Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

# Propriedade de Specht e identidades para álgebras de Jordan

**por**

**Geisa Gama Oliveira** [†]

**sob orientação do**

**Prof. Dr. Claudemir Fidelis Bezerra Júnior**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

# Propriedade de Specht e identidades para álgebras de Jordan

por

**Geisa Gama Oliveira**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Antônio Pereira Brandão Júnior

**Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior**

Franciélia Limeira de Sousa

**Prof. Dra. Franciélia Limeira de Sousa**

Manuela da Silva Souza

**Prof. Dra. Manuela da Silva Souza**

Claudemir Fidelis Bezerra Júnior

**Prof. Dr. Claudemir Fidelis Bezerra Júnior**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande**

**Centro de Ciências e Tecnologia**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Curso de Mestrado em Matemática**

**Maio/2020**

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me rodear de tantas pessoas especiais e me reerguer nos momentos de extrema dificuldade. A Ti, toda honra e toda glória. Como eu sempre digo: Deus no comando sempre.

Aos meus pais, Girlane Gama e Jonilson Macêdo, pelo amor, pela paciência, e por além de tudo, acreditar em mim quando nem eu mesma acreditei. Obrigada pela confiança e por todos os ensinamentos que vocês me deram. Principalmente o de não desistir dos meus sonhos mesmo quando eles parecem impossíveis. Aos meus irmãos e cunhadas, por me acharem a mulher mais inteligente do mundo, mesmo eu não sendo. Isso me impulsionou muito para que eu me dedicasse cada vez mais para que chegasse ao menos um terço do que vocês acreditavam que eu era. Muito obrigada.

Agradeço aos professores da UAMat que tive a oportunidade de ser aluna, em especial ao professor Leomaques, ao professor Diogo e ao professor Antônio Brandão que me ajudaram a estender meus conhecimentos em álgebra e me fizeram ainda mais apaixonada pela área. Ainda agradeço ao professor Brandão por participar da minha banca.

Ao meu orientador Claudemir, só tenho a agradecer por me aceitar como sua orientanda. Obrigada por toda paciência, ajuda e disposição, e por ter sido um amigo por muitas vezes. Sei que não fui uma orientanda muito fácil, mas o senhor apesar disso, esteve ao meu lado me ajudando a seguir, a crescer, me dando vários puxões de orelha. Nunca vou esquecer do que o senhor fez por mim. Professor, meu muito obrigada por tudo.

Aos amigos que fiz na UESC, que mesmo de longe, sempre me enviaram mensagens de incentivo e estavam sempre torcendo por mim. São muitos e portanto, prefiro não citar o nome de todos. Mas gostaria de agradecer em especial, às minhas melhores amigas até hoje, Luana Lemos, Rafaela Britto e Tainara Guimarães, que tiveram que aguentar meus choros e reclamações desde a graduação. Obrigada pelas ligações de incentivo e pela confiança de sempre.

Gostaria ainda de agradecer aos professores da UESC que me incentivaram a seguir para o mestrado. Em especial, gostaria de agradecer ao professor Sérgio Mota (in memoriam) que esteve comigo desde o início nessa trajetória. Esse mestrado não seria possível sem os seus incentivos e sem a sua confiança em mim desde a graduação. Palavras nunca vão ser suficientes para expressar minha gratidão.

Nesse período na Paraíba, fiz muitos amigos verdadeiros. Amigos estes que me viram tantas vezes chorando e sempre me acolhiam com seus abraços e palavras de incentivo, além de compartilhar de muitos cafés e risadas comigo. A todos estes agradeço: Weiller, Daniela, Lucas Siebra, Oliverio, Renan e Wallace.

Em particular, gostaria de agradecer à minha primeira turma de mestrado e meus primeiros amigos/família que construí na Paraíba: Anamélia, Ana Nery, Felipe, Thiago e Railane. Obrigada pelas várias noites e dias de estudos, pelas discussões e pelo carinho que vocês sempre tiveram por mim. Quero compartilhar essa vitória com vocês. Essa conquista é nossa. Meu muito obrigada por tudo.

Quero também externar minha gratidão à Pedro Fellype e à Ismael Sandro. Pedro, você se tornou uma das pessoas que eu mais confio nessa vida e uma das pessoas que mais me conhece. Obrigada por sempre enxergar as coisas com otimismo e me fazer enxergar também. Ismael, mesmo com nossa tentativa frustrada de criar o PIG (Pedro, Ismael e Geisa), conseguimos criar esse laço único e verdadeiro de amizade. Obrigada por sempre me fazer sorrir com seu jeito único. Agradeço a vocês pela paz que vocês sempre me transmitiram, pelas orações, pela confiança e por todas as dúvidas que vocês me tiraram.

À Caio, Fran, Laíse e José Lucas, agradeço pelas fotos aleatórias, discussões e risadas que tivemos em todas as disciplinas de álgebras que compartilhamos. Além disso, agradeço por todo abraço, incentivo e cuidado que tiveram por mim sempre. Agradeço ainda à Fran (formalmente Dra.Franciélia Limeira), por ter aceitado o convite para fazer parte desta banca.

Ao pessoal do PET-Matemática: Amanda, Bruna, Fábio, Gabriel, Isabela, Letícia, Luís, Matheus, Otacília, Rodrigo, por terem me "adotado" nas horas do almoço e terem me trazido muitas risadas com nossos "cinque" jogos aleatórios. Em especial, à Bruna por ter sido uma irmã para mim e ter me acompanhado nas idas e vindas da

UFCG.

À Andrezza, Geovany e Hydayane, gostaria de agradecer não só pelas noites dos vinhos, onde compartilhávamos muitas histórias, besteiras e risadas, mas também por todos os abraços e carinhos, que sempre me ajudavam a descarregar todas as energias ruins para voltar ao trabalho.

À Rosy e Fá, por termos dividido uma vida aqui em Campina Grande. Obrigada por terem tido paciência comigo em todos os âmbitos. Fá, agradeço pela sua amizade desde o tempo de UESC. Obrigada por todas as risadas e pelo "informativo Fá" que sempre me manteve ligada nas notícias do mundo. Obrigada por ter sido (mesmo sem idade para isso) uma "mãezona" para gente. Rosy, obrigada por ter sido a "irmã mais velha" da casa. Obrigada por todos os cuscuz que você fez para gente, por ter cuidado de mim quando eu mais precisei, e por ter sido minha companheira de saídas aleatórias. Vocês duas se tornaram parte da minha família, e onde quer que eu vá, nunca me esquecerei do que fizeram por mim. Obrigada por tudo.

Aos funcionários da UFCG. Em especial, a Aninha por sua alegria contagiante e seus abraços acolhedores e a Gislayne pelas várias conversas compartilhadas e a disposição em sempre nos ajudar.

Por fim, agradeço à professora Dra. Manuela da Silva Sousa por aceitar o convite para compor a banca e por todas as considerações e sugestões para melhoramento deste trabalho.

# Dedicatória

Aos meus pais e meus irmãos.

# Resumo

As álgebras de Jordan das matrizes simétricas de ordem dois, sobre um corpo, possuem exatamente duas graduações naturais pelo grupo $\mathbb{Z}_2$. Neste trabalho, apresentado em cinco capítulos, descrevemos uma base das identidades polinomiais 2-graduadas no caso dessas duas graduações, quando o corpo base é infinito e de característica diferente de dois. Para uma graduação dita escalar o resultado é estendido para o caso das álgebras de Jordan de uma forma bilinear simétrica não degenerada, denotadas por $B$ e $B_n$ quando os espaços bases possuem dimensão infinita e finita, respectivamente. Neste caso, sobre um corpo de característica zero, também mostramos que o ideal de todas as identidades 2-graduadas de $B_n$ satisfaz a propriedade de Specht. Além disso, apresentamos as classificações das graduações da Álgebra de Jordan de uma forma bilinear. Por fim, determinamos uma base para o ideal das identidades da álgebra de Jordan de uma forma bilinear degenerada de posto $n-1$, com espaço base $n$-dimensional.

**Palavras-chave:** Álgebras de Jordan. Identidades graduadas. Propriedade de Specht.

# Abstract

The Jordan algebra of the symmetric matrices of order two over a field has exactly two natural gradings by the group $\mathbb{Z}_2$. In this work, presented in five chapters, we exhibit bases for 2-graded polynomial identities for these two grading when the base field is infinite and of characteristic different from 2. For a so-called "scalar grading" the result is extended to the case of Jordan algebras of a non-degenerate symmetric bilinear form, denote by $B$ and $B_n$ when its vector spaces have infinite and finite dimensions, respectively. In this case, over a field of characteristic zero, we also show that the ideal of all the 2-graded identities of $B_n$ satisfies the Specht property. Moreover, we study the description all possible $G$-gradings on Jordan algebra of a bilinear form. Finally, we determine a basis for the identities of the Jordan algebra of a degenerate bilinear form with a $n$-dimensional vector space of rank $n-1$.

**Keywords:** Jordan algebras. graded identities. Specht property.

# Conteúdo

# Introdução

Uma identidade polinomial para uma álgebra é um polinômio que se anula quando é avaliado nos elementos da álgebra. A álgebra que possui uma identidade polinomial é denominada álgebra com identidade polinomial, ou simplesmente PI-álgebra. Historicamente, essa teoria teve início na década de 30, com os trabalhos de Dëhn [7] e Wagner [34], onde aparecem, embora de forma implícita, algumas identidades polinomiais para as matrizes de ordem 2. Apesar disso, o estudo dessa teoria, só se intensificou por volta de 1950, época em que foi provado o Teorema de Amitsur-Levitzki [2], mostrando que a álgebra das matrizes de ordem $n$ sobre um corpo $K$ satisfaz o Polinômio Standard de grau $2n$, isto é, a somatória alternada avaliada em todos os possíveis produtos de $2n$ matrizes de ordem $n$ é sempre igual a zero. Nessa mesma época, matemáticos como Jacobson, Kaplansky, Herstein, Malcev, Cohn, Shirshov, entre outros, deram contribuições importantes para a PI-teoria. Mais tarde, Kaplansky, em [18], elaborou uma lista de problemas relevantes na teoria de anéis, onde ainda se encontram vários problemas em aberto em PI-álgebras.

Acerca do problema de determinar as identidades de uma álgebra conhecida, sobre um corpo de característica zero, Kemer relacionou o $T$-ideal das identidades polinomiais de uma álgebra associativa com os $T$-ideais que satisfazem a condição: sempre que $f(x_1, \ldots, x_r)$ e $g(x_{r+1}, \ldots, x_s)$ são polinômios em conjuntos disjuntos de variáveis tais que $f \cdot g$ está no $T$-ideal então $f$ ou $g$ também está no $T$-ideal. Tais $T$-ideais são chamados de verbalmente primos (ou $T$-primos). Kemer mostrou ainda que os $T$-ideais $T$-primos não triviais são apenas os ideais de identidades das álgebras matriciais $M_n(K)$, e das álgebras $M_n(E)$ e $M_{a,b}(E)$. Esta última é uma subálgebra de $M_{a+b}(E)$ composta pelas matrizes em blocos $a \times a$ e $b \times b$ na diagonal, cujas entradas estão no centro de $E$, e as demais estão na parte "anticomutativa" de $E$. Aqui, $E$ denota a álgebra de Grassmann de um espaço vetorial de dimensão infinita. Recordamos aqui que essas álgebras são obtidas, como sendo os respectivos envelopes de Grassmann, a partir da classificação das álgebras graduadas simples, graduadas pelo grupo cíclico de ordem 2. Tal classificação foi dada por C. T. C. Wall [35]. Recordamos ainda que o termo $T$-ideal *verbalmente primo* indica que os respectivos $T$-ideais são "primos" mas apenas dentro da classe dos $T$-ideais. É conhecido que entre os $T$-ideais verbalmente primos, apenas os $T$-ideais das álgebras $M_n(K)$ são primos.

É importante mencionar que determinar bases para $T$-ideais de álgebras associativa e não associativas pode ser um trabalho muito difícil e tais descrições são conhecidas em poucos casos. Assim, esta discussão nos dá uma luz a cerca de estudar outras álgebras munidas de estruturas adicionais.

Nas últimas décadas, várias generalizações do conceito de identidade polinomial têm sido estudadas, tais como: identidades polinomiais graduadas, identidade polinomiais com traço e identidades polinomiais com involução (ou $*$-identidades), sendo a primeira objeto de estudo desta dissertação. Kemer utilizou identidades graduadas na sua teoria dos ideais de identidades em álgebras associativas (indicamos [21] para mais detalhes). As identidades com traço foram estudadas com detalhes por Procesi em [27], e por Razmyslov em [28]; como consequência dos resultados obtidos, Razmyslov deu uma nova demonstração do Teorema de Amitsur e Levitzki. Já as identidades polinomiais com involução têm relação com as identidades polinomiais (ordinárias). Em [1], Amitsur demonstrou que uma álgebra satisfazendo uma identidade com involução é uma PI-álgebra.

A classe das álgebras das matrizes triangulares superiores sobre um corpo $K$, denotada por $UT_n(K)$, foi uma das primeiras classes de álgebras a ter suas identidades polinomiais completamente descritas. Elas são cruciais na classificação de subvariedade das variedades das álgebras geradas pela álgebra das matrizes de ordem 2. Em relação às álgebras de Lie, é conhecida uma base das identidades de $sl_2(K)$, onde $sl_2(K)$ é a subálgebra de $M_2(K)$ (matrizes de ordem 2) que tem traço zero. No caso das álgebras de Jordan, podemos citar as descrição das identidades das álgebras $B_n$ e $B$ de uma forma bilinear simétrica não degenerada. Estes resultados são devidos a Vasilovsky [33]. Citamos também a descrição das identidades para álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica degenerada de posto $n-1$ feita por Martino, ver Capítulo 5. Além disso, A.V.II'tyakov, em 1985, desenvolveu métodos para estudar as identidades polinomiais em álgebras e provou que a variedade de $B_n$ satisfaz a propriedade de Specht, no sentido ordinário.

Graduações sobre álgebras e suas correspondentes identidades graduadas tem sido objeto de extenso estudo nas últimas décadas. Muito se sabe sobre bases de identidades graduadas em classes de álgebras associativas. Estes incluem todas as álgebras $T$-primas com suas graduações naturais, matrizes triangulares superiores, etc. Em contraste com o caso associativo, identidades graduadas para álgebras de Lie e de Jordan, raramente foram estudadas. Entre os poucos resultados conhecidos, mencionamos [23] e [24]. No primeiro desses artigos, foram descritas as identidades graduadas para a álgebra de Lie $sl_2(K)$, sob todas as classificações possíveis. O segundo artigo tratou das identidades graduadas da álgebra de Jordan das matrizes simétricas de ordem dois.

Outra variação do conceito de identidades polinomiais é o conceito de identidades fracas. Tal conceito foi introduzido e utilizado por Razmyslov na descrição das identidades para álgebras associativas e de Lie. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade fraca para o par $(A, V)$ (sendo $A$ uma álgebra e $V$ um subespaço de $A$) se $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$, para quaisquer $v_1, \ldots, v_n \in V$. Como já mencionado, o estudo das identidades fracas não se restringe ao ambiente associativo, referimos o leitor aos artigos [14] e [24] para observar a utilização dessa definição no ambiente de Jordan.

Iremos resgatar a notação de $G$-graduação, objeto de amplo estudo deste trabalho de dissertação. Uma variedade de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas (algumas vezes chamadas de 2-graduadas) determinada por uma álgebra $A$ satisfaz a propriedade de Specht se todos os $T_2$-ideais que contém as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $A$ admitem uma base finita, como $T_2$-ideal. Tal definição é uma "adaptação" do caso associativo e ordinário bastante conhecido proposto por Specht em 1950, e provado por Kemer [19, 20], o qual questionava se toda álgebra associativa, sobre um corpo de característica zero, possui base finita para o ideal de suas identidades polinomiais. O problema de Specht pode ser enunciado de outras maneiras equivalentes. Uma delas é se todo ideal de identidades polinomiais na álgebra associativa livre é finitamente gerado como ideal de identidades, ou de forma equivalente, se toda cadeia ascendente de ideais de identidades é estacionária.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos e é uma coleção de resultados que podem ser encontrados em [3], [8], [24] e [26]. Com isso, acreditamos, que será uma forte fonte de consulta para estudos futuros na área. Tal trabalho está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 1, serão apresentados conceitos e resultados preliminares, assim como a construção de uma álgebra livre de Jordan, as representações dos grupos simétricos e dos grupos gerais lineares; faremos uma introdução à teoria de invariantes, e ainda, apresentaremos os conceitos de identidades polinomiais e identidades fracas. Tais conceitos e resultados, serão necessários para o que será desenvolvido nos capítulos posteriores.

No Capítulo 2, estudaremos as classificações das graduações da álgebra de Jordan de uma forma bilinear, sobre a hipótese do corpo ser de característica diferente de 2, feita por Yuri Bahturin e Ivan Shestakov em [3] e complementada por Fabrizio Martino em [26].

