^{m} \lambda_i \alpha_j \phi(x_i y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{1}^{m} \lambda_i \alpha_j \phi(x_i)\phi(y_j) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(x_i)\right)\left(\sum_{1}^{m} \alpha_j \phi(y_j)\right) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\phi\left(\sum_{1}^{m} \alpha_j y_j\right) = \phi(a_1)\phi(a_2).$$

Logo, ϕ é um homomorfismo de álgebras. A recíproca é imediata. $\square$

Exemplo 1.1.29. Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. A aplicação $\pi : A \longrightarrow A/I$ dada por $\pi(a) = \overline{a}$ é um epimorfismo, chamado de **projeção canônica** de A em A/I.

Exemplo 1.1.30. Sendo V um espaço vetorial de dimensão n, então a álgebra $L(V)$ dos operadores lineares de V é isomorfa à álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{K})$. De fato, sejam $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e e_{ij} as transformações em $L(V)$ dada por $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$, onde δ_{jk} é o delta de Kronecker. Neste caso, $e_{ij} \circ e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$ e pela proposição anterior a aplicação $\phi : L(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ definida nos elementos das bases por $\phi(e_{ij}) = E_{ij}$, é um isomorfismo de álgebras.

1.2 Álgebra Associativa Livre

Nesta seção iremos introduzir o conceito de álgebra associativa livre, que é de suma importância para o bom entendimento desta tese, uma vez que se faz necessário para a definição do conceito de identidades polinomiais. Iniciaremos com o conceito de álgebra livre.

Definição 1.2.1. Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras e $F \in \mathcal{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto $X \subseteq F$. A álgebra F é dita livre na classe $\mathcal{B}$, se satisfaz a seguinte propriedade universal: para cada álgebra $A \in \mathcal{B}$ e cada aplicação $h : X \longrightarrow A$ existir um único homomorfismo $F \longrightarrow A$ estendendo h. Neste caso, dizemos que F é livremente gerada pelo conjunto X. Além disso, a cardinalidade $|X|$ do conjunto X será chamada de posto de F.

Exemplo 1.2.2. A álgebra unitária e comutativa dos polinômios associativos nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, denotada por $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, é gerada pelo conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. A álgebra $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ é uma álgebra livre, livremente gerada pelo conjunto X na classe de todas as álgebras associativas, comutativas e unitárias de posto n.

Agora construiremos uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas unitárias.

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto infinito e enumerável cujos elementos iremos chamar de variáveis não comutativas. Definimos uma palavra em X de comprimento $n \in \mathbb{N}$ como sendo uma sequência finita $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ com $x_{i_j} \in X$. Quando $n = 0$, vamos chamar esta palavra de palavra vazia, que denotaremos por 1. Dizemos que duas palavras $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_n = j_n$. Consideremos $\mathbb{K}\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem como base o conjunto de todas as palavras em X. Tal espaço munido do produto (chamado de concatenação)

$$(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$$

é uma álgebra associativa unitária e X gera $\mathbb{K}\langle X\rangle$ como álgebra. Os elementos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, que chamaremos de polinômios, são somas (formais) de termos (ou monômios) que por sua vez são produtos (formais) de um escalar por uma palavra em X.

Proposição 1.2.3. A álgebra $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é livre, livremente gerada por X na classe das álgebras associativas unitárias.

Demonstração. Seja A um álgebra associativa e unitária e $h : X \longrightarrow A$ uma aplicação qualquer e digamos que $h(x_i) = a_i$, para $i \in \mathbb{N}$. Daí, podemos definir uma aplicação $\phi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow A$ dada por $\phi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$, assim temos que ϕ é um homomorfismo de álgebras, $\phi(1) = 1_A$ e esta aplicação é a única tal que $\phi|_X = h$. $\square$

A imagem de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pelo isomorfismo de álgebras ϕ será denotada por $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, ou seja, o elemento $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é obtido pela substituição das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ pelos elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ no polinômio associativo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemplo 1.2.4 (Álgebra de Grassmann)**.** Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base enumerável $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo de característica diferente de 2. A álgebra de Grassmann (ou exterior) de V, que será denotada por $E(V)$, pode ser construída da seguinte maneira: sejam $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre definida acima, de posto enumerável $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, e I o ideal desta álgebra gerado pelo conjunto de polinômios $\{x_ix_j + x_jx_i \mid i, j \geq 1\}$, então $E(V) = \mathbb{K}\langle X\rangle/I$.

Escrevendo $e_i = x_i + I$, para $i = 1, 2, \dots$, então $E(V)$ será gerada como álgebra pelo conjunto

$$\{1, e_1, e_2, \cdots \mid e_ie_j = -e_je_i, \text{ para quaisquer } i, j \geq 1\}.$$

Seja S_n o grupo simétrico sobre $\{1,\ldots,n\}$. Como $e_ie_j=-e_je_i$, segue facilmente que

$$e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}e_{i_k}e_{i_{k+1}}\cdots e_{i_{l-1}}e_{i_l}e_{i_{l+1}}\cdots e_{i_n}=-e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}e_{i_l}e_{i_{k+1}}\cdots e_{i_{l-1}}e_{i_k}e_{i_{l+1}}\cdots e_{i_n}.$$

Portanto, escrevendo uma permutação $\sigma\in S_n$, como produto de transposições, obtemos

$$e_{i_{\sigma(1)}}\cdots e_{i_{\sigma(n)}}=(sgn\sigma)e_{i_1}\cdots e_{i_n},$$

onde $sng\sigma$ é o sinal da permutação σ e como consequência $e_i^2=0$, para qualquer $i\in\{1,2,3\ldots\}$. Além disso, temos que o conjunto $\{1,e_{i_1}\cdots e_{i_k}\mid 1\leq i_1<\cdots<i_k\}$ é uma base de $E(V)$ como um espaço vetorial. De fato, pelo argumentado acima, temos que este conjunto gera $E(V)$ resta-nos mostrar que tal conjunto é linearmente independente. Para tanto, suponha que $h=\sum_{i=1}^n\alpha_iw_i=0$ é uma combinação linear com o número mínimo de coeficientes não nulos α_i, onde $w_i\in B$, $n\leq 2$. Se o elemento e_m aparece em w_1, mas não em w_2, então $e_mw_1=0$, $e_mw_2\neq 0$ e assim $e_mh=\sum_{i=1}^n\alpha_ie_mw_i=0$ que é uma combinação linear com um número menor de coeficientes não nulos, o que é uma contradição. Portanto, B é uma base de $E(V)$.

Sejam E_0 e E_1 os subespaços vetoriais vetoriais de E gerados pelos conjuntos $\{1,e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m}|$ m é par$\}$, e $\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}|$ k é ímpar$\}$, respectivamente. pelo argumentado acima, temos que $(e_{i_1}\cdots e_{i_m})(e_{j_1}\cdots e_{j_k})=(-1)^{mk}(e_{j_1}\cdots e_{j_k})(e_{i_1}\cdots e_{i_m})$, para quaisquer $m,k\in\mathbb{N}$, e assim podemos concluir que $g_0x=xg_0$ para quaisquer $g_0\in E_0$ e $x\in E$, além de $g_1g_2=-g_2g_1$ para quaisquer $g_1,g_2\in E_1$.

Definição 1.2.5. Seja A uma álgebra. Um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0$) é dito ser uma identidade polinomial (ou simplesmente P.I.) da álgebra A, se $f(a_1,\ldots,a_n)=0$, para quaisquer $a_1,\ldots,a_n\in A$.

É imediato que o polinômio $f=0$ (polinômio nulo) é uma identidade polinomial para qualquer álgebra A, logo quando uma álgebra satisfizer alguma PI não nula, iremos dizer que A é uma **PI-Álgebra**. Observe que se $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}\langle X\rangle$, então $f=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ é uma identidade polinomial de A se, e somente se, f pertence aos núcleos de todos os homomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ em A.

Dado uma álgebra A, definimos $Id(A)=\{f\in\mathbb{K}\langle X\rangle\mid f\equiv 0 \text{ em A}\}$ o conjunto das identidades polinomiais de A. É fácil ver que $Id(A)$ é um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Além disto, prova-se facilmente que este ideal é invariante por qualquer endomorfismo da álgebra $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Ideais com esta propriedade recebem o nome de T-ideal.

Exemplo 1.2.6. Uma álgebra A é comutativa se, e somente se, $[x_1,x_2]=x_1x_2-x_2x_1$ é uma identidade para A.

Exemplo 1.2.7. A álgebra de Grassmann E, dada no Exemplo 1.2.4, satisfaz a identidade $[[x, y], z] \equiv 0$. De fato, como E_0 é central, então qualquer comutador de dois elementos de E acaba por ser uma combinação de linear de monômios formados pelos $e_i's$ com comprimentos pares. Logo $[E, E] \subseteq E_0$ e a conclusão segue.

Exemplo 1.2.8. A álgebra $M_2(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade $[[x, y]^2, z] \equiv 0$. Pois, se $a \in M_2(\mathbb{K})$, então seu polinômio característico e $x^2 - tr(a)x + det(a)Id_2$, onde $tr(a)$ é o traço de a, $det(a)$ é seu determinante e Id_2 é a matriz identidade de ordem dois. No caso de a ser um comutador, temos que o seu traço é igual a zero, logo $a^2 = -det(a)$. Assim o seu quadrado é uma matriz escalar e consequentemente temos o resultado.

Definição 1.2.9. O polinômio

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (sng\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

é chamado de polinômio standard de grau n.

Teorema 1.2.10 (Teorema de Amitsur-Levitzki)**.** A álgebra $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes de ordem n satisfaz a identidade standard de grau 2n. (Veja [21, pág. 16]).

Vale ressaltar que o teorema anterior é válido para todos os casos, exceto quando $n = 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, além disto, a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{K})$ não satisfaz nenhuma identidade ordem menor que $2n$. Com este teorema concluímos que a álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{K})$ também é uma $P.I.$-álgebra. Já com o próximo lema podemos concluir que a álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos com entradas sobre um corpo é também uma P.I.-álgebra.

Definição 1.2.11. O polinômio

$$Cap_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (sng\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \cdots y_n x_{\sigma(n)} y_{n+1}$$

é chamado de polinômio de Capelli.

Lema 1.2.12. [21, Lemma 9.1.4] Se $m = m_1^2 + \cdots + m_r^2$, a álgebra $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$ satisfaz a identidade de Capelli $\mathrm{Cap}_{m+r} \equiv 0$, mas não satisfaz $\mathrm{Cap}_{m+r-1} \equiv 0$.

Demonstração. Note que podemos escrever a álgebra A da seguinte maneira: $A = B + J$, onde J é o seu radical de Jacobson de A, $J^r = 0$ e $B = M_{m_1} \oplus \ldots \oplus M_{m_r}$. Considere uma avaliação $\phi : \mathbb{K}\langle X \rangle \longrightarrow A$ do polinômio de Capelli

$$Cap_{m+r} = \sum_{\sigma \in S_n} (sng\sigma) y_1 x_{\sigma(1)} y_2 \cdots y_{m+r} x_{\sigma(m+r)} y_{m+r+1}.$$

Como Cap_{m+r} é multilinear, basta verificarmos que $\phi(Cap_{m+r}) = 0$ sempre que o conjunto $\{\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n), \phi(y_1), \ldots, \phi(y_{n+1})\}$ está contido em uma base da álgebra A, digamos na base que consiste das matrizes elementares E_{ij}. Se pelo menos $m+1$ dos valores entre $\phi(x_1), \ldots, \phi(x_{m+r})$ estão em B, então $\phi(Cap_{m+r}) = 0$, pois Cap_{m+r} é alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_{m+r}$ e $\dim B = m$. Mas, se no máximo m elementos entre $\phi(x_1), \ldots, \phi(x_{m+r})$ estão em B, então pelo menos r elementos estão em J e assim,$\phi(Cap_{m+r}) = 0$, uma vez que $J^r = 0$. Portanto, $\phi(Cap_{m+r}) = 0$ é uma identidade de A. Mostremos agora que A não satisfaz Cap_{m+r-1}. Suponhamos inicialmente que $r = 1$ e, assim, $A = M_{m_1}$. Escrevamos $n = m_1^2 = \dim A$ e tome uma base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de A constituída por todas as matrizes elementares E_{ij} , $1 \leq i, j \leq m_1$, ordenadas de forma arbitrária e fixa. Desta forma, existem $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que

$$a_0 v_1 a_1 \cdots a_{n-1} v_n a_n = E_{11} \tag{1.2}$$

e

$$a_0 v_{\sigma(1)} a_1 \cdots a_{n-1} v_{\sigma(n)} a_n = 0 \tag{1.3}$$

para qualquer $\sigma \in S_n$ com $\sigma \neq 1$. De fato, tomando $v_1 = E_{i_1 j_1}, v_2 = E_{i_2 j_2}, \ldots, v_n = E_{i_n j_n}$, temos que $a_0 = E_{1 I_1}, a_1 = E_{j_1 i_1} \ldots, a_n = E_{j_n 1}$. Claramente, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ satisfazem 1.2. Por outro lado, dado $2 \leq k \leq n$, algum produto $a_{k_1} v_p a_k$ é igual a zero com $p \neq k$ e consequentemente, vale igualdade 1.3. De 1.2 e 1.3 segue que

$$Cap_n(v_1, v_2, \ldots, v_n; a_0, a_1, \ldots, a_n) = E_{11} \neq 0.$$

Agora, seja $m \geq 2$. Escrevamos $n_1 = 0, n_2 = m_1, \ldots n_r = m_1 + \cdots + m_{r-1}$. Então

$$B_j = span\{E_{n_j+p, n_j+q} \mid 1 \leq p, q \leq m_j\}$$

é isomórfica a álgebra matricial de dimensão $p_j = m_j^2$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Segue da demonstração do caso $r = 1$ que, para todo $1 \leq j \leq r$, existem $a_0^j, \ldots, a_{p_j}^j, v_1^j, \ldots, v_{p_j}^j \in B_j$ tais que

$$a_0^j v_1^j a_1^j \cdots a_{p_j-1}^j v_{p_j}^j a_{p_j}^j = E_{n_j+1, n_j+1} = c_j \neq 0$$

e

$$a_0^j v_{\sigma(1)}^j a_1^j \cdots a_{p_j-1}^j v_{\sigma(p_j)}^j a_{p_j}^j = 0$$

para $\sigma \in S_{p_j}$ com $\sigma \neq 1$. Veja que $B_1 J B_2 \cdots B_{r-1} J B_r \neq 0$ e existem $w_1, \ldots, w_{r-1} \in J$ tais que

$$c_1 w_1 c_2 w_2 \cdots w_{r-1} c_r \neq 0. \tag{1.4}$$

Neste caso podemos supor $w_i \in J_{i,i+1} = B_i J B_{i+1}$ e portanto $1_i w_i 1_{i+1} = w_i$, onde $1_i \in B_i$ é a unidade de B_i. Vamos reescrever 1.4 da seguinte forma

$$(c_1 1_1) w_1 (1_2 c_2 1_2) w_2 \cdots w_{r-1} (1_r c_r) \neq 0.$$

Note que $1_i u 1_{i+1}$, para qualquer $u \in J_{j,j+1}$, com $j \neq i$, e para qualquer $u \in B_1 + B_2 + \cdots + B_m$. Finalmente, obtemos o seguinte produto que é diferente de zero

$$(a_0^1 v_1^1 a_1^1 \cdots a_{p_1-1}^1 v_{p_1}^1 a_{p_1}^1 1_1) w_1 (1_2 a_0^2 v_1^2 a_1^2 \cdots a_{p_2-1}^2 v_{p_2}^2 a_{p_2}^2 1_2) w_2 \cdots$$

$$\cdots w_{r-1}(1_r a_0^r v_1^r a_1^r \cdots a_{n_r-1}^r v_{p_r}^r a_{p_r}^r 1_r)$$

tal que para qualquer permutação de

$$v_1^1, \ldots, v_{p_1}^1, w_1, v_1^2, \ldots, v_{p_2}^2, w_2, \ldots, w_{r-1}, v_1^r, \ldots, v_{p_r}^r$$

inserida na expressão resulta em zero. Isso é facilmente visto por e pela relação $a_s^j v_q^t a_{s+1}^j = 0$, onde $j \neq t$. Desta forma, A não satisfaz a identidade de Capelli Cap_k com $k = p_1 + \cdots + p_r + r - 1 = m_1^2 + \cdots m_r^2 + r - 1$ o que prova o resultado.

□

1.3 Ação de Grupos

Agora iremos abordar os principais conceitos referentes a ação de um grupo sobre um conjunto qualquer, conceitos estes que serão utilizados no próximo capítulo. Iniciaremos com a seguinte definição:

Definição 1.3.1. Sejam G um grupo e X um conjunto qualquer. Uma ação à esquerda de G em X é uma aplicação $G \times X \longrightarrow X$, dada por $(g, x) \longrightarrow g.x$ que atende as seguintes propriedades:

(i) $(g_1 g_1).x = g_1.(g_2.x)$

(ii) $e.x = x$

para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $x \in X$, onde e é o elemento neutro de G.

Para cada $x \in X$, definimos a sua G-**órbita**, como sendo o conjunto $O_G(x) = \{g.x \in X \mid g \in G\}$. Podemos definir também o G-**estabilizador** de x, como sendo o conjunto $Stab_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$.

De modo inteiramente análogo, podemos definir uma G-ação à esquerda sobre X. Ademais, as órbitas de dois elementos $x, y \in X$ ou são iguais ou disjuntas. De fato, suponha que existam $g, h \in G$ de tal maneira que $g.x = h.y$, com $x, y \in X$ elementos distintos, então, para qualquer g', temos que

$$g'.x = [g'g^{-1}g].x = [g'g^{-1}]g.x = [g'g^{-1}]h.y = [g'g^{-1}h].y$$

logo $G.x \subseteq G.y$. De modo inteiramente análogo, prova-se que $G.y \subseteq G.x$, logo temos a igualdade.

Exemplo 1.3.2. Para qualquer grupo G, podemos definir uma ação de G em G, chamada de ação por conjugação, definida por $g.h = ghg^{-1}$.

Exemplo 1.3.3. Sejam X um conjunto qualquer e $G = S_n$ o grupo das permutações de ordem n. A aplicação dada por $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$ define uma ação de S_n em X^n, chamada de ação canônica.

Proposição 1.3.4. Considere uma ação de um grupo G em um conjunto X e seja $x \in X$. Então o $Stab_G(x)$ é um subgrupo de G.

Demonstração. Primeiramente, observe que $Stab_G(x)$ é não vazio, uma vez que o elemento neutro de G pertence a tal conjunto. Ademais, se $g, h \in Stab_G(x)$, então $g.x = h.x = x$, daí $(gh).x = g.(h.x) = g.x = x$, logo $gh \in Stab_G(x)$. Finalmente, se $g \in Stab_G(x)$, então $g^{-1}.x = g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = e.x = x$. Então, $g^{-1} \in Stab_G(x)$. Portanto, $Stab_G(x)$ é um subgrupo de G. □

Definição 1.3.5. Sejam G e H grupos e X um conjunto qualquer. Uma biação de G (à esquerda) e H (à direita) em X é um par de ações $G \times X \longrightarrow X$ e $X \times H \longrightarrow X$ tais que $(g.x).h = g.(x.h)$ para quaisquer $g \in G$, $h \in H$ e $x \in X$.

Exemplo 1.3.6. Considere G um grupo. Considere sobre G^n as aplicações dadas por: à esquerda, por S_n, dada no Exemplo 1.3.3 e à direita, por multiplicação direta de elementos de G, ou seja, $(\sigma(x_1, \ldots, x_n))g = (x_{\sigma^{-1}(1)}g, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}g)$. Estas aplicações, definem em G^n uma biação, à esquerda por S_n e à direita por G.

Capítulo 2

Conceitos Básicos II

Neste capítulo continuaremos a descrever mais conceitos básicos que são de suma importância no desenvolvimento do resto de nossa tese, mais precisamente, iremos descrever conceitos que envolvam graduações por um grupo G. Dentre eles, iremos apresentar os conceitos e resultados de espaços vetoriais graduados, equivalência de álgebras graduadas e módulos graduados sobre álgebras graduadas com divisão.

2.1 Álgebras e Identidades Graduadas

Nesta seção iremos descrever alguns conceitos e os principais resultados referentes às álgebras graduadas. A partir de agora, G sempre será um grupo arbitrário. Iniciaremos com a seguinte definição:

Definição 2.1.1. Sejam A uma álgebra e G um grupo. Definimos uma G-graduação em A como uma decomposição de $A = \oplus_{g\in G} A_g$ como soma de subespaços vetoriais tais que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Neste caso, dizemos que a álgebra A é G-graduada, ou simplesmente graduada.

Em todo este trabalho, a menos que se fale o contrário, quando falarmos em uma álgebra graduada, sem especificar o grupo, estaremos nos referindo a uma G-graduação.

Dizemos que os subespaços A_g são as componentes homogêneas da graduação e os seus elementos não nulos são chamados de elementos homogêneos de grau g. O grau de um elemento homogêneo não nulo $a \in A$ será representado por $\deg_G a$, ou seja, se $a \in A_g$, então $\deg_G a = g$. Observe que cada elemento de A só pode ser escrito de maneira única como soma de elementos homogêneos. Definimos o suporte de A, representado por $SuppA$, como sendo o conjunto $\{g \in G \mid A_g \neq 0\}$. A componente homogênea A_ϵ é denominada componente neutra da graduação, observe que esta componente é uma subálgebra de A e como A é unitária, temos que $1_A \in A_\epsilon$.

Sejam G e H grupos arbitrários e $\theta : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Se $A = \oplus_{g\in G} A_g$ é uma álgebra G-graduada, então podemos definir em A uma H-graduação, de tal maneira que os seus subespaços homogêneos serão dados por $A_h = \oplus_{g\in\theta^{-1}(h)} A_g$, quando h está na imagem de θ, e $A_h = 0$, caso contrário.

Exemplo 2.1.2. Toda álgebra A admite uma graduação, chamada de graduação trivial, basta considerar $A_\epsilon = A$ e $A_g = \{0\}$, para quaisquer $g \neq e$.

Exemplo 2.1.3. Seja a $\mathbb{K}$-álgebra de grupo $\mathbb{K}G$. Para cada $g \in G$ tomemos o subespaço $A_g = \{\lambda g \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ de $\mathbb{K}G$. Como $(\lambda_1 g_1)(\lambda_2 g_2) = \lambda_1\lambda_2 g_1 g_2$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, temos claramente que a família $\{A_g \mid g \in G\}$ é uma graduação em $\mathbb{K}G$.

Exemplo 2.1.4. A álgebra de Grassmann E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 e E_1 são os subespaços definidos no Exemplo 1.2.4.

Exemplo 2.1.5. Seja G um grupo e $M_n(\mathbb{K}) = \oplus_{g\in G} R_g$ uma G-graduação na álgebra de matrizes sobre $\mathbb{K}$. Então dizemos que a G-graduação é **elementar** se existe uma n-upla $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que cada matriz elementar E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ é homogênea e $\deg(E_{ij}) = g_i g_j^{-1}$.

Exemplo 2.1.6 (Produto Tensorial de Álgebras Graduadas)**.** Sejam $A = \oplus_{g\in G} A_g$ e $B = \oplus_{h\in H} B_h$ álgebras G e H graduadas, respectivamente. O produto tensorial $C = A \otimes B$ também será uma álgebra graduada de maneira natural pelo grupo $G \times H$, onde suas componentes homogêneas serão dadas por $C_{(g,h)} = A_g \otimes B_h$. Além disso, considere que $A = \oplus_{g\in G} A_g$ e $B = \oplus_{g\in G} B_g$ como sendo álgebras graduadas. Se o $SuppA$ comuta com o $SuppB$ (particularmente se G for abeliano), podemos definir em $C = A \otimes B$ uma estrutura de álgebra graduada, onde as componentes homogêneas serão $C_g = \oplus_{\substack{h_1,h_2\in G; \\ h_1h_2=g}} A_{h_1} \otimes B_{h_2}$. De fato, se $a_{g_1} \otimes b_{h_1} \in C_g$ e $a_{g_2} \otimes b_{h_2} \in C_h$, então $g_1h_1 = g$ e $g_2h_2 = h$. Como os suportes comutam, temos que $(a_{g_1} \otimes b_{h_1})(a_{g_2} \otimes b_{h_2}) = a_{g_1}a_{g_2} \otimes b_{h_1}b_{h_2} \in A_{g_1g_2} \otimes B_{h_1h_2} \subseteq C_{gh}$ e portanto $C_gC_h \subseteq C_{gh}$.

Definição 2.1.7. Seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$. Dizemos que um subespaço B de A é dito homogêneo (ou graduado) quando $B = \oplus_{g\in G} B \cap A_g$. Uma subálgebra ou um ideal de A é dito homogêneo (ou graduado), se ele for homogêneo como subespaço.

Proposição 2.1.8. Sejam $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada e B um subespaço de A. Então B é homogêneo se, e somente se, $b = (\sum b_g) \in B$, com $b_g \in A_g$, implicar que $b_g \in B$.

Demonstração. Suponha que B seja homogênea, então $B = \oplus_{g\in G}(B \cap A_g)$. Logo, para qualquer $b \in B$, podemos escrever $b = \oplus_{g\in G} b'_g$, onde cada $b'_g \in B \cap A_g$. Pela unicidade da expressão de b como soma de elementos homogêneos, devemos ter $b'_g = b_g$ e assim $b_g \in B$ para todo $g \in G$. Por outro lado, se para $b \in B$ tivermos que $b_g \in B$ para todo $g \in G$, então $b_g \in B \cap A_g$, então temos que $B \subseteq \oplus_{g\in G}(B \cap A_g)$. Logo, B é homogêneo. □

Exemplo 2.1.9. Se $A = \oplus_{g\in G} A_g$ é uma álgebra graduada, então é fácil observar que a componente homogênea de grau neutro é uma subálgebra graduada de A. De fato, observe que pela definição de graduação, A_ϵ é um subespaço de A e $A_\epsilon A_\epsilon \subseteq A_\epsilon$, de onde concluímos a afirmação.