Da classificação mencionada no parágrafo anterior, verificamos facilmente que, a menos de isomorfismo, a álgebra de Jordan das matrizes simétricas de ordem 2, denotada por $J_2$, tem duas $\mathbb{Z}_2$-graduações não triviais: uma em que $dim(J_2)_0 = 1$, a qual chamaremos de graduação escalar, e outra com $dim(J_2)_0 > 1$, a qual chamaremos de graduação não escalar.

No Capítulo 3, apresentaremos a descrição de uma base para as identidades graduadas em cada caso. Para o caso da graduação escalar, apresentaremos uma base para as identidades graduadas das álgebras de Jordan $B$ e $B_n$. Mencionamos que tal álgebra $B_n$ é uma generalização da álgebra $J_2$, ou seja, $J_2$ e $B_2$ são isomorfas como álgebras. Aqui o corpo base é infinito de característica diferente de 2. É importante mencionar que o resultado para os próximos dois capítulos se baseiam na hipótese do corpo base ser de característica zero. Os resultados deste capítulo, podem ser encontrados em [24].

No Capítulo 4, mostraremos que a variedade de álgebras de Jordan $\mathbb{Z}_2$-graduadas geradas por $B_n = K \oplus V$, com a graduação escalar, satisfaz a propriedade de Specht, com base em [13]. Aqui, o uso da Teoria de Invariantes proposta por Concini e Procesi em [6], da teoria de representações de grupos (ver [9, Chapter 12]) e da propriedade de base finita (ver [15]) são indispensáveis.

No último capítulo desta dissertação, será considerado a álgebra de Jordan de uma forma bilinear degenerada de posto $k$ com espaço base $n$-dimensional, denotada por $J_{n,k} = K \oplus V = B_k \oplus D_{n-k}$. Exibiremos identidades polinomiais (no caso ordinário) para o caso em que $k = n-1$. O resultado principal deste capítulo, que pode ser encontrado em [26], é mostrar que as álgebras de Jordan $J_{n,n-1}$ e $B_{n-1}$ são PI-equivalentes.

# Capítulo 1

# Conceitos preliminares

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados iniciais que servirão como base para o desenvolvimento deste trabalho. Assumimos que o leitor tenha conhecimento dos conceitos e resultados básicos de álgebra linear, assim como da teoria de grupos, anéis e corpos. Dividimos este capítulo em sete seções, onde inicialmente, apresentamos o conceito de álgebras, juntamente com exemplos e resultados que serão importantes para o nosso trabalho. Apresentamos também a construção de uma álgebra livre de Jordan, as representações dos grupos simétricos e dos grupos gerais lineares, faremos uma introdução à teoria de invariantes, e ainda, identidades polinomiais e identidades fracas.

No decorrer de todo texto, $K$ denotará um corpo e, a menos que seja mencionado, todas as álgebras e espaços vetoriais serão definidos sobre $K$. Além disso, $charK$ denotará a característica do corpo $K$.

## 1.1 Álgebras

Nesta seção, será feita uma breve introdução sobre álgebras, objetos de estudo neste trabalho.

**Definição 1.1.1** *Sejam $V, W$ e $U$ espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $K$. Uma aplicação $b\colon V \times W \to U$ é* **bilinear***, se valem:*

*(i)* $b(\lambda v_1 + v_2, w) = \lambda b(v_1, w) + b(v_2, w)$*; e,*

*(ii)* $b(v, \lambda w_1 + w_2) = \lambda b(v, w_1) + b(v, w_2)$,

*para quaisquer* $\lambda \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$ *e* $w, w_1, w_2 \in W$.

**Definição 1.1.2** *Seja* $V$ *um* $K$*-espaço vetorial. Definimos uma forma bilinear sobre* $V$ *como sendo uma aplicação bilinear* $b\colon V \times V \to K$.

**Exemplo 1.1.3** *Dado* $V$ *um espaço vetorial qualquer sobre um corpo* $K$*, a aplicação nula:* $b_0\colon V \times V \to K$ *dada por* $b_0(v, w) = 0_V$ *é uma forma bilinear.*

**Exemplo 1.1.4** *Seja* $V$ *um espaço vetorial sobre os reais. Um produto interno sobre* $V$*, denotado por* $\langle , \rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$*, é uma forma bilinear.*

**Exemplo 1.1.5** *Sejam* $g_1, g_2\colon V \to K$ *duas transformações lineares. Então a aplicação* $b\colon V \times V \to K$ *definida por* $b(u, v) := g_1(u) \cdot g_2(v)$*, para todo* $u, v \in V$*, é uma forma bilinear.*

**Observação 1.1.6** *Seja* $V$ *um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto de vetores ordenados* $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *de* $V$ *é uma* **base de** $V$*, se ele é linearmente independente e gera* $V$*. Além disso, em todo texto, denotaremos por* $span(v_1, \ldots, v_k)$ *o subespaço de* $V$ *gerado pelos vetores* $v_1, \ldots, v_k$.

**Definição 1.1.7** *Seja* $A$ *um espaço vetorial sobre* $K$*. Dizemos que um par* $(A, *)$ *é uma* $K$***-álgebra*** *(ou álgebra sobre* $K$*) se "*$*$*" é uma aplicação bilinear de* $A \times A$ *em* $A$.

Na definição acima, "$*$" chama-se produto ou multiplicação. Em geral, denotaremos $a * b$, com $a, b \in A$, simplesmente por $ab$. Definimos $a_1a_2a_3$ como sendo $(a_1a_2)a_3$ e, indutivamente, $a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n$ como sendo $(a_1a_2 \ldots a_{n-1})a_n$, para $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dizemos que um subconjunto $\beta$ da álgebra $A$ é uma **base** se $\beta$ é uma base de $A$ como espaço vetorial e definimos a **dimensão** de $A$ como sendo a dimensão de $A$ como espaço vetorial.

**Definição 1.1.8** *Seja* $A$ *uma* $K$*-álgebra. Dizemos que* $A$ *é:*

*i)* **Associativa***, se* $(ab)c = a(bc)$*, para quaisquer* $a, b, c \in A$*;*

*ii)* **Comutativa***, se* $ab = ba$*, para quaisquer* $a, b \in A$*;*

*iii)* **Unitária** *(ou com unidade), se existe um elemento em* $A$*, denotado por* $1_A$*, tal que* $a1_A = 1_Aa = a$*, para todo* $a \in A$*. O elemento* $1_A$ *é chamado de* **unidade** *da álgebra* $A$.

*iv)* **de Jordan***, se é comutativa e vale* $(a^2b)a = a^2(ba)$ *(identidade de Jordan),* $\forall a, b \in A$*, onde* $a^2 = a \cdot a$.

**Exemplo 1.1.9** ***(Álgebra das matrizes)*** *Sejam $K$ um corpo e $n \in \mathbb{N}$. O espaço vetorial $M_n(K)$ munido de seu produto usual é uma álgebra associativa com unidade (a matriz identidade $I_n$). Destacamos nesta álgebra as matrizes unitárias $e_{ij}$, onde $e_{ij}$ são as matrizes que possuem 1 na entrada da i-ésima linha e j-ésima coluna e 0 nas demais. É fácil verificar que elas formam uma base para $M_n(K)$. De modo geral, se $A$ é uma álgebra, consideramos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes de ordem $n$ com entradas em $A$. O produto de matrizes em $M_n(A)$ é análogo ao produto de matrizes com entradas em $K$. Temos então uma estrutura de álgebra em $M_n(A)$.*

**Exemplo 1.1.10** ***(Álgebra de Grassmann)*** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão infinita enumerável, com base denotada por $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. A álgebra de Grassmann $E(V)$ (ou simplesmente $E$) de $V$, é a álgebra associativa com unidade que satisfaz a seguinte relação:*

$$e_i e_j = -e_j e_i, \forall i, j \in \mathbb{N}^*.$$

*Na álgebra de Grassmann $E$ é importante destacar os seguintes subespaços:*

- *$E_0$, gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid k \text{ é par}\}$;*

- *$E_1$, gerado pelo conjunto $\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid k \text{ é ímpar}\}$.*

*Neste caso, $E = E_0 \oplus E_1$ visto como espaço vetorial. Como informação adicional, vemos que se $char(K) = 2$, então a álgebra de Grassmann é comutativa.*

**Exemplo 1.1.11** ***(Álgebra de Clifford)*** *A construção da álgebra de Clifford é analogamente ao anterior. Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão infinita enumerável munido de uma forma bilinear simétrica $f$ com base ortogonal denotada por $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, podemos definir a álgebra de Clifford $C(V)$ de $V$, que é a álgebra que satisfaz as seguintes relações:*

$$e_i e_j = -e_j e_i, \forall i \neq j \in \mathbb{N}^*$$

*e*

$$e_i^2 = q(e_i),$$

*onde $q$ é uma forma quadrática associada a $f$. Observe que a álgebra de Grassmann é um exemplo de álgebra de Clifford quando $q \equiv 0$, i.e., a forma quadrática considerada é a nula.*

Sejam $a$, $b$ e $c$ elementos de uma álgebra $A$. Definimos o comutador de $a$ e $b$, denotado por $[a, b]$, o produto de Jordan de $a$ e $b$, $a \circ b$ e o associador entre $a, b$ e $c$, $(a, b, c)$, como sendo as operações:

- $[a, b] = ab - ba$,

- $a \circ b = ab + ba$

- $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$,

respectivamente. Indutivamente, definimos:

- $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n]$,

- $(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n) = (a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_{n-1}) \circ a_n$

- $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}), a_{2n}, a_{2n+1})$.

Iremos nos referir aos associadores do tipo $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1})$ como **associadores próprios**.

**Observação 1.1.12** *A identidade de Jordan em uma álgebra $A$, pode ser escrita em termos do associador da seguinte forma $(a^2, b, a) = 0$, para todo $a, b \in A$.*

**Observação 1.1.13** *Para associadores em álgebras comutativas (não necessariamente associativas), como por exemplo na álgebra de Jordan, vale a seguinte propriedade:*

$$(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0, \tag{1.1}$$

*para quaisquer $x, y, z$ na álgebra.*

*De fato, temos que*

- $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$

- $(y, z, x) = (yz)x - y(zx) = x(yz) - (zx)y$

- $(z, x, y) = (zx)y - z(xy) = (zx)y - (xy)z$

*Logo, $(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0$.*

**Observação 1.1.14** *Caso $charK \neq 2$, podemos definir, sobre uma álgebra associativa, o produto de Jordan de $a$ e $b$ da forma: $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. O artifício de multiplicar pelo inverso de 2 é usado para que as potências de Jordan coincidam com as potências do produto associativo dos elementos da álgebra.*

**Exemplo 1.1.15** *Sejam $A$ uma álgebra associativa e $charK \neq 2$. Para todo $a, b \in A$, podemos substituir o produto original em $A$ pelo produto de Jordan $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, denotando a nova álgebra por $A^{(+)}$. Observa-se que $A^{(+)}$ é uma álgebra de Jordan.*

**Exemplo 1.1.16** *Seja $A$ uma álgebra associativa onde $\operatorname{char} K \neq 2$, então a seguinte equação segue:*

$$\frac{1}{2}(abc + cba) = (a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a - (c \circ a) \circ b.$$

*A prova consiste em um cálculo direto, o qual iremos omitir.*

O próximo resultado nos permite obter uma estrutura de álgebra a partir de um espaço vetorial.

**Proposição 1.1.17** *Sejam $A$ um espaço vetorial com base $\beta$. Dada $f : \beta \times \beta \to A$, existe uma única aplicação bilinear $\cdot : A \times A \to A$ tal que $u_1 \cdot u_2 = f(u_1, u_2)$ para quaisquer $u_1, u_2 \in \beta$.*

**Demonstração:** Veja a prova em [5, pág. 13]. ■

Assim, para definir uma estrutura de álgebra em $A$ basta definir o produto para os elementos de uma base. Uma vez definido o produto, verifica-se que $A$ é uma álgebra associativa se, e somente se, $(v_1v_2)v_3 = v_1(v_2v_3)$, para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in \beta$, onde $\beta$ é uma base de $A$. Tal verificação se dará também para provar a comutatividade e existência de unidade.

**Exemplo 1.1.18 (Produto tensorial de álgebras)** *Sejam $A$ e $B$ álgebras. Recordamos que o produto tensorial dos espaços vetoriais $A$ e $B$, denotado por $A \otimes B$, é o espaço vetorial gerado por $\{a \otimes b \mid a \in A, b \in B\}$. Os elementos da forma $a \otimes b$ são chamados de* **tensores** *e satisfazem:*

*(i)* $(a_1 + a_2) \otimes b = (a_1 \otimes b) + (a_2 \otimes b)$;

*(ii)* $a \otimes (b_1 + b_2) = (a \otimes b_1) + (a \otimes b_2)$;

*(iii)* $\lambda(a \otimes b) = (\lambda a) \otimes b = a \otimes (\lambda b)$,

*para quaisquer $a_1, a_2, a \in A, b_1, b_2, b \in B$ e $\lambda \in K$.*

*É um fato bastante conhecido que se $\beta_1$ e $\beta_2$ são bases de $A$ e $B$, respectivamente, então o conjunto $\{u \otimes v \mid u \in \beta_1, v \in \beta_2\}$ é uma base de $A \otimes B$. Se $V$ é um espaço vetorial e $f : A \times B \to V$ é uma aplicação bilinear, então existe uma única transformação linear $T_f : A \otimes B \to V$ satisfazendo $T_f(a \otimes b) = f(a, b)$ (propriedade universal do produto tensorial). Para definir uma estrutura de álgebra em $A \otimes B$, fixemos duas bases $\beta_1$ e $\beta_2$ de $A$ e $B$, respectivamente, e definamos $(u_1 \otimes v_1)(u_2 \otimes v_2) = u_1u_2 \otimes v_1v_2$, para todo $u_1, u_2 \in \beta_1$ e $v_1, v_2 \in \beta_2$. Se $A$ e $B$ são álgebras associativas, então $A \otimes B$, munido deste produto, é uma álgebra associativa, pela proposição anterior. Além disso, se $A$ e $B$ são álgebras com unidade, então a unidade da álgebra $A \otimes B$ será $1_A \otimes 1_B$.*

**Definição 1.1.19** *Seja $A$ uma álgebra. Um subconjunto $B$ de $A$ é chamado* **subálgebra** *se, com relação as operações de $A$, é também uma álgebra, ou seja, $B$ é fechado com respeito a adição, multiplicação e multiplicação por escalar de $A$. Além disso, dizemos que $B$ é um* **ideal** *se for uma subálgebra tal que $ab, ba \in B$, para todo $b \in B$ e todo $a \in A$.*

**Exemplo 1.1.20** *Dada uma álgebra $A$, considere o conjunto*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\},$$

*que é chamado de* **centro comutativo** *de $A$. Claramente $Z(A)$ é um subespaço vetorial de $A$. Quando $A$ for associativa temos que $Z(A)$ é uma subálgebra de $A$.*

*Voltando ao Exemplo 1.1.10, é fácil verificar que, na álgebra de Grassmann, se $\operatorname{char} K \neq 2$, tem-se $Z(E) = E_0$. Já para o Exemplo 1.1.9, $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in K\}$.*

**Definição 1.1.21** *Definimos o* **centro associativo** *de uma álgebra $A$ como sendo:*

$$A_C = \{a \in A \mid (a, x, y) = (x, a, y) = (x, y, a) = 0, \forall x, y \in A\}.$$

*Neste caso, podemos definir o* **centro** *da álgebra $A$, denotado por $\mathcal{Z}(A)$, como sendo a interseção do centro comutativo com o centro associativo, isto é, $\mathcal{Z}(A) = Z(A) \cap A_C$.*

Agora, vamos apresentar o conceito de álgebra quociente. Sejam $A$ uma álgebra e $I$ um ideal de $A$. Consideremos o espaço vetorial quociente $A/I$ cujos elementos são da forma $a + I = \{a + x \mid x \in I\}$. Para cada $a \in A$, vamos denotar o elemento $a + I$ por $\overline{a}$. As operações de soma e produto por escalar são definidas por $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$ e $\lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$, para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Consideremos agora em $A/I$ o produto $(a + I)(b + I) = ab + I$, para $a, b \in A$. Este produto está bem definido, pois não depende da escolha dos representantes das classes laterais, e torna $A/I$ uma álgebra, conhecida por **álgebra quociente de $A$ por $I$**.

**Definição 1.1.22** *Sejam $A$ uma álgebra e $S$ um subconjunto não vazio de $A$. Definimos:*

*(i)* **Subálgebra de $A$ gerada por $S$**, *denotada por $[S]$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de $A$ que contêm $S$ (ou $S \cup 1_A$, caso $A$ seja unitária).*

*(ii)* **Ideal de $A$ gerado por $S$**, *denotado por $I_S$, como sendo a interseção de todos os ideais de $A$ que contêm $S$.*

Claramente, da definição anterior, $[S]$ é a "menor" subálgebra de $A$ que contém $S$ (ou seja, se existe outra com a mesma propriedade, deve conter ela), enquanto $I_S$ é o "menor" ideal de $A$ contendo $S$. Sendo $A$ uma álgebra, dizemos que $S \subseteq A$ gera $A$ como álgebra, ou ainda que é **um conjunto gerador para a álgebra $\boldsymbol{A}$**, se $[S] = A$. Além disso, $A$ é dita uma **álgebra finitamente gerada** se existe $S \subseteq A$ finito, tal que $[S] = A$. Sendo $A$ uma álgebra associativa unitária e $S$ um subconjunto não vazio de $A$, não é difícil mostrar que $[S]$ coincide com o subespaço de $A$ gerado por $\{1, s_1 s_2 \cdots s_n \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$ e que $I_S$ coincide com o subespaço de $A$ gerado por $\{asb \mid a, b \in A, s \in S\}$.

**Observação 1.1.23** *A álgebra de Grassmann $E = E(V)$ é gerada, como álgebra, pelos elementos $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Aqui $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ é uma base do espaço $V$.*

**Definição 1.1.24** *Dizemos que $J$ é uma* **álgebra de Jordan especial** *se existir uma álgebra associativa $A$ tal que $J$ é subálgebra de $A^{(+)}$. Neste caso, a subálgebra $A_0$ de $A$ gerada por $J$ é uma* **álgebra associativa envolvente** *para $J$. As álgebras de Jordan que não são especiais são chamadas* **excepcionais**.

**Exemplo 1.1.25** *Seja $V$ um espaço vetorial com uma forma bilinear simétrica $b$ definida em $V$. Consideramos a soma direta $B = K \cdot 1 \oplus V$ com a multiplicação definida por:*

$$(\alpha \cdot 1 + u)(\beta \cdot 1 + v) = (\alpha\beta + b(u, v)) \cdot 1 + (\alpha v + \beta u) \tag{1.2}$$

*onde $\alpha, \beta \in K$ e $u, v \in V$. Essa álgebra é de Jordan a qual chama-se de* **álgebra de Jordan da forma simétrica bilinear** *$b$. Essa álgebra é especial, cuja sua álgebra associativa envolvente é a álgebra de Clifford associada a forma bilinear (para maiores detalhes, ver [16] pág. 74). Denotaremos por $B$ sempre que $dimV = \infty$ e por $B_n$ quando $dimV = n$.*

**Exemplo 1.1.26** *Seja $K$ um corpo de característica diferente de 2. Podemos considerar a transposta de uma matriz $a$, denotado por $a^t$, da seguinte maneira: Troca-se linha por coluna, isto é a i-ésima linha da matriz $a$ transforma-se na i-ésima coluna da nova matriz $a^t$. Neste caso, o conjunto das matrizes com a propriedade $a^t = a$ são denominadas conjunto das matrizes simétricas de ordem $n$, que denotaremos por $J_n$. É fácil verificar que $J_n$ é um subespaço de $M_n(K)$ que é uma subálgebra da álgebra de Jordan $M_n(K)^{(+)}$. Segue da definição que a álgebra associativa envolvente para $J_n$ é a álgebra $M_n(K)$.*

**Exemplo 1.1.27** *Podemos considerar a álgebra de Jordan das matrizes simétricas $2 \times 2$, denotado por $J_2$. Este é um caso particular do exemplo anterior. Uma base* *para $J_2$ é o conjunto $\{I_2, a, b\}$, onde $I_2 = e_{11} + e_{22}$, $a = e_{11} - e_{22}$, $b = e_{12} + e_{21}$, onde $e_{ij}$ são as matrizes unitárias usuais, citadas no Exemplo 1.1.9. De fato, consideremos $A = \begin{pmatrix} y & x \\ x & z \end{pmatrix} \in J_2$. Temos que*

$$\begin{pmatrix} y & x \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*e*

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y+z}{2} & 0 \\ 0 & \frac{y+z}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y-z}{2} & 0 \\ 0 & \frac{z-y}{2} \end{pmatrix}.$$

*Daí,*

$$\begin{pmatrix} y & x \\ x & z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{y+z}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{y-z}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Logo, $\{I_2, a, b\}$ gera $J_2$, ou seja, $J_2 = span(I_2, a, b)$. Como $\{I_2, a, b\}$ é linearmente independente, segue que $\{I_2, a, b\}$ é base de $J_2$.*

**Definição 1.1.28** *Sejam $A$ e $B$ duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi \colon A \to B$ é um* **homomorfismo** *de álgebras, se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para quaisquer $x, y \in A$. Caso tais álgebra sejam unitárias exigiremos que $\varphi(1_A) = 1_B$.*

Sendo $\varphi$ um homomorfismo de álgebras, dizemos que $\varphi$ é um **monomorfismo** se é injetivo, e é um **isomorfismo** se é bijetivo. Além disso, definimos um **endomorfismo** de uma álgebra $A$ como sendo um homomorfismo de $A$ em $A$, e um **automorfismo** um endomorfismo bijetivo.

Quando existe um isomorfismo $\varphi \colon A \to B$, dizemos que as álgebras $A$ e $B$ são **isomorfas** e denotamos por $A \simeq B$.

**Proposição 1.1.29** *Sejam $A$ e $B$ álgebras e $S$ um conjunto gerador de $A$ como espaço vetorial. Seja $\varphi : A \to B$ uma transformação linear (satisfazendo $\varphi(1_A) = 1_B$ se $A$ e $B$ têm unidade). Então, $\varphi$ é um homomorfismo de álgebras se, e somente se, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in S$.*

**Demonstração:** Basta usar o fato de que $\varphi$ é uma transformação linear e usar a bilinearidade do produto em $A$ e em $B$. ■

**Exemplo 1.1.30** *Considerando o Exemplo 1.1.25 (com $n = 2$) e Exemplo 1.1.27, podemos considerar as álgebras $B_2$ e $J_2$. Já sabemos que uma base de $J_2$ é o conjunto $\{I_2, a, b\}$, onde $I_2 = e_{11} + e_{22}$, $a = e_{11} - e_{22}$, $b = e_{12} + e_{21}$. Consideremos agora uma base ortogonal de $V_2$, digamos $\beta = \{v_1, v_2\}$ e defina a transformação linear $\varphi \colon J_2 \to B_2$ induzida por $\varphi(I_2) = 1$, $\varphi(a) = v_1$ e $\varphi(b) = v_2$. Temos que essa aplicação define um isomorfismo de álgebras de Jordan.*

## 1.2 Álgebras graduadas

Nesta seção, apresentaremos o conceito de álgebras graduadas, conceito este que será utilizado em todo nosso texto como ferramenta básica.

**Definição 1.2.1** *Sejam $V$ um espaço vetorial qualquer e $S$ um conjunto arbitrário. Dizemos que $V$ é um espaço vetorial $S$-**graduado** se, para cada $s \in S$, existir subespaços $V_s \subset V$ tal que*

$$V = \bigoplus_{s \in S} V_s.$$

É claro que na definição anterior podemos ter $V_s = \{0\}$, para algum $s \in S$. De modo equivalente, podemos definir álgebras $S$-graduadas, porém para a multiplicação ser compatível com a graduação, devemos considerar $S$ um grupo. Na verdade é suficiente considerarmos $S$ semigrupo, mas não entraremos em detalhes neste contexto de graduação. Podemos seguir então com a definição abaixo.

**Definição 1.2.2** *Sejam $A$ uma álgebra e $G$ um grupo. Dizemos que a álgebra $A$ é $G$-**graduada**, se $A$ tem estrutura de espaço $G$-graduado tal que*

$$A_g A_h \subset A_{gh}$$

*para quaisquer $g, h \in G$. Neste caso, dizemos que $A$ possui uma $G$-**graduação**.*

**Exemplo 1.2.3** *A álgebra de Grassmann $E$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural definida por $E = E_0 \oplus E_1$, onde $E_0$ e $E_1$ são os subespaços dados no Exemplo 1.1.10.*

Se $a \in A_g$ é não nulo, dizemos que $a$ é **homogêneo** de **grau** $g$ e denotamos por $|a| = g$. A componente homogênea $A_\epsilon$ é denominada **componente neutra** da graduação, onde $\epsilon$ denota o elemento neutro de $G$. Sendo $H$ um subgrupo de $G$, podemos ver que a soma $\sum_{h \in H} A_h$ é uma subálgebra de $A$. Em particular, fazendo $H = \{\epsilon\}$, decorre que a componente neutra $A_\epsilon$ é uma subálgebra de $A$.

**Definição 1.2.4** *Seja $A$ uma álgebra $G$-graduada. Definimos o **suporte** de $A$, e denotamos por $Supp(A)$, como sendo o conjunto dos elementos $g \in G$ tais que a componente homogênea de grau $g$ é diferente de zero, isto é, $Supp\ (A) = \{g \in G \mid A_g \neq 0\}$.*

A $G$-graduação é chamada trivial, se $Supp(A) = \{e\}$, neste caso retornamos as definições no sentido ordinário.

**Definição 1.2.5** *Seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra $G$-graduada. Um subespaço vetorial $B$ de $A$ é dito ser homogêneo na $G$-graduação (ou $G$-graduado) quando $B = \oplus_{g\in G} B_g$, onde $B_g = B \cap A_g$. Um ideal, assim como uma subálgebra, é dito homogêneo se for homogêneo como subespaço.*

**Proposição 1.2.6** *Se $G$ é um grupo com elemento neutro "$\epsilon$" e $A$ é uma álgebra $G$-graduada com unidade, então $1 \in A_\epsilon$.*

**Demonstração:** Sejam $g_1, \ldots, g_n \in G \setminus \{\epsilon\}$ tais que:

$$1 = a_\epsilon + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n},$$

com $a_\epsilon \in A_\epsilon$ e $a_{g_i} \in A_{g_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Seja $h \in G$ tal que $A_h \neq \{0\}$ e considere $a_h \in A_h$ não nulo. Então,

$$a_h = a_h a_\epsilon + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n}.$$

Neste caso, $a_h a_\epsilon \in A_h$ e $a_h a_{g_i} \in A_{h+g_i}$. Além disso, $h$, $h + g_1$,..., $h + g_n$ são elementos de $G$ dois a dois distintos. Pela definição da decomposição da $G$-graduação, tem-se que $a_h a_{g_i} = 0$, para $i = 1, \ldots, n$ e $a_h a_\epsilon = a_h$. Analogamente, mostramos que $a_\epsilon a_h = a_h$, e consequentemente, $a_\epsilon = 1$. Logo, $1 \in A_\epsilon$. ■

A seguir, enunciaremos dois resultados elementares, mas bastantes úteis. O primeiro é uma caracterização das subálgebras homogêneas e o segundo é sobre a álgebra quociente por um ideal homogêneo, ambos de uma álgebra $G$-graduada. Embora sejam resultados bem conhecidos, decidimos explorar sua demonstração como forma de deixar a dissertação independente de outros textos semelhantes.

**Lema 1.2.7** *Sejam $A$ uma álgebra $G$-graduada e $B$ uma subálgebra de $A$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) $B$ é subálgebra $G$-graduada de $A$;*

*(ii) $B$ é álgebra $G$-graduada tal que $B_g \subseteq A_g$ para todo $g \in G$;*

*(iii) As componentes homogêneas de cada elemento de $B$ pertencem a $B$;*

*(iv) $B$ é gerada, como espaço vetorial, por elementos homogêneos.*

**Demonstração:** $(i) \Rightarrow (ii)$ Supondo $(i)$, temos que a decomposição $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$, com $B_g = A_g \cap B$, é uma $G$-graduação em $B$ tal que $B_g \subseteq A_g$, para todo $g \in G$, e portanto, vale $(ii)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponhamos agora $(ii)$. Sejam $b \in B$ e $b = \sum_{g\in G} a_g$, com $a_g \in A_g$, a decomposição de $b$ como soma de elementos homogêneos em relação a $G$-graduação de $A$. Como $B$ é $G$-graduada e $B_g \subset A_g$, temos outra decomposição de $b$ em elementos homogêneos em relação a $G$-graduação de $B$. O item $(iii)$ segue da unicidade da decomposição.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Supondo agora $(iii)$. O conjunto $B \cap (\cup_{g\in G} A_g)$ gera $B$, e isso implica em $(iv)$. De fato, sejam $b \in B$ e $b = \sum_{g\in G} b_g$, com $b_g \in A_g$, a decomposição de $b$ como soma de elementos homogêneos em relação à $G$-graduação de $A$. Segue da hipótese em $(iii)$ que $b_g \in B$, ou seja, $b_g \in B \cap (\cup_{g\in G} A_g)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Por fim, suponhamos agora $(iv)$. Consideremos $C$ uma base de $B$, $C \subset (\cup_{g\in G} A_g)$ composta de elementos homogêneos e seja $B_g = B \cap A_g$. O elemento $b = \sum_{i=1}^{n} c_i$, onde $c_i \in C$, é homogêneo de grau $g$ se, e somente se, $|c_i| = g, 1 \leq i \leq n$. Logo, $C_g = C \cap A_g$ é uma base para $B_g$. Além disso, $C = \cup_{g\in G} C_g$, e portanto, $B = \bigoplus_{g\in G} B_g$, donde segue o lema. ∎

**Proposição 1.2.8** *Se $I$ é um ideal $G$-graduado de uma álgebra $G$-graduada $A$ então $A/I$ é uma álgebra $G$-graduada considerando $(A/I)_g = \{a + I \mid a \in A_g\}$.*

**Demonstração:** Por definição $A/I = \sum_{g\in G} (A/I)_g$ e $(A/I)_g (A/I)_h \subset (A/I)_{gh}$. Logo, resta mostrarmos que essa soma é direta. Suponhamos que $(\sum_{g\in G}(a_g + I)) = 0$. Neste caso, $(\sum_{g\in G} a_g) \in I$. Como $I$ é $G$-graduado, segue do lema anterior, que $a_g \in I$, ou seja $(a_g + I) = 0$, e portanto, $A/I = \bigoplus_{g\in G} (A/I)_g$, donde segue o resultado. ∎

**Definição 1.2.9** *Sejam $G$ um grupo, $A = \oplus_{g\in G} A_g$ e $A' = \oplus_{g\in G} A'_g$ duas álgebras $G$-graduadas. Um homomorfismo de álgebras $\varphi\colon A \to A'$ é dito* **homomorfismo $G$-graduado** *se verifica $\varphi(A_g) \subset A'_g$, para cada $g \in G$. Analogamente, definimos endomorfismo, isomorfismo e automorfismo $G$-graduado.*

## 1.3 Álgebras livres

Nesta seção, faremos a construção das álgebras livres, ambiente este, em que introduzimos o conceito de identidades polinomiais que será utilizado em todo este trabalho.

Primeiramente, definamos a álgebra livre associativa com unidade. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um conjunto não vazio, infinito e enumerável, cujos elementos chamaremos de variáveis não comutativas.

**Definição 1.3.1** *Uma* **palavra** *em $X$ é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. Se $n = 0$, diremos que a palavra é vazia, a qual denotaremos por 1. Definimos o tamanho da palavra $x_{i_1}\ldots x_{i_n}$, como sendo o inteiro não negativo $n$. Dizemos que as palavras $x_{i_1}\ldots x_{i_n}$ e $x_{j_1}\ldots x_{j_m}$ são iguais se $n = m$ e para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos $i_k = j_k$.*

Seja $K\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem como base o conjunto de todas as palavras em $X$. Dessa forma, os elementos de $K\langle X\rangle$ são somas de termos que são produtos de um escalar em $K$ por uma palavra em $X$. Tais termos são chamados **monômios**. Tal espaço munido do produto (chamado de concatenação),

$$(x_{i_1}x_{i_2}\ldots, x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}) := x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}$$

é uma álgebra associativa unitária e $X$ gera $K\langle X\rangle$ como álgebra. Os elementos da álgebra $K\langle X\rangle$ são chamados de **polinômios**.

A seguir, provaremos que a álgebra $K\langle X\rangle$ tem a propriedade de ser um ambiente livre na classe das álgebras associativas unitárias, para isto faremos uso da seguinte definição.