Definição 2.1.10. Considere uma graduação na álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{K}) = \oplus_{g\in G} R_g$. Dizemos que esta graduação é elementar, se existir uma n-upla $g = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ tal que E_{ij}é homogênea de grau $g_i g_j^{-1}$.

Definição 2.1.11. Seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada. Dizemos que esta graduação é fina quando $dim A_g \leq 1$, para qualquer $g \in G$.

Observe que uma n-upla $(g_1, \dots, g_n)$ que determina uma graduação elementar não é definida de maneira única, por exemplo, $(g_1 g, \dots, g_n g)$ define a mesma graduação elementar, para qualquer $g \in G$. Em particular, podemos sempre assumir que $g_1 = e$.

Exemplo 2.1.12. Seja $UT(m_1, \dots, m_r)$ uma álgebra das matrizes triangulares em blocos. Considere $n = m_1 + \cdots + m_r$ e a álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{K})$ com uma graduação elementar induzida por $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$, então é fácil notar que $UT(m_1, \dots, m_r)$ é uma subálgebra homogênea de $M_n(\mathbb{K})$. Logo, podemos definir de maneira idêntica uma graduação elementar em $UT(m_1, \dots, m_r)$.

De maneira inteiramente análoga podemos definir, ideal graduado à esquerda e à direita, além do radical de Jacobson graduado da álgebra A, que será representado por $J(A)$. Por exemplo, se tivermos a álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos $UT(m_1, \dots, m_r)$ com uma graduação elementar, prova-se, de maneira inteiramente análoga ao feito no Exemplo 1.1.25, que o radical de Jacobson graduado desta álgebra é igual ao seu radical de Jacobson ordinário.

Exemplo 2.1.13. Sejam $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada e I um ideal de A. Iremos considerar uma graduação em A/I e para isso se faz necessário que I seja homogêneo. Para tanto, consideramos $\{\overline{A}_g \mid g \in G\}$ de subespaços de A/I, onde $\overline{A}_g = (A_g + I)/I$. Claramente, temos $A/I = \sum_{g\in G} \overline{A}_g$. Observe que cada elemento de $\overline{A}_g$ tem a forma $\overline{a}$, onde $a \in A_g$, daí, dados $a \in A_g$ e $b \in A_h$, com $g, h \in G$, temos que $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab} \subseteq \overline{A}_{g+h}$ e assim $\overline{A}_g\overline{A}_h \subseteq \overline{A}_{g+h}$. Supondo agora que I é homogêneo, tomemos $a_g \in A_g$ para todo $g \in G$, elementos tais que $\sum_{g\in G} \overline{a}_g = 0$. Temos então que $a_g \in I$ para todo $g \in G$, pela homogeneidade de I. Logo $\overline{a}_g = 0$ para todo $g \in G$ e assim temos $A/I = \oplus_{g\in G}\overline{A}_g$ e $\overline{A}_g\overline{A}_h \subseteq \overline{A}_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$ e portanto temos uma graduação em A/I.

Exemplo 2.1.14 (Graduação de Pauli)**.** Considere ε um raiz n-ésima primitiva da unidade. Seja $G =< a >_n \times < b >_n$ o produto direto de dois grupos cíclicos de ordem n. Então, em $M_n(\mathbb{K})$, considere as seguintes matrizes:

$$X_a = \begin{pmatrix} \varepsilon^{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que $X_aY_bX_a^{-1} = \varepsilon Y_b$ e $X_a^n = Y_b^n = Id_n$ e que os $X_a^iY_b^j$, $1 \leq i, j \leq n$, são linearmente independentes. Assim os $X_a^iY_b^j$ formam uma base para $M_n(\mathbb{K})$.

Agora para qualquer $g \in G$, $g = a^ib^j$, denote R_g como sendo o subespaço unidimensional $R_g =< X_a^iY_b^j >$. Segue que $M_n(\mathbb{K}) = \oplus_{g\in G}R_g$ é uma G-graduação fina, chamada ε-graduação (ou graduação de Pauli).

Definição 2.1.15. Uma álgebra graduada é dita álgebra graduada com divisão se qualquer elemento homogêneo não nulo é invertível.

Exemplo 2.1.16. Qualquer álgebra com divisão com qualquer graduação é uma álgebra graduada com divisão.

Exemplo 2.1.17. A álgebra graduada de grupo $\mathbb{K}G$, com a graduação definida no Exemplo 2.1.3, é uma álgebra graduada com divisão.

Sendo A uma álgebra graduada com divisão e $r \in A_g$ um elemento homogêneo não nulo, então $r^{-1} \in A_{g^{-1}}$. Ademais, o $SuppA$ é um subgrupo de G, pois, é fácil observar que se $g, h \in SuppA$, então $gh \in SuppA$, uma vez que $A_gA_h \subseteq A_{gh} \neq 0$. Além disso, se $g \in SuppA$, então existe uma elemento homogêneo não nulo, digamos r, em A_g e consequentemente, $r^{-1} \in A_{g^{-1}}$, logo $A_{g^{-1}}$ é não nulo e portanto $g^{-1} \in SuppA$.

Exemplo 2.1.18. A álgebra das matrizes com a graduação de Pauli é uma álgebra graduada com divisão, uma vez que cada componente homogênea é gerada por uma matriz invertível. Além disso, poderíamos chegar a mesma conclusão utilizando o lema seguinte.

Lema 2.1.19. Seja R uma álgebra de matrizes sobre uma corpo algebricamente fechado e seja $R = \oplus_{g \in G} R_g$ uma graduação por um grupo G. Então as seguintes condições são equivalentes:

i) $dim R_g \leq 1$, para todo $g \in G$;

ii) $dim R_\epsilon = 1$;

iii) R é uma álgebra graduada com divisão.

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$: Imediato, uma vez que $Id_n \in R_\epsilon$ e por hipótese $dim R_\epsilon \leq 1$. $ii) \Rightarrow iii)$: Suponhamos por contradição que para algum $g \in G$, R_g contenha uma matriz não nula X, cujo $det X = 0$. Então temos que $RXR = R$ e daí, existem $g_1, g_2 \in G$, tais que $0 \neq R_{g_1} X R_{g_2} \subseteq R_\epsilon$. Como $dim R_\epsilon = 1$ e $Id_n \in R_\epsilon$, temos que todas as matrizes de R_ϵ são escalares, e como todas as matrizes AXB são degeneradas, temos que $AXB = 0$, para quaisquer $A \in R_{g_1}$ e $B \in R_{g_2}$, o que é uma contradição.

$iii) \Rightarrow i)$: Se $R_g \neq 0$, então considere um elemento não nulo $a \in R_g$. Então $R_g a^{-1}$ é um R_ϵ-módulo à esquerda, daí, $R_\epsilon \subseteq R_g a^{-1}$. Por outro lado, pela graduação, temos que $R_g a^{-1} \subseteq R_\epsilon$. Portanto, $R_\epsilon = R_g a^{-1}$. Então $R_\epsilon a = R_g$. Agora como $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado e assumindo que D tem dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, temos que $R_\epsilon = \mathbb{K}$, pois a única álgebra com divisão de dimensão sobre um corpo algebricamente fechado é o próprio corpo (veja [13, Proposição 5.4.5]), portanto $R_g = \langle a \rangle$ e assim tem dimensão 1. $\square$

Definição 2.1.20 (Homomorfismo de Álgebras Graduadas)**.** Sejam $A = \oplus_{g \in G} A_g$ e $B = \oplus_{g \in G} B_g$ álgebras graduadas. Dizemos que um homomorfismo de álgebras $\phi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras graduadas quando $\phi(A_g) \subseteq B_g$, para todo $g \in G$.

Sendo $\phi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras graduadas, temos que o conjunto $Ker(\phi) = \{a \in A \mid \phi(a) = 0\}$ é um ideal graduado de A, chamado de núcleo de ϕ. Já o conjunto $Im(\phi) = \{\phi(a) | a \in A\}$ é uma subálgebra graduada de B. Dizemos que ϕ é um monomorfismo graduado quando ele for injetiva e chamaremos de epimorfismo graduado, quando ele for sobrejetiva. Ademais, quando ϕ for um isomorfismo de álgebras e $\phi(A_g) = B_g$, para todo $g \in G$, dizemos que ϕ é um isomorfismo de álgebras graduadas. Quando $A = B$, chamaremos ϕ de endomorfismo graduado.

Exemplo 2.1.21. A aplicação nula e a aplicação identidade são exemplos de endomorfismo graduados.

Proposição 2.1.22. Sejam G um grupo, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ e $\sigma \in S_n$. Se A e B denotam álgebras de matrizes $M_n(\mathbb{K})$ com G-graduações elementares induzidas por $\mathbf{g}.\sigma$ e $\mathbf{g}$, respectivamente, então A e B são isomorfas como álgebras G-graduadas.

Demonstração. Considere a aplicação linear $\phi : A \longrightarrow B$ dada por $\phi(E_{ij}) = E_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Observe que ϕ é uma aplicação linear bijetiva, pois leva base canônica em base canônica de $M_n(\mathbb{K})$. Além disso, temos que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}(jk)E_{il}$ e $\delta(jk) = \delta(\sigma(j)\sigma(k))$, onde δ é o delta de Kronecker, assim concluímos que $\phi(E_{ij}E_{kl}) = \phi(\delta(jk)E_{il}) = \delta(\sigma(j)\sigma(k))E_{\sigma(i)\sigma(l)} = \phi(E_{ij})\phi(E_{kl})$. Além disso, observe que E_{ij} e $\phi(E_{ij})$ têm o mesmo grau nas graduações elementares de A e B. Portanto, ϕ é isomorfismo de álgebras graduadas. $\square$

Exemplo 2.1.23. Seja $A = \oplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra graduada e considere I como sendo um ideal graduado de A. A aplicação $\pi : A \longrightarrow A/I$ definida por $\pi(a) = \overline{a}$, é um homomorfismo de álgebras graduadas sobrejetor, chamado de projeção canônica de A sobre A/I.

Agora iremos introduzir um conceito que será utilizado no terceiro capítulo, mais precisamente no Lema 3.2.11 e nas suas consequências, que é o subgrupo de Young.

Definição 2.1.24. Seja $\cup_{i=1}^{r} d_i = \{1, 2, \ldots, n\}$ uma partição de $\{1, 2, \ldots, n\}$ em r subconjuntos disjuntos. O subgrupo de Young do grupo simétrico S_n correspondente é o subgrupo

$$S_{d_1} \times S_{d_2} \times \cdots \times S_{d_r}$$

onde $S_{d_i} = \{\sigma \in S_n | \sigma(j) = j, \forall j \notin d_i\}$, para $i = 1, \ldots, r$.

Considere uma r-upla $(d_1, \ldots, d_r)$ e $n = d_1 + \cdots + d_r$. Sejam os conjuntos $I_1 = \{1, \ldots, d_1\}$ e $I_j = \{d_1 + \cdots + d_{j-1} + 1, d_1 + \cdots + d_{j-1} + 2, \ldots, d_1 + \cdots + d_{j-1} + d_j\}$, onde $2 \leq j \leq r$, então $\cup_{j=1}^{r} I_j$ é uma partição de $\{1, \ldots, n\}$. Logo podemos denotar o subgrupo de Young correspondente por $S_{d_1} \times \cdots \times S_{d_r}$. A restrição ao subgrupo de Young $S_{d_1} \times \cdots \times S_{d_r}$ da ação de S_n à esquerda em G^n juntamente com a ação de G à direita é uma bi-ação de $S_{d_1} \times \cdots \times S_{d_r}$ e G no conjunto G^n. Em [8] os autores provaram o seguinte resultado:

Teorema 2.1.25. Existe uma bijeção entre os tipos de isomorfismos das G-graduações elementares em uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos e as órbitas da biação em G^n, à esquerda pelo subgrupo de Young $S_{d_1} \times \cdots \times S_{d_r}$ e à direita pelo grupo G, onde $n = d_1 + \cdots + d_r$.

Vamos definir os conceitos de identidades graduadas, para tanto, considere para cada $g \in G$ um conjunto enumerável de variáveis, de tal maneira que $X_g \cap X_h = \emptyset$, sempre que $g \neq h$. Considere $X = \cup_{g\in G} X_g$ e a álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Agora, definimos o G-grau de um monômio m (que será denotado por $wt(m)$) da seguinte maneira $wt(1) = e$ e $wt(x_1, \ldots, x_n) = wt(x_1)wt(x_2)\cdots wt(x_n)$ onde $wt(x_i) = g$, sempre que $x_i \in X_g$.

Para cada $g \in G$, seja $\mathbb{K}\langle X\rangle_g$ o subespaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado pelos monômios m de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, tais que $wt(m) = g$. Com isto temos que

$$\mathbb{K}\langle X\rangle = \oplus_{g\in G}\mathbb{K}\langle X\rangle_g \quad \text{e} \quad \mathbb{K}\langle X\rangle_g\mathbb{K}\langle X\rangle_h \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle_{gh}$$

para quaisquer $g, h \in G$, logo $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma álgebra G-graduada, denominada de álgebra associativa livre G-graduada e seus elementos são chamados de polinômios graduados. No nosso trabalho, quando $x \in X_g$, iremos representar tal variável por x^g, deixando assim explícito o seu grau. Porém, quando estivermos trabalhando com polinômios graduados, iremos representar as variáveis x^e, simplesmente por x, ficando assim implícito que ela tem G-grau neutro, por este motivo, temos que ter cuidado sobre quais tipos de polinômios estamos abordando, graduados ou ordinários. Além disso, iremos representar esta álgebra livre graduada por $\mathbb{K}_G\langle X\rangle$.

Definição 2.1.26. Seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra graduada. Dizemos que um polinômio $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n}) \in \mathbb{K}_G\langle X\rangle$ é uma identidade G-graduada de A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{g_i}$ com $i = 1, \ldots, n$.

Iremos representar o T-ideal graduado de uma álgebra graduada A por $Id_G(A)$.

Exemplo 2.1.27. Consideremos a álgebra de Grassmann E com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação natural (conforme definida no Exemplo 2.1.4). Como $ab = -ba$ para quaisquer elementos $a, b \in E_1$, temos que $f(x_1^1, x_2^1) = x_1^1x_2^1 + x_2^1x_1^1 \in \mathbb{K}\langle X\rangle$, onde $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de E.

Exemplo 2.1.28. Considere a $\mathbb{Z}_2$-graduação elementar em $M_2(\mathbb{K})$, definida pelo par ordenado $(0, 1)$. Daí temos que $M_2(\mathbb{K}) = A_0 \oplus A_1$, onde

$$A_0 = \left\{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\right\} \text{ e } A_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{K}\right\}.$$

Daí, temos que $[x_1, x_2]$ e $x_1^1x_2^1x_3^1 - x_3^1x_2^1x_1^1$ são identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para esta álgebra.

2.2 Espaços Vetoriais Graduados e Equivalência de Álgebras

Agora iremos apresentar alguns conceitos que envolvem os espaços vetoriais graduados e com isso construir a noção de álgebras graduadas equivalentes. Muito dos conceitos aqui abordados são similares para álgebras graduadas, porém diante de sua importância nos próximos capítulos e de suas particularidades, decidimos dedicar uma seção para o desenvolvimento de tais conceitos. Neste capítulo, V sempre será um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Iniciaremos com a seguinte definição.

Definição 2.2.1. Uma G-graduação em V é uma decomposição de V em uma soma direta de subespaços indexados por G,

$$V = \oplus_{g\in G} V_g.$$

De maneira inteiramente idêntica ao feito para álgebras graduadas, definimos o suporte desta graduação, componentes homogêneas desta graduação, subespaço homogêneo (ou graduado) e elementos homogêneos de V. A partir de agora, sempre que falarmos de espaços vetoriais graduados, estamos nos referindo a espaços G-graduados, a menos que se fale o contrário. Agora iremos definir 3 conceitos, muito parecidos e que são de suma importância nos próximos capítulos e para que possamos diferenciá-los, iremos apresentá-los juntos.

Definição 2.2.2. Sejam V e W dois espaços vetoriais graduados. Uma transformação linear $\phi : V \longrightarrow W$ é dita um homomorfismo de espaços vetoriais graduados, quando $\phi(V_g) \subseteq W_g$, para todo $g \in G$.

Definição 2.2.3. Sejam V um espaço vetorial G-graduado e W um espaço vetorial H-graduado. Uma transformação linear $f : V \longrightarrow W$ é chamada de graduada, se para qualquer $g \in G$, existir $h \in H$, tal que $f(V_g) \subseteq W_h$. Claramente, se $f(V_g) \neq 0$, então h é unicamente determinado.

Definição 2.2.4. Uma transformação linear $f : V \longrightarrow W$ de espaços vetoriais graduados é dita homogênea de grau g se $f(V_h) \subseteq W_{gh}$, para qualquer $h \in G$.

Como V e W são espaços vetoriais G-graduados, podemos definir o espaço graduado $Hom^{gr}(V, W) := \oplus_{g\in G} Hom_g(V, W)$, onde $Hom_g(V, W)$ é o conjunto de todas as transformações lineares homogêneas de grau g, como sendo o espaço graduado das transformações lineares homogêneas. Analogamente, podemos definir o espaço graduado dos endomorfismos de um espaço vetorial graduado V, denotado por $End^{gr}(V) := Hom^{gr}(V, V)$.

Definição 2.2.5. Sendo $V = \oplus_{g \in G} V_g$, podemos definir um shift à esquerda de V, representado por ${}^{[g]}V$, como sendo o próprio espaço vetorial V, porém com a graduação dada por ${}^{[g]}V_{gh} := V_h$.

Em outras palavras, um elemento homogêneo de grau h em V, terá grau gh em ${}^{[g]}V$. De maneira inteiramente análoga, definimos o shift à direita de V, denotado por $V^{[g]}$. Ademais, observe que na Definição 2.2.4, podemos dizer que uma transformação linear $f : V \longrightarrow W$ é homogênea de grau g, quando $f :{}^{[g]} V \longrightarrow W$ é um homomorfismo de espaços vetoriais graduados. Além disto, qualquer transformação homogênea de qualquer grau, é também uma transformação linear graduada.

Definição 2.2.6. Sejam V um espaço vetorial G-graduado e W um espaço vetorial H-graduado. Uma equivalência de espaços vetoriais graduados $f : V \longrightarrow W$ é um isomorfismo linear tal que f e f^{-1} são transformações lineares graduadas.

Sendo f uma equivalência, observe que pela injetividade, temos que existe uma aplicação bem definida de $SuppV$ no $SuppW$, onde $g \to h$, quando $f(V_g) \subseteq W_h$; pois se $f(V_g) = 0$, teríamos que a imagem de $g \in SuppV$ na aplicação definida acima não estaria definida. Já a sobrejetividade de f, garante a sobrejetividade da aplicação entre estes suportes, pois se $h \in SuppH$, existe um elemento homogêneo $w_h \in W$ com grau h, logo, por esta sobrejetividade, existe um elemento homogêneo $v_g \in V$, tal que $f(v_g) = w_h$. Assim, $f(V_g) \subset W_h$ e portanto, $g \to h$. Ademais, temos que um isomorfismo linear graduado $f : V \longrightarrow W$ é uma equivalência se, e somente se, a aplicação definida acima é uma bijeção. De fato, suponha que f seja uma equivalência, como f^{-1} é uma transformação linear graduada de W em V, se $g \to h$ e $g' \to h$, temos que a aplicação inversa estaria bem definida e leva h em g e g' e assim sendo, $g = g'$. Agora suponha que esta aplicação seja uma bijeção, então, se $f(V_g) \subseteq W_h$, para algum $g \in SuppV$ e algum $h \in SuppW$, teremos que $f^{-1}(W_h) \subseteq V_g$ e portanto f^{-1} é uma transformação linear graduada, concluindo que f é uma equivalência de espaços vetoriais graduados.

Definição 2.2.7 (Equivalência de Álgebras Graduadas)**.** Considere $A = \oplus_{g \in G} A_g$ e $B = \oplus_{h \in H} B_h$ duas álgebras G e H graduadas, respectivamente. Dizemos que um isomorfismo de álgebras $\phi : A \longrightarrow B$ é uma equivalência de álgebras graduadas, se ϕ é uma equivalência de espaços vetoriais.

Como no caso anterior, esta definição determina uma bijeção entre o suporte de A e o suporte de B.

Exemplo 2.2.8. Considere i e $-i$ as raízes da unidade de ordem 4 em $\mathbb{C}$ e as respectivas $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$-graduações de Pauli em $M_4(\mathbb{C})$. Observe que na primeira graduação temos

$$X_a = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

enquanto na segunda graduação temos

$$X'_a = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contudo, é fácil ver que a aplicação identidade é uma equivalência de álgebras graduadas.

Agora iremos abordar os conceitos sobre uma m-flag em um espaço vetorial graduado e a relação que existe entre o anel dos endomorfismos graduados de uma flag e a álgebras das matrizes triangulares em blocos. Iniciaremos com a seguinte definição.

Definição 2.2.9. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial graduado de dimensão n e $m = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ uma r-upla de inteiros positivos, com $r \in \mathbb{N}$ e $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$. Definimos uma m-flag graduada $\mathcal{F}$ como sendo uma sequência $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$, onde $V_0 = 0$ e V_i é um subespaço homogêneo de V de dimensão $m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ para cada $1 \leq i \leq r$.

A partir de agora, iremos nos referir a uma m-flag simplesmente como uma flag, ficando implícito a r-upla m. Considere $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_r = V$ e $\mathcal{F}' : W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_r = W$ duas flags. Definimos um morfismo entre estas duas flags

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$$

como sendo um morfismo de espaço vetoriais graduados $f : V \longrightarrow W$, tal que $f(V_i) \subseteq W_i$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Dizemos que um morfismo de flags é um isomorfismos, quando ele é também um isomorfismos de espaços vetoriais.

Observe que estes conceitos que envolvem uma flag também podem ser definido de maneira análoga para um espaço vetorial ordinário.

É fácil mostrar que o conjunto $End(\mathcal{F})$ de todos os endomorfismos de $\mathcal{F}$ é uma subálgebra de $End(V)$. A proposição a seguir garante que uma graduação em $\mathcal{F}$ induz uma graduação em $End(\mathcal{F})$.

Proposição 2.2.10. Temos que $End(\mathcal{F}) = \oplus_{\sigma \in G} End(\mathcal{F})_\sigma$, onde

$$End(\mathcal{F})_\sigma = \{f \in End(\mathcal{F}) \mid f(V_g) \subset V_{\sigma g}, \forall g \in G\}.$$

Ademais, esta decomposição é uma G-graduação em $End(\mathcal{F})$.(Veja [12, Proposição 1.1])

De maneira inteiramente análoga, podemos definir um shift à esquerda de uma flag. Seja $\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = V$ uma flag de um espaço vetorial graduado V. Sendo $g \in G$ definimos um shift à esquerda de $\mathcal{F}$, como sendo ${}^{[g]}\mathcal{F} : {}^{[g]}V_0 \subset {}^{[g]}V_1 \subset {}^{[g]}V_2 \subset \ldots \subset {}^{[g]}V_r = {}^{[g]}V$. De modo inteiramente análogo, define-se um shift à direita de uma flag.

2.3 Módulos Graduados sobre Álgebras com Divisão

Nesta seção, nosso principal objetivo é mostrar que módulos graduados sobre álgebras graduadas com divisão têm as mesmas características de um espaço vetorial graduado sobre um corpo. Para atingirmos tal objetivo, iniciaremos descrevendo os conceitos gerais de módulos e de módulos graduados.

Definição 2.3.1. Seja R uma álgebra. Definimos um R-módulo (ou módulo sobre R) à esquerda como sendo um espaço vetorial V, munido de uma aplicação $R \times V \longrightarrow V$, que a cada par $(r, v) \in R \times V$ associa $rv \in V$ e satisfaz:

(i) $(r_1 + r_2)v = r_1 v + r_2 v$

(ii) $r(v_1 + v_2) = rv_1 + rv_2$

(iii) $r_1(r_2 v) = (r_1 r_2)v$

(iv) $1_r v = v$

(v) $(\lambda r)v = r(\lambda v) = \lambda(rv)$

para quaisquer $r, r_1, r_2 \in R$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Observe que os itens (i), (ii) e (iv) da definição acima significam que o produto $(r, v) \longrightarrow rv$ é uma aplicação bilinear. De maneira inteiramente análoga, podemos definir um R-módulo à direta. Para simplificar à terminologia, quando falarmos somente R-módulo, estaremos nos referindo a ação à esquerda, porém, tudo que for feito para este caso, valerá para ação à direita.

Definição 2.3.2. Sejam R uma álgebra e V_1 e V_2 R-módulos. Dizemos que uma transformação linear $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ é um homomorfismo de R-módulos se $\phi(rv) = r\phi(v)$ para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$.

Sejam R uma álgebra e V um R-módulo. Chamamos de endomorfismo do R-módulo V, como sendo um homomorfismo (de R-módulos) de V em V e iremos denotar por $End_R(V)$ o conjunto de todos os endomorfismos do R-módulo V.

Exemplo 2.3.3. Considere $\mathbb{K}[x]$ o anel de polinômios de uma variável com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e T uma transformação linear de V em V. Neste contexto, V é um $\mathbb{K}[x]$-módulo com a aplicação de $\mathbb{K}[x] \times V$ em V dada por $(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)v = (a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n)(v)$.

Definição 2.3.4. Sejam R uma álgebra e V um R-módulo. Dizemos que:

(i) Um subespaço vetorial V_1 de V é um submódulo (ou R-submódulo) de V se $r.v \in V_1$ para quaisquer $\in V$ e $v \in V_1$.

(ii) V é um R-módulo irredutível (ou simples) se $RV \neq 0$ e os seus únicos submódulos são $\{0\}$ e V.

(iii) V é fiel quando o conjunto $Ann(V) = \{r \in R \mid r(V) = 0\}$, chamado de anulador de V, é trivial.

Exemplo 2.3.5. Sendo R uma álgebra, consideremos R como sendo um R-módulo, de maneira natural. Temos que os submódulos de R são exatamente os ideais à esquerda da álgebra R. Sendo V um R-módulo e $v \in V$, então o conjunto $R.v = \{r.v \mid r \in R\}$ é um submódulo de V.

Observação 2.3.6. De maneira inteiramente análoga, podemos definir módulos sobre anéis. Esta observação será utilizada na demonstração do Corolário 4.2.18.

Definição 2.3.7. Um anel R é dito primitivo à esquerda, se existe um R-módulo fiel irredutível.

O conceito de anel primitivo à direita é definido de modo análogo. Existem exemplos de anéis que são primitivos à esquerda mas não à direita e vice-versa, o primeiro exemplo é devido a G. Bergman. No que segue iremos nos referir à um anel (ou álgebra) primitivo à esquerda simplesmente como um anel primitivo.

Exemplo 2.3.8. Toda álgebra com divisão é primitiva.

Exemplo 2.3.9. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $L(V)$ a álgebra dos operadores lineares de V. Podemos definir em V uma estrutura de $L(V)$-módulo, através da aplicação

$$L(V) \times V \longrightarrow V$$

$$T \times v \longrightarrow T \cdot v = T(v)$$

É fácil ver que este é um módulo fiel e simples, logo $L(V)$ é uma álgebra primitiva.

Definição 2.3.10. Sejam R, R_i, $i \in I$, álgebras. Para cada $j \in I$, considere $\pi_j : \prod_{i \in I} R_i \longrightarrow R_j$ como sendo a projeção natural. Então R é chamado de produto subdireto dos R_i, $i \in I$, quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Existe uma homomorfismo injetivo de álgebras $f : R \longrightarrow \prod_{i \in I} R_i$;

(ii) Para cada $j \in I$, a projeção $\pi_j f : R \longrightarrow R_j$ é sobrejetiva.

Poderíamos ter definido álgebra semissimples através do produto subdireto, ou seja, uma álgebra é dita semissimples quando ela é o produto subdireto de álgebra primitivas. Esta definição é equivalente a definição dada anteriormente.

Um importante resultado que iremos utilizar no terceiro capítulo acerca de álgebras primitivas é o chamado teorema de Kaplansky, que será enunciado a seguir:

Teorema 2.3.11. Seja R um anel primitivo que satisfaz alguma identidade polinomial. Então R é isomorfo a $M_n(D)$, onde D é uma álgebra com divisão de dimensão finita sobre seu centro K. Equivalentemente, R é uma álgebra central simples com dimensão finita sobre o seu centro K.

Demonstração. Veja [18, Teorema 4.13, pg. 153] □

Agora iremos abordar os conceitos que envolvem estes módulos, porém com graduações envolvidas.

Definição 2.3.12. Seja R uma álgebra graduada. Um R-módulo graduado à esquerda é um R-módulo V que é também um espaço vetorial graduado tal que $R_g V_h \subseteq V_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. De maneira inteiramente análoga, podemos definir um R-módulo graduado à direita.

Para simplificarmos, quando falarmos de R-módulos, estaremos nos referindo a R-módulos à esquerda. Definimos um homomorfismo de R-módulos graduados, como sendo um homomorfismo de R-módulos que também é um homomorfismo de espaços vetoriais graduados. Além disto, dizemos que um subespaço homogêneo W de V é um submódulo graduado, quando $RW \subseteq W$.

Definição 2.3.13. Um R-módulo graduado à esquerda V é dito graduado simples ou irredutível se $RV \neq 0$ e os seus únicos submódulos graduados são 0 e V.

Exemplo 2.3.14. O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_p$, onde p é um número primo, com qualquer graduação é um módulo graduado simples.

A partir deste ponto, o nosso foco será abordar o caso em que a álgebra graduada é uma álgebra com divisão e observar que os módulos sobre elas têm muitas propriedades similares aos espaços vetoriais graduados. Por isso iremos chama-los de espaços vetoriais graduados e seus submódulos de subespaços vetoriais. De agora em diante, $D = \oplus_{g\in G} D_g$ sempre será uma álgebra graduada com divisão. Observe que se V é um D-espaço vetorial graduado, então cada componente homogênea V_g é um D_e-espaço vetorial. O $SuppV$ não é necessariamente um grupo, mas é a união de classes laterais do subgrupo $SuppD$. Denotaremos por $|SuppV : SuppD|$ o número destas classes laterais (que pode ser infinito). Seja $SuppV = \cup_{i\in I}\Gamma_i$ a decomposição de $SuppV$ em disjuntas classes laterais de $SuppD$; com isto, ganhamos uma decomposição de V em soma direta de subespaços graduados:

$$V = \oplus_{i\in I} V_i \tag{2.1}$$

onde $V_i = \oplus_{\alpha\in\Gamma_i} V_\alpha$, para $i \in I$. Chamaremos esta decomposição de decomposição canônica de V. Observe que $g_1 \in (SuppD)g$, se e somente se, existir $h \in SuppD$ tal que $g_1 = hg$ e isto ocorre se, se somente se, existem v_g e v_{g_1} elementos homogêneos de V, com os respectivos graus, g e g_1, e um elemento homogêneo d_h de D, tais que $v_{g_1} = d_h v_g$.

Proposição 2.3.15. [37, Teorema 2.5] Seja V um espaço vetorial graduado sobre D, com uma decomposição canônica dada pela Equação 2.1. Para $i \in I$, fixe algum $\alpha_i \in \Gamma_i$ e alguma D_e-base $(e_{ij})_{j\in J_i}$ de V_{α_i}. Então, $(e_{ij})_{j\in J_i}$ é uma D-base homogênea de V_i, e $(e_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$ formam uma D-base de elementos homogêneos de V. Ademais, toda D-base homogênea de V tem cardinalidade igual a $\sum_{i\in I} dim_{D_e} V_{\alpha_i}$.

Corolário 2.3.16. [37, Corolário 2.6] Qualquer subespaço graduado de um espaço vetorial graduado tem um subespaço graduado complementar.

A dimensão de um espaço vetorial graduado V sobre D, é exatamente o número de elementos de uma das bases homogêneas e será denotada por $dim_D V$. A Proposição 2.3.15 mostra que $dim_D V = \sum_{i\in I} dim_{D_\epsilon} V_{\alpha_i}$ onde I é um conjunto com $|SuppV : SuppD|$ elementos e $(\alpha_i)_{i\in I}$ é um conjunto de representantes das classes laterais de $SuppV$ módulo $SuppD$. Em particular, se $dim_D V = d < \infty$, então $|SuppV : SuppD| \leq d < \infty$.

Quando tivermos um homomorfismo de módulos graduados, de um D-módulo V em um D-módulo W, iremos chamá-lo de transformação linear e iremos representar o conjunto de todos estes homomorfismos por $Hom_D^{gr}(V, W)$. De maneira inteiramente análoga a feita acima, pode-se provar que $End_D^{gr}(V)$, tem uma estrutura de espaço graduado.

Para finalizarmos esta seção iremos apresentar uma definição que será muito utilizada nos próximos capítulos, principalmente, no terceiro capítulo do nosso trabalho.

Definição 2.3.17. Sejam G e H grupos. Considere D como sendo uma álgebra G-graduada e D' uma álgebra H-graduada. Sejam V um D-módulo G-graduado à direita e V' um D'-módulo H-graduado à direita. Uma equivalência de (D, V) em (D', V') é um par (ψ_0, ψ_1) onde $\psi_0 : D \longrightarrow D'$ é uma equivalência de álgebras graduadas e $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ é uma equivalência de espaços vetoriais graduados, tais que $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$, para quaisquer $v \in V$ e $d \in D$.

Exemplo 2.3.18. Considere na álgebra das matrizes $D = M_4(\mathbb{K})$ com as $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$-graduações de Pauli dadas no exemplo anterior. Considerando $\psi_0 = Id$, já sabemos que esta aplicação é uma equivalência de graduadas. Agora, considerando o espaço vetorial V como sendo o próprio D e definindo o $\psi_1 = \psi_0$, temos que (ψ_0, ψ_1) é uma equivalência de espaços vetoriais graduados sobre álgebras graduadas com divisão.

2.4 Álgebra Graduada com Divisão como uma Álgebra Torcida

Nesta seção iremos abordar alguns conceitos que serão utilizados no final do último capítulo. Iniciaremos com as seguintes definições.

Definição 2.4.1. Seja G um grupo que age em um grupo abeliano A, via um homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow Aut(A)$, onde $Aut(A)$ é o grupo dos automorfismos de grupos de A. Um 2-cociclo para esta ação é um aplicação $\sigma : G\times G \longrightarrow A$, que satisfaz a seguinte igualdade

$$\phi(g)(\sigma(h,t)) + \sigma(g,ht) = \sigma(gh,t) + \sigma(g,h).$$

O conjunto dos 2-cociclos para uma ação de G em A forma um grupo com a operação da adição. Este grupo será denotado por $\mathcal{Z}^2_\phi(G,A)$, ou simplesmente $\mathcal{Z}^2(G,A)$.

Definição 2.4.2. Seja G um grupo finito. Definimos a álgebra de grupo torcida $\mathbb{K}^\sigma G$ como sendo a álgebra associativa que tem como base G e o produto é dado por $gh = \sigma(g,h)gh$, onde $\sigma : G\times G \longrightarrow \mathbb{K}^*$ é um 2-cociclo.

Exemplo 2.4.3. Se σ for trivial, temos que $\mathbb{K}^\sigma G = \mathbb{K}G$.

Considere D como sendo uma álgebra graduada com divisão, $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado e $T = SuppD$. Já sabemos que D_ϵ é uma álgebra com divisão. Além disso, se $D_g \neq 0$, então considere um elemento não nulo $a_g \in D_g$. Logo, $D_g a_g^{-1}$ é um D_e-módulo à esquerda, daí, $D_e \subseteq D_g a_g^{-1}$. Por outro lado, pela graduação, temos que $D_g a_g^{-1} \subseteq D_e$. Portanto, $D_e = D_g a_g^{-1}$. Então $D_e a_g = D_g$. Com isso, para quaisquer $g,h \in T$ existe um elemento $\sigma(g,h) \in D_e$, tal que

$$D_g D_h = \sigma(g,h) D_{gh}. \tag{2.2}$$

Além disso, para quaisquer $d \in D_\epsilon$ e $t \in T$, existe um elemento não nulo $t\cdot d \in D_e$ tal que

$$a_g d = (t\cdot d)a_g. \tag{2.3}$$

Assim, podemos identificar D como sendo o conjunto das somas formais quase nulas $\sum_{t\in T} d_g a_g$, onde $d_g \in D_\epsilon$, para todo $g \in T$, e a multiplicação determinada pela multiplicação em D_ϵ e pelas Equações (2.2) e (2.3). A lei associativa para a multiplicação em D é equivalente as seguintes condições: $i)$ para qualquer $t \in T$, a aplicação $d \to t\cdot d$ é um automorfismo de D_ϵ; $ii)$ a aplicação $\sigma : T\times T \longrightarrow D_\epsilon^*$ é um 2-cociclo, isto é

$$\sigma(g,h)\sigma(gh,t) = (g\sigma(h,t))\sigma(g,ht) \text{ para quaisquer } g,h,t \in T,$$

e $iii)$ a aplicação $\cdot : T\times D_\epsilon \longrightarrow D_\epsilon^*$ é uma σ-ação torcida, isto é,

$$g\cdot(h\cdot d) = \sigma(g,h)((gh)\cdot d)\sigma(g,h)^{-1}, \text{ para quaisquer } g,h \in T \text{ e } d \in D_e.$$

Agora como $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado e assumindo que D tem dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, já sabemos que $D_\epsilon = \mathbb{K}$, daí, a ação " $\cdot$ " é trivial e a equação de σ fica da seguinte maneira:

$$\sigma(g,h)\sigma(gh,t) = \sigma(h,t)\sigma(g,ht) \text{ para quaisquer } g,h,t \in T.$$

Em outras palavras, D é uma álgebra de grupo torcida $\mathbb{K}^\sigma T$. Essa argumentação prova o seguinte teorema.

Teorema 2.4.4. ([20, Teorema 2.13]) Seja D uma álgebra graduada de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$. Se D é uma álgebra graduada com divisão com suporte $T \subset G$, então D é isomorfa a uma álgebra de grupo torcida $\mathbb{K}^\sigma T$ (com sua T-graduação vista como uma G-graduação), para algum $\sigma \in \mathcal{Z}^2(G,A)$. Duas álgebras de grupo torcida $\mathbb{K}^{\sigma_1}T$ e $\mathbb{K}^{\sigma_2}T$ são isomorfas como álgebras G-graduadas se, e somente se, $T_1 = T_2$ e $[\sigma_1] = [\sigma_2]$.

Capítulo 3

Isomorfismos na Álgebra Graduada das Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

Neste capítulo iremos definir o conceito de m-flags sobre um D-módulo V, onde D é uma álgebra G-graduada com divisão e em seguida descrever os isomorfismos do anel dos endomorfismos desta m-flag. Este anel surge na classificação das graduações na álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos, em [38], graduadas por um grupo abeliano finito, que foram classificadas sob a hipótese que o corpo base é algebricamente fechado de característica zero. Mais precisamente no artigo anteriormente citado, foi demonstrado que qualquer graduação na álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos graduada é isomorfa a um anel de endomorfismos de uma flag graduada sobre uma álgebra graduada com divisão. Foi provado em [7] que qualquer graduação elementar na álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos é isomorfa a um anel de endomorfismo de uma flag sobre um corpo. Além disso, neste mesmo artigo, foi mostrado que duas álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos com graduações elementares são isomorfas se, e somente se, as correspondentes flags graduadas são isomorfas, a menos de um shift.

Graduações na álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos são descritas em [38] sendo uma produto tensorial de uma álgebra de matrizes graduada com divisão e uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos com uma graduação elementar. Esta descrição é para graduações por um grupo abeliano e álgebras sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Como consequência deste resultado, determinamos (Corolário 3.3.3), em termos desta decomposição, quando duas álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos graduadas pelo mesmo grupo são isomorfas.

Os resultados obtidos neste capítulo geraram um artigo com título: Graded Isomorphisms on Upper Block Triangular Matrix Algebras [10], que foi publicado no ano de 2018 na revista Linear Algebra and its Applications. Tal artigo foi resultado de uma parceria minha com os professores Claudemir Fidelis e Diogo Diniz.

3.1 Conceitos Básicos

Neste capítulo, D sempre representará uma álgebra G-graduada com divisão. Considere V um D-módulo de dimensão finita, como já provado no capítulo 2, V herda todas as propriedades de um espaço vetorial, logo iremos chamar V de espaço vetorial sobre D e seus submódulos de subespaços. Denote $\mathrm{End}_D V$ o anel dos endomorfismos de V. Iremos agora definir o conceito de flags de V, que é similar ao conceito de flag de um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Definição 3.1.1. Seja $m = (m_1, \ldots, m_r)$, onde cada $m_i \in \mathbb{N}$. Uma m-flag (ou simplesmente uma flag) em V de comprimento r é uma cadeia de D-subespaços G-homogêneos $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_r$, onde $V_0 = 0$ e $V_r = V$. Uma base $\beta = \{v_1 \ldots, v_n\}$ de V é dita uma base da flag $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_r$ quando $\{v_1, \ldots, v_{n_i}\}$ é base de V_i, onde $n_i = m_1 + \cdots + m_i$, para todo $i = 1, \ldots, r$. Um endomorfismo ϕ de V é dito um endomorfismo da flag $\mathcal{F}$ quando $\phi(V_i) \subseteq V_i$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

Observação 3.1.2. (i) Denotaremos o conjunto de todos os endomorfismos da flag $\mathcal{F}$ por $\mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$.

(ii) Iremos denotar a ação da álgebra com divisão D em V como sendo à direita, ou seja, para $d \in D$, temos a ação $d{\cdot}v = vd$, para $v \in V$. Além disso, se $f \in \mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$, sua aplicação em qualquer elemento de V, será representada à esquerda, ou seja, $f \cdot v = f(v)$, para $v \in V$.

Observe que $\mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$ tem uma estrutura natural de D-espaço vetorial, onde o produto por escalar é dado por $d \cdot f(v) = f(v)d$, para quaisquer $f \in \mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$, $d \in D$ e $v \in V$.

Sejam $\beta = \{v_1 \ldots, v_n\}$ uma base de uma flag $\mathcal{F}$ e $I_1 = \{1, \ldots, m_1\}$, $I_2 = \{m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2\}$, $\ldots$, $I_r = \{m_1 + m_2 + \cdots + m_{r-1} + 1, \ldots, m_1 + m_2 + \cdots + m_r\}$. Agora, considere as seguinte aplicações e_{ij}, com $i \in I_p$, $j \in I_q$, $p \leq q$ e $p, q = 1, \ldots, r$ definidas da seguinte maneira: $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$, para $k = 1, \ldots, n$. É fácil ver que cada e_{ij} é um operador linear de V e também podemos provar que são endomorfismos de $\mathcal{F}$. De fato, fixe arbitrariamente e_{ij} e considere para algum $l \in \{1, \ldots, r\}$, o subespaço da flag $\mathcal{F}$, V_l e v_k, como sendo algum vetor da base de V_l. Se $k \neq j$, então $e_{ij}(v_k) = 0 \in V_l$. Se $k = j$ (observe que isso só é possível se $j \leq m_1 + \cdots + m_l$), então $q \leq l$ e $e_{ij}(v_k) = v_i$, daí, como $i \in I_p$, com $p \leq q$, temos que $i \leq m_1 + \cdots + m_l$, o que nos dá $v_i \in V_l$. Portanto $e_{ij}(V_l) \subset V_l$, uma vez que $e_{ij}(v_k)$ está em V_l, para qualquer vetor da base de V_l. Ademais, temos que $B = \{e_{ij} \mid i \in I_p; j \in I_q; p \leq q; p, q = 1, \ldots, r\}$ é uma base do D-espaço vetorial $\mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$. De fato, considere $T \in \mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$, $n = m_1 + \cdots + m_r$ e $v_k \in \beta$, tal que $k \in I_p$, para algum $p = 1, \ldots, r$. Daí, existem $d_1, \ldots, d_{n_p} \in D$, onde $n_p = m_1 + \cdots + m_p$, tais que $T(v_k) = \sum_{l=1}^{n_p} v_l d_l = \sum_{l=1}^{n_p} e_{lk}(v_k) d_l$ e como qualquer $l \in I_1 \cup \cdots \cup I_p$ e $k \in I_p$, então $e_{lk} \in B$ e assim, pela arbitrariedade do v_k, podemos concluir que B é um conjunto gerador de $\mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$. Além disso, suponha que existam $d_{ij} \in D$ tais que $\sum_{e_{ij} \in B} e_{ij} d_{ij} = 0$, logo temos que $0 = \sum_{e_{ij} \in B} e_{ij} d_{ij}(v_k) = \sum_{e_{ij} \in B} e_{ij}(v_k) d_{ij} = \sum_{i=1}^{n_p} v_i d_{ik}$, como os $v_i's$ formam uma base da flag, temos que $d_{11} = \cdots = d_{1n_p} = 0$ e, novamente pela arbitrariedade do v_k, concluímos que o conjunto B é L.I.

Agora, temos o seguinte resultado que caracteriza o conjunto dos endomorfismos de uma flag graduada.

Teorema 3.1.3. Se $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ é uma flag graduada em V, então o conjunto $\mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$ dos endomorfismos desta flag é uma subálgebra homogênea de $\mathrm{End}_D\, V$.

Demonstração. Inicialmente, observe que pela maneira que foi definido o conjunto dos endomorfismos da flag temos que $\mathrm{End}_D\, \mathcal{F} \subseteq \mathrm{End}_D\, V$. Agora considere $\phi, \psi \in \mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, daí temos que

$$(\phi + \psi)(V_i) \subseteq \phi(V_i) + \psi(V_i) \subseteq V_i + V_i = V_i$$

$$(\lambda\phi)(V_i) = \lambda(\phi(V_i)) \subseteq \lambda V_i = V_i$$

$$(\phi \circ \psi)(V_i) = \phi(\psi(V_i)) \subseteq \phi(V_i) \subseteq V_i$$

para $i = 0, 1, \ldots, r$, portanto $\mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$ é uma subálgebra de $\mathrm{End}_D\, V$.

Agora, seja ψ um endomorfismo de $\mathcal{F}$ e considere $\psi = \psi_1 + \cdots + \psi_k$, onde $\psi_1, \ldots, \psi_k$ são elementos homogêneos de $\mathrm{End}_D\, V$ de graus distintos. Sendo $v \in V_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, r\}$, um elemento homogêneo de grau g em V, temos que $\psi(v) = \psi_1(v) + \cdots + \psi_k(v)$. Como $\psi(v) \in V_i$, V_i é um subespaço homogêneo e cada $\psi_1(v), \ldots, \psi_k(v)$ tem grau diferente, concluímos que $\psi_j(v) \in V_i$ para $j = 1, \ldots, k$. Isto prova que $\psi_j(V_i \cap V_g) \subset V_i$ e como $V_i = \oplus_{g \in G} V_i \cap V_g$ (por ser homogêneo), podemos concluir que $\psi_j(V_i) \subseteq V_i$ para $i = 1, \ldots, r$. De onde temos que ψ_j está em $\mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$ para $j = 1, \ldots, k$. Portanto $\mathrm{End}_D\, \mathcal{F}$ é uma subálgebra homogênea de $\mathrm{End}_D\, V$. $\square$

Considere $R = End_D(\mathcal{F})$. Podemos definir em V uma estrutura de R-módulo à esquerda. De fato, considere a soma em V como sendo a mesma definida quando olhamos V como D-módulo e defina a seguinte ação de R sobre V:

$$\begin{aligned} R \times V &\longrightarrow V \\ (f, v) &\longrightarrow f \cdot v = f(v). \end{aligned}$$

Note que, pela linearidade das transformações lineares de R, esta aplicação define, de fato, uma estrutura de R-módulo em V. Sobre esta estrutura, temos os seguintes lemas que serão utilizados na demonstração dos próximos resultados.

Lema 3.1.4. Seja $R = \mathrm{End}_D \mathcal{F}$, onde V é um D-módulo graduado à direita e $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = V$ é uma flag graduada em V. Então os submódulos de V como um R-módulo à esquerda são $V_0, V_1, \ldots, V_r$.

Demonstração. Observe que cada V_i, $i = 0, 1, \ldots, r$, é um subespaço vetorial, logo fechado para a soma e como $r(V_i) \subseteq V_i$, para qualquer $r \in R$, temos que ele é invariante em relação a ação de R em V, portanto V_i é um submódulo de V, para $i = 0, 1, \ldots, r$. Seja X um R-submódulo não nulo de V, então existe $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$ tal que $X \subseteq V_j$, tal que $X \nsubseteq V_{j-1}$. Considere $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{F}$ e suponha sem perda de generalidade que $v_{n_j} \in X$ e $v_{n_j} \notin V_{j-1}$, onde $n_j = m_1 + \cdots + m_j$. Afirmamos que $V_j = X$, pois caso contrário, existiria $v_k \in V_j$, porém $v_k \notin X$. Daí considere a aplicação $e_{kn_j} \in R$ (uma vez que k e n_j são definidos pelos índices da base da flag) e como X é um R-submódulo, temos que $v_k = e_{kn_j}(v_{n_j}) \in X$, o que é um absurdo. Portanto temos o resultado. $\square$

Lema 3.1.5. Se $R = End_D(\mathcal{F})$ é o anel dos endomorfismos da flag $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ sobre uma álgebra com divisão D então $End_R V_i = D$, para $i = 1, 2, \ldots, r$.

Demonstração. Seja $v \in V_i \setminus V_{i-1}$ e $f \in \mathrm{End}_R\, V_i$. Se v e vf são L.I. sobre D, então existe $r \in R$ tal que $rv = 0$ e $r(vf)$ seja um elemento não nulo de V_i; basta, por exemplo, completar uma base de $\mathcal{F}$ onde v e vf fazem parte e definir r nos elementos desta base de tal maneira que $r(vf) = v$ e r aplicada nos demais elementos é igual a zero. Porém, isto é uma contradição, uma vez que $f \in \mathrm{End}_R\, V_i$ e consequentemente, $v = r(vf) = (rv)f = 0$. Logo existe um $d \in D$ tal que $vf = vd$. Dado $w \in V_i$, então existe $r \in R$ tal que $rv = w$, pois se eles forem L.D. sobre D, existe $d \in D$ tal que $w = vd$ e daí defina a aplicação r como sendo $r(v) = vd$; agora se eles forem L.I., complete a base de V como feito acima e temos uma aplicação r que satisfaz o desejado. Com isso $wf = (rv)f = r(vd) = wd$. Ademais, fica evidente que f é homogêneo de grau g se, e somente se, d é homogêneo de grau g. □

Agora iremos definir um isomorfismo entre duas flags definidas sobre álgebras graduadas com divisão distintas, que será na verdade um par de isomorfismos, um entre as álgebras com divisão e o outro entre as flags.