**Definição 1.3.2** *Seja $\mathfrak{C}$ uma classe de álgebras e $F \in \mathfrak{C}$ uma álgebra gerada por um conjunto $X \subseteq F$. A álgebra $F$ é dita* **livre** *na classe $\mathfrak{C}$, se ela satisfaz a seguinte propriedade universal: $F$ possui algum conjunto gerador $X$ tal que para cada álgebra $A \in \mathfrak{C}$ e cada aplicação $h : X \longrightarrow A$ existe um único homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow A$ estendendo $h$. Neste caso, dizemos que $F$ é a* **álgebra livre na classe $\mathfrak{C}$ livremente gerada pelo conjunto** *$X$. Além disso, a cardinalidade do conjunto $X$, denotado por $|X|$, será chamada* **posto** *de $F$.*

**Exemplo 1.3.3** *Para qualquer conjunto $X$, a álgebra de polinômios $K[X]$ é livre na classe de todas as álgebras associativas com unidade. De fato, consideremos a álgebra $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, gerada pelo conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Sendo $A$ uma álgebra e $a_1, \ldots, a_n \in A$, podemos considerar a aplicação $h\colon X \to A$, $h(x_i) = a_i$. Temos que o homomorfismo $\varphi\colon K[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to A$, dado por $\varphi(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ estende $h$. Portanto, $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ é uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas, comutativas e unitárias, livremente gerada pelo conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Tal construção pode ser estendida facilmente para o caso em que o conjunto $X$ é enumerável.*

O próximo resultado demonstra que se considerarmos um conjunto $X$ de variáveis não comutativas, a álgebra $K\langle X\rangle$, anteriormente definida, é realmente livre na classe das álgebras associativas unitárias. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Proposição 1.3.4** *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre na classe das álgebras associativas unitárias e livremente gerada por $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.*

**Demonstração:** Consideremos a álgebra $K\langle X\rangle$ e tome $A$ uma álgebra associativa unitária. Dada qualquer aplicação $h\colon X \to A$, $h(x_i) = a_i \in A$, o homomorfismo $\varphi\colon K\langle X\rangle \to A$ dado por $\varphi(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, estende $h$. A unicidade segue do fato da extensão se dá pelos elementos de uma base. Portanto, $K\langle X\rangle$ é uma álgebra livre na classe de todas as álgebras associativas e unitárias, livremente gerada pelo conjunto $X$. ■

Seja $G$ um grupo. Pode ser construída, como no caso da álgebra associativa livre, a álgebra associativa $G$-graduada livre que denotaremos em todo trabalho por $K\langle X_G\rangle$. Basta considerar, para cada $g \in G$, os conjuntos disjuntos $X_g = \{x_1^g, x_2^g, \ldots\}$ e considerar $X_G = \cup_{g\in G} X_g$. Os elementos da álgebra $K\langle X_G\rangle$ são chamados simplesmente de **polinômios $G$-graduados**, os quais são somas formais de **monômios $G$-graduados** que por sua vez são produtos formais de um escalar por uma palavra formada por elementos de $X_G$.

Apresentaremos agora uma definição para variáveis não associativas.

Consideremos a álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$, com o conjunto de geradores livre $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Chamaremos a subálgebra gerada pelo conjunto $X$ na álgebra $K\langle X\rangle^{(+)}$, de **álgebra livre de Jordan especial** do conjunto dos geradores de $X$, e a denotamos por $SJ(X)$. O próximo resultado indicará que a álgebra $SJ(X)$ é realmente livre na classe das álgebras de Jordan especiais.

**Proposição 1.3.5** *Seja $J$ uma álgebra especial de Jordan. Então toda aplicação de $X$ em $J$ pode ser estendida unicamente a um homomorfismo de $SJ(X)$ em $J$.*

**Demonstração:** Consideremos $\varphi\colon X \to J$ uma aplicação e $A$ uma álgebra associativa envolvente para $J$. Então, $\varphi$ pode ser estendida para um homomorfismo $\overline{\varphi}\colon K\langle X\rangle \to A$. Assim, a restrição de $\overline{\varphi}$ a $SJ(X)$ é um homomorfismo de $SJ(X)$ em $J$ que estende $\varphi$, o que prova a proposição. Já a unicidade segue dos homomorfismos coincidirem em $X$ e suas imagens estarem em $J$. ■

**Definição 1.3.6** *Um elemento da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$ é chamado de* **polinômio de Jordan**, *se pertencer a $SJ(X)$, ou seja, pode ser expresso a partir dos elementos do conjunto $X$ por meio das operações $+$ e $\circ$.*

Utilizando o Exemplo 1.1.16 é fácil perceber que o polinômio $\frac{1}{2}(x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1)$ é um polinômio de Jordan, mas para um caso geral, ainda não se tem um critério adequado que nos permita reconhecer, a partir da expressão de um polinômio em $K\langle X\rangle$, se este é ou não um polinômio de Jordan.

**Observação 1.3.7** *É possível construir a álgebra livre nas variedades das álgebras de Jordan, denotada por $J(X)$, através de um quociente da álgebra livre na variedade de todas as álgebras (ver [30, Theorem 2, pg. 4]). Os resultados que se encontram nos capítulos posteriores são obtidos no ambiente de Jordan livre, mas como estamos trabalhando no ambiente especial de Jordan, não iremos entrar em detalhes nesta construção.*

O próximo resultado, relaciona as álgebras livres $J(X)$ e $SJ(X)$.

**Teorema 1.3.8** *(Teorema de Cohn) $SJ(X) \simeq J(X)$ se e somente se $\mid X \mid \leq 2$.*

**Demonstração:** Ver [30, Theorem 3] ■

**Observação 1.3.9** *Caso $|X| > 2$, o resultado anterior deixa de ser válido, ver [16, pág. 11]. Portanto as álgebras $SJ(X)$ e $J(X)$, para $|X| > 2$, não são isomorfas.*

Os resultados que serão feitos mais a seguir, valem para $J(X)$, mas decidimos denotar por $SJ(X)$, por facilidade de notação e entendimento. Na verdade, os resultados não modificam com a estrutura da álgebra livre escolhida.

Se consideramos o espaço vetorial de uma álgebra de Jordan $J$ com a operação ternária

$$(a, b, c) = (a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c),$$

onde $a, b, c \in J$, obtemos uma estrutura algébrica conhecida como sistema triplo de Lie (Lie triple system). Mais precisamente,

**Definição 1.3.10** *Um espaço vetorial $V$ com uma aplicação trilinear $(a,b,c) \to [a,b,c]$ satisfazendo*

*(i)* $[a,b,a] = 0$*;*

*(ii)* $[a,b,c] + [b,c,a] + [c,a,b] = 0$*;*

*(iii)* $[d,[a,b,c],e] = [[d,a,e],b,c] + [a,[d,b,e],c] + [a,b,[d,c,e]]$*,*

*é chamado de* **sistema triplo de Lie**.

**Observação 1.3.11** *O item (ii) da definição anterior para o caso de Jordan com a aplicação associador é verificada no Observação 1.1.13. Além disso, os itens (i) e (iii) são também verificados diretamente. Note ainda que a linearização do item (i) é*

$$(x,y,z) = -(z,y,x).$$

Neste sentido, temos o importante lema.

**Lema 1.3.12** *Todo associador de elementos de $X$ pode ser escrito como combinação linear de seus associadores próprios.*

**Demonstração:** Seja $u$ um associador de elementos em $X$. Provemos o resultado por indução sobre o comprimento de $u$, denotado aqui por $deg(u)$. Se $deg(u) = 3$, então $u$ é da forma $(x_1, x_2, x_3)$, e portanto o resultado segue. Suponhamos que o resultado seja válido para todo associador de comprimento menor que $deg(u) > 3$. Por hipótese de indução, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u = (u_1, u_2, u_3)$, onde cada $u_i$ é uma variável ou um associador próprio. Suponha primeiramente que $u_3 = (u', x_1, x_2)$ e e pelo item $(iii)$ da Definição 1.3.10 tem-se

$$(u_1, u_2, (u', x_1, x_2)) = (u', (u_1, u_2, x_1), x_2) - (u', u_1, x_2, u_2, x_1) - (u_1, (u', u_2, x_2), x_1). \tag{1.3}$$

Assim, podemos supor, sem perda de generalidade que $u_3$ é uma variável em $X$. Agora, suponha que $u_2 = (u', x_1, x_2)$. Neste caso

$$\begin{aligned} (u_1, (u', x_1, x_2), x_3) &= (u_1, u', x_3, x_1, x_2) + (u', (u_1, x_1, x_3), x_2) + (u', x_1, (u_1, x_2, x_3)) \\ &= (u_1, u', x_3, x_1, x_2) - [((u_1, x_1, x_3), x_2, u') + (x_2, u', (u_1, x_1, x_3))] \\ &+ (u', x_1, (u_1, x_2, x_3)). \end{aligned}$$

O resultado segue usando indução e aplicando a Igualdade (1.3). ∎

**Observação 1.3.13** *Seja $G$ um grupo. Novamente pode-se construir, como no caso da álgebra livre de Jordan especial, a álgebra livre de Jordan especial $G$-graduada que denotaremos em todo trabalho por $SJ(X_G)$. Para isto, basta trocar $X$ pelo conjunto $X_G$ definido anteriormente e tomar alguns cuidados como foi feito para a álgebra livre $G$-graduada. Os elementos da álgebra $SJ(X_G)$ são chamados simplesmente de* ***polinômios de Jordan $G$-graduados****, e são da forma $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)})$, onde tais variáveis são indicadas para informar que elas participam de algum monômio de $f$.*

De agora em diante o simbolo de multiplicação "$\circ$" em $SJ(X)$, poderá ser omitido e neste caso, retornaremos a notação da álgebra livre de Jordan. Isso não modificará os resultados posteriores, embora que num contexto geral isso pode ser contornado usando a álgebra livre de Jordan $J(X)$.

## 1.4 Identidades polinomiais

Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável, $f \in SJ(X)$ e $J$ uma álgebra de Jordan especial. Dizemos que um polinômio $f \in SJ(X)$ é uma **identidade polinomial** para $J$ se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in J$. A álgebra que possui uma identidade polinomial não trivial é denominada álgebra com identidade polinomial, ou simplesmente PI-álgebra.

O conjunto de todas as identidades de uma álgebra $J$, denotado por $T(J)$, é um ideal da álgebra $SJ(X)$. Observe que esse ideal tem a propriedade de ser invariante por endomorfismos de $SJ(X)$. Os ideais da álgebra $SJ(X)$ com essa propriedade são chamados **$T$-ideais** de $SJ(X)$.

A interseção de uma família qualquer de $T$-ideais ainda é um $T$-ideal. Portanto, dado um subconjunto $S$ qualquer de $SJ(X)$, podemos definir o **$T$-ideal gerado por** $S$, o qual denotaremos por $\langle S\rangle_T$, como sendo a interseção de todos os $T$-ideais de $SJ(X)$ que contêm $S$. Assim, $\langle S\rangle_T$ é o menor $T$-ideal de $SJ(X)$ contendo $S$ (no sentido que outro $T$-ideal com a mesma propriedade, contém $\langle S\rangle_T$). Seja $J$ uma álgebra de Jordan especial, dizemos que o $T$-ideal $T(J)$ é **gerado como $T$-ideal pelo conjunto** $\{f_i \mid i \in I\}$ se, $T(J) = \langle f_i \mid i \in I\rangle_T$, e dizemos que o conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$ é uma **base das identidades para** $J$. Por fim, dizemos que $g \in SJ(X)$ é **consequência das identidades polinomiais** $\{f_i \mid i \in I\}$ se $g \in \langle f_i \mid i \in I\rangle_T$.

**Definição 1.4.1** *Duas PI-álgebras $A$ e $B$ são* **PI-equivalentes** *se satisfazem as mesmas identidades polinomiais, ou seja, $T(A) = T(B)$.*

Um outro conceito utilizado para estudar identidades polinomiais bastante útil é o conceito de identidades fracas.

**Definição 1.4.2** *Sejam $J$ uma álgebra de Jordan especial e $V$ um subespaço de $J$. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade fraca para o par $(J, V)$ se $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$, para quaisquer $v_1, \ldots, v_n \in V$. O conjunto das identidades fracas para $(J, V)$ será denotado por $T(J, V)$.*

Por fim, consideremos agora uma álgebra de Jordan especial graduada. Podemos definir o conceito de substituição admissível e de identidade graduada.

**Definição 1.4.3** *Sejam $G$ um grupo e $J = \bigoplus_{g \in G} J_g$ uma álgebra de Jordan especial $G$-graduada.*

*(i) Uma* **substituição admissível** *para o polinômio $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in SJ(X_G)$ em $J$ é uma $n$-upla $(j_1, \ldots, j_n)$ de elementos de $J$, com $j_i \in J_{g_i}$, para $i = 1, \ldots, n$.*

*(ii) Um polinômio não nulo $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in SJ(X_G)$ é uma* **identidade polinomial graduada** *de $J$ se, para toda substituição admissível $(j_1, \ldots, j_n)$ tem-se que $f(j_1, \ldots, j_n) = 0$.*

**Observação 1.4.4** *A definição de $T$-ideal graduado, PI-equivalências de álgebras graduadas, $T$-ideal graduado gerado por um conjunto e variedades de álgebras de Jordan especial $G$-graduadas segue a mesma "filosofia" do caso ordinário, só tendo cuidado com as substituições admissíveis e colocando o conjunto gerador livre como sendo $X_G = \cup_{g \in G} X_g$.*

Terminaremos a seção com a definição de álgebra relativamente livre em álgebras de Jordan. É importante mencionar que as definições e resultados que iremos enunciar são muito similares ao caso associativo, e até mesmo para o caso geral. Por essa razão, a demonstração do Teorema 1.4.10 será omitida, pois segue palavra por palavra o que foi feito em [30, Teorema 2, pág. 4], modificando apenas detalhes técnicos.

O conjunto das identidades satisfeitas por todas as álgebras de uma certa classe de álgebras de Jordan especial $\mathcal{C}$ também é um ideal de $SJ(X)$. Não é difícil observar que tal ideal de identidades é invariante por endomorfismos de $SJ(X)$, ou seja, é $T$-ideal. Ele é chamado de **$T$-ideal da classe $\mathcal{C}$** e é denotado por $T(\mathcal{C})$.

**Definição 1.4.5** *Seja $S$ um subconjunto de $SJ(X)$. A classe $\mathcal{C}$ de todas as álgebras de Jordan especiais que têm todos os polinômios de $S$ como identidades é chamada de* ***variedade J-S definida pelo conjunto*** *$S$, denotada por $\mathcal{V}(S)$.*

**Exemplo 1.4.6** *$\mathcal{V}(SJ(X))$ consiste da álgebra nula chamada* ***variedade trivial****.*

**Exemplo 1.4.7** *A classe de todas as álgebras de Jordan especiais associativas é uma variedade definida pelo subconjunto $S = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ de $SJ(X)$.*

**Definição 1.4.8** *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade S-J. Dizemos que uma álgebra $F \in \mathcal{C}$ é uma* ***álgebra relativamente livre de*** *$\mathcal{V}$ se existe um subconjunto $Y$ gerador de $F$ tal que para toda álgebra $J \in \mathcal{V}$ e toda aplicação $\rho\colon Y \to J$ existe um único homomorfismo $\varphi\colon F \to J$ que estende $\rho$. Nestas condições, $F$ é dita* ***livremente gerada por*** *$Y$. Além disso, a cardinalidade de $Y$ é chamada* ***posto de*** *$F$.*

**Exemplo 1.4.9** *$SJ(X)$ é relativamente livre, livremente gerada por $X$, na variedade de todas as álgebras de Jordan especiais.*

Se $I \subseteq SJ(X)$ denotamos por $I(J)$ o ideal de uma álgebra de Jordan $J$ gerado por todos os elementos da forma $f(a_1, \ldots, a_n)$, onde $f \in I$ e $a_1, \ldots, a_n \in J$. O teorema seguinte caracteriza as álgebras relativamente livres em qualquer variedade de álgebras de Jordan especiais.

**Teorema 1.4.10** *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade J-S não trivial de álgebras de Jordan especiais determinada por um conjunto $I \subset SJ(X)$. Então para qualquer conjunto $Y$, a restrição a $Y$ do homomorfismo canônico $\pi\colon SJ(Y) \to SJ(Y)/I(SJ(Y))$ é injetivo e a álgebra $SJ_{\mathcal{V}}(\pi(Y)) = SJ(Y)/I(SJ(Y))$ é livre na variedade $\mathcal{V}$ com conjunto gerador livre $\pi(Y)$. Quaisquer duas álgebras relativamente livres em $\mathcal{V}$ com conjuntos geradores livres e de mesma cardinalidade, são isomorfas.*

**Demonstração:** A demonstração é análoga ao [30, Theorem 2, pág. 4] ■

## 1.5 Identidades multihomogêneas e multilineares

Os polinômios multilineares e multihomogêneos são de grande importância na busca de bases para as identidades polinomiais sobre determinados corpos. Nesta seção, apresentaremos condições relacionadas ao corpo e a esses polinômios, que nos ajudarão a simplificar as identidades que iremos trabalhar. É importante mencionar que estamos nos dedicando as álgebras de Jordan especiais pois é o ambiente utilizado em toda dissertação, mas os resultados obtidos aqui, podem ser vistos facilmente em outros ambientes.

Antes de tais resultados, vejamos as seguintes definições.

**Definição 1.5.1** *Seja um monômio $m$ em $SJ(X)$ nas variáveis $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Denotamos por $deg_{x_i}m$, o grau de $x_i$ em $m$, isto é, o número de vezes que $x_i$ aparece em $m$. A $n$-upla $(deg_{x_i}m, \ldots, deg_{x_n}m)$ é chamada de* **multigrau** *de $m$.*

**Definição 1.5.2** *Um polinômio não nulo $f(x_1, \ldots, x_n) \in SJ(X)$ é* **multihomogêneo**, *se todos os seus monômios possuem o mesmo multigrau. Em particular, dizemos que $f(x_1, \ldots, x_n)$ é* **multilinear**, *se é multihomogêneo de multigrau $(1, \ldots, 1)$.*

Sejam $f$ um polinômio de $SJ(X)$ de grau $n$ e $x_k$ uma variável de $f$. Podemos escrever $f$ como uma soma, $f = \sum_{i=0}^{n} f_i$, onde cada polinômio $f_i$ é homogêneo de grau $i$ na variável $x_k$. Cada polinômio $f_i$ é a componente homogênea de grau $i$ em $x_k$ do polinômio $f$. Além disso, observamos que podemos sempre escrever

$$f = \sum_{i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0} f^{(i_1, \ldots, i_n)},$$

onde $f^{(i_1, \ldots, i_n)}$ é a soma de todos os monômios em $f$ onde $x_1, \ldots, x_n$ tem grau $i_1, \ldots, i_n$, respectivamente. Os polinômios $f^{(i_1, \ldots, i_n)}$ não nulos são chamados de **componentes multihomogêneas** de $f$. Assim, todo polinômio pode ser escrito como soma de polinômios multihomogêneos.

**Exemplo 1.5.3** *Consideremos o polinômio*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 3x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1x_2x_3x_2 + x_2^2x_1x_3 - x_2x_1 \in SJ(X).$$

*Aqui decidimos omitir os símbolos "$\circ$" afim de deixar a notação mais "leve". Note que temos as seguintes componentes multihomogêneas em $f$:*

- $f^{(1,1,0)} = x_1x_2 - x_2x_1$;
- $f^{(1,0,1)} = 3x_1x_3$;
- $f^{(0,1,1)} = -2x_2x_3$;
- $f^{(1,2,1)} = 4x_1x_2x_3x_2 + x_2^2x_1x_3$.

*E temos*

$$f = f^{(1,1,0)} + f^{(1,0,1)} + f^{(0,1,1)} + f^{(1,2,1)}.$$

**Observação 1.5.4 (Processo de Multilinearização)** *Dados uma álgebra $A$ e uma identidade polinômio $f$ para $A$. Podemos obter um polinômio multilinear que é também identidade para $A$ e tem grau menor ou igual do que o grau de $f$. O algoritmo para desenvolver tal processo é o seguinte: seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio com $deg_{x_1} f > 1$, consideremos o polinômio*

$$g(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) := f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

*Como $f$ é uma identidade para $A$, segue que $g$ também será e com grau menor ou igual do que $f$ em $x_1$. Se $deg_{y_1} g = 1$ (respectivamente, $deg_{y_2} g = 1$) o processo termina para a variável $y_1$ (respectivamente, para a variável $y_2$). Caso o grau das novas variáveis sejam maior do que 2 nessa parcela, basta realizar esse processo mais vezes até obter grau 1. Fazendo esse processo em cada variável e parando quando obtermos um polinômio multilinear, obtemos o desejado.*

Vejamos um exemplo (que iremos citar novamente no Capítulo 5) para ilustrar esse processo.

**Exemplo 1.5.5** *A linearização do polinômio*

$$f = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x, x_{\sigma(3)}), x)$$

*é dada por:*

$$g = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, y, x_{\sigma(3)}), z) + \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, z, x_{\sigma(3)}), y).$$

*De fato, temos que a linearização é dada por $g = f_{z+y} - f_z - f_y$, donde*

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, z+y, x_{\sigma(3)}), z+y) - \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, z, x_{\sigma(3)}), z) \\ &- \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, y, x_{\sigma(3)}), y) \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, y, x_{\sigma(3)}), z) + \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, z, x_{\sigma(3)}), y). \end{aligned}$$

Os próximos resultados serão ferramentas importantes para todo o nosso texto.

**Lema 1.5.6** *Seja $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_m) \in SJ(X)$ onde $f_i$ é a componente homogênea de $f$ com grau $i$ em $x_k$, para algum $k = 1, \ldots, m$ fixado.*

*(i) Se o corpo $K$ contém mais que $n$ elementos, então as componentes homogêneas $f_i$'s são consequências de $f$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$;*

*(ii) Se a característica do corpo é zero ou maior que o grau de $f$, então $f$ é equivalente a um conjunto de identidades polinomiais multilineares.*

**Demonstração:** $(i)$ Seja $I = \langle f \rangle_T$ o $T$-ideal de $SJ(X)$ gerado por $f$. Escolhamos $n+1$ elementos distintos de $K$, digamos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$. Como $I$ é um $T$-ideal, obtemos que

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots x_m) \in I,$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. Consideremos estas equações como um sistema linear com incógnitas $f_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Sendo o determinante de Vandermonde,

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

é diferente de zero, temos que cada $f_i(x_1, x_2, \ldots x_m) \in I$, ou seja, cada $f_i$ é consequência do polinômio $f$.

$(ii)$ Pelo item anterior, podemos supor que $f$ é multihomogêneo. Aplicando o processo de linearização: se $deg_{x_1} f = d > 1$, então

$$h(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n)$$

E assim, $h(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = nf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e pela hipótese $f$ é consequência de $h$. O resultado segue aplicando indução sobre $h$. ■

Tendo esse resultado em mãos, temos o seguinte corolário:

**Corolário 1.5.7** *Seja $A$ uma álgebra. Então,*

*(i) Se o corpo $K$ é infinito, todas identidades polinomiais de $A$ seguem de suas identidades multihomogêneas.*

*(ii) Se o corpo $K$ tem característica zero, todas as identidades polinomiais de $A$ seguem de suas identidades multilineares.*

**Exemplo 1.5.8** *Sejam $A$ uma álgebra qualquer e $C$ uma álgebra comutativa (na classe das álgebras associativas). Podemos definir a álgebra $A \otimes C$. Em geral, algumas das identidades polinomiais de $A$ podem não ser identidades para $A \otimes C$. Daí, dizemos que*

*$f \in T(A)$ é uma* **identidade estável** *de $A$, se para toda álgebra comutativa $C$ (na classe das álgebras associativas), temos $f \in T(A \otimes C)$.*

*Observe que se $charK = 0$ e $C$ é uma álgebra comutativa na classe das álgebras associativas, então toda identidade de $A$ é estável. Com efeito, pelo resultado anterior, podemos considerar apenas identidades multilineares. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial de $A$ multilinear. Assim, para provar que $f \in T(A \otimes C)$, é suficiente verificar para elementos geradores de $A \otimes C$. Sejam $a_1 \otimes c_1, \ldots a_n \otimes c_n$, com $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $c_1, \ldots, c_n \in C$. Como $f$ é multilinear, então*

$$f(a_1 \otimes c_1, \ldots, a_n \otimes c_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \otimes c_1 \cdots c_n = 0.$$

*Implicando o resultado.*

**Observação 1.5.9** *As definições e resultados que se encontram nesta seção, com mínimas adaptações, continuam sendo válidas para álgebras de Jordan especiais com uma $G$-graduação, onde $G$ é um grupo.*

## 1.6 Representações do grupo simétrico e do grupo geral linear

Nesta seção, faremos um breve resumo da teoria de representações do grupo simétrico e do grupo geral linear, com aplicações na teoria de PI-álgebras. Para maior detalhes, indicamos [17, Capítulo 8].

Em toda seção, assumimos $K$ um corpo de característica 0.

Primeiramente, apresentamos conceitos relacionados a módulos, que serão de grande importância nesta seção.

**Definição 1.6.1** *Seja $A$ uma álgebra unitária. Definimos um $A$-módulo à esquerda sobre $A$ (ou simplesmente $A$-módulo) como sendo um espaço vetorial $M$, munido de um produto:*

$$\begin{array}{rcl} \cdot : A \times M & \to & M \\ (a, m) & \mapsto & a \cdot m \end{array}$$

*que satisfaz:*

*(i)* $(a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m$;

*(ii)* $a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_1 + a \cdot m_2$;

*(iii)* $(\lambda a) \cdot m = a \cdot (\lambda m) = \lambda(a \cdot m)$;

*(iv)* $a_1 \cdot (a_2 \cdot m) = (a_1 a_2) \cdot m$;

*(v)* $1_A \cdot m = m$,

*para quaisquer* $a, a_1, a_2 \in A, m, m_1, m_2 \in M$ *e* $\lambda \in K$.

**Exemplo 1.6.2** *Se $A$ é uma álgebra associativa, então $A$ é naturalmente um módulo sobre si mesma, cujo produto é a multiplicação da álgebra.*

**Exemplo 1.6.3** *Sejam $G$ um grupo, $V$ um espaço vetorial e $\varphi \colon G \to GL(V)$ um homomorfismo de grupos, onde $\varphi(g) = \varphi_g$. Considere o seguinte aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \cdot \colon KG \times V & \to & V \\ (\sum_{g\in G} \lambda_g g, v) & \to & \sum_{g\in G} \lambda_g g \cdot v = \sum_{g\in G} \lambda_g \varphi_g(v). \end{array}$$

*Note que $V$, munido dessa aplicação, é um $KG$-módulo (ou simplesmente, $G$-**módulo**), onde as condições da Definição 1.6.1 seguem do fato de que $\varphi$ é um homomorfismo de grupos e $\varphi_g$ é linear, para cada $g \in G$.*

**Exemplo 1.6.4** *Denote por $\mathcal{S}_n$ o grupo simétrico nos elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$. Seja $P_n$ o subespaço dos polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$ nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Temos que $\beta = \{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in \mathcal{S}_n\}$ é uma base de $P_n$. Considere a aplicação bilinear $\cdot \colon K\mathcal{S}_n \times P_n \to P_n$ que satisfaz*

$$\sigma \cdot (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)} x_{\sigma(i_2)} \cdots x_{\sigma(i_n)}$$

*onde $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \in \beta$, com $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Munido desse produto, temos que $P_n$ é um $K\mathcal{S}_n$-módulo, ou simplesmente um $\mathcal{S}_n$-módulo.*

**Observação 1.6.5** *De modo análogo ao que foi feito na definição anterior, é possível definir módulo à direita.*

**Definição 1.6.6** *Sejam $A$ uma álgebra e $M$ um $A$-módulo. Definimos um* **submódulo** *(ou $A$-submódulo) de $M$ como sendo um subespaço vetorial $N$ de $M$ tal que $a \cdot n \in N$, para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$. Se $N \neq \{0\}$ e não existe nenhum submódulo $N_1$ de $M$ tal que $\{0\} \neq N_1 \subsetneq N$ , dizemos que $N$ é* **minimal**. *Se os únicos submódulos de $M$ são $\{0\}$ e $M$, dizemos que $M$ é um $A$-***módulo irredutível** *(ou simples).*

**Exemplo 1.6.7** *Considerando a estrutura de $A$-módulo da álgebra $A$, é fácil ver que os submódulos de $A$ são exatamente seus ideais à esquerda.*

**Definição 1.6.8** *Sejam $A$ uma álgebra e, $M_1$ e $M_2$ $A$-módulos. Dizemos que uma transformação linear $\varphi \colon M_1 \to M_2$ é um homomorfismo de $A$-módulos se, para quaisquer $a \in A$ e $m \in M_1$, temos $\varphi(a \cdot m) = a \cdot \varphi(m)$. Se $\varphi$ é bijetivo, dizemos que $\varphi$ é um isomorfismo de $A$-módulos e que $M_1$ e $M_2$ são $A$-módulos isomorfos.*

Seja $N$ um A-submódulo de $M$. É fácil observar que $M/N$ formado por elementos da forma $x+N$, herdará uma estrutura de $A$-módulo definida por $a(x+N) = ax+N$. Este módulo $M/N$ é chamado o **módulo quociente** de $M$ por $N$.

Sejam $A$ uma álgebra unitária e, $M$ e $N$ $A$-módulos. Definimos o produto tensorial de $N$ por $M$ igualmente no que foi feito no Exemplo 1.1.18. Aqui o escalar será a álgebra $A$.

Neste momento, iremos entrar no assunto de representações propriamente dito. Assim, consideremos $V$ um espaço vetorial e seja $GL(V)$ o grupo dos endomorfismos invertíveis de $V$.

**Definição 1.6.9** *Uma* **representação** *de um grupo $G$ em $V$ é um homomorfismo de grupos $\rho\colon G \to GL(V)$.*

Definimos o **grau** da representação $\rho$ como sendo a dimensão do espaço vetorial $V$. Neste caso, se $dim V = n$ é finita, podemos ver uma representação linear de $G$ em $V$ como sendo um homomorfismo $\rho\colon G \to GL_n(K)$.

Denotamos por $End(V)$ a álgebra dos $K$-endomorfismos de $V$. Considerando a álgebra de grupo $KG$ e $\rho$ uma representação de $G$ em $V$, segue que $\rho$ induz um homomorfismo de $K$-álgebras $\rho'\colon KG \to End(V)$ tal que $\rho'(1_G) = 1$.

**Observação 1.6.10** *Uma representação do grupo $G$ determina um $KG$-módulo (ou $G$-módulo) de modo único, da seguinte forma: se $\rho\colon G \to GL(V)$ é uma representação de $G$, $V$ torna-se um $G$-módulo (à esquerda) definindo $gv = \rho(g)(v)$, para todo $g \in G$, $v \in V$. Reciprocamente, se $M$ é um $G$-módulo, então $\rho\colon G \to GL(M)$ tal que $\rho(g)(m) = gm$, para $g \in G$, $m \in M$, define uma representação de $G$ em $M$, por extensão. Aqui, $M$ está sendo visto com seus escalares sobre $K$, ou seja, $M$ é um espaço vetorial.*

**Definição 1.6.11** *Seja $\rho\colon G \to GL(V)$ uma representação do grupo $G$ em $V$. Dizemos que $\rho$ é irredutível se $V$ é um $G$-módulo irredutível. E, $\rho$ é* **completamente redutível** *(ou semissimples) se $V$ é soma direta de submódulos irredutíveis.*

**Teorema 1.6.12** *(Maschke) Sejam $G$ um grupo finito e $K$ um corpo de modo que $char K = 0$ ou $char K = p > 0$, com $p \nmid |G|$. Então, toda representação do grupo $G$ de grau finito é completamente redutível. Além disso, se $K$ é algebricamente fechado, $KG$ é semissimples.*

Sejam $\rho\colon G \to GL(V)$ uma $K$-representação linear, onde $charK$ não divide $|G|$, e o $G$-módulo $V$. Como consequência do Teorema de Maschke, segue que $V$ é uma soma direta de $KG$-submódulos irredutíveis, ou seja,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n.$$

Um elemento $e \in KG$ é **idempotente** se $e^2 = e$. Dizemos que um idempotente é minimal se gera um ideal à esquerda (resp. à direita) minimal.

**Definição 1.6.13** *Seja $\rho\colon G \to GL(V)$ uma representação de dimensão finita e a função traço $tr\colon End(V) \to K$. Então, a função $\chi_\rho\colon G \to K$ em que $\chi_\rho(g) = tr(\rho(g))$ é chamado de* **caracter** *da representação $\rho$ e $dimV = deg\chi_\rho$ é chamado o grau de $\chi_\rho$. Dizemos que o caracter $\chi_\rho$ é irredutível, se $\rho$ é irredutível.*

**Exemplo 1.6.14** *Considere $G$ um grupo. Sendo $\varphi_0\colon G \to GL(V)$ uma representação trivial de grau finito, segue que $\chi_\varphi(g) = dim_K V$ para todo $g \in G$.*

### 1.6.1 Representações do grupo simétrico

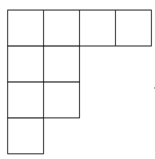
Nesta seção, apresentamos conceitos e alguns resultados relacionados às representações do grupo simétrico.

**Definição 1.6.15** *Seja $n \geq 1$. Uma partição $\lambda$ de $n$ é uma $r$-upla $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de números naturais, tal que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$ e $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Neste caso, escrevemos $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$.*

**Definição 1.6.16** *Sendo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, definimos o* **diagrama de Young** *$D_\lambda$ da partição $\lambda$ como sendo o conjunto $D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n_i\}$.*

**Observação 1.6.17** *Para representar $D_\lambda$, iremos substituir pontos por células. Nesta representação, a célula correspondente a $(i,j) \in D_\lambda$ está na $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna. O índice das linhas (primeira coordenada $i$), aumenta de cima para baixo e o das colunas (segunda coordenada $j$) aumenta da esquerda para a direita.*

**Exemplo 1.6.18** *Considere $\lambda = (4,2,2,1)$ uma partição do número 9. Temos então que o diagrama de Young $D_\lambda$ é dado por:*

$D_\lambda =$  .

**Teorema 1.6.19** *Sejam $K$ um corpo de característica 0 e $n \geq 1$. Existe uma correspondência biunívoca entre os $\mathcal{S}_n$-caracteres irredutíveis e as partições de $n$. Além disso, se $\chi_\lambda\colon \lambda \vdash n$ é o conjunto de todos os caracteres irredutíveis de $\mathcal{S}_n$ e $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ é o grau de $\chi_\lambda$, $\lambda \vdash n$, então*

$$KS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(K),$$

*onde $I_\lambda \cong M_{d_\lambda}(K)$ é o ideal bilateral de $KS_n$ associado a $\lambda$.*

**Demonstração:** Ver [17, Theorem 3.1.24]. ∎

**Definição 1.6.20** *Seja $\lambda \vdash n$. Uma tabela de Young $T_\lambda$ do diagrama $D_\lambda$ consiste em preencher os quadrados do diagrama com os números $1, \ldots, n$. Dizemos que $T_\lambda$ é uma tabela de forma $\lambda$.*

**Definição 1.6.21** *Uma tabela $T_\lambda$ de forma $\lambda$ é* **Standard**, *se os inteiros em cada linha e em cada coluna de $T_\lambda$ crescem da esquerda para a direita e de cima para baixo, respectivamente.*

**Exemplo 1.6.22** *Consideremos as seguintes tabelas de Young:*

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2} 6 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

*e*

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 7 \\ \cline{1-2} 6 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

*Pelo que definimos acima, $T_1$ é uma tabela Standard, mas $T_2$ não é.*

Para cada partição $\lambda$ de $n$, podemos relacionar $n!$ tabelas distintas associadas as tabelas de Young $D_\lambda$. Entre estas, podemos destacar as tabelas standard, que serão de grande importância em resultados nos próximos capítulos.