Definição 3.1.6. Sejam D e D' duas álgebras G-graduadas com divisão e $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$, $\mathcal{F}' : V_0' \subset V_1' \subset \cdots \subset V_r'$ duas flags G-graduadas nos espaços G-graduados V e V' sobre D e D', respectivamente. Um isomorfismo de $(D;\mathcal{F})$ em $(D';\mathcal{F}')$ é um par $(\psi_0;\psi_1)$, onde $\psi_0 : D \longrightarrow D'$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas e $\psi_1 : V \longrightarrow V'$ é um isomorfismo de espaços vetoriais graduados tais que $\psi_1(V_i) = V_i'$, para $i = 0, \ldots, r$; e $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$ para quaisquer $v \in V$ e $d \in D$.

No próximo teorema, iremos provar que dado um isomorfismo qualquer de pares $(D, \mathcal{F}) \to (D', \mathcal{F}')$, ele induz um isomorfismo de $\mathrm{End}_D\mathcal{F}$ em $\mathrm{End}_{D'}\mathcal{F}'$.

Proposição 3.1.7. Dado um isomorfismo (ψ_0, ψ_1) de $(D, \mathcal{F})$ em $(D', \mathcal{F}')$, então existe um único isomorfismo de álgebras graduadas $\psi : R \to R'$, onde $R = \mathrm{End}_D\mathcal{F}$, $R' = \mathrm{End}_{D'}\mathcal{F}'$, tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$ para todo $r \in R$ e todo $v \in V$. Dois isomorfismos (ψ_0, ψ_1) e (ψ_0', ψ_1') determinam o mesmo isomorfismo $R \to R'$ de álgebras graduadas se, e somente se, exite um elemento homogêneo não nulo d em D_ϵ', onde ϵ é o elemento neutro de G, tal que $\psi_0'(x) = d^{-1}\psi_0(x)d$ e $\psi_1'(v) = \psi_1(v)d$.

Demonstração. Seja $r \in R$, a aplicação $\psi(r)$, definida por $v' \mapsto \psi_1(r(\psi_1^{-1}(v')))$, está em R', uma vez que r e ψ_1 são homomorfismos G-graduados de m-flags, então $\psi_1(r(\psi_1^{-1}))$ é um homomorfismo de espaços vetoriais graduados e temos que $\psi_1(r(\psi_1^{-1}(V_i'))) = \psi_1(r(V_i)) \subseteq \psi(V_i') = V_i'$, para todo $i = 1, \ldots, r$, pois ψ_1 é um isomorfismo de m-flags e r é um endomorfismo de m-flag. Ademais $\psi : R \to R'$ é um homomorfismo de anéis, tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$. De fato, sejam $r, s \in R$, como ψ_1 é um isomorfismo, então para todo $v' \in V'$, temos

$$\psi(r+s)(v') = \psi_1((r+s)(\psi_1^{-1}(v'))) = \psi_1(r(\psi_1^{-1}(v') + s(\psi_1^{-1}(v'))) =$$

$$\psi_1(r(\psi_1^{-1}(v'))) + \psi_1(s(\psi_1^{-1}(v'))) = (\psi(r) + \psi(s))(v')$$

e

$$\psi(rs)(v') = \psi_1(r(\psi_1^{-1}\psi_1(s))(\psi_1^{-1}(v')))) = \psi_1(r(\psi_1^{-1}(\psi(s)(v')))) = \psi(r)\psi(s)(v').$$

Logo $\psi(r+s) = \psi(r) + \psi(s)$ e $\psi(rs) = \psi(r)\psi(s)$, portanto, ψ é um homomorfismo de anéis. Agora defina a aplicação ψ' de R' em R, onde para qualquer $r' \in R'$, temos que $\psi'(r')(v) = \psi_1^{-1}(r'(\psi_1(v)))$, para qualquer $v \in V$. De maneira inteiramente análoga, prova-se que ψ' é um homomorfismo de anéis e além disto temos que

$$(\psi'\psi(r))(v) = \psi_1^{-1}(\psi(r)(\psi_1(v))) = \psi_1^{-1}(\psi_1(r(\psi_1^{-1}(\psi_1((v)))))) = r(v),$$

para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$, logo $\psi'\psi = Id_R$. Do mesmo modo feito acima, prova-se que $\psi\psi' = Id_{R'}$ e portanto, $\psi' = \psi^{-1}$ e ψ é um isomorfismo de anéis. Ademais, temos que ψ é um isomorfismo de álgebras graduadas, pois se $r \in R$ tem grau g e $v' \in V'$ tem grau h, temos que $\psi_1^{-1}(v')$ tem grau h, $r(\psi_1^{-1}(v'))$ tem grau gh, o mesmo que $\psi_1(r(\psi_1^{-1}(v')))$ e como v' é um elemento homogêneo arbitrário, concluímos que $\psi_1(r(\psi_1^{-1}))$ tem grau g. Por fim, observe que

$$\psi_1(rv) = \psi_1(r(\psi_1^{-1}(\psi_1(v)))) = \psi(r)\psi_1(v)$$

e é o único com esta propriedade. De fato, suponha que $\phi : R \longrightarrow R'$, seja um isomorfismo G-graduado tal que $\psi_1(rv) = \phi(r)\psi_1(v)$, para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$, Daí $\phi(r)\psi_1(v) = \psi(r)\psi_1(v)$ e como ψ_1 é um isomorfismo, temos que $\phi(r) = \psi(r)$ e pela arbitrariedade do r, concluímos que $\phi = \psi$, isso conclui a primeira parte do teorema.

Suponha que (ψ_0, ψ_1) e (ψ_0', ψ_1') determinam o mesmo isomorfismo, então $(\psi_1)^{-1} \circ \psi_1'$ está em $(\mathrm{End}_R\ V)_\epsilon$, portanto o Lema 3.1.5 implica que existe $d_0 \in D_\epsilon$ tal que $(\psi_1)^{-1} \circ \psi_1'(v) = vd_0$, para todo $v \in V$. De onde concluímos que $\psi_1'(v) = \psi_1(v)d$, para qualquer $v \in V$, onde $d = \psi_0(d_0)$. Sejam $v \in V \setminus \{0\}$ e $x \in D$, então $\psi_1'(vx) = \psi_1'(v)\psi_0'(x)$, portanto $\psi_1(v)\psi_0(x)d = \psi_1(vx)d = \psi_1'(vx) = \psi_1'(v)\psi_0'(x) = \psi_1(v)d\psi_0'(x)$. Isto implica que $\psi_0'(x) = d^{-1}\psi_0(x)d$, uma vez que ψ_1 é um isomorfismo. A recíproca é clara, pois $\psi'(r)(v) = \psi_1'(r((\psi_1')^{-1}(v))) = \psi_1'(r(\psi_1^{-1}(v)))d^{-1} = \psi_1(r(\psi_1^{-1}(v)))d^{-1}d = \psi_1(r(\psi_1^{-1}(v))) = \psi(r)(v)$, para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$. $\square$

O principal resultado deste capítulo é o Teorema 3.2.6 que é a recíproca da proposição anterior. Provamos também um resultado análogo (Corolário 3.2.14) para a equivalência de anéis de endomorfismos das flags graduadas.

Finalizaremos esta seção com noção de shift em uma flag, que é uma ideia análoga a definição de shift de álgebra graduada dada no segundo capítulo. Sejam D uma álgebra graduada e V um D-módulo graduado à direita. Dado $g \in G$, então ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$ é também uma álgebra graduada e $V^{[g]}$ é um ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$-módulo graduado. Seja $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_r$ uma flag graduada em V, então definimos um shift à direita em $\mathcal{F}$, que denotaremos por $\mathcal{F}^{[g]}$, como a flag graduada $V_0^{[g]} \subset V_1^{[g]} \subset \ldots \subset V_r^{[g]}$ de $V^{[g]}$.

3.2 Isomorfismos entre Anéis de Endomorfismos de Flags Graduadas

Nesta seção, um dos principais pontos é descrever, a menos de isomorfismos, as flags sobre uma álgebra com divisão graduada (Lema 3.2.11) e como consequência, iremos descrever, a menos de isomorfismo, a álgebra dos endomorfismos destas flags (Corolário 3.2.12). Sejam V e V' espaços vetoriais graduados sobre D e D'; e $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ flags sobre estes espaços vetoriais, respectivamente. Considere $R = \mathrm{End}_D\mathcal{F}$ e $R' = \mathrm{End}_{D'}\mathcal{F}'$, onde $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são flags graduadas sobre as álgebras com divisão D e D', respectivamente. Se existe um $g \in G$ tal que $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, \mathcal{F}^{[g]})$ é isomorfo a $(D', \mathcal{F}')$, então a Proposição 3.1.7 implica que R e R' são anéis graduados isomorfos. Provaremos o Teorema 3.2.6 que é a recíproca desta afirmação. Iniciaremos com alguns resultados preliminares.

Lema 3.2.1. Seja $R = \mathrm{End}_D\mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é uma flag sobre D. Se e é um elemento idempotente de R tal que $e(V) = V_1$, então $R_1 = Re$ é um um subanel de R, a aplicação $r \mapsto r\mid_{V_1}$ é um isomorfismo de R_1 em $\mathrm{End}_D V_1$ e $R = R_1 \oplus I_1$, onde $I_1 = R(1-e)$.

Demonstração. Temos que R_1, I_1 são ideais à esquerda de R, pois sejam $ae, be \in R_1$ e $r \in R$, então temos que $ae + be = (a+b)e \in R_1$ e $r(ae) = (ra)e \in R_1$. De modo análogo, prova-se que I_1 é um ideal à esquerda de R. Além disso, R_1 é um subanel, pois $(ae)(be) = (aeb)e \in R_1$. Denote $i : V_1 \to V$ a aplicação inclusão. Daí, a aplicação $r_1 \mapsto ir_1e$ é um homomorfismo injetivo de $\mathrm{End}_D V_1$ em R_1. Pois, observe que $ir_1e \in R$, para todo $r_1 \in R_1$, daí, temos que $ir_1e = (ir_1e)e \in R_1$, ou seja, tal aplicação está bem definida e $i(r_1+s_1)e = ir_1e + is_1e \in R_1$, $i(r_1s_1)e = (ir_1s_1e)e \in R_1$, para quaisquer r_1 e s_1 em R_1, logo é um homomorfismo de anéis. Suponha agora que $ir_1e = 0$, daí, $ir_1e(V) = 0$, como $e(V) = V_1$, temos que $ir_1(V_1) = 0$ e como i é injetiva, temos que $r_1(V_1) = 0$, ou seja, $r_1 = 0$ e a aplicação é injetiva, como queríamos. Ademais, dado $r \in R_1$, a restrição de r em V_1, $r\mid_{V_1}$ está em $\mathrm{End}_D V_1$. De fato, primeiro note que e restrita a V_1 é a identidade, uma vez que ela é um idempotente e se $e(v) = v_1 \in V_1$, temos que $e(v_1) = e^2(v) = e(v) = v_1$; segundo, se $r = se$, com $s \in R$, temos que $r(V_1) = se(V_1) = s(V_1) \subseteq V_1$. Consequentemente, $i(r\mid_{V_1})e = re = r$, portanto $r\mid_{V_1} \mapsto i(r\mid_{V_1} e) = r$ é uma aplicação sobrejetiva. Contudo, concluímos que ela é um isomorfismo de anéis. Além disto, se $r_1 \in R_1$ for homogêneo de grau g, então ir_1 terá grau g, uma vez que i atua como a identidade sobre V_1, portanto, este isomorfismo é graduado.

De maneira imediata, temos que $R = R_1 + I_1$. Além disso, suponha que $r \in R_1 \cap I_1$, então, existem $r_1, s_1 \in R$ tais que $r = r_1e$ e $r = s_1(1-e)$, daí, $r_1e = s_1(1-e)$ e daí

$(r_1 + s_1)e = s_1$, como e é idempotente, temos que $(r_1 + s_1)e = s_1e$ e daí $r_1e = 0$, logo $r = r_1e = 0$ e portanto a soma é direta. $\square$

Observação 3.2.2. Dados $v \in V$ e $r \in R$, o elemento $re(v)$ está em V_1, pois $e(V) = V_1$ e $r(V_1) \subseteq V_1$. Portanto $ere(v) = re(v)$. Isso implica que $ere = re$, para qualquer $r \in R$, desta igualdade concluímos que $(1-e)r = (1-e)r(1-e)$, pois $(1-e)r(1-e) = (r-er)(1-e) = r-er-re+ere = r-er-re+re = r-er = (1-e)r$. Daí, I_1 é também um ideal à direita, pois se $r, s \in R$, então temos que $r(1-e)s = r(1-e)s(1-e) \in I_1$. Ademais, observe que $I_1 = \mathrm{Ann}_R V_1$, pois como $V_1 = e(V)$, daí $r(V_1) = 0$ se, e somente se, $re(V) = r(V_1) = 0$, ou seja, $re = 0$. Logo, como $r = re + r(1-e)$ e $(1-e)e = 0$, concluímos que $re = 0$ se, e somente se, $r \in I_1$. Pois, suponha que $r \in I_1$, então existe $s \in R$, tal que $r = s(1-e)$, daí $re = s(1-e)e = 0$. Reciprocamente, suponha que $re = 0$, daí, $r = re + r(1-e) = r(1-e) \in I_1$.

Lema 3.2.3. Seja $\psi : R \to R'$ um isomorfismo de álgebras graduadas, onde $R = \mathrm{End}_D\mathcal{F}$ e $R' = \mathrm{End}_{D'}\mathcal{F}'$ são anéis de endomorfismos das flags $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ sobre álgebras graduadas com divisão D e D' respectivamente. Se e é um idempotente não nulo de R tal que $e(V) = V_1$, então $V_1' = \psi(e)(V')$.

Demonstração. A igualdade $ere = re$ na Observação 3.2.2, implica que $\psi(e)(V')$ é um submódulo de V', onde V' é considerado como um R'-módulo. De fato, observe que é imediato que este conjunto é fechado para soma de seus elementos e considere $v' \in V'$ e $r' \in R'$, então existe $r \in R$, tal que $\psi(r) = r'$, daí, $r'(\psi(e)(v')) = \psi(r)(\psi(e)(v')) = \psi(re)(v') = \psi(ere)(v') = \psi(e)(\psi(re))(v') \in \psi(e)(V')$. Está claro que este é um submódulo não nulo, uma vez que e é não nulo e ψ é um isomorfismo. Portanto, o Lema 3.1.4 implica que $V_1' \subset \psi(e)(V')$, uma vez que os únicos submódulos de V' como R'-módulos são $0, V_1', \ldots, V_r'$. Sejam f' uma projeção de V' em V_1' e $f = \psi^{-1}(f')$. Segue da inclusão $V_1' \subseteq \psi(e)(V')$ e do fato que $\psi(e)$ restrita a V_1' é igual a identidade (uma vez que $\psi(e)$ é um idempotente), que $\psi(e)\psi(f) = \psi(f)$, e como ψ é um isomorfismo, temos que $ef = f$. Neste caso $0 \neq f(V) = ef(V) \subseteq V_1$, pois $f(V)$ é um submódulo não nulo de V, uma vez que $f \in End_D V$. Assim, o Lema 3.1.4 implica que $f(V) = V_1 = e(V)$. Sendo assim $fe = e$, portanto $\psi(e)(V') \subseteq \psi(f)(V') = V_1'$. $\square$

Lema 3.2.4. Sejam $R = \mathrm{End}_D\mathcal{F}$ e $R' = \mathrm{End}_{D'}\mathcal{F}'$ os anéis dos endomorfismos das flags graduadas $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ sobre as álgebras graduadas com divisão D e D', respectivamente. Sejam $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{F}$ e e_{ij} os endomorfismos D-lineares de V tais que $e_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$. Se $\psi : R \to R'$ é um isomorfismo de álgebras graduadas, então $\dim_D V = \dim_{D'} V'$. Ademais, dado um v_1' em $\psi(e_{11})(V')$ não nulo, existem $v_2', \ldots, v_n'$ em V' tais que $\beta' = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ é uma base para V' e $\psi(e_{ij})(v_k') = \delta_{jk}v_i'$ para quaisquer i, j, tais que $e_{ij} \in R$.

Demonstração. É fácil verificar que $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ são idempotentes ortogonais em R, tais que $e_{11} + \cdots + e_{nn}$ é a identidade de R. Isto implica que $V' = \oplus_{j=1}^n Q_j'$, onde

$Q'_j = \psi(e_{jj})(V')$, pois, suponha que $v' \in V'$ e como ψ é um isomorfismo de álgebras graduadas, logo leva identidade em identidade, temos que $v' = \psi(e_{11} + \cdots + e_{nn})(v') = (\psi(e_{11}) + \cdots + \psi(e_{nn}))(v') = \psi(e_{11})(v') + \cdots + \psi(e_{nn})(v')$, logo $V' = \sum_{j=1}^{n} Q'_j$. Agora suponha que exista $v'_j \in Q'_j$, para $j = 1, \ldots, n$, tais que $v'_1 + \cdots + v'_n = 0$, sendo assim, existem w'_j, tais que $\psi(e_{jj})(w'_j) = v'_j$, com $j = 1, \ldots, n$. Com isso $0 = v'_1 + \cdots + v'_n = \psi(e_{11})(w'_1) + \cdots + \psi(e_{nn})(w'_n)$. Aplicando-se $\psi(e_{jj})$, para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$ temos que $0 = \psi(e_{jj})(\psi(e_{11})(w'_1) + \cdots + \psi(e_{nn})(w'_n)) = \psi(e_{jj})(w'_j) = v'_j$, com isso, pela arbitrariedade do j, temos que a soma é direta.

Observe que os Q'_j são D'-subespaços não nulos de V', pois como ψ é um isomorfismo e os e_{jj} são não nulos, cada $\psi(e_{jj})$ é uma aplicação não nula, logo suas imagens também são não nulas, ou seja, os Q'_j's são não nulos, e como são imagens de transformações D'-lineares, concluímos que são D'-subespaços. Com isto, concluímos que

$$\dim_{D'} V' = \sum_{j=1}^{n} \dim_{D'} Q'_j \geq n = \dim_D V.$$

De maneira inteiramente análoga, prova-se que $\dim_D V \geq \dim_{D'} V'$, portanto concluímos que $\dim_{D'} V' = \dim_D V$. Isto implica que $\dim_{D'} Q'_j = 1$, para $j = 1, \ldots, n$. Dado e_{ij} em R, temos que $\psi(e_{ij})Q'_k = \psi(e_{ij})\psi(e_{kk})(V') = 0$, para qualquer $k \neq j$. Se $0 = \psi(e_{ij})Q'_j = \psi(e_{ij})\psi(e_{jj})(V') = \psi(e_{ij}e_{jj})(V') = \psi(e_{ij})(V')$, então $\psi(e_{ij}) = 0$, uma contradição, já que ψ é um isomorfismo e e_{ij} é não nulo. Portanto, $\psi(e_{ij})Q'_j \neq 0$. A igualdade $e_{ii}e_{ij} = e_{ij}$ implica que $\psi(e_{ij})Q'_j \subseteq Q'_i$, pelo argumentado acima. Como Q'_i e Q'_j são D'-módulos de dimensão 1, então concluímos que $v' \mapsto \psi(e_{ij})v'$ é um isomorfismo de Q'_j em Q'_i, como D'-módulos. Dados $v'_1 \in Q'_1 = \psi(e_{11})$, considere v'_i o único elemento de Q'_i tal que $\psi(e_{1i})(v'_i) = v'_1$, $i = 2, \ldots, n$. Então $\beta' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ é uma base de V', uma vez que ele é a soma direta dos Q'_j. Além disso, para qualquer $e_{ij} \in R$ e $k \neq j$, temos que $v'_k = \psi(e_{kk})(v')$, para algum $v' \in V'$, portanto $\psi(e_{ij})(v'_k) = \psi(e_{ij})\psi(e_{kk})(v') = 0$. Ademais, $e_{1i} \in R$ e

$$\psi(e_{1i})\psi(e_{ij})(v'_j) = \psi(e_{1j})(v'_j) = v'_1,$$

e como $\psi(e_{1i})$ é um isomorfismo e $\psi(e_{1i})(v'_i) = v'_1$, concluímos que $\psi(e_{ij})(v'_j) = v'_i$ e como a soma é direta. Portanto segue a demonstração. $\square$

Observação 3.2.5. Seja R uma álgebra graduada simples que tem um ideal à esquerda minimal I. Se V é um R-módulo graduado simples, então existe $g \in G$ tal que V é isomorfo a $I^{[g]}$, como R-módulos graduados (veja [20, Lemma 2.7]).

Teorema 3.2.6. Sejam D e D' álgebras G-graduadas com divisão, V e V' módulos graduados à direita sobre D e D', respectivamente. Considere $R = \mathrm{End}_D \mathcal{F}$ e $R' = \mathrm{End}_{D'} \mathcal{F}'$, onde $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ e $\mathcal{F}' : V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_{r'}$ flags G-graduadas em V e V', respectivamente. Se $\psi : R \to R'$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas, então $r = r'$ e, existem um $g \in G$ e um isomorfismo (ψ_0, ψ_1) de $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, \mathcal{F}^{[g]})$ em $(D', \mathcal{F}')$ tais que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para qualquer $r \in R$ e para todo $v \in V$.

Demonstração. Seja W_1 um subespaço de V tal que $V = V_1 \oplus W_1$ e denote e como sendo a projeção de V em V_1. Então e é um idempotente em R. O Lema 3.2.1 implica que $R = R_1 \oplus I_1$, onde $R_1 = Re$ e $I_1 = R(1-e)$. Como ψ é linear, podemos considerar em V' uma estrutura de R-módulo à esquerda, definida pela seguinte ação $rv' := \psi(r)(v')$, daí, o Lema 3.2.3 implica que $e(V') = V_1'$. Da Observação 3.2.2 temos que $I_1V_1 = 0$; como $\psi(e)$ é um idempotente em R' e V' é um R-módulo, temos também que $I_1V_1' = 0$, logo $RV_1 = (R_1 \oplus I_1)V_1 = R_1V_1$ e $RV_1' = R_1V_1'$. Como V_1 e V_1' são R-módulos simples (pelo Lema 3.1.4), concluímos que V_1 e V_1' são R_1-módulos simples. A Observação 3.2.5 implica que existe um $g \in G$ e um isomorfismo $\psi_1' : V_1^{[g]} \to V_1'$ de R_1-módulos. Daí, como $R = R_1 \oplus I_1$ e $I_1V_1 = I_1V_1' = 0$, temos que ψ_1' é um isomorfismo de R-módulos. Defina agora, $\psi_0 :^{[g^{-1}]} D^{[g]} \to D'$ dada por

$$v'\psi_0(d) = \psi_1'\left((\psi_1')^{-1}(v')d\right),$$

para $v' \in V_1'$ e $d \in D$. Temos que esta aplicação é um isomorfismo de álgebras graduadas. Suponha que $d_1, d_2 \in^{[g^{-1}]} D^{[g]}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Inicialmente, observe que esta aplicação está bem definida, pois se $d_1 = d_2$, temos então que $v'\psi_0(d_1) = \psi_1'((\psi_1')^{-1}(v')d_1) = \psi_1'((\psi_1')^{-1}(v')d_2) = v'\psi_0(d_2)$ para todo $v' \in V'$, logo $\psi_0(d_1) = \psi_0(d_2)$. Ademais, como ψ_1' é um isomorfismo de R-módulos, temos

$$v'\psi_0(d_1 + \lambda d_2) = \psi_1'\left(((\psi_1')^{-1}(v'))(d_1 + \lambda d_2)\right) = \psi_1'\left((\psi_1')^{-1}(v')d_1 + \lambda(\psi_1^{-1})(v')d_2\right) =$$

$$\psi_1'\left((\psi_1')^{-1}(v')d_1\right) + \lambda\psi_1\left((\psi_1')^{-1}(v')d_2\right) = (v')(\psi_0(d_1) + \lambda\psi_0(d_2))$$

e

$$(v')\psi_0(d_1d_2) = \psi_1'((\psi_1')^{-1}(d_1d_2)) = \psi_1'((\psi_1')^{-1}(\psi_1'((\psi_1')^{-1}(v'))d_1)d_2) =$$

$$(\psi_1'((\psi_1^{-1})^{-1})(v')d_1)\psi_0(d_2) = (v'\psi_0(d_1))\psi_0(d_2) = v'\psi_0(d_1)\psi_0(d_2)$$

assim ψ_0 é um homomorfismo de álgebras. Suponha agora que $d \in D$ tenha grau igual a $g^{-1}hg$, logo em ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]}$ terá grau h e suponha que v' é um elemento homogêneo de grau tg em V_1, então, em $V_1^{[g]}$ terá grau t. Assim $\psi_1'((\psi_1')^{-1}(v')d)$ tem grau th em V_1', uma vez que ψ_1' é um isomorfismo de álgebras graduadas. Logo $\psi_0(d)$ tem grau h e portanto ψ_0 é um isomorfismos de álgebras graduadas. Contudo, concluímos que (ψ_0, ψ_1') é um isomorfismo graduado de pares de $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, V_1^{[g]})$ em (D', V_1').

Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para $\mathcal{F}$ e $\beta' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ a base de V' dada no Lema 3.2.4 com $v_1' = \psi_1'(v_1)$. Denote $\psi_1 : V \to V'$ a aplicação dada por

$$\psi_1(v_1d_1 + \cdots + v_nd_n) = v_1'\psi_0(d_1) + \cdots + v_n'\psi_0(d_n). \tag{3.1}$$

Pela Equação (3.1) temos que $\psi_1(v + w) = \psi_1(v) + \psi_1(w)$ e $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$ para quaisquer $v, w \in V$, $d \in D$. Além disso, observe que (ψ_0, ψ_1) é um isomorfismo de pares de $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, V^{[g]})$ em (D', V'), uma vez que ψ_1 está definida nos elementos das bases e conserva o grau, pois ψ_0 é um isomorfismo de álgebras graduadas. Como $e_{ij}v_k = \delta_{jk}v_i$ e $e_{ij}v'_k = \delta_{jk}v'_i$, concluímos que dados e_{ij} em R e v_k em β, temos que

$$\psi_1(e_{ij}v_k) = \psi_1(\delta_{jk}v_i) = \delta_{jk}\psi_1(v_i) = \delta_{jk}v'_i = e_{ij}v'_k = e_{ij}\psi_1(v_k).$$

Daí, pela equação anterior, concluímos que

$$\psi_1(e_{ij}v) = e_{ij}\psi_1(v), \tag{3.2}$$

para quaisquer $e_{ij} \in R$ e $v \in V$.

Dado $d \in D$, denote r_d como sendo o endomorfismo D-linear de V tal que $r_d(v_k) = v_kd$, para $k = 1, \ldots, n$. Claramente $r_d \in R$, para todo $d \in D$. Além disso, temos que

$$r_dv'_1 = r_d\psi_1(v_1) = \psi_1(r_dv_1) = \psi_1(v_1d) = \psi_1(v_1)\psi_0(d) = v'_1\psi_0(d).$$

Ademais note que $r_dv'_k = v'_k\psi_0(d)$, para $k = 2, \ldots, n$. De fato, note primeiramente que para quaisquer $d \in D$ e $e_{ij} \in R$ temos que $e_{ij}r_d = r_de_{ij}$, pois se $v = v_1d_1 + \cdots + v_vd_n \in V$, então $e_{ij}r_d(v) = e_{ij}r_d(v_1d_1 + \cdots + v_vd_n) = e_{ij}(v_1d_1d + \cdots + v_vd_nd) = v_id_id$ e $r_de_{ij}(v) = r_de_{ij}(v_1d_1 + \cdots + v_vd_n) = r_d(v_id_i) = v_id_id$, e assim temos o que foi afirmado por último. Agora, sejam $d'_1, \ldots, d'_n$ os elementos em D' tais que

$$r_dv'_k = v'_1d'_1 + \cdots + v'_kd'_k.$$

Se $i \neq k$, então $v'_id'_i = e_{ii}(r_dv'_k) = r_de_{ii}v'_k = 0$, daí, como $v'_i \neq 0$ e D' é uma álgebra graduada com divisão, temos que $d'_i = 0$. Portanto, $r_dv'_k = v'_kd'_k$ e concluímos que

$$v'_id'_k = e_{ik}(v'_k)d'_k = e_{ik}(v'_kd'_k) = e_{ik}r_d(v'_k) = r_de_{ik}(v'_k) = r_dv'_i = v'_i\psi_0(d),$$

isto implica que $d'_k = \psi_0(d)$ e consequentemente temos que $r_dv'_k = v'_k\psi_0(d)$. Daí, temos que

$$\psi_1(r_dv_k) = \psi_1(v_kd) = v'_k\psi_0(d) = r_dv'_k = r_d\psi_1(v_k),$$

e portanto

$$\psi_1(r_dv) = r_d\psi_1(v), \tag{3.3}$$

para quaisquer $d \in D$ e $v \in V$, uma vez que β é base de V. Como já provado após a Observação 3.1.2, temos que $R = End_D(\mathcal{F})$ é gerado como um anel pelos e_{ij}, que estão em R junto com os elementos $\{r_d \mid d \in D\}$. Portanto as Equações (3.2) e (3.3) implicam que $\psi_1(rv) = r\psi_1(v)$ para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$. Assim $\psi_1(V_1) \subset \cdots \subset \psi_1(V_r)$ são R-submódulos de V'. Analogamente, prova-se que $\psi_1^{-1}(V'_1) \subset \cdots \subset \psi_1^{-1}(V'_{r'})$ são R-submódulos de V. Daí, pelo Lema 3.1.4 temos que $r = r'$ e $\psi_1(V_i) = V'_i$ para $i = 1, \ldots, r$. $\square$

Agora iremos trabalhar para demonstrar o primeiro resultado descrito no inicio desta seção. Para isso precisamos da seguinte definição.

Definição 3.2.7. Considere $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, onde n é um número natural. Definimos $V(D, n, \mathbf{g})$ como sendo o D-módulo à direita graduado $\oplus_{i=1}^{n} {}^{[g_i]}D$.

A proposição à seguir mostra que esta definição é de suma importância para o nosso trabalho.

Proposição 3.2.8. Seja V um D-espaço vetorial graduado de dimensão finita. Existe terna $(D, n, \mathbf{g})$ tal que V é isomorfo a $V(D, n, \mathbf{g})$.

Demonstração. Sejam V um D-módulo graduado de dimensão finita, com $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sendo uma de suas bases homogêneas, tal que $deg\ v_i = h_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Defina $\mathbf{g} = (h_1, \ldots, h_n)$ e $V(D, n, \mathbf{g})$ e considere a seguinte aplicação

$$\phi : V \longrightarrow V(D, n, \mathbf{g}) \tag{3.4}$$

definida por $\phi(v_1 d_1 + \cdots + v_n d_n) = (d_1, \ldots, d_n)$, onde d_i está em ${}^{[h_i]}D$, para $i = 1, \ldots, n$. Observe que esta aplicação está bem definida e que é um homomorfismo de D-espaços vetoriais. Além disso, se v é um elemento homogêneo de grau g, então existem $d_{i_1}, \ldots, d_{i_k} \in D$, com k inteiro positivo e $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, tais que, $v = v_{i_1} d_{i_1} + \cdots + v_{i_k} d_{i_k}$, onde $deg\ (v_{i_j} d_{i_j}) = g$, para $j = 1, \ldots, k$. Logo, $deg\ d_{i_j} = l_{i_j} g$ em G, onde $l_{i_j} = (deg\ v_{i_j})^{-1} = h_{i_j}^{-1}$, sempre que d_{i_j} for não nulo. Consequentemente, d_{i_j} terá grau g em ${}^{[h_{i_j}]}D$, para $j = 1, \ldots, k$. Com isto, $\phi(v) = (d_{i_1}, \ldots, d_{i_k})$ terá grau g em $V(D, n, \mathbf{g})$. Portanto, ϕ é um isomorfismo e temos que V e $V(D, n, \mathbf{g})$ são isomorfos. $\square$

Proposição 3.2.9. Os pares $(D, V(D, n, \mathbf{g}))$ e $(D', V(D', n', \mathbf{g}'))$ são isomorfos se, e somente se, $D \cong D'$, $n = n'$ e existem $h_1, \ldots, h_n \in \operatorname{supp} D$, $\sigma \in S_n$ tais que $g_i = g'_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Inicialmente, observe que podemos considerar ${}^{[g'_{\sigma(i)}]}D'$ como sendo um D-módulo, uma vez que $D \cong D'$, e que ${}^{[g_i]}D$ e ${}^{[g'_{\sigma(i)}]}D'$ são unidimensionais como D-módulos.Suponha inicialmente que $(D, V(D, n, \mathbf{g}))$ e $(D', V(D', n', \mathbf{g}'))$ são isomorfos. Então, pela definição de isomorfismo de pares temos que $D \cong D'$, e $V(D, n, \mathbf{g}) \cong V(D', n', \mathbf{g}')$, consequentemente $n = n'$. Daí, pela definição destes módulos irredutíveis, temos que existe $\sigma \in S_n$, tal que ${}^{[g_i]}D \cong {}^{[g'_{\sigma(i)}]}D'$, para $i = 1, \ldots, n$. Ademais, temos que $1 \in^{[g_i]} D_{g_i}$, logo considerando ϕ_i como sendo o isomorfismo entre ${}^{[g_i]}D$ e ${}^{[g_{\sigma(i)}{}']}D'$, temos que $0 \neq \phi_i(1) \in {}^{[g'_{\sigma(i)}]}D'_{g_i} = {}^{[g'_{\sigma(i)}]}D'_{g'_{\sigma(i)}(g'_{\sigma(i)})^{-1}g_i} = D'_{(g'_{\sigma(i)})^{-1}g_i}$, para $i = 1, \ldots, n$. Assim $h_{\sigma(i)} = (g'_{\sigma(i)})^{-1} g_i \in \operatorname{Supp} D$ e consequentemente existem $h_1, \ldots, h_n \in \operatorname{supp} D$, tais que $g_i = g'_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)}$.

Suponha agora que $D \cong D'$, $n = n'$ e que existem $h_1, \ldots, h_n \in \operatorname{supp} D$, $\sigma \in S_n$ tais que $g_i = g'_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)}$, para $i = 1, \ldots, n$. Como $h_1, \ldots, h_n \in \operatorname{supp} D$, podemos escolher $d_i \in D_{h_{\sigma(i)}}$ não nulo, para $i = 1, \ldots, n$. Daí, defina a aplicação $\phi_i : {}^{[g_i]}D \longrightarrow {}^{[g'_{\sigma(i)}]}D$, dada por $\phi_i(v) = dv$. Observe que ela é linear e como os D-módulos envolvidos são unidimensionais e d é não nulo, temos que ela é um isomorfismo de D-módulos. Para provarmos que ela é graduada, considere um elemento graduado de D, $v \in D_g = {}^{[g_i]}D_{g_i g}$, logo, $\phi(v) = dv \in D_{h_{\sigma(i)}g} = {}^{[g'_{\sigma(i)}]}D_{g'_{\sigma(i)}h_{\sigma(i)}g} = {}^{[g'_{\sigma(i)}]}D_{g_i g}$, portanto, esta aplicação é graduada, para $i = 1, \ldots, n$. Assim, reordenando se necessário, $\phi = \prod_{i=1}^{n} \phi_i$ é um isomorfismo de espaços graduados entre $V(D, n, \mathbf{g})$ e $V(D', n', \mathbf{g}')$, como queríamos. $\square$

Dada a tripla $(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$, onde D é uma álgebra com divisão G-graduada, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ é uma r-upla de números naturais e $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, onde $n = m_1 + \cdots + m_r$. Denote $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ a flag graduada $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$, onde $V_0 = 0$ e $V_i = \oplus_{j=1}^{n_i} {}^{[g_j]}D$, $n_i = m_1 + \cdots + m_i$, para $i = 1, \ldots, r$. O anel $R = \mathrm{End}_D\mathcal{F}$ dos endomorfismos desta flag será denotado por $\mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$.

Observação 3.2.10. Observe que qualquer flag dada é isomorfa a uma flag do tipo $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$. Pois, seja $\mathcal{F} : V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ uma flag em um D-espaço vetorial graduado V, com base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Pelo argumentado acima, temos que V é isomorfo a $V(D, n, \mathbf{g})$, onde este último foi definido anteriormente. Considerando em $V(D, n, \mathbf{g})$ a flag graduada $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g}) : V'_0 \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_s$, onde $V'_0 = 0$ e $V'_i = \oplus_{j=1}^{n_i} {}^{[g_j]}D$, $n_i = m_1 + \cdots + m_i$, para $i = 1, \ldots, r$, temos que o isomorfismo de D-espaços vetoriais, definido na Equação (3.4), é um isomorfismo de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$. De fato, seja $v \in V_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, r\}$, então exitem $d_1, \ldots, d_{n_i}$, tais que, $v = v_1 d_1 + \cdots + v_{n_i} d_{n_i}$, daí, $\phi(v) = d_1 + \cdots + d_{n_i} \in V'_i = \oplus_{j=1}^{n_i} {}^{[g_j]}D$, logo $\phi(V_i) \subseteq V'_i$. Assim, como ϕ é um isomorfismo e, V_i e V'_i têm a mesma dimensão, temos que $\phi(V_i) = V'_i$, como queríamos. Portanto, descrever todas as flags do tipo definida acima, a menos de isomorfismos, é na verdade descrever todas as flags. Consequentemente, o mesmo vale para os anéis dos endomorfismo das flags.

Lema 3.2.11. Sejam $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g}) : V_0 \subset \cdots \subset V_r$ e $\mathcal{F}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}') : V'_0 \subset \cdots \subset V'_r$ flags graduadas de mesmo comprimento e seja $\psi_0 : D \to D'$ um isomorfismo de álgebras graduadas. Então existe um isomorfismo $\psi_1 : V_r \to V'_r$ de espaços vetoriais graduados tal que (ψ_0, ψ_1) é um isomorfismo de pares de $(D, \mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g}))$ em $(D', \mathcal{F}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}'))$ se, e somente se, $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ e existem $h_1, \ldots, h_n \in \mathrm{supp}\ D$, onde $n = n_1 + \cdots + n_r$, e $\sigma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_r}$ tais que $g_i = g'_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)}$.

Demonstração. Denote $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ e $\mathbf{m}' = (m'_1, \ldots, m'_r)$. Assuma que existe um isomorfismo graduado de espaços vetoriais $\psi_1 : V_r \to V'_r$ tal que (ψ_0, ψ_1) é um isomorfismo de pares. Neste caso, os pares $(D, V_{i+1}/V_i)$ e $(D', V'_{i+1}/V'_i)$ são isomorfos, $i = 0, \ldots, r-1$, uma vez que ψ_1 é um isomorfismo de flags. Logo $\psi(V_j) = V_j$, para $j = 0, 1, \ldots, r$ e se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ for uma base de $\mathcal{F}$, então $\beta_i = \{\overline{v}_{n_i+1}, \ldots, \overline{v}_{n_i+m_{i+1}}\}$ é base para V_{i+1}/V_i, onde consideramos $v_0 = 0$, $n_0 = 0$ e $n_i = n_{i-1} + m_i$, para qualquer

$i = 0, 1, \ldots, r-1$. Daí considere $\overline{\psi}^{(i)} : V_{i+1}/V_i \longrightarrow V'_{i+1}/V'_i$ dado por $\overline{\psi}^{(i)}(\overline{v}) = \overline{\psi_1(v)}$, para todo $v \in V_i$. É fácil ver que esta aplicação está bem definida, pois se $\overline{v} = \overline{w}$ em V_{i+1}/V_i, então $v - w \in V_i$ e $\psi(v) - \psi(w) \in V'_i$, consequentemente $\overline{\psi(v)} = \overline{\psi(w)}$ em V'_{i+1}/V'_i. Observe que $\overline{\psi}^{(i)}$ leva β_i em β'_i, logo é um isomorfismo, para $i = 0, 1, \ldots, r-1$. Suponha, sem perda de generalidade, que β_i seja uma base constituída de elementos homogêneos com graus respectivamente iguais a $g_{n_i+1}, \ldots, g_{n_i+m_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, r-1$. Analogamente, suponha que V'_{i+1}/V'_i tenha uma base de elementos homogêneos com respectivos graus $g'_{n'_i+1}, \ldots, g'_{n'_i+m'_{i+1}}$. A Observação 3.2.9 implica que $m_i = m'_i$, que existem $h_{n_i+1}, \ldots, h_{n_i+m_i} \in \text{supp } D$ e que existe uma permutação σ_i dos elementos $\{n_i + 1, \ldots, n_i + m_i\}$, tais que $g_j = g'_{\sigma(j)} h_{\sigma(j)}$, para qualquer $j \in \{n_i + 1, \ldots, n_i + m_i\}$. Portanto, como $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ e $\mathbf{m'} = (m'_1, \ldots, m'_r)$, concluímos que $\mathbf{m} = \mathbf{m'}$. Ademais, se definirmos $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$, então $g_i = g'_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)}$, para $i = 1, \ldots, n$.

Para a recíproca, suponha que $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ seja uma base de $\mathcal{F}(D', \mathbf{m'}, \mathbf{g'})$ de elementos homogêneos com respectivos graus $\deg_G v'_i = g'_i$. Sejam $d'_1, \ldots, d'_n$ elementos homogêneos não triviais de D', com graus $h_1, \ldots, h_n$, respectivamente. Agora, sejam $w_i = v'_{\sigma(i)} d'_{\sigma(i)}$, como D' é uma álgebra graduada com divisão, então o conjunto $\{w_1, \ldots, w_n\}$ é uma base de $\mathcal{F}(D', \mathbf{m'}, \mathbf{g'})$ e $\deg_G w_i = g_i$, por hipótese, para $i = 1, \ldots, n$. Agora, seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ de elementos homogêneos com graus $g_1, \ldots, g_n$, respectivamente. Então a aplicação $\psi_1(v_1 d_1 + \cdots + v_n d_n) = w_1 \psi_0(d_1) + \cdots + w_n \psi_0(d_n)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais graduados, pois leva uma D-base de um espaço em uma D'-base do outro e conserva o grau dos elementos desta base. Daí, pela definição de ψ_1 e como ψ_0 e ψ_1 são isomorfismos, temos que (ψ_0, ψ_1) é um isomorfismo de pares. □

Corolário 3.2.12. As álgebras $\mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ e $\mathcal{A}(D', \mathbf{m'}, \mathbf{g'})$ são isomorfas se, e somente se, $\mathbf{m} = \mathbf{m'}$, se existe um $g \in G$ tal que ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]} \cong D'$ e se existem $h_1, \ldots, h_n \in \text{supp } D$ e $\sigma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_s}$ tais que $g'_i = g_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)} g$ para $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Supondo que as álgebras $\mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ e $\mathcal{A}(D', \mathbf{m'}, \mathbf{g'})$ são isomorfas, o Teorema 3.2.6 implica que as flags $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ e $\mathcal{F}(D', \mathbf{m'}, \mathbf{g'})$ são do mesmo comprimento e, existem $g \in G$ e um isomorfismo de pares (ψ_0, ψ_1) de $(D', \mathcal{F}')$ em $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, \mathcal{F}^{[g]})$. Além disso, observe que $End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})^{[g]} = End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})$, pois, suponha que $f \in End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ seja homogêneo de grau h, então temos que

$$f(V_{tg}^{[g]}) = f(V_t) \subseteq V_{ht} = V_{htg}^{[g]}$$

logo, $f \in End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})^{[g]}$ com grau h e daí $End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g}) \subseteq End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})^{[g]}$, uma vez que toda aplicação em $End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ é soma de elementos homogêneos. Por outro lado, suponha que $f \in End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})^{[g]}$, tal que é homogêneo de grau h, então temos que

$$f(V_t) = f(V_{tg}^{[g]}) \subseteq V_{htg}^{[g]} = V_{ht}$$

logo $f \in End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ possui grau homogêneo h, assim $End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})^{[g]} \subseteq End_D\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbf{m}, \mathbf{g})$.

Agora, suponha que as flags $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ e $\mathcal{F}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}')$ são do mesmo comprimento e, existem $g \in G$ e um isomorfismo de par (ψ_0, ψ_1) de $(D', \mathcal{F}')$ em $({}^{[g^{-1}]}D^{[g]}, \mathcal{F}^{[g]})$. Defina $\varphi : \mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})^{[g]} \longrightarrow \mathcal{A}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}')$ dado por $f \longrightarrow \varphi(f)(v') = \psi_1^{-1}(f(\psi_1(v')))$. Observe que esta aplicação é um isomorfismo de álgebras graduadas, a demonstração é análoga a feita no Teorema 3.2.6 e por $\mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})^{[g]} = \mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$, tem-se que $\mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ e $\mathcal{A}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}')$ são isomorfas. □

Agora iremos considerar a equivalência entre os anéis dos endomorfismos de flags graduadas. No caso de anéis de endomorfismos de espaços vetoriais, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.13. [20, Proposition 2.33] Sejam G e H grupos. Sejam D álgebra G-graduada com divisão e D' álgebra H-graduada com divisão. Considere V e V' módulos à direita graduados sobre D e D', respectivamente, de dimensão finita. Se $\psi : R \to R'$ é uma equivalência de álgebras graduadas, onde $R = \mathrm{End}_D V$ e $R' = \mathrm{End}_{D'} V'$, então existe uma equivalência (ψ_0, ψ_1) de (D, V) em (D', V') tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$ para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$.

Como no Teorema 3.2.6, obtemos um resultado análogo para o anel dos endomorfismos de flags graduadas.

Corolário 3.2.14. Sejam G e H grupos. Sejam D álgebra G-graduada com divisão e D' álgebra H-graduada com divisão. Considere V e V' módulos à direita graduados sobre D e D', respectivamente, de dimensão finita. Considere $R = \mathrm{End}_D\mathcal{F}$ e $R' = \mathrm{End}_{D'}\mathcal{F}'$, onde $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ são flags graduadas em V e V', respectivamente. Se $\psi : R \to R'$ é uma equivalência de álgebras graduadas, então existe uma equivalência (ψ_0, ψ_1) de $(D, \mathcal{F})$ em $(D', \mathcal{F}')$, tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$.

Demonstração. Seja e uma projeção de V em V_1 e $R_1 = Re$. Segue do Lema 3.2.3 que $e' = \psi(e)$ é a projeção de V' em V_1'. Sejam $R_1' = R'e'$, segue do Lema 3.2.1 que $r \mapsto r\mid_{V_1}$ é um isomorfismo de R_1 em $\mathrm{End}_D V_1$ e $r' \mapsto r'\mid_{V_1'}$ é um isomorfismo de R_1' em $\mathrm{End}_D V_1'$. A restrição de ψ à R_1 é uma equivalência de R_1 em R_1', uma vez que ψ é um equivalência e $\psi(R_1) = \psi(Re) = \psi(R)\psi(e) = R'e' = R_1'$. Daí, a Proposição 3.2.13 implica que existe um par de equivalência (ψ_0, ψ_1) de (D, V_1) em (D', V_1') tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in R_1$ e todo $v \in V_1$. O Lema 3.2.1 implica que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in R$ e para todo $v \in R_1$, pois e atua sobre V_1 como a identidade e assim, temos que $\psi_1(rv) = \psi_1(rev) = \psi(re)\psi_1(v) = \psi(r)\psi(e)\psi_1(v) = \psi(r)\psi_1(ev) = \psi(r)\psi_1(v)$, onde a segunda igualdade se dá pelo fato de $re \in R$. Agora, considere que $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base para $\mathcal{F}$ e $\beta' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ a base de

$\mathcal{F}'$ obtida no Lema 3.2.4, com $v_1' = \psi_1(v_1)$. Então a aplicação $\psi_1 : V \to V'$ dada por $\psi_1(v_1 d_1 + \cdots + v_n d_n) = v_1'\psi_0(d_1) + \cdots + v_n'\psi_0(d_n)$ é uma equivalência de espaços vetoriais tal que (ψ_0, ψ_1) é uma equivalência de pares de $(D, \mathcal{F})$ em $(D', \mathcal{F}')$. Segue da prova do Teorema 3.2.6 que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para quaisquer $r \in R$ e $v \in V$. □

Como consequência deste corolário, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.2.15. Se as álgebras $\mathcal{A}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ e $\mathcal{A}(D', \mathbf{m}', \mathbf{h})$ são equivalentes, então D é equivalente a D', $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ e existem uma bijeção λ de $\{g(\text{supp } D) \mid g \in \text{supp } V\}$ em $\{g'(\text{supp } D') \mid g' \in \text{supp } V'\}$ e uma permutação $\sigma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_s}$, tais que $h_{\sigma(i)}\text{supp } D' = \lambda(g_i\text{supp } D)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. O Corolário 3.2.14 implica que existe uma equivalência de $\mathcal{F}(D, \mathbf{m}, \mathbf{g})$ em $\mathcal{F}(D', \mathbf{m}', \mathbf{g}')$. Sejam (ψ_0, ψ_1) uma equivalência de pares. Isso implica que D é equivalente à D' e $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$. Dado $g \in (\text{supp } V)$, existe um único $g' \in \text{supp } V'$, tal que $\psi_1(V_g) = V'_{g'}$, uma vez que ψ_1 é um isomorfismo. Assim, temos uma bijeção $g \mapsto g'$ entre o supp V e o supp V'. Como $\psi_1(vd) = \psi_1(v)\psi_0(d)$, para quaisquer $v \in V$ e $d \in D$, concluímos que $g(\text{supp } D) = h(\text{supp } D)$ se , e somente se, $g'(\text{supp } D') = h'(\text{supp } D')$, pois $v_g \in V_g$ e $d \in D_{h_1}$ se, e somente se, $\psi_1(v_g) \in V'_{g'}$ e $\psi_0(d) \in D'_{h_1'}$. Portanto $g(\text{supp } D) \mapsto g'(\text{supp } D')$ é uma bijeção, que denotaremos por λ. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{F}$ de elementos homogêneos de graus $g_1, \ldots, g_n$, respectivamente. Então $\{v_1', \ldots, v_n'\}$, onde $v_i' = \psi_1(v_i)$ é uma base de $\mathcal{F}'$ de elementos homogêneos de graus $g_1', \ldots, g_n'$, respectivamente. Portanto existe uma permutação $\sigma \in S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_s}$ tal que $\lambda(g_i\text{supp } D) = g_i'\text{supp } D' = h_{\sigma(i)}\text{supp } D'$. □

3.3 Graduações na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

Se $R = UT(p_1, \ldots, p_r)$ tem uma graduação elementar, então existe uma n-upla $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ de elementos de G, onde $n = p_1 + \cdots + p_r$, tal que $\deg_G e_{ij} = g_i g_j^{-1}$. Consequentemente, dada uma n-upla $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, denotaremos R_g como sendo o subespaço de R gerado pelas matrizes E_{ij} da base canônica de R, onde i, j são tais que $g_i g_j^{-1} = g$. Então $R = \oplus_{g \in G} R_g$ é uma graduação elementar em R.