Iremos considerar agora os elementos da álgebra de grupos, afim de definir um elemento "quase" idempotente e uma relação entre estes e os $G$-módulos irredutíveis. Para isto, iremos considerar a seguinte definição.

**Definição 1.6.23** *O estabilizador de linhas $R_{T_\lambda}$ de um dada tabela $T_\lambda$ é o subgrupo de $\mathcal{S}_n$ que consiste de todas as permutações que fixam, como conjunto, as entradas das linhas de $T_\lambda$. Analogamente, o estabilizador de colunas $C_{T_\lambda}$ é o subgrupo de $\mathcal{S}_n$ que fixa as colunas.*

Como exemplo, considerando a tabela de Young $T_1$, dado no Exemplo 1.6.22, temos que

$$R_{T_\lambda} = S_{\{1,3,4,5\}} \times S_{\{2,7\}} \times S_{\{6,8\}} \times S_{\{9\}}$$

e

$$C_{T_\lambda} = S_{\{1,2,6,9\}} \times S_{\{3,7,8\}} \times S_{\{4\}} \times S_{\{5\}}.$$

**Definição 1.6.24** *Para uma dada tabela $T_\lambda$, defina*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \sigma\tau$$

*em que $(-1)^\tau$ é o sinal da permutação $\tau$.*

O teorema a seguir descreve, a menos de isomorfismo, as representações irredutíveis de $\mathcal{S}_n$.

**Teorema 1.6.25** *Para toda tabela $T_\lambda$ de forma $\lambda \vdash n$, o elemento $e_{T_\lambda}$ é múltiplo escalar de um idempotente minimal de $K\mathcal{S}_n$ e $K\mathcal{S}_n e_{T_\lambda}$ é o ideal minimal à esquerda com caracter $\chi_\lambda$. Além disso, se $\mu \vdash n$ é outra partição de $n$, então*

$$K\mathcal{S}_n e_{T_\lambda} \cong K\mathcal{S}_n e_{T_\mu} \text{ se, e somente se, } \lambda = \mu.$$

**Demonstração:** Ver [17, Teorema 3.1.10]. ■

### 1.6.2 $S_n$-ações no espaço dos polinômios multilineares $P_n$

Como vimos na Seção 1.5, o estudo das identidades graduadas de uma álgebra $A$, em característica zero, pode ser reduzido ao estudo das multilineares. Nesta seção, iremos apresentar uma ação do grupo simétrico $\mathcal{S}_n$ no espaço dos polinômios multilineares, em $n$ variáveis fixas, na álgebra de Jordan $SJ(X)$. Aqui, estamos considerando $SJ(X)$ com a graduação trivial.

Seja $P_n$ o espaço dos polinômios multilineares em $x_1, \ldots, x_n$ na álgebra de Jordan especial livre $SJ(X)$. No Exemplo 1.6.4, com pequenas adaptações técnicas, vimos que o espaço vetorial $P_n$ tem uma estrutura de $\mathcal{S}_n$-módulo.

Vejamos o caso $\mathbb{Z}_2$-graduado deste fato.

Para cada $n+k \geq 1$ e $k \geq 0$, o espaço vetorial $P_{k,n}$ dos polinômios multilineares de grau $n+k$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n$ é um $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_n$-módulo sob a ação

$$(\lambda, \mu)f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) = f(x_{\lambda(1)}, \ldots, x_{\lambda(k)}, y_{\mu(1)}, \ldots, y_{\mu(n)}).$$

Observe que $P_{k,n} \cap Id_2(A)$ é um submódulo $Z_2$-graduado. Considerando $A$ uma álgebra de Jordan especial $\mathbb{Z}_2$-graduada, temos que a igualdade anterior, por sua vez, induz uma estrutura do $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_n$-módulo ao espaço:

$$P_{k,n}(A) = \frac{P_{k,n}}{(P_{k,n} \cap Id_2(A))}.$$

### 1.6.3 A ação do grupo geral linear $GL_m$

Seja $V$ um espaço vetorial $m$-dimensional. Identificamos $GL_m$ como o grupo das matrizes invertíveis de ordem $m$ com entradas em $K$ isomorfa à $GL(V)$.

**Definição 1.6.26** *Seja $\varphi$ uma representação do grupo geral linear $GL_m$, digamos $\varphi\colon GL_m \to GL_s$, para algum $s$. A representação $\varphi$ é dita* **polinomial** *se as entradas $(\varphi(g))_{pq}$ da matriz $\varphi(g)$ de ordem $s$ são polinômios nas entradas $a_{kl}$ de grau $g$ para $g \in GL_m$, $k$, $l = 1, \ldots, m$ e $p$, $q = 1, \ldots, s$. Uma representação polinomial $\varphi$ é* **homogênea** *de grau $d$ se os polinômios $(\varphi(g))_{pq}$ são homogêneos de grau $d$. Um $GL_m$-módulo $W$ é polinomial, se a representação correspondente é polinomial. De forma análoga, definimos módulos polinomiais homogêneos.*

Fixemos o espaço vetorial $V_m$ com base $\{x_1, \ldots, x_m\}$ e com a ação canônica de $GL_m$. Assumimos que

$$SJ(V_m) = SJ(x_1, \ldots, x_m)$$

é a álgebra de Jordan especial livre gerada por $\{x_1, \ldots, x_m\}$. O espaço vetorial $SJ(V_m)$ é um $GL_m$-módulo à esquerda quando munido da ação:

$$gf(x_1, \ldots, x_m) = f(g(x_1), \ldots, g(x_m)), g \in GL_m, f(x_1, \ldots, x_m) \in SJ(V_m).$$

**Observação 1.6.27** *Uma importante questão a observar é que tais estruturas dependem principalmente da estrutura do espaço vetorial, e não do produto da álgebra. Assim, o que foi feito para álgebras associativas em [9], para álgebras de Lie em [32] e para as álgebras de Jordan de uma forma bilinear, embora implícitas, em [8], não tem nenhuma alteração de resultados.*

Da observação anterior, deduzimos que os resultados que utilizaremos e que foram enunciados em [9, Capítulo 12, Seção 4] continuam válidos para o ambiente de álgebras de Jordan especiais livres.

**Teorema 1.6.28** *(i) Toda representação polinomial de $GL_m$ é soma direta de subrepresentações polinomiais homogêneas irredutíveis;*

*(ii) Todo $GL_m$-módulo polinomial homogêneo irredutível de grau $n \geq 0$ é isomorfo a um submódulo de $(SJ(V_m))^{(n)}$.*

De forma similar às representações de $\mathcal{S}_n$ irredutíveis, as representações polinomiais homogêneas irredutíveis de grau $n$ de $GL_m$ são descritas pelas partições de $n$ em não mais que $m$ partes e pelos diagramas de Young. Mais precisamente, temos os seguintes resultados.

**Teorema 1.6.29** *(i) As $GL_m$-representações irredutíveis de grau $n \geq 0$, duas a duas não isomorfas, estão em correspondência biunívoca com as partições, dada por $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, de $n$. Denotamos por $W_m(\lambda)$ o $GL_m$-módulo irredutível correspondente à $\lambda$;*

*(ii) Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de $n$. O $GL_m$-módulo $W_m(\lambda)$ é isomorfo a um submódulo de $(SJ(V_m))^{(n)}$. Mais ainda,$(SJ(V_m))^{(n)}$ pode ser escrito na forma:*

$$(SJ(V_m))^{(n)} \cong \sum d_\lambda W_m(\lambda);$$

**Observação 1.6.30** *As representações polinomiais homogêneas irredutíveis de grau $n$ de $GL_m$, são descritas pelas partições de $n$ (em não mais que $m$ partes) e pelos diagramas de Young.*

**Definição 1.6.31** *Uma representação de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$ é polinomial, se o é em cada $GL_{m_i}$, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$.*

Agora, podemos observar que existe uma relação entre as representações polinomiais irredutíveis de $GL_{m_1} \times \cdots \times GL_{m_s}$ e as representações irredutíveis de $\mathcal{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{n_s}$. Para isso, suponhamos, sem perda de generalidade, $s = 1$. Estamos interessados em estabelecer um análogo do Teorema 1.6.25 para $GL_m$-módulos. Definimos a ação à direita de $\mathcal{S}_n$ em $(SJ(V_m))$ por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_n})\sigma^{-1} = x_{i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_{\sigma(n)}} \in (SJ(V_m))^{(n)}, \sigma \in \mathcal{S}_n.$$

Por simplicidade, omitimos os parênteses do monômio, já que a ação não interfere na posição deles.

Note que a ação à esquerda de $\mathcal{S}_n$ em $P_n$ é uma ação que permuta os índices das variáveis, enquanto a ação à direita, troca as posições das variáveis.

Assim, temos a seguinte proposição:

**Proposição 1.6.32** *Munido da ação acima, $(SJ(V_m))^{(n)}$ é um $\mathcal{S}_n$-módulo à direita.*

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de $n$, em não mais que $m$ partes, e $q_1, \ldots, q_k$ as alturas das colunas do diagrama $D_\lambda$ (i.e., $k = \lambda_1$ e $q_j = \lambda'_j$). Denotamos por $s_\lambda = s_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$, $q = q_1$, o polinômio de $SJ(V_m)$ definido por

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_q) = \prod_{j=1}^{k} s_{q_j}(x_1, \ldots, x_{q_j}) \tag{1.4}$$

em que $s_p(x_1, \ldots, x_p)$ é um polinômio do tipo $J$-Standard. Para maiores detalhes da construção deste tipo de polinômio, citamos o artigo [31, Section II]. Esse polinômio é chamado **polinômio standard de Jordan**.

**Teorema 1.6.33** *Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de $n$, em não mais que $m$ partes, e $SJ(V_m)^{(n)}$ a componente homogênea de grau $n$ em $SJ(V_m)$.*

*(i) O elemento $s_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$, definido em (1.4), gera um $GL_m$-submódulo de $SJ(V_m)^{(n)}$ isomorfo a $W_m(\lambda)$;*

*(ii) Todo $W_m(\lambda) \subseteq SJ(V_m)^{(n)}$ é gerado por um elemento não nulo*

$$w_\lambda(x_1, \ldots, x_q) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_q) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \alpha_\sigma \sigma, \alpha_\sigma \in K.$$

Esses resultados serão aplicados fortemente na demonstração do Teorema 4.3.7.

## 1.7 Teoria de invariantes

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre teoria de invariantes que serão utilizados como base para demonstração de alguns resultados nos próximos capítulos. Para uma abordagem mais aprofundada deste conteúdo, indicamos os trabalhos de Concini e Procesi em [6].

Consideremos $t_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots$ , $j = 1, 2, \ldots, n$ variáveis comutativas, e sejam os vetores $t_i = (t_{i1}, \ldots, t_{in})$. Seja $U$ o $K[t_{ij}]$-módulo livre, livremente gerado por

$t_i$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$. A forma bilinear simétrica não degenerada em $U$ é definida como $t_i \circ t_j = t_{i1}t_{j1} + \cdots + t_{in}t_{jn}$.

Consideremos ainda a álgebra $R = K[t_i \circ t_j]$, cuja base foi descrita em [6] em termos de tabelas duplas num contexto bem mais geral.

**Definição 1.7.1** *Uma* **tabela dupla** *é um arranjo:*

$$T = \left( \begin{array}{cccc|cccc} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1m_1} & q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1m_1} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2m_2} & q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \ldots & p_{km_k} & q_{k1} & q_{k2} & \ldots & q_{km_k} \end{array} \right)$$

*onde $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k \geq 0$ e os $p_{ij}$ e $q_{ij}$ são inteiros.*

Associamos à tabela dupla $T = (p_1p_2 \ldots p_m \mid q_1q_2 \ldots q_m)$ o polinômio $\tilde{\varphi}(T) \in R$ dado por:

$$\tilde{\varphi}(T) = \sum (-1)^{\sigma} (t_{p_1} \circ t_{q_{\sigma(1)}})(t_{p_2} \circ t_{q_{\sigma(2)}}) \cdots (t_{p_m} \circ t_{q_{\sigma(m)}}). \tag{1.5}$$

Aqui $\sigma$ percorre o grupo simétrico $\mathcal{S}_m$ e $(-1)^{\sigma}$ é o sinal de $\sigma$.

**Observação 1.7.2** *Se $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots, T^{(k)}$ denotam as linhas da tabela dupla $T$ associamos a esta tabela o polinômio $\tilde{\varphi}(T) = \tilde{\varphi}(T^{(1)})\tilde{\varphi}(T^{(2)}) \cdots \tilde{\varphi}(T^{(k)})$.*

Note que, $\tilde{\varphi}(T) = det(t_{p_i} \circ t_{q_j})$, onde $1 \leq i, j \leq m$. Então, se $p_i = p_j$ ou $q_i = q_j$ para algum $i \neq j$ então $\tilde{\varphi}(T) = 0$.

**Definição 1.7.3** *A tabela dupla $T$ é duplamente standard se a tabela*

$$T' = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1m_1} \\ q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1m_1} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2m_2} \\ q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \ldots & p_{km_k} \\ q_{k1} & q_{k2} & \ldots & q_{km_k} \end{pmatrix}$$

*é uma tabela Standard com respeito à Definição 1.6.21.*

As demonstrações dos resultados a seguir se encontram em [6].

**Teorema 1.7.4 ([6], Teorema 5.1)** *Os polinômios $\{\tilde{\varphi}(T)\}$, onde $T$ percorre todas as tabelas duplamente standard cujas entradas são inteiros positivos, com $m_1 \leq n$, formam uma base para o espaço vetorial $R$ sobre $K$.*

Seja

$$T = (p_1 \dots p_s \; r_1 \dots r_k \mid r_{k+1} \dots r_{n+1} \; q_1 \dots q_{k-1})$$

uma tabela de apenas uma linha tal que $n+1 = s+k$ e uma permutação $\sigma$ de $r_1$, $r_2$, $\dots$, $r_{n+1}$ o elemento

$$(-1)^{\sigma}\tilde{\varphi}((p_1 \dots p_s \; r_{\sigma(1)} \dots r_{\sigma(k)} \mid r_{\sigma(k+1)} \dots r_{\sigma(n+1)} \; q_1 \dots q_{k-1}))$$

dependendo somente sobre a classe de $\sigma$ modulo o subgrupo $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{n+1-k}$ fixando o conjunto $\{r_1, r_2, \dots, r_{n+1}\}$. Denotemos

$$\varphi(\tilde{T}) = \sum (-1)^{\sigma}\tilde{\varphi}((p_1 \dots p_s \; r_{\sigma(1)} \dots r_{\sigma(k)} \mid r_{\sigma(k+1)} \dots r_{\sigma(n+1)} \; q_1 \dots q_{k-1})),$$

onde $\sigma$ percorre todo o conjunto dos representantes nas classes laterais de $\mathcal{S}_k \times \mathcal{S}_{n+1-k}$ in $\mathcal{S}_n$. Assim,

**Lema 1.7.5 ([6], Lema 5.2)** $\varphi(\tilde{T}) = 0$ *em* $K[(t_i \circ t_j)]$.

**Lema 1.7.6 ([6], Theorem 5.7)** *O ideal de relações entre os* $t_i \circ t_j$ *é gerado pelas matrizes simétricas menores* $det(t_i \circ t_j)$ *de ordem* $n+1 \times n+1$.

# Capítulo 2

# Classificação das graduações das álgebras de Jordan de uma forma bilinear

Neste capítulo, estudaremos a classificação das graduações da álgebra de Jordan de uma forma bilinear, sobre a hipótese do corpo ser de característica diferente de 2, feita por Yuri Bahturin e Ivan Shestakov em [3] e complementada por Fabrizio Martino em [26].

Afim de deixarmos nosso capítulo o mais independente possível de outras fontes, decidimos fazer uma breve introdução dos conceitos relacionados a formas bilineares. Aqui, a menos que seja mencionado, consideraremos todos os espaços vetoriais, assim como todas as álgebras, sobre um corpo $K$ de característica diferente de 2.

## 2.1 Formas bilineares

Nesta seção, introduzimos algumas definições e resultados sobre formas bilineares como auxílio para as próximas seções. Para maiores detalhes, indicamos a referência [29, Chapter 11].

É importante mencionar que já fizemos uso da definição de forma bilinear no Capítulo 1, mas por se tratar de um objeto que será útil em todo nosso trabalho, decidimos nos aprofundar neste conceito.