Qualquer álgebra triangular superior em blocos munida de uma graduação elementar é isomorfa a uma álgebra dos endomorfismos de uma flag adequada sobre um corpo. Em [7] os autores provaram que dois anéis de endomorfismos deste tipo, são isomorfos se, e somente se, as respectivas flags graduadas são isomorfas, a menos de um shift. Ademais, os autores determinaram em termos das uplas associadas quando duas graduações elementares são isomorfas. Nesta seção, iremos demonstrar um resultado análogo sobre a álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos sobre uma álgebra graduada com divisão.

Sejam G um grupo, $R = M_n(\mathbb{K})$ com uma graduação elementar induzida por $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ e D uma álgebra graduada. O produto tensorial $R \otimes D$ tem uma G-graduação de tal maneira que $\deg_G(e_{ij} \otimes d) = g_i(\deg_G d)g_j^{-1}$. Se o grupo G é abeliano, o produto tensorial em quaisquer duas álgebras G-graduadas S e D têm a graduação canônica, onde $(S \otimes D)_g = \oplus_{hk=g} S_h \otimes D_k$, esta coincide com a graduação anterior se $S = R$ é uma álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{K})$ com uma graduação elementar. No resultado principal de [38] foi provado que se G é um grupo abeliano finito e o corpo base $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado de característica zero, então qualquer graduação em uma álgebra das matrizes triangulares em blocos é isomorfa, como álgebra graduada, a um produto tensorial de uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos com uma graduação elementar e uma álgebra de matrizes munido de uma graduação fina. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.1. [38, Theorem 3.2] Seja G um grupo abeliano finito e $UT(m_1, \ldots, m_r)$ uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$ de característica zero. Então existe uma decomposição $m_1 = tp_1, \ldots, m_r = tp_r$, um subgrupo $H \subset G$, e uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, onde $n = p_1 + \cdots + p_r$, tal que $UT(m_1, \ldots, m_r)$ é isomorfa a $M_t(\mathbb{K}) \otimes UT(p_1, \cdots, p_m)$ como álgebras G-graduadas, onde $M_t(\mathbb{K})$ é uma álgebra H-graduada com uma graduação fina de suporte H e $UT(p_1, \cdots, p_r)$ tem uma graduação elementar definida por $(g_1, \ldots, g_n)$.

Supondo que $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, o Lema 2.1.19 implica que uma graduação fina sobre $M_t(\mathbb{K})$ é uma graduação com divisão. Na próxima proposição, provaremos que a álgebra $M_t(\mathbb{K}) \otimes UT(p_1, \cdots, p_m)$ do teorema anterior é isomorfa a um anel de endomorfismos de uma determinada flag sobre $D = M_t(\mathbb{K})$.

Proposição 3.3.2. Sejam G um grupo, D uma álgebra graduada com divisão, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_r)$ uma r-upla de números naturais e $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ uma n-upla de elementos de G, onde $n = p_1 + \cdots + p_r$. A álgebra $UT(p_1, \ldots, p_r) \otimes_{\mathbb{K}} D$ com a graduação dada por $\deg_G E_{ij} \otimes d = g_i(\deg_G d)g_j^{-1}$ é isomorfa a álgebra $\mathcal{A}(D, \mathbf{n}, \mathbf{g})$.

Demonstração. A álgebra $UT(p_1, \ldots, p_r) \otimes_{\mathbb{K}} D$ é uma subálgebra homogênea de $M_n(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} D$. Uma vez que $UT(p_1, \ldots, p_r)$ é uma subálgebra homogênea de $M_n(\mathbb{K})$, então, temos que $UT(p_1, \ldots, p_s) \otimes_{\mathbb{K}} D$ é uma subálgebra homogênea de $M_n(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} D$. Pelo

Teorema 3.1.3 temos que $\mathcal{A}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ é uma subálgebra homogênea de $\mathrm{End}_D V$, onde $V = V(D, n, \mathbf{g})$. Sejam $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathcal{F}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ composta de elementos homogêneos tais que $\deg_G v_i = g_i$. Denote $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} D \to \mathrm{End}_D V$ como sendo a aplicação dada por

$$\varphi((\lambda_{ij}) \otimes d)v_k = \sum_i v_i(\lambda_{ik} d), k = 1, \ldots, n.$$

Observe que esta aplicação é um isomorfismo de álgebras graduadas. De fato, inicialmente note que esta aplicação é uma transformação D-linear. Agora, suponha que $\varphi((\lambda_{ij}) \otimes d) = 0$, com $(\lambda_{ij}) \otimes d \neq 0$. Logo, para todo $k = 1 \ldots n$, temos $0 = \varphi((\lambda_{ij}) \otimes d)v_k = (\lambda_{1k} d)v_1 + \cdots + (\lambda_{nk} d)v_n$ e por β ser uma base, temos que $\lambda_{ij} d = 0$, para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$, como $d \neq 0$, temos que $\lambda_{ij} = 0$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$, o que é um absurdo. Assim podemos concluir que φ é injetiva. Agora, considere a base canônica de $End_D(V)$, dada pelas aplicações e_{ij} e observe que $\varphi((E_{ij}) \otimes 1)v_k = e_{ij}(v_k)$. Com isso, concluímos que φ é sobrejetiva. Agora suponha que d seja um elemento homogêneo de grau g, daí, $E_{ij} \otimes d$ tem grau $g_i g g_j^{-1}$. Assim temos que $\varphi(E_{ij} \otimes d)v_k = 0$, se $k \neq j$ e $\varphi(E_{ij} \otimes d)v_k = v_i d$, ou seja, a aplicação $\varphi(E_{ij} \otimes d)$ leva um elemento homogêneo de grau g_j em um elemento homogêneo de grau $g_i g$, logo tem grau igual $g_i g g_j^{-1}$. Portanto, φ é um isomorfismo graduado.

Como já provamos no Exemplo 1.1.5, temos que $\{E_{ij} | i \in I_p, j \in I_q, \text{com } p \leq q \text{ e } p, q = 1, \ldots, r\}$ é uma base para $UT(p_1, \ldots, p_r)$. Além disso, depois da observação 3.1.2, provamos que $\{e_{ij} | i \in I_p, j \in I_q, \text{com } p \leq q \text{ e } p, q = 1, \ldots, r\}$ é uma base para $\mathcal{F}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$. Ademais, como $\varphi(E_{ij} \otimes d) = e_{ij} r_d$, concluímos que φ aplica $UT(p_1, \ldots, p_s) \otimes_{\mathbb{K}} D$ em $\mathcal{A}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ isomorficamente. $\square$

Como consequência, provaremos o seguinte resultado, que é central no nosso capítulo, uma vez que descreve quando dois produtos tensoriais do tipo $M_t(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} UT(p_1, \ldots, p_m)$, com certas condições, são isomorfos.

Corolário 3.3.3. Considere G um grupo abeliano. Sejam S e S' as álgebras $M_t(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} UT(p_1, \ldots, p_m)$ e $M_{t'}(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} UT(p'_1, \ldots, p'_m)$, respectivamente, onde $M_t(\mathbb{K})$, $M_{t'}(\mathbb{K})$ são álgebras com uma G-graduação fina e $UT(p_1, \ldots, p_m)$, $UT(p'_1, \ldots, p'_m)$ têm G-graduações elementares definidas pelas uplas $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}'$ de elementos de G, respectivamente. As álgebras S e S' são isomorfas se, e somente se, $M_t(\mathbb{K}) \cong M_{t'}(\mathbb{K})$, $(p_1, \ldots, p_m) = (p'_1, \ldots, p'_m)$ e quando existem $g \in G$, $h_1, \ldots, h_n \in \mathrm{supp}\ M_t$ e $\sigma \in S_{p_1} \times \cdots \times S_{p_m}$ tais que $g'_i = g_{\sigma(i)} h_{\sigma(i)} g$ para $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. A Proposição 3.3.2 implica que $S \cong \mathcal{A}(D, \mathbf{p}, \mathbf{g})$, onde $D = M_t(\mathbb{K})$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ e $S' \cong \mathcal{A}(D', \mathbf{p}', \mathbf{g}')$, onde $D' = M_{t'}(\mathbb{K})$, $\mathbf{p}' = (p'_1, \ldots, p'_m)$. Como G é um grupo abeliano ${}^{[g^{-1}]}D^{[g]} = D$ para qualquer $g \in G$. Portanto o resultado segue direto do Corolário 3.2.12. $\square$

Provamos agora que existem equivalências entre graduações distintas elementares.

Corolário 3.3.4. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica zero e G um grupo abeliano finito. Considere $S = UT(p_1, \ldots, p_m)$ uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos munida de uma G-graduação elementar, definida pela upla $\mathbf{g}$ e $S' = UT(p'_1, \ldots, p'_m)$ graduada por uma grupo H, respectivamente. As álgebras S e S' são equivalentes se, e somente se, valem:

(i) S' tem uma graduação elementar;

(ii) $(p_1, \ldots, p_m) = (p'_1, \ldots, p'_m)$;

(iii) Existe uma bijeção λ de $\{g_1, \ldots, g_n\}$ em $\{h_1, \ldots, h_n\}$ tal que $\lambda(g_i)\lambda(g_j)^{-1} = \lambda(g_k)\lambda(g_l)^{-1}$ sempre que $g_i g_j^{-1} = g_k g_l^{-1}$;

(iv) Existe uma permutação $\sigma \in S_{p_1} \times \cdots \times S_{p_m}$ tal que $h_{\sigma(i)} = \lambda(g_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, onde $h_i = (\deg_H e_{1i})^{-1}$.

Demonstração. Se S' e S são equivalentes, então o Corolário 3.2.15 e o Teorema 3.3.1 implicam que S' tem uma graduação elementar. Observe que $(h_1, \ldots, h_n)$, onde $h_i = (\deg_H E_{1i})^{-1}$ induz a graduação elementar em S'. A existência de λ e de σ também seguem do Corolário 3.2.15.

Agora vamos provar a recíproca. Observe que $S \cong \mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ e $S' \cong \mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbf{p}, \mathbf{h})$. Sejam $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ e $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ uma base de $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbf{p}, \mathbf{h})$ onde $\deg_H v'_i = \lambda(g_i)$. A aplicação linear ψ_1 tal que $\psi_1(v_i) = v'_i$ é uma equivalência de espaços vetoriais. Sejam $\psi : \mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbf{p}, \mathbf{g}) \to \mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbf{p}, \mathbf{h})$ o homomorfismo de álgebras tal que $\psi_1(rv) = \psi(r)\psi_1(v)$, para todo $r \in \mathcal{A}(\mathbb{K}, \mathbf{p}, \mathbf{g})$ e todo $v \in V$. Então $\psi(e_{ij})$ é um homomorfismo de grau $\lambda(g_i)\lambda(g_j)^{-1}$. Daí, temos que isto é uma equivalência de álgebras, pois $\lambda(g_i)\lambda(g_j)^{-1} = \lambda(g_k)\lambda(g_l)^{-1}$ sempre que $g_i g_j^{-1} = g_k g_l^{-1}$. □

Os resultados obtidos neste capítulo são muito importantes, uma vez que classificam quando duas álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos, sobre certas condições, são isomorfas. Além disso, estes resultados já foram citados em dois artigos. O primeiro foi [11], neste artigo forma publicados os resultados do próximo capítulo de nosso trabalho. O segundo, foi o artigo [28] que tem como título Group Grading on the Lie and Jordan Algebras of Block-Triangular Matrices, com autoria de Kochetov e Yasumura.

Por fim, vale destacar que o Yasumura [39], provou o seguinte resultado:

Teorema 3.3.5. Seja G um grupo e considere uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos G-graduada $A = UT(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ sobre $\mathbb{K}$. Suponha que $char\mathbb{K} = 0$ ou $char\mathbb{K} > dimA$. Então existem uma álgebra G-graduada com divisão $D = M_n(\mathbb{K})$ e uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos $B = UT(d_1, d_2, \ldots, d_r)$ munida de uma graduação elementar, tal que $A \cong B \otimes D$

Este teorema generaliza o resultado da Valenti e do Zaicev 3.3.1, logo podemos aplicar nossas classificações sob as hipóteses deste teorema do Yasumura.

Capítulo 4

Identidades e Isormofismos na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

No capítulo anterior, sob a hipótese do corpo ser algebricamente fechado e de característica zero, descrevemos condições para que duas álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos sobre álgebras graduadas com divisão, G-graduadas, onde G é um grupo abeliano finito, sejam isomorfas. Neste capítulo iremos utilizar tais descrições para determinar a existência de uma certa relação entre estas equivalências e as respectivas identidades G-graduadas.

O teorema de Amitsur-Levitzki afirma que $M_n(\mathbb{K})$ tem como uma de suas identidades o polinômio Standard de grau $2n$ e que ela não satisfaz nenhuma identidade de grau menor que $2n$. Como consequência, sob a hipótese do corpo ser algebricamente fechado, foi obtido que duas álgebras associativas simples de dimensão finita são isomorfas se, e somente se, têm as mesmas identidades polinomiais. Em 2011, Shestakov e Zaicev [36] provaram que este resultado é válido para álgebras simples de dimensão finita, não necessariamente associativas, sob certas condições sobre o corpo. Ainda nesta linha, foi obtido por Drensky e Racine [17] o mesmo resultado para álgebras de Jordan. Além disso, Diniz e Bianchi [15], provaram este mesmo resultado para álgebras graduadas simples de dimensão finita.

Este capítulo tem como fruto o artigo [11], que traz resultados novos sobre a relação que existe entre os isomorfismos graduados na álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos e as respectivas identidades graduadas. Ele nasceu da cooperação com o professor Diogo Diniz e foi publicado na revista científica Journal of Algebra no início de 2019. Vale destacar a notoriedade de tal revista, possuidora de qualis $A1$ na CAPES.

4.1 Graduações na Álgebra das Matrizes Triangulares Superiores em Blocos

Antes de abordamos o foco principal deste capítulo, iremos generalizar, retirando a hipótese do grupo ser finito, o seguinte resultado obtido por Valenti e Zaicev [38].

Teorema 4.1.1. [38, Teorema 3.2] Seja G um grupo abeliano finito e $UT(m_1, \ldots, m_r)$ uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$ de característica zero. Então existe uma decomposição $m_1 = tp_1, \ldots, m_r = tp_r$, um subgrupo $H \subset G$, e uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, onde $n = p_1 + \cdots + p_r$ tais que $UT(m_1, \ldots, m_r)$ é isomorfa a $M_t(\mathbb{K}) \otimes UT(p_1, \cdots, p_r)$ como álgebras G-graduadas onde $M_t(\mathbb{K})$ é uma álgebra H-graduada com uma graduação fina com suporte H e $UT(p_1, \cdots, p_r)$ com uma graduação elementar definida por $(g_1, \ldots, g_n)$.

Vale destacar que o Yasumura [39], generalizou este resultado, provando o seguinte teorema:

Teorema 4.1.2. Seja G um grupo e considere uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos G-graduada $A = UT(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ sobre $\mathbb{K}$. Suponha que $char\mathbb{K} = 0$ ou $char\mathbb{K} > dimA$. Então existem uma álgebra G-graduada com divisão $D = M_n(\mathbb{K})$ e uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos $B = UT(d_1, d_2, \ldots, d_r)$ munida de uma graduação elementar, tal que $A \cong B \otimes D$.

Na demonstração deste resultado, o autor dá condições para que o radical de Jacobson graduado desta álgebra seja homogêneo, que é justamente a hipótese de $char\mathbb{K} = 0$ ou $char\mathbb{K} > dimA$, e como consequência obtêm esta generalização. Porém como o método para demonstrar nossa generalização é diferente, pois trabalhamos com o fato da dimensão da álgebra aqui abordada ser finita e consequentemente o seu suporte ser finito. Logo, decidimos apresentar a nossa generalização. Porém, antes disso, iremos demonstrar os seguintes lemas:

Lema 4.1.3. Para qualquer subconjunto finito H de $\mathbb{Z}$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que a projeção canônica $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ é injetora sobre H.

Demonstração. Seja $H = \{z_1, \ldots, z_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Defina $n = \ max\{|z_1|, \ldots, |z_k|\}$ e tomando $m = 2n+1$, temos que π é injetiva sobre H. De fato, suponha por contradição que $\pi(z_i) = \pi(z_j)$, para $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ distintos, então exite $p \in \mathbb{Z}^*$ tal que $mp = z_i - z_j$, o que contraria o fato de que o módulo de $z_i - z_j$ é sempre menor ou igual a m. □

Lema 4.1.4. Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos e seja S um subconjunto de G tal que a restrição de φ a $S \cup (S \cdot S)$ seja injetiva. Considere A como sendo uma álgebra G-graduada tal que (supp A) $\subseteq S$ e seja B uma álgebra H-graduada tal que (supp B) $\subseteq \varphi(S)$. Então:

(i) Se $B_s = B_{\varphi(s)}$ para qualquer $s \in S$ e $B_g = 0$ para qualquer $g \in G \setminus S$, então $B = \oplus_{g \in G} B_g$ é uma G-graduação em B. Um subespaço de B é homogêneo nesta G-graduação se, e somente se, ele é homogêneo na H-graduação.

(ii) Um isomorfismo de álgebras $f : A \to B$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas de A em B com estas G-graduações se, e somente se, f é um isomorfismo de álgebras H-graduadas de ${}^{\varphi}A$ em B com suas H-graduações, onde ${}^{\varphi}A$ é a álgebra A munida da H-graduação dada por $A_h = A_{\varphi^{-1}(h)}$, para todo $h \in S$.

Demonstração. (i) Observe que $B = \oplus_{h \in H} B_h = \oplus_{h \in \varphi(S)} B_h = \oplus_{s \in S} B_{\varphi(s)} = \oplus_{s \in S} B_s = \oplus_{g \in G} B_g$, onde a segunda igualdade é dada pelo fato que (supp B) $\subseteq \varphi(S)$. Assim, resta-nos provar que $B_g B_h \subseteq B_{gh}$, para quaisquer $g, h \in G$. Se $g \in G \setminus S$ ou $h \in G \setminus S$, então $B_g B_h = 0 \subseteq B_{gh}$. Caso contrário, tome $s, t \in S$, daí, $B_s = B_{\varphi(s)}$ e $B_t = B_{\varphi(t)}$, portanto

$$B_s B_t = B_{\varphi(s)} B_{\varphi(t)} \subseteq B_{\varphi(st)}. \tag{4.1}$$

Se $B_{\varphi(st)} = 0$, então $B_s B_t = 0$ e portanto $B_s B_t \subseteq B_{st}$. Agora, vamos assumir que $B_{\varphi(st)} \neq 0$. Neste caso, $\varphi(st) \in$ supp $B \subseteq \varphi(S)$. Sendo assim, existe $s' \in S$ tal que $\varphi(st) = \varphi(s')$. Como a restrição de φ a $S \cup (S \cdot S)$ é injetiva, por hipótese, concluímos que $st = s'$. Daí,

$$B_{\varphi(st)} = B_{\varphi(s')} = B_{s'} = B_{st}.$$

Então, segue de (4.1) que $B_s B_t \subseteq B_{st}$.

Para a segunda afirmação, considere um elemento de B é homogêneo na H-graduação se, e somente se, ele é homogêneo na G-graduação. De fato, seja $b \in B$, um elemento homogêneo não nulo na H-graduação de grau $h \in H$, logo

$h \in \varphi(S)$, por hipótese. Daí existe $s \in S \subseteq G$, tal que $\varphi(s) = h$, implicando que $b \in B_{\varphi(s)} = B_s$ é homogêneo na G-graduação. A recíproca é inteiramente análoga. Isto implica que um subespaço V é homogêneo na G-graduação de B se, e somente se, ele é homogêneo na H-graduação.

(ii) Suponha que $f : A \to B$ seja um isomorfismo de álgebras G-graduadas, então temos que ele é um isomorfismo de álgebras ordinárias, assim é suficiente mostrar que $f(A_h) = B_h$, para todo $h \in \varphi(S)$. Seja $a \in A_h$, observe que $h = \varphi(\deg_G a)$, pela definição de ${}^{\varphi}A$, temos que $\varphi^{-1}(h) = \deg_G a$. Como f é um isomorfismo G-graduado, temos que $f(a)$ é homogêneo na G-graduação e consequentemente homogêneo na H-graduação. Além disso, $\varphi^{-1}(\deg_H f(a)) = \deg_G f(a) = \deg_G a$ e assim $\varphi^{-1}(h) = \varphi^{-1}(\deg_H f(a))$. Como φ é injetora sobre S, temos que $h = \deg_H f(a)$. Portanto, f é um isomorfismo de álgebras H-graduadas, pela arbitrariedade do elemento homogêneo a. Utilizando um processo idêntico ao feito acima, temos a recíproca.

□

Agora, iremos provar o Teorema 4.1.1 para um grupo abeliano qualquer.

Corolário 4.1.5. O Teorema 4.1.1 vale sob a hipótese do grupo ser apenas abeliano.

Demonstração. Suponha que G seja abeliano e $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica zero. Sejam $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$ uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos sobre $\mathbb{K}$ com uma G-graduação, digamos $A = \oplus_{g\in G} A_g$. Podemos assumir sem perda de generalidade que G é gerado por $S = \operatorname{supp} A$, uma vez que se $g \in G \backslash S$, temos que $A_g = 0$ e assim $A = \oplus_{g\in G} A_g = \oplus_{g\in S} A_g = \oplus_{g\in\langle S\rangle} A_g$. Como A tem dimensão finita, temos que S é finito. Daí, através da teoria de grupos abelianos temos que G é isomorfo a um produto direto de grupos cíclicos $\mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_q}$, onde $p, q \geq 0$ e $n_1, \ldots, n_q > 0$ são inteiros. Assim, podemos assumir sem perda de generalidade que $G = \mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_q}$. Dado um inteiro $m > 0$, tal que $H = \mathbb{Z}_m \times \cdots \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_q}$ e $\varphi : G \to H$, o homomorfismo dado por

$$\varphi(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q) = (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_p}, w_1, \ldots, w_q),$$

onde $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{Z}$, $w_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$, para $i = 1, \ldots, q$ e $z \mapsto \overline{z}$ é a projeção canônica $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$. Dado qualquer subconjunto finito T de G podemos escolher m suficientemente grande de tal maneira que a restrição de φ a T é injetiva. De fato, temos se T é finito, cada uma das entradas tem uma quantidade finita de números. Daí, pelo Lema 4.1.3 podemos considerar $m_i \in \mathbb{N}$ de tal maneira que a aplicação π_i da i-ésima entrada dos elementos de T em Z_{m_i} é injetiva, para $i = 1, \ldots, p$. Seja $m = \max\{m_1, \ldots, m_p\}$ e observe que

$$\varphi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_p \times Id_{\mathbb{Z}_{n_1}} \times \cdots \times Id_{\mathbb{Z}_{n_q}}$$

onde π é a projeção de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}_m$ e $Id_{\mathbb{Z}_{n_j}}$ é a aplicação identidade sobre $\mathbb{Z}_{n_j}$, para $j = 1, \ldots, q$. Ademais, temos que esta aplicação é injetiva sobre T, portanto φ é injetiva sobre T. Como o suporte S é finito, podemos escolher um m suficientemente grande de tal maneira que φ restrita a $T = S \cup (S \cdot S)$ é uma aplicação injetiva. Seja ${}^{\varphi}A$ a H-graduação induzida por φ. Como H é abeliano finito, o Teorema 4.1.1 implica que o coarsening ${}^{\varphi}A$ é isomorfo como álgebra H-graduada a $B = UT(p_1, \cdots, p_r) \otimes M_t(\mathbb{K})$, onde $UT(p_1, \cdots, p_r)$ tem uma graduação elementar e $M_t(\mathbb{K})$ tem uma graduação fina. Denote $B = \oplus_{h \in H} B_h$ a H-graduação em B. Seja $B_s = B_{\varphi(s)}$ para qualquer $s \in S$ e $B_g = 0$ para qualquer $g \in G \setminus S$. Pelo Lema 4.1.4, temos que $B = \oplus_{g \in G} B_g$ é uma G-graduação em B. Portanto qualquer isomorfismo de álgebras H-graduadas de ${}^{\varphi}A$ em B é também um isomorfismo de álgebras G-graduadas de A em B com estas G-graduações, portanto A com sua G-graduação é isomorfa como álgebra graduada a B com sua G-graduação. Um subespaço de B é homogêneo na G-graduação se, e somente se, ele é homogêneo na H-graduação (Lema 4.1.4), portanto obtemos uma G-graduação fina em $M_t(\mathbb{K})$ e uma G-graduação elementar em $UT(p_1, \ldots, p_r)$ tal que B com a G-graduação é isomorfa a $UT(p_1, \ldots, p_r) \otimes M_t(\mathbb{K})$ com a G-graduação canônica do produto tensorial. Agora, suponha que $UT(p_1, \ldots, p_r)$ esteja munida da H-graduação elementar associada a r-upla $(h_1, \ldots, h_r)$, daí, segundo a definição apresentada no lema anterior, $UT(p_1, \ldots, p_r)$ terá uma G-graduação elementar associada a r-upla $(g_1, \ldots, g_r)$, onde $\varphi(g_i) = h_i$, para $i = 1, \ldots, r$, uma vez que se $E_{ij} \in UT(p_1, \ldots, p_r)$, tal que $deg_H\ E_{ij} = \varphi(deg_G\ E_{ij})$, então $deg_G\ E_{ij} = \varphi^{-1}(deg_H\ E_{ij}) = \varphi^{-1}(h_i h_j^{-1}) = g_i g_j^{-1}$, como queríamos demonstrar. □

4.2 Isomorfismos de Álgebras Graduadas e Identidades Graduadas

Nesta seção, o nosso principal objetivo é provar que se G é um grupo abeliano, então duas álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos são isomorfas se, e somente se, elas têm as mesmas identidades graduadas (Corolário 4.2.24). Iniciaremos com a seguinte proposição.