**Definição 2.1.1** *Seja $b\colon V\times V\to K$ uma forma bilinear sobre um espaço vetorial $V$. Dizemos que $b$ é* ***simétrica*** *quando $b(v,w)=b(w,v)$, para todo $v,w\in V$. E dizemos que é* ***antissimétrica*** *quando $b(v,w)=-b(w,v)$, para todo $v,w\in V$.*

Um exemplo comum de forma bilinear são os produtos internos reais, os quais são formas simétricas. Outro exemplo pode ser dado da seguinte forma: Sendo $T$ um funcional linear sobre $\mathbb{R}^3$, a aplicação bilinear $h_T\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definida por $h_T(u,v)=T(u\times v)$, onde "$\times$" é o produto vetorial, é uma forma bilinear antissimétrica.

**Observação 2.1.2** *Se $\mathrm{char}K=2$, então $b$ é simétrica se, e somente se, é antissimétrica. Se $\mathrm{char}K\neq 2$, então a única forma bilinear sobre $V$ que é, simultaneamente, simétrica e antissimétrica é a forma nula.*

**Definição 2.1.3** *Seja $b$ uma forma bilinear simétrica ou antissimétrica sobre um espaço $V$.*

*(i) Dizemos que dois vetores distintos, $u$ e $v$, em $V$ são* ***ortogonais*** *em relação à forma $b$ se $b(u,v)=0$.*

*(ii) A forma $b$ é dita ser* ***não degenerada*** *se satisfaz a seguinte condição: se para todo vetor $v\in V$ valer $b(v,u)=0$, então $u=0$. Dizemos que $b$ é* ***degenerada*** *caso contrário.*

**Observação 2.1.4** *Sejam $b\colon V\times V\to K$ uma forma bilinear simétrica ou antisimétrica e $S$ um subconjunto não vazio de $V$. Nestas condições, é possível definir o conjunto $S^{\perp}=\{v\in V\mid b(v,s)=0,\forall s\in S\}$. É de fácil verificação que $S^{\perp}$ é um subespaço de $V$ chamado de* ***subespaço ortogonal*** *a $S$ em relação a forma $b$. Observamos também que se $W$ é um subespaço de $V$, então a restrição de $b$ à $W$ é não degenerada se, e somente se, $W\cap W^{\perp}=\{0_V\}$.*

**Definição 2.1.5** *Seja $V$ um espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica ou antissimétrica $b$ e, $S$ e $T$ subconjuntos de $V$.*

*(i) $S$ é chamado* **ortogonal** *à $T$ se $b(s,t)=0$, para todos $s\in S$ e $t\in T$. Em outras palavras, $T\subseteq S^{\perp}$.*

*(ii) $S$ é chamado* **base ortogonal** *se $S$ é base do espaço $V$ e $b(u,v)=0$, para todos $u$, $v$ elementos distintos em $S$.*

Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\beta=\{v_1,\dots,v_n\}$ uma base ordenada de $V$. Sendo $b\colon V\times V\to K$ uma forma bilinear, consideremos a matriz

$$[b]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ,$$

onde $a_{ij} = b(v_i, v_j)$. Esta matriz é chamada de **matriz de $b$ em relação à base $\beta$**.

O seguinte resultado é clássico na teoria de Álgebra Linear e por tal motivo iremos omitir sua demonstração a qual pode ser encontrada em [29, Theorem 1.26].

**Teorema 2.1.6 (Lei da Inércia de Sylvester)** *Sejam $V$ um espaço vetorial real de dimensão finita, $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica e $\beta_1$ e $\beta_2$ bases de $V$ tais que $[b]_{\beta_1}$ e $[b]_{\beta_2}$ são diagonais. Então as matrizes $[b]_{\beta_1}$ e $[b]_{\beta_2}$ têm a mesma quantidade de entradas positivas e a mesma quantidade de entradas negativas.*

Tal resultado informa que sobre um espaço vetorial real de dimensão finita, o sinal das entradas da matriz de $b$ em relação à base $\beta$, quando essa for diagonal, independe da escolha da base.

Um pergunta natural é: "Em que condições podemos considerar que um espaço $V$ tem base ortogonal com relação a forma bilinear $b$?"

O resto desta subseção será dedicada a provar tal resultado, desde que $b$ seja uma forma simétrica não degenerada e $char K \neq 2$.

**Definição 2.1.7** *Seja $V$ um espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica ou antissimétrica $b$.*

*(i)* *Um elemento $v \in V$ não nulo é chamado* **isotrópico em relação à forma** *se $b(v, v) = 0$; caso contrário ele será* **não isotrópico**.

*(ii)* *$V$ é dito* **isotrópico** *se ele contém pelo menos um vetor isotrópico. Caso contrário, $V$ é* **anisotrópico**. *Por fim, $V$ é* **totalmente isotrópico** *se todos os seus vetores são isotrópicos.*

Iremos agora "resgatar" a notação "$\perp$", dada na Observação 2.1.4, para ilustrar nossa próxima definição.

**Definição 2.1.8** *Seja $V$ um espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica ou antissimétrica $b$.*

(i) *Um vetor $v \in V$ é* **degenerado em relação à forma** *se $b(v,u) = 0$, para todo $u \in V$. Neste caso, o conjunto $V^{\perp}$ será formado por todos os vetores degenerados de $V$.*

(ii) *O espaço $V$ é chamado* **não degenerado** *se $V^{\perp} = \{0\}$. Caso contrário, $V$ é dito* **degenerado**

(iii) *Dizemos que $V$ é uma* **soma direta ortogonal** *dos subespaços $S$ e $T$, denotado por $V = S \perp T$, se $V = S \oplus T$ e $T \subseteq S^{\perp}$.*

Tendo essas notações em mãos, temos os seguintes resultados.

**Lema 2.1.9** *Sejam $b \colon V \times V \to K$ uma forma bilinear simétrica sobre um espaço $V$ e $v \in V$ não isotrópico em relação $b$. Então $V = Kv \perp v^{\perp}$. Além disso, se $V$ não é degenerado, o subespaço $v^{\perp}$ também não é.*

**Demonstração:** Como $b(v,v) \neq 0$, todo elemento de $K$ é um múltiplo escalar de $b(v,v)$. Para qualquer $v' \in V$, temos que existe $c \in K$ tal que $b(v',v) = c \cdot b(v,v)$. Então, $b(v' - cv, v) = 0$. Logo, $v' - cv \in v^{\perp}$. Portanto, a igualdade $v' = cv + (v' - cv)$ nos mostra que $V = Kv + v^{\perp}$. Pela Observação 2.1.4, temos que a soma anterior é direta, i.e., $V = Kv \oplus v^{\perp}$, e é claro que tal soma é uma soma direta ortogonal, uma vez que $v \perp w$, para todo $w \in v^{\perp}$. A segunda parte do resultado segue novamente pela Observação 2.1.4, tomando $W = v^{\perp}$ e lembrando que $(v^{\perp})^{\perp} = K \cdot v$. ■

**Observação 2.1.10** *Se $b$ é uma forma bilinear simétrica não nula e a característica de $K$ for diferente de 2, então existe pelo menos um vetor não isotrópico em $V$, pois caso contrário, dados $v, w$ em $V$, teríamos,*

$$0 = b(v+w, v+w) = b(v,v) + 2b(v,w) + b(w,w) = 2b(v,w).$$

**Lema 2.1.11** *Sejam $K$ um corpo de característica diferente de 2, $V$ um $K$-espaço vetorial de dimensão finita e $b \colon V \times V \to K$ uma forma bilinear simétrica sob $V$. Então existe alguma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $V$ tal que $[b]_{\beta}$ é uma matriz diagonal, ou seja, $b(v_i, v_j) = 0$ para $i \neq j$.*

**Demonstração:** Façamos indução sobre dimensão de $V$. Se $b$ é nula, o resultado é imediato. Suponhamos então que $b$ é não nula. Daí, existe $v_1 \in V$ tal que $b(v_1, v_1) \neq 0$. Consideremos agora $W = v_1^{\perp} = \{v \in V \mid b(v, v_1) = 0\}$. Do lema anterior, temos que $V = K \cdot v_1 \oplus W$. Observe ainda que $b$ é uma forma bilinear simétrica sobre $W$, denotamos tal forma restrita à $W$ por $b_W$. Assim, por $dimW = dimV - 1$, temos, por indução, que existe base $\beta' = \{v_2, \ldots, v_n\}$ base de $W$ tal que $[b_W]_{\beta'}$ é diagonal, ou seja, $b(v_i, v_j) = 0$, sempre que $i, j \in \{2, \ldots, n\}$ com $i \neq j$. Assim, $\beta = \{v_1\} \cup \beta' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $V$ tal que $[b]_\beta$ é uma matriz diagonal. ■

Sendo $charK \neq 2$, o lema anterior informa que todo espaço de dimensão finita, munido de um forma simétrica, possui uma base ortogonal. Nosso objetivo nesta seção é estabelecer um resultado análogo para o caso de dimensão infinita, mas de base enumerável. Na verdade estamos interessados em encontrar uma base que satisfaça a seguinte definição:

**Definição 2.1.12** *Seja $V$ um espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica não degenerada $b$. Uma base $\beta$ de $V$ é dita* **ortonormal com relação a forma** *se $b(u, v) = 0$, sempre que $u, v \in \beta$ são distintos e $b(u, u) \neq 0$, para todo $u \in \beta$.*

**Observação 2.1.13** *É comum na teoria de Álgebra Linear exigir na definição anterior que $b(u, u) = 1$, para todo $u \in \beta$. Aqui decidimos não exigir tal condição para não modificar os enunciados dos Teoremas 2.2.1 e 2.3.1, ou seja, ficar com a notação compatível, uma vez que a definição anterior não depende do corpo base como pode ser observado no Teorema da Lei da Inércia de Sylvester.*

**Exemplo 2.1.14** *Seja $V$ o espaço real das matrizes de ordem 2. Considere a forma bilinear $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $b(A, B) = tr(AB)$. Note que,*

$$\beta = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*é uma base ortonormal com relação a forma $b$, já que $b(v_i, v_j) = 0$, para $i \neq j$ e $b(v_i, v_i) \neq 0$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

O resultado posterior irá garantir a existência de uma base ortonormal para $V$ no sentido da Definição 2.1.12.

**Teorema 2.1.15** *Sejam $K$ um corpo de característica diferente de 2 e $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre um espaço vetorial $V$, de base enumerável. Então, existe uma base ortonormal para $V$.*

**Demonstração:** Consideremos $\Sigma$ o conjunto formado por todos os subespaços $S$ de $V$ tais que $S$ tem base ortonormal e a forma $b$ restrita a $S$ é não degenerada. Observe que $\Sigma \neq \emptyset$, pois existe um vetor $u \in V$ tal que $b(u, u) \neq 0$ e assim tome $S_0 = span(u)$.

É claro que $S_0$ é um espaço com base ortonormal e a forma $b$ restrita a ele é não degenerada. Agora, munindo $\Sigma$ da ordem parcial dada pela inclusão de subespaços de $V$, podemos garantir que $\Sigma$ é um conjunto parcialmente ordenado e do Lema de Zorn temos que $\Sigma$ possui elemento maximal, digamos $V_0$.

Iremos verificar que $V_0 = V$. Suponhamos por absurdo que $V_0 \neq V$. Observe que existe $u \in V \setminus V_0$ tal que $b(u,u) \neq 0$, pois caso contrário, para todo $u \in V \setminus V_0$ implicaria $b(u,u) = 0$. Então, por $b$ ser não degenerada, existirá $v$ um elemento de uma base ortonormal de $V_0$ tal que $b(u,v) \neq 0$. Considere $S_1 = span(u,v)$, e assim temos que a forma $b$ restrita a $S_1$ é simétrica e não degenerada. Tomando $w = u - b(u,v)b(v,v)^{-1}v$ temos que $\{w,v\}$ é uma base ortogonal de $S_1$ e, nestas condições $w \in V \setminus V_0$, o que é uma contradição, pois $0 = b(w,w) = b(w,u) = b(u,v)^2 b(v,v)^{-1}$ e daí, $b(u,v) = 0$. Portanto existe tal vetor nas condições requeridas.

Defina $V' = V_0 \oplus K \cdot u$. Pelo Lema 2.1.9 temos que $V' = K \cdot u + u^{\perp}$. Do teorema dos isomorfismos para espaços vetoriais, temos que

$$u^{\perp} \simeq \frac{u^{\perp}}{(K \cdot u) \cap u^{\perp}} \simeq \frac{u^{\perp} + K \cdot u}{K \cdot u} = \frac{V'}{K \cdot u} \simeq V_0.$$

Novamente, pelo Lema 2.1.9, a forma $b$ restrita a $V'$ é não degenerada. Além disso, temos que $V' = V_0 \perp K \cdot u$, implicando que $V'$ tem base ortonormal e $V_0 \subsetneq V'$, o que contradiz a maximalidade de $V_0$. Portanto, $V = V_0$, como queríamos. ■

**Observação 2.1.16** *Uma outro forma de demonstrar o resultado anterior pode ser encontrado em [11, Corolário 4.3.7].*

**Observação 2.1.17** *A parte da forma ser bilinear não degenerada serve para garantir que $V$ tem base ortonormal, no sentido da Definição 2.1.12. Se retirarmos tal hipótese do enunciado do teorema anterior, podemos garantir que $V$ tem base ortogonal e possui um subespaço maximal com a propriedade de ter base ortonormal.*

## 2.2 A álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica não degenerada

Nesta seção descrevemos todas as graduações das álgebras de Jordan de uma forma bilinear simétrica não degenerada de um espaço vetorial sobre um corpo $K$ de característica diferente de 2.

No Exemplo 1.1.25, definimos a álgebra de Jordan $B(b) = K \cdot 1 \oplus V$ com a multiplicação dada por $(\alpha \cdot 1 + u) \cdot (\beta \cdot 1 + v) = (\alpha\beta + b(u,v)) \cdot 1 + (\beta u + \alpha v)$, onde $\alpha, \beta \in K$ e $u, v \in V$. Aqui, permanecemos com a notação $B$ sempre que $dimV = \infty$ e $B_n$ quando $dimV = n$. Estamos destacando a forma $b$ na definição de $B$, uma vez que tal álgebra depende obviamente da forma. É fato conhecido que se $b$ e $b'$ são duas formas simétricas não degeneradas sobre $V$ as álgebras $B_n(b)$ e $B_n(b')$, para $n = 2, 3, \ldots$, são isomorfos se, e somente se, as formas $b$ e $b'$ são equivalentes. Por outro lado, no que diz respeitos as identidades, tais álgebras sempre satisfazem as mesmas identidades, e isso independe da forma considerada.

Dada uma álgebra $A$, denotemos por $\Sigma = SuppA$ e por $G$ um grupo cujo o elemento neutro é $\epsilon$.

**Teorema 2.2.1** *Qualquer graduação $J = \bigoplus_{g \in G} J_g$ de $J = B(b) = K \cdot 1 \oplus V$ por um grupo $G$ sobre um corpo $K$ de característica diferente de 2 pode ser descrita como se segue: Existe uma base $\beta$ de $V$ de elementos homogêneos que pode ser decomposta como uma união $\beta = E \cup E' \cup F$ e uma bijeção $E \ni e \leftrightarrow e' \in E'$ tal que $deg(e) = (deg(e'))^{-1} \neq \epsilon$, para todo $e \in E$ e $(deg(f))^2 = \epsilon$, para todo $f \in F$. Os conjuntos $E$ e $E'$ são duais um do outro, a dualidade é estabelecida pela mesma aplicação $e \leftrightarrow e'$, $F$ é ortonormal (sobre si mesmo) e ortogonal sobre $E$ e $E'$. Reciprocamente, qualquer escolha de uma base como descrita acima e qualquer coleção de elementos $\{g_e, h_f \mid e \in E, f \in F\} \subseteq G$ tal que $(g_e)^2 \neq \epsilon$ e $(h_f)^2 = \epsilon$, define uma graduação em $J$ se definirmos $deg(e) = g_e$, $deg(e') = (g_e)^{-1}$ e $deg(f) = h_f$, para todo $e \in E$ e todo $f \in F$.*

**Demonstração:** Considerando uma base nas condições descritas acima, a saber:

$$e_1 e_2 = (e_1)'(e_2)' = ef = e'f = 0,$$

$$e_1(e_2)' = \begin{cases} 0, & \text{se } e_1 \neq e_2 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

$$f_1 f_2 = \begin{cases} 0, & \text{se } f_1 \neq f_2 \\ \lambda, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

para $e, e_1, e_2 \in E$ e $f, f_1, f_2 \in F$ e $\lambda = \lambda(f_1) \in K$ não nulo que depende de $f_1$, temos que as condições de ser graduação sobre $J$ são satisfeitas.

Por outro lado, vamos supor agora uma $G$-graduação em $J$. Pela Proposição 1.2.6, já sabemos que $1 \in J_\epsilon$.