Proposição 4.2.1. Seja $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$ uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos com uma graduação elementar induzida por $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, onde $n = m_1 + \cdots + m_r$. Seja s o número de elementos distintos que aparecem em g. A componente do elemento neutro A_e é uma soma direta de s ideais, cada um isomorfo a uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos com no máximo r blocos.

Demonstração. Sejam $I_1 = \{1, \ldots, m_1\}$ e

$$I_t = \{m_1 + \cdots + m_{t-1} + 1, \ldots, m_1 + \cdots + m_{t-1} + m_t\},$$

para $t = 2, \ldots, r$. Observe que os conjuntos $I_1, \ldots, I_r$ formam uma partição de $N = \{1, \ldots, n\}$. Considere em A a base canônica formada pelas matrizes unitárias E_{ij} onde $i \in I_p$, $j \in I_q$ e $p \leq q$. Denote $h_1, \ldots, h_s$ os distintos elementos de G que aparecem na n-upla $\mathbf{g}$ e seja $J_k = \{i \in N \mid g_i = h_k\}$, com $k = 1, \ldots, s$. Está claro que uma base para A_e consiste das matrizes unitárias E_{ij} na base de A tais que $i, j \in J_k$ para algum k. Portanto,

$$A_\epsilon = B_1 \oplus \cdots \oplus B_s$$

onde B_k é o subespaço de A_ϵ gerado pelas matrizes unitárias E_{ij} na base de A tais que $i, j \in J_k$. Note que B_k é um ideal de A_ϵ. Pois $B_t B_k = B_k B_t = 0$ sempre que $t \neq k$. Esta última igualdade vale pois se $E_{ij} \in B_k$ e $E_{lc} \in B_t$, são tais que $E_{ij}E_{lc} \neq 0$, então $j = l$ e daí $h_k = g_j = g_l = h_t$, o que é um absurdo. Também $B_k B_k \subseteq B_k$, uma vez que se $E_{ij}, E_{uv} \in B_k$, temos que $g_i = g_j = g_u = g_v = h_k$. Portanto, ou $E_{ij}E_{uv} = 0 \in B_k$, ou $E_{ij}E_{uv} = E_{iv} \in B_k$, já que $i, v \in J_k$. Uma base para B_k é o conjuntos das matrizes unitárias E_{ij} onde $i \in I_t \cap J_k$, $j \in I_u \cap J_k$ e $t \leq u$, portanto B_k é isomorfo a uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos de comprimento $\leq r$. De fato, considere $J'_K = \{1, \ldots, n_k\}$, onde n_k é a cardinalidade de J_k, com $k = 1, \ldots, s$ e a seguinte aplicação bijetiva $\phi : J'_k \longrightarrow J_k$ de tal maneira que $\phi(1)$ é igual ao menor valor de J_k, $\phi(2)$ é igual ao segundo menor valor de J_k e assim por diante, até que $\phi(n_k)$ é igual ao maior valor de J_k. Claramente ϕ é bijetiva e assim podemos definir a álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos C com base canônica formada pelas matrizes E'_{ij} de tal maneira que $E'_{ij} = E_{\phi(i)\phi(j)}$. Definindo a aplicação $\varphi : C \longrightarrow B_k$ dada nas bases por $\varphi(E'_{ij}) = E_{ij}$, temos que esta aplicação é um isomorfismo de álgebras, pois leva base em base e preserva o produto, como queríamos provar. $\square$

Observação 4.2.2. Sejam $g \neq e$ e E_{ij} uma matriz elementar em A_g. Se $B_k(E_{ij}) \neq 0$ então $(E_{ij})B_k = 0$. Pois, como $B_k(E_{ij}) \neq 0$, temos que ter $i \in J_k$ e como E_{ij} tem grau $g \neq e$ concluímos que $j \notin J_k$ e assim $(E_{ij})B_k = 0$.

Observação 4.2.3. Conforme observado em [19, Lemma 3.2] segue da prova do Lema 1.2.12 que o resultado de qualquer substituição em Cap_{m+r-1} está em $J(A)^{r-1}$, onde $J(A)$ é o radical de Jacobson de $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$.

Observação 4.2.4. Sejam $a_1, \ldots, a_t, v_1, \ldots, v_{t-1}$ matrizes elementares na álgebra das matrizes, tais que $v_1, \ldots, v_{t-1}$ sejam duas a duas distintas. Se

$$a_1 v_1 \cdots a_{t-1} v_{t-1} a_t \neq 0 \tag{4.2}$$

então para qualquer permutação $\tau \in S_{t-1}$ diferente da identidade temos

$$a_1 v_{\tau(1)} \cdots a_{t-1} v_{\tau(t-1)} a_t = 0. \tag{4.3}$$

Pois, suponha que $a_1 = E_{i_1 j_1}, \ldots, a_t = E_{i_t j_t}$ e $v_1 = E_{k_1 l_1}, \ldots, v_{t-1} = E_{k_{t-1} l_{t-1}}$, logo $E_{i_1 j_1} E_{k_1 l_1} E_{i_2 j_2} \ldots E_{k_{t-1} l_{t-1}} E_{i_t j_t} \neq 0$. Assim, $j_1 = k_1, l_1 = i_2, j_2 = k_2, l_2 = i_3, \ldots, l_{t-1} =$

i_t. Supondo que τ não é identidade, temos que $\tau(j)$ é diferente de j, para algum $j \in \{1, \ldots, t-1\}$, logo, como os v_i's são duas a duas distintas, temos que $v_{\tau(j)} \neq E_{k_j, l_j}$ e portanto $a_j v_{\tau(j)} a_{j+1} = 0$.

Na proposição anterior, mostramos que a componente neutra de uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos é a soma de ideais isomorfos a álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos, logo, pelo Lema 1.2.12, temos que existe um número natural t tal que Cap_t é uma identidade para esta componente neutra com Cap_{t-1} não sendo.

Lema 4.2.5. Seja A uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos com uma G-graduação elementar. Seja t o número natural tal que Cap_{t-1} não é identidade para A_e e Cap_t é identidade para A_e. Então $\mathrm{Cap}_{t-1} x_t^g$ não é uma identidade graduada para A e $\mathrm{Cap}_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t^g, y_1, \ldots, y_{t+1})$ é, se e somente se $g = e$.

Demonstração. Suponha que $g = e$, então, pela hipóstese de Cap_t ser identidade para A_e, temos que $\mathrm{Cap}_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t^g, y_1, \ldots, y_{t+1}) \in Id_G(A)$, assim Cap_t é uma identidade graduada para A e $\mathrm{Cap}_{t-1} x_t^g \notin Id_G(A)$.

Provaremos a recíproca por contradição. Para tanto, suponha que $\mathrm{Cap}_{t-1} x_t^g$ não seja uma identidade graduada para A e que $g \neq e$, daí, iremos provar que

$$\mathrm{Cap}_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t^g, y_1, \ldots, y_{t+1})$$

não é identidade graduada para A. Seja $A_e = B_1 \oplus \cdots \oplus B_s$ a decomposição dada na Proposição 4.2.1. Considere $a_1, \ldots, a_{t-1}, a_t, v_1, \ldots, v_{t-1}, v_t$ uma substituição admissível de matrizes elementares tais que

$$\mathrm{Cap}_{t-1}(v_1, \ldots, v_{t-1}, a_1, \ldots, a_t) v_t \neq 0.$$

Claramente existe i tal que $v_1, \ldots, v_{t-1}, a_1, \ldots, a_t \in B_i$, pois cada B_i é um ideal de A_e e a soma é direta. Reordenando $v_1, \ldots, v_{t-1}$, se necessário, podemos assumir que

$$c := a_1 v_1 \cdots a_{t-1} v_{t-1} a_t v_t \neq 0.$$

Observe que existe $a_{t+1} \in A_e$ tal que $c a_{t+1} \neq 0$, pois se $c = e_{ij}$, basta considerar $a_{t+1} = e_{jj} \in A_e$, já que A está munida de uma graduação elementar. Como $\deg_G(v_t) \neq e$ e $B_i v_t \neq 0$, pela Observação 4.2.2 temos que $v_t B_i = 0$. Já a Observação 4.2.4 implica que

$$a_1 v_{\sigma(1)} a_2 \cdots a_t v_{\sigma(t)} a_{t+1} = 0 \tag{4.4}$$

sempre que $\sigma \neq 1$. Portanto a Igualdade (4.4) acontece sempre $\sigma \neq 1$. De onde concluímos que $\mathrm{Cap}_t(v_1, \ldots, v_t, a_1, \ldots, a_{t+1}) \neq 0$. □

No Corolário 3.3.3 há a hipótese de $B = M_t(\mathbb{K})$ e $B' = M_{t'}(\mathbb{K})$, mas isto não foi usado na prova, logo podemos supor que B e B' são quaisquer álgebras H-graduadas com divisão, onde H é um subgrupo de G.

Seja $R = A \otimes B$, onde $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$ é a álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos com uma G-graduação elementar e B é uma álgebra graduada com divisão, onde seu suporte é um subgrupo de G, digamos H. Seja $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ uma n-upla de elementos de G que determina a graduação elementar em A. Agora sejam $g_1', \ldots, g_n'$ representantes das classes laterais $g_1H, \ldots, g_nH$, respectivamente, tais que, se $g_iH = g_i'H$ para $i = 1, \ldots, n$, então $g_i' = g_j'$ sempre que $g_i'H = g_j'H$. Seja A' a álgebra $UT(m_1, \ldots, m_r)$ com a graduação elementar induzida por $\mathbf{g}' = (g_1', \ldots, g_n')$. Segue do Corolário 3.3.3 que A e A' são isomorfas, basta considerar $g = e$, tomar a permutação identidade em $S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_r}$ e observar que pela definição dos g_i', existem $h_1, \ldots, h_n$, tais que $g_i' = g_ih_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Daí, supondo que $B_e = \mathbb{K}$, podemos concluir que $R_e' = A_e' \otimes 1 \cong A_e'$. De fato, suponha que $R_e' = \oplus_{\substack{g \in G, h \in H \\ gh = e}} A_g' \otimes B_h$ e considere um tensor simples $e_{ij} \otimes b_h \in R_e'$, daí $(g_i')^{-1} h g_j' = e$ e $(g_i')^{-1} g_j' \in H$, assim $g_i' = g_j'$ e $h = e$, logo temos o que afirmamos.

Observação 4.2.6. Seja $R = A \otimes B$, onde $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$ é uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos com um G-graduação elementar e B uma álgebra graduada com divisão. Então, pelo argumento anterior, podemos supor sem perda de generalidade que a G-graduação elementar de A é de tal maneira que $R_e = A_e \otimes 1 \cong A_e'$, para tanto iremos supor que $B_e = \mathbb{K}$.

Corolário 4.2.7. Seja $R = A \otimes B$, onde $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$ é a álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos munida com uma G-graduação elementar e B uma álgebra H-graduada com divisão, onde H é um subgrupo de G, tal que $B_e = \mathbb{K}$. Seja t um número natural tal que Cap_{t-1} não é identidade para R_e e Cap_t é identidade para R_e. O elemento $g \in G$ está em supp B se, e somente se, $\mathrm{Cap}_{t-1} x_t^g \notin Id_G(R)$ e o polinômio $\mathrm{Cap}_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t^g, y_1, \ldots, y_{t+1})$ está em $Id_G(R)$.

Demonstração. Suponha que $\mathrm{Cap}_{t-1} x_t^g \notin Id_G(R)$ e que o polinômio $\mathrm{Cap}_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t^g, y_1, \ldots, y_{t+1})$ está em $Id_G(R)$ e considere uma substituição em $\mathrm{Cap}_{t-1} x_t^g$ tal que o resultado é diferente de zero. Note que podemos assumir que x_t^g é substituído por um tensor não nulo $r = v_t \otimes b$, onde $v_t \in A_{g_1}$, $b \in B_h$ e $g_1 h = g$. Segue da Observação 4.2.6 que podemos assumir que $R_e = A_e \otimes 1 \cong A_e$. Dados $v_1, \ldots, v_{t-1}, a_1, \ldots, a_{t+1} \in A_e$ e $v_t \in A_{g_1}$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Cap}_t(v_1 \otimes 1, \ldots, v_{t-1} \otimes 1, v_t \otimes b, a_1 \otimes 1, \ldots, a_{t+1} \otimes 1) \\ &= \mathrm{Cap}_t(v_1, \ldots, v_{t-1}, v_t, a_1, \ldots, a_{t+1}) \otimes b. \end{aligned}$$

Como o elemento $b \in B_h$, temos que ele é invertível na álgebra R, logo, pela arbitrariedade do v_t, podemos concluir que o polinômio

$$\mathrm{Cap}_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t^{g_1}, y_1, \ldots, y_{t+1})$$

é uma identidade graduada para A. Daí, segue do Lema 4.2.5 que $g_1 = e$, portanto $g = h \in \mathrm{supp}\, B$.

Reciprocamente, suponha que $g = h \in supp\ B$ e que $R_e = A_e \otimes 1 \cong A_e$. Por hipótese Cap_{t-1} não é identidade para $R_e \cong A_e$. Como B é uma álgebra graduada com divisão, temos que qualquer elemento não nulo de B_h é invertível, daí, temos que $\mathrm{Cap}_{t-1}x_t^g$ não é identidade graduada R, pois caso contrário, Cap_{t-1} seria identidade para A. Porém, para quaisquer $v_1, \ldots, v_{t-1}, v_t, a_1, \ldots, a_{t+1} \in A_e$ temos

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cap}_t(v_1 \otimes 1, \ldots, v_{t-1} \otimes 1, v_t \otimes b, a_1 \otimes 1, \ldots, a_{t+1} \otimes 1) \\ &= \mathrm{Cap}_t(v_1, \ldots, v_{t-1}, v_t, a_1, \ldots, a_{t+1}) \otimes b. \end{aligned}$$

Daí como $\mathrm{Cap_t}$ é identidade para $R_e \cong A_e$, temos que $\mathrm{Cap}_t(v_1, \ldots, v_{t-1}, v_t, a_1, \ldots, a_{t+1}) = 0$ e podemos concluir que $\mathrm{Cap}_t(v_1 \otimes 1, \ldots, v_{t-1} \otimes 1, v_t \otimes b, a_1 \otimes 1, \ldots, a_{t+1} \otimes 1) = 0$. □

Agora, iremos apresentar um resultado que será utilizado mais a frente sobre a componente homogênea de grau neutro, logo os polinômios considerados nos lemas a seguir são ordinários.

Lema 4.2.8. Sejam $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$ uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos e $t = m_1^2 + \cdots + m_r^2 + r$. Seja f um polinômio tal que $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ é um polinômio multilinear. Se o resultado de uma substituição de elementos de A por matrizes elementares em $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ for um elemento não nulo, então as variáveis de f são substituídas por elementos no primeiro bloco de A.

Demonstração. Como $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ é um polinômio multilinear, podemos considerar substituições em suas variáveis apenas por matrizes elementares. Seja $\varphi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to A$ um homomorfismo tal que $\varphi(x)$ é uma matriz elementar para todo $x \in X$ e $\varphi(f\mathrm{Cap}_{t-1}) \neq 0$. Note que tal homomorfismo existe uma vez que $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ não é identidade para A e é multilinear. Da Observação 4.2.3, temos que $\varphi(\mathrm{Cap}_{t-1}) \in J(A)^{r-1}$. Portanto $\varphi(\mathrm{Cap}_{t-1}) = e_{lk}$ com $1 \leq l \leq m_1$, uma vez que $J(A)^{r-1}$ é o bloco com linhas entre 1 e m_1 e as colunas entre $m_1 + \cdots + m_{r-1} + 1$ e $m_1 + \cdots + m_r$. Como $J(A)^r = 0$, temos que se qualquer variável de f for substituída por qualquer elemento de $J(A)$ nós teremos que $\varphi(f) \in J(A)$, pois $J(A)$ é um ideal de A, e portanto $\varphi(f\mathrm{Cap}_{t-1})$ está em $J(A)^r = 0$, uma contradição. Assim, as variáveis de f são substituídas por elementos que não estão no radical de Jacobson de A, ou seja, por elementos que estão nos blocos diagonais de A, ou melhor, na sua parte semissimples (veja o Exemplo 1.1.25). Se as variáveis forem substituídas por elementos de blocos distintos, então $\varphi(f) = 0$, uma vez que se as matrizes elementares pertencem a blocos diferentes, o produto delas será igual a zero. Então as variáveis em f são substituídas por elementos de um bloco simples diagonal. Consequentemente $\varphi(f) = e_{tu}$ com $m_1+\cdots+m_{i-1}+1 \leq t, u \leq m_1+\cdots+m_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, r\}$. Daí, temos que

$$0 \neq \varphi(f\mathrm{Cap}_{t-1}) = e_{tu}e_{lk},$$

logo $u = l$. Portanto, concluímos que $i = 1$. $\square$

Seja $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$, onde $U_1, \ldots, U_s$ são ideais de U isomorfos a álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos. Supondo sem perda de generalidade que $U_i = UT(m_1^{(i)}, \ldots, m_{r_i}^{(i)})$, $i = 1, \ldots, s$, uma vez que cada uma é isomorfa a uma álgebra de matrizes triangulares superiores em blocos. Denote $t_i = (m_1^{(i)})^2 + \cdots + (m_{r_i}^{(i)})^2 + r_i$. Daí, tomando $t = \max\{t_1, \ldots, t_s\}$, temos que t é o menor inteiro tal que $\mathrm{Cap}_t \in Id(U)$.

Para provarmos a próxima proposição necessitamos do seguinte lema:

Lema 4.2.9. [21, Lema 1.10.7] Seja $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ um polinômio central para $M_n(\mathbb{K})$. Então f é uma identidade para $M_r(\mathbb{K})$, para qualquer $r < n$.

Proposição 4.2.10. Seja $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$, onde $U_1, \ldots, U_s$ são ideais de U isomorfos a álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos. Denote t como sendo o menor inteiro tal que $\mathrm{Cap}_t \in Id(U)$. Então existe um polinômio f em $\mathbb{K}\langle X\rangle$ tal que:

(i) $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ é um polinômio multilinear;

(ii) $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ não é uma identidade para U;

(iii) Se $\varphi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to U$ é um homomorfismo, tal que $\varphi(f\mathrm{Cap}_{t-1}) \neq 0$, então $\varphi(f)$ está no centro de U.

Demonstração. Assumiremos que $U_i = UT(m_1^{(i)}, \ldots, m_{r_i}^{(i)})$, $i = 1, \ldots, s$. Denote $t_i = (m_1^{(i)})^2 + \cdots + (m_{r_i}^{(i)})^2 + r_i$ e como argumentado acima temos que $t = \max\{t_1, \ldots, t_r\}$. Denote $k = \max\{d_1^{(j_1)}, \ldots, d_1^{(j_s)}\}$, onde $\{j_1, \ldots, j_s\} = \{j \mid t_j = t\}$. Seja f um polinômio central de $M_k(\mathbb{K})$ tal que $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ é um polinômio multilinear, com isso temos (i). Está claro que este polinômio não é uma identidade para U, daí temos (ii). Logo existe uma substituição de elementos de U em $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ que é diferente de zero. Assim, considerando uma aplicação qualquer $\varphi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to U$ que leva tal polinômio no elemento resultante desta substituição, temos que $\varphi(f\mathrm{Cap}_{t-1}) \neq 0$. Então existe um i tal que cada variável de $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ é substituída por elementos de U_i. Pelo Lema 4.2.8 concluímos que as variáveis de f são substituídas por elementos no primeiro bloco de U_i. Ademais, temos que f é uma identidade $M_l(\mathbb{K})$, quando $l < k$, pelo lema anterior. Como $\varphi(\mathrm{Cap}_{t-1}) \neq 0$ concluímos que $t_i = t$, pois se $t_i < t$, Cap_{t-1} seria identidade e $\varphi(\mathrm{Cap}_{t-1}) = 0$. Assim, pela escolha do k temos que $d_1^{(i)} = k$. Portanto, como f é um polinômio central, $\varphi(f) \neq 0$ está no centro de U, logo temos (iii). $\square$

Definição 4.2.11. Seja A uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos com um graduação elementar e seja t o menor inteiro tal que $\mathrm{Cap}_t \in Id(A_e)$. Dizemos que um polinômio multilinear f de grau e, é A-bom se o polinômio $fCap_{t-1}$ é multilinear, $fCap_{t-1}$ não é uma identidade polinomial para A_e e se para todo homomorfismo $\varphi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to A_e$ tal que $\varphi(f\mathrm{Cap}_{t-1}) \neq 0$, $\varphi(f)$ for uma elemento central em A_e.

Observação 4.2.12. As Proposições 4.2.1 e 4.2.10 implicam que a álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos A com uma graduação elementar tem um polinômio A-bom.

Proposição 4.2.13. Seja $R = A \otimes B$, onde A é uma álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos munida com uma graduação elementar e B é uma álgebra graduada com divisão, tal que $B_e = \mathbb{K}$. Sejam t o menor inteiro tal que $\mathrm{Cap}_t \in Id(A_e)$ e f um polinômio A-bom. Além disso, considere $S_1 = \{y_1^{h_1}, y_2^e, \ldots, y_m^e\}, \ldots, S_u = \{z_1^{h_u}, z_2^e, \ldots, z_m^e\}$ u conjuntos de variáveis dois a dois disjuntos e

$$f^{h_1} = f(y_1^{h_1}, y_2^e, \ldots, y_m^e), \ldots, f^{h_u} = f(z_1^{h_u}, z_2^e, \ldots, z_m^e).$$

Um polinômio multilinear $g(x_1^{h_1}, \ldots, x_u^{h_u}) \in \mathbb{K}_H\langle X\rangle$, onde $H = \mathrm{supp}\, B$, é uma identidade graduada para B se, e somente se, o polinômio multilinear $g(f^{h_1}, \ldots, f^{h_u})\mathrm{Cap}_{t-1}$ é uma identidade graduada para $R = A \otimes B$.

Demonstração. Como consequência da Observação 4.2.6, podemos assumir sem perda de generalidade que $R_e = A_e \otimes 1$.

($\Rightarrow$) Para cada $h \in H$ fixe um elemento não nulo $b_h \in B_h$. Observe que $R_h = R_e(1 \otimes b_h)$. De fato, como b_h é invertível, temos que $1 \otimes b_h$ é invertível, daí, temos que $R_h(1 \otimes b_h)^{-1}$ é uma R_e-módulo à esquerda e como a unidade está em $R_h(1 \otimes b_h)^{-1}$, temos que $R_e \subseteq R_h(1 \otimes b_h^{-1})$. Por outro lado, temos que $R_h(1 \otimes b)^{-1} \subseteq R_e$ e assim $R_h(1 \otimes b)^{-1} = R_e$, portanto temos o afirmado. Logo, qualquer elemento a em R_h é da forma $a_e \otimes b_h$, onde $a_e \in A_e$. Considere $\varphi : F\langle X_G\rangle \to R$ como sendo um homomorfismo de álgebras graduadas. Observe que para cada $l = 1, \ldots, u$ existem um $f_l \in f(A_e, \ldots, A_e)$ e um $b_l \in B_{h_l}$ tais que $\varphi(f^{h_l}) = f_l \otimes b_{h_l}$, pois, como f^{h_l} é multilinear, temos que $f^{h_l}(a_1 \otimes b_l, a_2 \otimes 1, \ldots, a_m \otimes 1) = f^{h_l}(a_1, \ldots, a_m) \otimes b_l$ e assim, basta considerar $f_l = f^{h_l}(a_1, \ldots, a_m)$, para alguns $a_1, \ldots, a_m \in A_e$, por exemplo; se esta substituição não for por tensores elementares, tomaremos f_l como sendo soma de elementos da forma $f^{h_l}(a_1, \ldots, a_m)$. Além disso, $\varphi(\mathrm{Cap}_{t-1}) = d \otimes 1$ para algum $d \in \mathrm{Cap}_{t-1}(A_e, \ldots, A_e)$. Como f é um polinômio A-bom, temos que f_l é um elemento central em A_e ou $f_l d = 0$, o primeiro caso ocorre se $\varphi(f^{h_l}\mathrm{Cap}_{t-1})$ for não nulo, caso contrário temos o outro caso. Logo, concluímos que $\varphi(g(f^{h_1}, \ldots, f^{h_u})\mathrm{Cap}_{t-1}) = f_1 \ldots f_m d = 0$ se $f_l d = 0$ para algum l, pois os f_l's são não nulos, estão no centro de A_e. Agora suponha que o caso em que $f_1, \ldots, f_u$ são elementos centrais de A_e. Neste caso, temos que $\varphi(g(f^{h_1}, \ldots, f^{h_u})) = g(\varphi(f^{h_1}), \ldots, \varphi(f^{h_u})) = g(f_1 \otimes$

$b_{h_1}, \ldots, f_m \otimes b_{h_u}) = f_1 \cdots f_u \otimes g(b_{h_1}, \cdots, b_{h_u}) = 0$, uma vez que $g(x_1^{h_1}, \ldots, x_u^{h_u}) \in Id_H(B)$, logo $\varphi(g(f^{h_1}, \ldots, f^{h_u})\mathrm{Cap}_{t-1}) = \varphi(g(f^{h_1}, \ldots, f^{h_u}))\varphi(\mathrm{Cap}_{t-1}) = 0$. Portanto $g(f^{h_1}, \ldots, f^{h_u})\mathrm{Cap}_{t-1}$ é uma identidade graduada para $R = A \otimes B$.

($\Leftarrow$) Para cada $h \in H$ escolha um elemento b_h em B_h. Existe uma substituição em $f\mathrm{Cap}_{t-1}$ que o resultado é um elemento não nulo em R_e, uma vez que este polinômio não é uma identidade para R_e, por hipótese. Denote $a_i \in A_e$ o elemento tal que x_i é substituído por ele e denote a como sendo o resultado desta substituição em Cap_{t-1}. Então $ca \neq 0$, onde $c = f(a_1, \ldots, a_m)$. Agora, obtemos substituições em cada f^{h_i} que resultam nos elementos $c \otimes b_{h_i}$, para $i = 1, \ldots, u$, pois como f é multilinear, basta substituir as respectivas entradas de f^{h_i} por $a_1 \otimes b_{h_i}, a_2 \otimes 1, \ldots, a_r \otimes 1$. Assim, obtemos uma substituição não nula em $g(f^{h_1}, \ldots, f^{h_u})\mathrm{Cap}_{t-1}$ que resulta em

$$g(c \otimes b_{h_1}, \cdots, c \otimes b_{h_u})(a \otimes 1) = c^u a \otimes g(b_{h_1}, \cdots, b_{h_u})$$

uma vez que g é multilinear. Sendo f um polinômio A-bom, temos que $c = f(a_1, \ldots, a_m)$ é uma matriz diagonal, daí, como $ca \neq 0$, concluímos que $c^u a \neq 0$. Sendo assim $g(b_{h_1}, \ldots, b_{h_u}) = 0$. Como os elementos $b_{h_1}, \ldots, b_{h_u}$ são arbitrários, concluímos que o polinômio $g(y_1^{h_1}, \ldots, y_u^{h_u})$ é uma identidade graduada para R, como queríamos mostrar. $\square$

Lema 4.2.14. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero e $A = \oplus_{g \in G} A_g$ uma $\mathbb{K}$-álgebra graduada. Se as álgebras B e B' satisfazem as mesmas identidades ordinárias, então $A \otimes B$ e $A \otimes B'$ satisfazem as mesmas identidades graduadas.

Demonstração. Seja $F = \mathbb{K}\langle X \rangle / Id(B)$, provaremos primeiro que $Id_G(A \otimes B) = Id_G(A \otimes F)$. Considere $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n})$ uma identidade graduada multilinear para $A \otimes F$ e sejam $a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n$ elementos homogêneos de $A \otimes B$ tais que $a_i \otimes b_i$ tem grau g_i, $i = 1, \ldots, n$. Seja $\varphi : A \otimes F \to A \otimes B$ um homomorfismo de álgebras graduadas tal que $\varphi(a_i \otimes \overline{x_i}) = a_i \otimes b_i$. Como $f \in Id_G(A \otimes F)$, então $f(a_1 \otimes \overline{x_1}, \ldots, a_n \otimes \overline{x_n}) = 0$, portanto

$$0 = \varphi(f(a_1 \otimes \overline{x_1}, \ldots, a_n \otimes \overline{x_n})) = f(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n).$$

De onde concluímos que f é uma identidade graduada para $A \otimes B$. Como $\mathrm{char}\, \mathbb{K} = 0$, temos que $Id_G(A \otimes F)$ é gerado pelos seus polinômios multilineares, logo $Id_G(A \otimes F) \subseteq Id_G(A \otimes B)$. Agora sejam $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n})$ uma identidade graduada multilinear para $A \otimes B$ e $\varphi : \mathbb{K}_G\langle X \rangle \to A \otimes F$ um homomorfismo de álgebras graduadas. Vamos escrever

$$\varphi(f) = a_1 \otimes f_1 + \cdots + a_m \otimes f_m,$$

onde $a_1, \ldots, a_m$ são elementos linearmente independentes de A e $f_1, \ldots, f_m \in F$. Se $f_i \neq 0$ para algum i, então existe um homomorfismo $\psi_0 : F \to B$ tal que $\psi_0(f_i) \neq 0$. Então $\psi = Id_A \otimes \psi_0$ é um homomorfismo de álgebras graduadas de $A \otimes F$ em $A \otimes B$, pois é o produto tensorial de dois homomorfismos de álgebras graduadas graduadas, e

$$\psi \circ \varphi(f) = a_1 \otimes \psi_0(f_1) + \cdots + a_m \otimes \psi_0(f_m) \neq 0,$$

isto é uma contradição uma vez que $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}\langle X_G \rangle \to A \otimes B$ é um homomorfismo de álgebras graduadas, pois é uma composição de dois homomorfismos de álgebras graduadas, e f é uma identidade graduada para $A \otimes B$. Portanto $f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 0$, logo f é uma identidade graduada para $A \otimes F$. Isto prova que $Id_G(A \otimes B) \subseteq Id_G(A \otimes F)$. Portanto, $Id_G(A \otimes B) = Id_G(A \otimes F)$. De modo inteiramente análogo, prova-se que $Id_G(A \otimes B') = Id_G(A \otimes F')$, onde $F' = \mathbb{K}\langle X \rangle / Id(B')$. Como $Id(B) = Id(B')$, temos que $F = F'$, daí concluímos que $Id_G(A \otimes B') = Id_G(A \otimes F) = Id_G(A \otimes B)$. □

Lema 4.2.15. Seja $R = A \otimes B$, onde $A = UT(m_1, \dots, m_r)$ tem uma graduação elementar induzida por uma n-upla $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ e B uma álgebra que satisfaz as mesmas identidades ordinárias de $M_t(\mathbb{K})$ e tem uma G-graduação, tal que seu suporte H que seja um subgrupo de G. Seja $\alpha : G \to G/H$ o epimorfismo canônico. O coarsening ${}^{\alpha}R$ satisfaz as mesmas identidades G/H-graduadas que a álgebra $UT(m_1 t, \dots, m_r t)$ com a G/H-graduação elementar induzida por $(g_1 H, g_1 H, \dots, g_n H, g_n H)$, onde cada classe lateral repete-se t vezes.

Demonstração. Observa que ${}^{\alpha}R = ({}^{\alpha}A) \otimes B$, onde B tem a G/H-graduação trivial. O Lema 4.2.14 implica que ${}^{\alpha}R$ satisfaz as mesmas identidades graduadas que $({}^{\alpha}A) \otimes M_t(\mathbb{K})$. Seja $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \otimes M_t(\mathbb{K}) \to M_{nt}(\mathbb{K})$ o isomorfismo canônico (veja [24, Proposição 4.10, pag. 217]), se escrevemos uma matriz de $M_{nt}(\mathbb{K})$ como n^2 blocos de tamanho $t \times t$, então dada uma matriz $a = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ e $b \in M_t(\mathbb{K})$, o (i,j)-ésimo bloco da matriz $\varphi(a \otimes b)$ é $a_{ij} b$. Consideramos $A = UT(m_1, \dots, m_r)$ como sendo uma subálgebra ordinária de $M_n(\mathbb{K})$, onde $n = m_1 + \cdots + m_r$. A restrição de φ à $A \otimes M_t(\mathbb{K})$ é um isomorfismo (de álgebras ordinárias) na subálgebra $UT(m_1 t, \dots, m_r t)$ de $M_{nt}(\mathbb{K})$. De fato, note que

$$\varphi : A \otimes M_t(\mathbb{K}) \longrightarrow UT(m_1 t, \dots, m_r t)$$

está bem definida e como φ é a restrição de um isomorfismo, temos que ela é injetiva e como as duas álgebras têm a mesma dimensão, podemos concluir o isomorfismo. Se $UT(m_1 t, \dots, m_r t)$ tem uma graduação elementar induzida por $(g_1 H, g_1 H, \dots, g_n H)$, onde cada classe lateral repete-se t vezes, então a restrição é um isomorfismo de álgebras G/H-graduadas $({}^{\alpha}A) \otimes M_t(\mathbb{K})$ em $UT(m_1 t, \dots, m_r t)$. De fato, note que já temos o isomorfismo ordinário entre estas álgebras, logo só precisamos mostrar que ele preserva o grau nas graduações. Seja $e_{ij} \otimes b$ um elemento homogêneo em $A \otimes M_t(\mathbb{K})$, como temos uma G/H-graduação, então o grau deste elemento é $\overline{g_i}\,\overline{g_j}^{-1}$. Note que a imagem de $\varphi(e_{ij} \otimes b) = e_{ij} b$ tem grau $\overline{g_i g_j^{-1} h} = \overline{g_i}\,\overline{g_j}^{-1}\overline{h} = \overline{g_i}\,\overline{g_j}^{-1}$ na G/H-graduação. Daí, segue o resultado. □

Os dois próximos resultados serão usados na prova do Teorema 4.2.21, que é um dos principais resultados do nosso trabalho.

Proposição 4.2.16. [7, Proposition 1] Sejam A e B duas álgebras G-graduadas e $\alpha : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Se $Id_G(A) = Id_G(B)$, então $Id_H({}^{\alpha}A) = Id_H({}^{\alpha}B)$.

Para demonstrarmos o resultado principal, precisamos descrever todas as identidades ordinárias de álgebras graduadas com divisão.

Teorema 4.2.17. [19, Theorem 3] Seja G um grupo solúvel e suponha que $\mathbb{K}$ tenha característica 0 ou que $\mathbb{K}$ tenha característica $p > 0$ e G não tenha elemento de ordem p. Então $\mathbb{K}^{\alpha}G$ é semissimples.

Como uma álgebra semissimples é um produto subdireto de álgebras primitivas se ela também for P.I., segue do Teorema de Kaplansky que esta álgebra satisfaz as mesmas identidades que a álgebra das matrizes $M_t(\mathbb{K})$, para algum t (veja, por exemplo, a observação depois do Teorema 3.2 em [2]). Esta discussão prova o seguinte corolário.

Corolário 4.2.18. Seja G uma grupo abeliano e $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica zero. Se D é uma álgebra G-graduada com divisão que satisfaz alguma identidade polinomial ordinária, então existe um número natural t tal que D satisfaz a mesmas identidades ordinárias de $M_t(\mathbb{K})$.

Definição 4.2.19. O P.I. grau de uma P.I. álgebra D é o maior inteiro d tal que todas as identidades multilineares de D seguem das identidades multilineares de $M_d(\mathbb{K})$.

Do corolário acima e desta definição de P.I. grau, concluímos que o número natural t dado no referido corolário é o P.I. grau de D.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado, então já provamos que qualquer álgebra graduada com divisão é isomorfa a uma álgebra de grupo torcida $\mathbb{K}^{\sigma}G$, onde σ é um 2-cociclo (Teorema 2.4.4). A aplicação $\beta_\sigma : G \times G \to \mathbb{K}^{\times}$ dada por

$$\beta_\sigma(g,h) = \frac{\sigma(g,h)}{\sigma(h,g)}$$

é um bicaracter alternado, isto é, ele é multiplicativo em cada uma das entradas e $\beta_\sigma(g,g) = 1$. Se G é um grupo abeliano finitamente gerado, sabemos que duas álgebras de grupos torcidas $\mathbb{K}^{\alpha}G$ e $\mathbb{K}^{\alpha'}G$ com mesmo bicaracter associado são isomorfas (veja [20, Teorema 2.13]). Contudo, é claro que duas álgebras graduadas com divisão D e D', com componente neutra unidimensional, que têm as mesmas identidades graduadas tem o mesmo bicaracter associado. De fato, pois nesta condição, estas álgebras são isomorfas a álgebras de grupos, digamos a $\mathbb{K}^{\sigma}G$ e $\mathbb{K}^{\sigma'}$, com bicaracteres associados β e

β', respectivamente. Observe que $x_1^g x_1^h - \beta(g,h)x_1^{gh}$ e $x_1^g x_1^h - \beta'(g,h)x_1^{gh}$ são identidades graduadas para $\mathbb{K}^\sigma G$ e $\mathbb{K}^{\sigma'} G$, logo $(\beta(g,h) - \beta'(g,h))x_1^g x_1^h$ é também uma identidade graduada para elas. Agora sejam $d_g \in D_g$ e $d_h \in D_h$ elementos não nulos, então $(\beta(g,h) - \beta'(g,h))d_g d_h = 0$ e como D é uma álgebra graduada com divisão, temos que $\beta(g,h) = \beta'(g,h)$. Este comentário prova a seguinte observação.

Observação 4.2.20. Sejam G um grupo abeliano finitamente gerado e $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Se D_1 e D_2 são duas PI $\mathbb{K}$-álgebras G-graduadas com divisão com componentes de grau neutro centrais e $Id_G(D_1) = Id_G(D_2)$, então D_1 é isomorfa a D_2 como álgebras G-graduadas.

Teorema 4.2.21. Seja G um grupo abeliano. Denote $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$ e $A' = UT(m_1', \ldots, m_r')$ álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos com graduações elementares induzidas pelas n-uplas $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ e $\mathbf{g}' = (g_1', \ldots, g_n')$, respectivamente. Seja K um subgrupo finitamente gerado de G e sejam B e B' álgebras K-graduadas com divisão que satisfazem as mesmas identidades polinomiais ordinárias e considere $R = A \otimes B$, $R' = A' \otimes B'$. Se $Id_G(R) = Id_G(R')$, então supp $B =$ supp B' e $B \cong B'$. Se B e B' têm o P.I. grau t, então $Id_{G/H}({}^\alpha R) = Id_{G/H}(U) = Id_{G/H}(U') = Id_{G/H}({}^\alpha R')$, onde $\alpha : G \to G/H$ é o epimorfismo canônico e, U e U' denotam as graduações elementares induzidas por $(g_1H, g_1H, \ldots, g_nH, g_nH)$ e $(g_1'H, g_1'H, \ldots, g_n'H, g_n'H)$, respectivamente, na álgebra $UT(m_1t, \ldots, m_rt)$, onde cada classe lateral repete-se t vezes. Além disso, se $U \cong U'$, então $R \cong R'$.

Demonstração. Iremos provar inicialmente que Supp $B =$ Supp B', sob a hipótese de $Id_G(R) = Id_G(R')$. Suponha que $g \in$ Supp B, então pelo Corolário 4.2.7, temos que $\mathrm{Cap}_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t^g, y_1, \ldots, y_{t+1})$ é uma identidade graduada para R e consequentemente, por hipótese, é também uma identidade para R', logo, por este mesmo corolário, temos que $g \in$ supp B'. Assim, supp $B \subseteq$ supp B'. De maneira inteiramente análoga, prova-se que supp $B' \subseteq$ supp B e com isso, concluímos a igualdade. Agora pela Proposição 4.2.13 implica que $Id_H(B) = Id_H(B')$. De fato, suponha que $g(x_1^{h_1}, \ldots, x_u^{h_u}) \in Id_H(B)$, então pela Proposição 4.2.13, temos que $g(f^{h_1}, \ldots, f^{h_u})\mathrm{Cap}_{t-1}$ é uma identidade graduada para R. Consequentemente, por hipótese, este polinômio também é uma identidade graduada para R', daí, pela mesma proposição, temos $g \in Id_H(B')$. Logo $Id_H(B) \subseteq Id_H(B')$. De maneira inteiramente análoga, prova-se que $Id_H(B') \subseteq Id_H(B)$. Portanto, temos a igualdade. Com estes dois fatos, a Observação 4.2.20 implica que $B \cong B'$. O Corolário 4.2.18 e o Lema 4.2.15 implicam que ${}^\alpha R$, ${}^\alpha R'$ satisfazem as mesmas identidades G/H-graduadas que U e U', respectivamente. A igualdade $Id_{G/H}({}^\alpha R) = Id_{G/H}({}^\alpha R')$ segue da Proposição 4.2.16. Portanto, $Id_{G/H}({}^\alpha R) = Id_{G/H}(U) = Id_{G/H}(U') = Id_{G/H}({}^\alpha R')$.

Agora assuma que U e U' são isomorfas como álgebras G/H-graduadas. O Corolário 3.3.3 implica que existem $gH \in G/H$, $\sigma \in S_{td_1} \times \cdots \times S_{td_m}$ tais que

$g'_iH = g_{\sigma(i)}H(gH)$ para $i = 1, \ldots, tn$. Assim sendo,existe $\tau \in S_{d_1} \times \cdots \times S_{d_m}$ tal que $g'_iH = g_{\tau(i)}H(gH)$, para $i = 1, \ldots, n$. Claramente, isso implica que existem $h_1, \ldots, h_n \in H$ tais que $g'_i = g_{\tau(i)}h_{\tau(i)}g$, para $i = 1, \ldots, n$. Daí, segue do Corolário 3.3.3 que $R \cong R'$. $\square$

Em [19] os autores encontraram condições suficientes para garantir que as álgebras U e U', do teorema anterior, são isomorfas como álgebras graduadas. Para referirmos a estes resultados, precisamos da definição de subgrupo de invariância de uma graduação elementar, introduzida no referido artigo.

Definição 4.2.22. Seja A a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{K})$ com a graduação elementar induzida por $(g_1, \ldots, g_n)$. Considere a aplicação $\omega_A : G \to \mathbb{N}$ que associa a cada $g \in G$ o número de índices i tais que $g_i = g$. O subgrupo de invariância nesta graduação elementar é

$$H_A = \{h \in G \mid \omega_A(hg) = \omega_A(g),\ \forall g \in G\}.$$

Proposição 4.2.23. [19, Corollary 3.4] Seja G um grupo abeliano e sejam A e B álgebras de matrizes triangulares superiores em blocos munidas com G-graduações elementares tais que A tem no máximo dois blocos diagonais ou uma quantidade finita deles, onde pelo menos um deles, digamos A_d, com subgrupo invariante $H_A^{(d)} = \langle 1_G \rangle$. Então A e B são isomorfos como álgebras G-graduadas se, e somente se, $Id_G(A) = Id_G(B)$.

A proposição anterior e o Teorema 4.2.21 implica o seguinte resultado.

Corolário 4.2.24. Seja G um grupo abeliano. Denote $A = UT(m_1, \ldots, m_r)$ e $A' = UT(m'_1, \ldots, m'_r)$ álgebras das matrizes triangulares superiores em blocos com graduações elementares induzidas pelas uplas $\mathbf{g}$ e $\mathbf{g}'$ em G^n, respectivamente. Seja K um subgrupo finitamente gerado de G, sejam B e B' álgebras G-graduadas com divisão que satisfazem uma P.I. ordinária e têm o mesmo P.I. grau. Seja $R = A \otimes B$, $R' = A' \otimes B'$. Suponha que a álgebra A tem no máximo dois blocos diagonais ou uma quantidade finita destes blocos, mas pelo menos um deles com subgrupo de invariância trivial para ${}^{\alpha}A$, onde $\alpha : G \to G/H$ é o epimorfismo canônico. Então R e R' são isomorfos como álgebras G-graduadas se, e somente se, $Id_G(R) = Id_G(R')$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que R e R' sejam isomorfos como álgebras G-graduadas, então é imediato que $Id_G(R) = Id_G(R')$. Suponha agora que $Id_G(R) = Id_G(R')$ e sejam U e U' álgebras com as graduações elementares, como no teorema anterior. O subgrupo de invariância do i-ésimo bloco de ${}^{\alpha}A$ coincide com o subgrupo de invariância do i-ésimo bloco de U. O número de blocos em ${}^{\alpha}A$ também coincide com o número de blocos em U. O mesmo pode ser afirmado em relação a ${}^{\alpha}A'$ e U'.

Ademais, pela Proposição 4.2.21 temos que $Id_{G/H}(U) = Id_{G/H}(U')$. Portanto, pela Proposição 4.2.23, temos que $U \cong U'$. Com isso segue o resultado imediatamente do Teorema 4.2.21. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] E. ALJADEFF, D. HAILE, *Simple G-graded algebras and their polynomial identities*, Trans. American Mathematical Society, 366, 1749-1771, 2014.

[2] E. ALJADEFF, A. KANEL-BELOV, Y. KARASIK, *Kemer's theorem for affine PI algebras over a field of characteristic zero*, Journal of Pure and Applied Algebra, 220, 2771–2808, 2016.

[3] S. A. AMITSUR, J. LEVITZKI, *Minimal identities for algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1, 449-463, 1950.

[4] M. F. ATIYAH, L. G. MACDONALD, *Introduction al algebra commutative*, Reverte, Barcelona, 1973.

[5] Y. A. BAHTURIN, A. GIAMBRUNO, D. RILEY, *Group graded algebra satisfying a polynomial identity*, Israel J. Math, 125-155, 1998.

[6] Y. A. BAHTURIN, M. V. ZAICEV, *Group gradings on matrix algebras*, Canad. Math. Bull. Vol. 45 (4), 499-508, 2002.

[7] Y. A. BAHTURIN, D. DINIZ, *Graded identities of simple real graded division algebras*, Journal of Algebra, 2017.

[8] M. BĂRĂSCU, S. DĂSCĂLESCU, *Good gradings on upper block triangular matrix algebras*, Comm. Algebra, 41, no. 11, 4290–4298, 2013.

[9] J. BERGEN, M. COHEN, *Actions of commutative Hopf algebras*, London Math. Soc., 159-164, 1986.

[10] A. R. BORGES, C. FIDELIS, D. DINIZ, *Graded isomorphisms on upper block triangular matrix algebras*, Linear Algebra and its Applications, 543, 92-105, 2018.

[11] A. R. BORGES, D. DINIZ, *Graded identities and isomorphisms on algebras of upper block-triangular matrices*, Journal of Algebra, 523, 201-216, 2019.

[12] M. BĂRĂSCU, S. DĂSCĂLESCU, S. *Good gradings on upper block triangular matrix algebras*, Comm. Algebra, 41, 4290-4298, 2013.

[13] P. M. COHN, *Basic algebra: groups, rings and fields*, Springer-Verlag London, London, 2003.

[14] S. DĂSCĂLESCU, B. ION, C. NĂSTĂSESCU, J. R. MONTES, *Group gradings on full matrix rings*, Journal of Algebra, 220, 709-728, 1999.

[15] D. DINIZ, A. BIANCHI, *Identities and isomorphisms finite-dimensionsal graded simples algebras*, disponível em https://arxiv.org/pdf/1804.01589.pdf., acessado em 10 de Novembro de 2018.

[16] V. DRENSKY, *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*, Springer-Verlag, 2000.

[17] V. DRENSKY, M. RACINE, *Distinguishing simple Jordan algebras by means of polynomial identities*, Comm. Algebra, 20, 309-327, 1992.

[18] V. DRENSKY, E. FORMANEK, *Polynomial identity rings*, Springer-Basel AG, 2000.

[19] O. M. DI VINCENZO, E. SPINELLI, *Graded polynomial identities on upper block triangular matrix algebras*, Journal of Algebra, 415, 50-64, 2014.

[20] A. ELDUQUE, M. KOCHETOV , *Gradings on simple Lie algebras*, AMS Math. Surv. Monographs, 189, 2013.

[21] A. GIAMBRUNO, M. V. ZAICEV, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Mathematical Surveys and Monographs, 122, American Mathematical Society, 2005.

[22] A. GIAMBRUNO, M. V. ZAICEV, *Minimal varieties of exponential growth*, Adv. Math., 174, 310–323, 2003.

[23] I. N. HERSTEIN, *Noncommutative rings*, The Carus Mathematical Monographs, 15, The Mathematical Association of America, New York, 1968.

[24] N. JACOBSON, *Basic algebra II*, Ed. 2ª, W. H. Freeman and Company, 1989.

[25] A. KEMER, *Varieties and Z_2-graded algebra*, Math. USSR, Vol 25, 359-374, 1985.

[26] A. KEMER, *Finite basis property of identities of associative algebra*, Algebra and Logic, Vol 26, 362-397, 1987.

[27] A. KEMER, *Ideals of identities of associative algebra*, Translations Math. Monographs, 87, AMS, 1991.

[28] M. KOCHETOV, F. Y. YASUMURA, *Group grading on the Lie and Jordan algebras of block-triangular matrices*, disponível em : https://arxiv.org/pdf/1811.05870.pdf, acessado em 23 de fevereiro de 2019.

[29] A, KUSHKULEI, Y. RAZMYSLOV, *Varieties generated by irreducible representations of Lie algebras*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., 5, 4-7, 1983.

[30] T. Y. LAM, *A first course in noncommutative rings*, Springer, United States of American, 2ª Ed., 2000.

[31] C. NĂSTĂSESCU, F. VAN OYSTAEVEN, *Graded ring theory*, North-Holland Publishing Company, 1982.

[32] D. S. PASSMAN, *On the semisimplicity of twisted group algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society, 25, 161-166, 1970.

[33] P. KOSHLUKOV, M. ZAICEV, *Identities and isomorphisms of graded simple algebras*, Linear Algebra and its Applications, 432, 3141-3148, 2010.

[34] L. H. ROWEN, *Polynomial identities in ring theory*, Academic Press, v. 84, 1980.

[35] J. P. SERRE, *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[36] I. SHESTAKOV, M. ZAICEV, *Polynomial identities of finite dimensional simple algebras*, Comm. Algebra, 39, 929-932, 2011.

[37] J. P. TIGNOL, A. R. WADSWORTH, *Value functions on simple algebras, and associated graded rings*, Springer, 2015.

[38] A. VALENTI, M. ZAICEV, *Abelian Gradings on Upper Block Triangular Matrices*, Canad. Math. Bull, 55, 208-213, 2012.

[39] F.Y. YASUMURA, *Group gradings on upper block triangular matrices*, Arch. Math., 4, 327-332, 2018.

[40] K. A. ZHEVLAKOV, A. M. SLINKO, I.P. SHESTAKOV, A. I. SHIRSHOV, *Rings that are Nearly Associative*, v. 104, Academic Press, Inc., 1982.