**Afirmação 1:** Para cada $g \neq \epsilon$, temos $J_g \subseteq V$. De fato, seja $x = \lambda + u$ um elemento não nulo de $J_g$, com $\lambda \in K$, $u \in V$ e $g \neq \epsilon$. Então, $u \neq 0$ e $x^2 = (\lambda+u)^2 \in J_{g^2}$. Mas também,

$$\begin{aligned} J_{g^2} \ni x^2 &= \lambda^2 \cdot 1 + b(u,u) \cdot 1 + 2\lambda u \\ &= \lambda^2 \cdot 1 + b(u,u) \cdot 1 + 2\lambda(x-\lambda) \\ &= -\lambda^2 \cdot 1 + b(u,u) \cdot 1 + 2\lambda x. \end{aligned}$$

Note que, $-\lambda^2 \cdot 1 + b(u,u) \cdot 1 \in J_\epsilon$ e $2\lambda x \in J_g$. Por $g^2 \neq g$ (já que $g \neq \epsilon$) e $J_g \cap J_{g^2} = \{0\}$, devemos obrigatoriamente ter $\lambda = 0$, implicando a nossa afirmação.

Agora, olhemos para $J_\epsilon$. Consideremos a decomposição ortogonal $J_\epsilon = K \cdot 1 \oplus \tilde{J}_\epsilon$, onde $\tilde{J}_\epsilon \subseteq V$.

**Afirmação 2:** $\tilde{J}_\epsilon$ é um espaço ortogonal à $J_g$, para todo $g \in G \setminus \{\epsilon\}$. De fato, suponhamos que $\lambda + u \in J_\epsilon$. Escolhamos $g \neq \epsilon$ e suponhamos que $v \in J_g$ não nulo. Então, $uv \in J_g$. Por outro lado, $uv = b(u,v) \cdot 1 \in J_\epsilon$. Assim, $b(u,v) = 0$, para todo $v \in J_g$, sempre que $g \neq \epsilon$. Concluindo tal afirmação.

Então, temos uma decomposição ortogonal $V = \tilde{J}_\epsilon \oplus \Sigma_{g \neq \epsilon} J_g$.

**Afirmação 3:** Se $g, h \in G \setminus \{\epsilon\}$, com $gh \neq \epsilon$, então $b(J_g, J_h) = 0$. Esta afirmação segue imediatamente do fato que se $u \in J_g$ e $v \in J_h$, temos $uv \in J_{gh}$ e $uv = b(u,v) \cdot 1$ é um elemento de $J_\epsilon$, implicando que $b(u,v) = 0$.

Com as Afirmações 1, 2 e 3 em mãos, iremos agora, olhar para o suporte $\Sigma$ de $J$. Considere $\Sigma = \Gamma \cup \{\epsilon\} \cup \Psi$, onde os elementos de $\Gamma$ são elementos cuja a ordem é diferente de 2, enquanto os elementos de $\Psi$ são todos de ordem 2. Dividimos arbitrariamente $\Gamma$ na união disjunta

$$\Gamma = \Pi \cup \Pi',$$

onde os elementos de $\Pi'$ são os inversos dos elementos em $\Pi$. Então, se escolhermos, digamos $\pi \in \Pi$, temos que $J_\pi$ é ortogonal à $\tilde{J}_\epsilon$ e $J_g$, onde $g$ é diferente de $\pi^{-1}$. Como $b$ é não degenerada, devemos ter $J_{\pi^{-1}} \neq \{0\}$. Além disso, podemos escolher uma base $E_\pi$ em $J_\pi$ e $E'_\pi$ em $J_{\pi^{-1}}$ em uma correspondência bijetiva dada por:

$$E \ni e \longleftrightarrow e' \in E'$$

tal que $b(e_1, (e_2)') = 0$ sempre que $e_1 \neq e_2$ e 1 caso contrário. Agora, definimos $E = \cup_{\pi \in \Pi} E_\pi$ e $E' = \cup_{\pi \in \Pi} E'_\pi$. Portanto, construímos as duas primeiras partes da base que queríamos. Para construir $F$, vamos escolher $\psi = \epsilon$ ou $\psi \in \Psi$. Ou seja, com $\psi^2 = \epsilon$. Então, a restrição de $b$ em $\tilde{J}_\epsilon$ ou em $J_\psi$, deve ser não degenerada, pois $b$ é não degenerada. Escolhamos agora uma base ortonormal dentro de cada $J_\psi$ ou $\tilde{J}_\epsilon$. Esta união será a parte restante da base desejada para $J$, ou seja, teremos $F$. Portanto, temos o resultado. ■

**Observação 2.2.2** *Pelo teorema acima, observamos que para descrever as graduações por um grupo $G$ sobre $B_n$ é suficiente encontrar uma base de elementos de $V$ que satisfazem as relações descritas no teorema. Entretanto, a existência de tal base depende do corpo. Por exemplo, seja $J = J_2$ a álgebra de Jordan das matrizes simétricas de ordem 2, com $G = \mathbb{Z}_3$.*

***Afirmação:*** *Para existir tal base em $J$ é necessário que $\sqrt{-1} \in K$.*

*De fato, seja $J_2 = (J_2)_0 \oplus (J_2)_1 \oplus (J_2)_2$ uma $\mathbb{Z}_3$-graduação não trivial. Como $\mathbb{Z}_3$ não tem elementos de ordem 2, temos que $dim(J_2)_1 = dim(J_2)_2 = 1$, e consequentemente, $(J_2)_0 = K$ (pelo Teorema 2.2.1). Por outro lado, $(J_2)_1 = Kw_1$ e $(J_2)_2 = Kw_2$, onde $w_1$ e $w_2$ são matrizes de traço zero tais que:*

$$w_1^2 = w_2^2 = 0 \text{ e } w_1 \circ w_2 = I_2.$$

*Observe que as matrizes $w_1$ e $w_2$ satisfazendo essas relações existem se, e somente se, $\sqrt{-1} \in K$. Com efeito, sejam $w_1$ e $w_2$ matrizes simétricas de traço zero que satisfazem as relações acima. Como $w_1$ e $w_2$ são matrizes simétricas de traço zero, temos que estas são da forma:*

$$w_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

*Como $w_1^2 = w_2^2 = 0$, temos que $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 0$. Daí, $\sqrt{-1} = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$. Reciprocamente, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos que $w_1^2 - (trw_1)w_1 + det(w_1)I_2 = 0$ e $w_2^2 - (trw_2)w_2 + det(w_2)I_2 = 0$. Por $w_1^2 = 0$ e, $w_1$ e $I_2$ terem graus diferentes, segue que $trw_1 = det(w_1) = 0$. Analogamente, $trw_2 = det(w_2) = 0$. E sendo $w_1$ e $w_2$ simétricas, temos que $w_1 \circ w_2 = \lambda I_2$. Para $\lambda = 1$, o resultado segue. Podemos escolher, por exemplo, as seguintes matrizes:*

$$w_1 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, w_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

*Concluímos que, sobre o corpo dos reais, por exemplo, $J_2$ tem apenas a $\mathbb{Z}_3$-graduação trivial, já sobre o corpo dos complexos possui $\mathbb{Z}_3$-graduação além do trivial (como a graduação citada).*

## 2.3 A álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica degenerada

Na seção anterior, foram descritas as graduações para as álgebras de Jordan $B$ e $B_n$ quando a forma bilinear simétrica é não degenerada. Nesta seção, veremos o resultado para o caso onde a forma $b$ é degenerada. Mais precisamente,

**Teorema 2.3.1** *Qualquer graduação $J = \bigoplus_{g \in G} J_g$ de $J = B(b) = K \cdot 1 \oplus V$ por um grupo $G$ sobre um corpo $K$ de característica diferente de 2 pode ser descrita como se segue. Existe uma base $\beta$ de $V$ de elementos homogêneos que pode ser decomposta como uma união $\beta = E \cup E' \cup F$ e uma bijeção $E \ni e \leftrightarrow e' \in E'$ tal que $deg(e) = (deg(e'))^{-1} \neq \epsilon$, para todo $e \in E$ e $(deg(f))^2 = \epsilon$ ou $f$ é degenerada, para todo $f \in F$. Os conjuntos $E$ e $E'$ são duais um do outro, a dualidade é estabelecida pela mesma aplicação $e \leftrightarrow e'$, $F$ é ortogonal (em si mesmo) e ortogonal também à $E$ e $E'$. Reciprocamente, qualquer escolha de uma base como descrita acima e qualquer coleção $\{g_e, h_f \mid e \in E, f \in F\}$ de elementos em $G$ tal que $(g_e)^2 \neq \epsilon$ e $(h_f)^2 = \epsilon$, define uma graduação em $J$, se definirmos $deg(e) = g_e$, $deg(e') = (g_e)^{-1}$ e $deg(f) = h_f$, para todo $e \in E$ e todo $f \in F$.*

**Demonstração:** Seguiremos os mesmos passos da demonstração do Teorema 2.2.1 com apenas algumas adaptações para a parte degenerada. Considerando a base dada no enunciado do teorema satisfazendo as condições dos elementos do grupo, a saber:

$$e_1 e_2 = (e_1)'(e_2)' = ef = e'f = 0$$

$$e_1(e_2)' = \begin{cases} 0, & \text{se } e_1 \neq e_2 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_1 f_2 = \begin{cases} 0, & \text{se } f_1 \neq f_2 \\ \lambda_1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_1' f_2' = 0$$

para $e, e_1, e_2 \in E$, $f, f_1, f_2, f_1', f_2' \in F$ e $\lambda_1 \in K$ não nulo dependendo de $f_1$, onde $f_1$ e $f_2$ são vetores não isotrópicos da parte $F$, e $f_1'$ e $f_2'$ são isotrópicos na base $F$.

Agora iremos supor que $J$ tenha uma $G$-graduação. Pela Proposição 1.2.6, já sabemos que $1 \in J_\epsilon$. Usando os mesmos argumentos que foram usados na demonstração do Teorema 2.2.1 obtemos as Afirmações 1, 2 e 3 para este caso.

Agora, olhemos um subconjunto $\Sigma'$ de $G$ que contém o suporte $\Sigma$ da $G$-graduação de $J$. Consideremos $\Sigma' = \Gamma \cup \{\epsilon\} \cup \Psi$, onde os elementos de $\Gamma$ são os elementos de ordem diferente de 2, enquanto os elementos de $\Psi$ são todos de ordem 2. Dividimos $\Gamma$ como sendo a união disjunta $\Gamma = \Pi \cup \Pi'$, onde os elementos de $\Pi'$ são os inversos dos elementos em $\Pi$. Então, se escolhermos, digamos $\pi \in \Pi$, temos que $J_\pi$ é ortogonal a $\tilde{J}_\epsilon$ e $J_g$, onde $g$ é diferente de $\pi^{-1}$. Como b é degenerada, temos duas possibilidades:

$$J_{\pi^{-1}} \neq \{0\} \text{ ou } J_{\pi^{-1}} = \{0\}.$$

Se $J_{\pi^{-1}} \neq \{0\}$ então podemos fazer o mesmo processo do caso não degenerado (Teorema 2.2.1), ou seja, podemos escolher uma base $E_\pi$ em $J_\pi$ e $E'_\pi$ em $J_{\pi^{-1}}$ em uma correspondência biunívoca dada por:

$$E \ni e \longleftrightarrow e' \in E'$$

tal que $b(e_1, (e_2)') = 0$, no caso em que $e_1 \neq e_2$ e 1 no caso em que $e_1 = e_2$. Resta considerar o caso em que $J_{\pi^{-1}} = \{0\}$. Neste caso, temos que os elementos de $J_\pi$ são degenerados e então consideraremos o conjunto dos elementos $\pi$ com essa propriedade, denotado por $\Delta$. Considerando $\Pi' = \Pi \setminus \Delta$, podemos definir os conjuntos $E = \cup_{\pi \in \Pi'} E_\pi$ e $E' = \cup_{\pi \in \Pi'} E'_\pi$. Portanto, construímos as duas primeiras partes da base que queríamos. Para construir a última parte da base, seja $\Psi' = \Psi \cup \Delta$, onde os elementos de $\Delta$ são aqueles obtidos dos $\pi \in \Sigma$ tais que $J_{\pi^{-1}} = \{0\}$. Escolhamos $g \in \Delta$ e uma base ortogonal de $J_g$ (ver Observação 2.1.17). Vamos escolher $\psi = \epsilon$ ou $\psi \in \Psi'$. Ou seja, com $\psi^2 = \epsilon$. Então, a restrição de $b$ para $\tilde{J}_\epsilon$ ou para $J_\psi$ é uma forma simétrica degenerada ou não degenerada, em ambos os casos podemos escolher base ortonormal ou ortogonal dentro de cada $J_\psi$ ou $\tilde{J}_\epsilon$, e a união destas bases formam $F$, a parte restante da base desejada para $J$, donde segue o resultado. ■

# Capítulo 3

# Identidades graduadas em álgebras de Jordan

No capítulo anterior, mais exatamente no Teorema 2.2.1, apresentamos a classificação de todas as graduações sobre a álgebra de Jordan de uma forma simétrica não degenerada. Neste capítulo, exibiremos, com mais detalhes que, a menos de isomorfismo, a álgebra das matrizes simétricas de ordem 2, denotada por $J_2$, tem duas $\mathbb{Z}_2$-graduações não triviais, uma em que $dim(J_2)_0 = 1$, a qual chamaremos de graduação escalar, e uma em que $dim(J_2)_0 > 1$, a qual chamaremos de graduação não-escalar. Lembramos que exibimos no Exemplo 1.1.30 um isomorfismo entre as álgebras $J_2$ e $B_2$, implicando que o comentário anterior é um caso particular de $B_n$.

Em [24], Koshlukov e Diniz determinaram uma base para as identidades graduadas nos dois casos descritos para $J_2$. Além disso, para o caso da graduação escalar, os autores descreveram um resultado mais geral, exibindo uma base para as identidades graduadas para as álgebras de Jordan $B$ e $B_n$. Usando esse texto base, dedicamos este capítulo ao estudo desses resultados.

Em todo este capítulo, consideramos $X = Y \cup Z$, onde $Y = \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto das variáveis pares e $Z = \{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ as ímpares, e $K$, a menos que seja mencionado, é um corpo infinito de característica diferente de dois.

## 3.1 Graduações na álgebra de Jordan

Nesta seção, mostraremos que a álgebra das matrizes simétricas de ordem 2, possui, a menos de isomorfismo, duas $\mathbb{Z}_2$-graduações não triviais. Antes de trabalharmos com tal álgebra, iremos demonstrar um resultado técnico sobre as álgebras de Jordan $B$ e $B_n$ sobre a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

**Proposição 3.1.1** *Toda $\mathbb{Z}_2$-graduação nas álgebras de Jordan $B_n$ e $B$ é definida por uma decomposição dos espaços $V_n$, respectivamente $V$, como uma soma direta de dois subespaços ortogonais.*

**Demonstração:** Mostremos que $B_n$ é escrito como soma direta de dois subespaços ortogonais. Suponhamos que $J := B_n$ tem uma graduação $J = J_0 \oplus J_1$. Como 1 pertence à componente par da graduação, segue que $K \subseteq J_0$. Seja $\beta = \{1, v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de $J_0$, onde $v_i \in V_n$. Sejam $v_i \in \beta$ e $\alpha + v \in J_1$, com $\alpha \in K$ e $v \in V_n$, então $v_i \circ (\alpha + v) \in J_1$, pois $J_0 J_1 \subseteq J_1$. Por outro lado, $v_i \circ (\alpha + v) = \alpha v_i + \langle v_i, v \rangle \in J_0$. Logo, $v_i \circ (\alpha + v) \in J_0 \cap J_1 = \{0\}$. Então, como $v_i \in \beta$ (e portanto, $v_i \neq 0$), segue que $\alpha = 0$ e $\langle v_i, v \rangle = 0$. Assim, $J_1 \subseteq V_n$ e é ortogonal ao espaço $span(v_1, \ldots, v_k)$. Concluindo o resultado para $B_n$. Aplicando o mesmo processo acima para $B$ o resultado segue análogo. ■

Agora estamos prontos para determinar à $\mathbb{Z}_2$-graduação nas álgebras de Jordan das matrizes simétricas de ordem 2, o qual denotaremos por $J_2$. Denotaremos por

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

as matrizes que formam uma base de $J_2$, ver Exemplo 1.1.27.

**Corolário 3.1.2** *A menos de isomorfismos graduados, existem duas $\mathbb{Z}_2$-graduações não triviais na álgebra de Jordan $J := J_2$. Estas são dadas por $J = J_0 \oplus J_1$, onde $J_0 = span(I_2, a), J_1 = span(b)$ ou $J_0 = span(I_2), J_1 = span(a, b)$.*

**Observação 3.1.3** *(i) O corolário anterior é um caso particular do Teorema 2.2.1.*

*(ii) A $\mathbb{Z}_2$-graduação sobre $J_2$ dada por $J_0 = span(I_2)$ e $J_1 = span(a, b)$ é chamada de graduação escalar, já a outra será denominada graduação não escalar.*

*(iii) Observe que $a^2 = b^2 = I_2$ e $a \circ b = 0$. Neste caso, a álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $\tilde{J} = \tilde{J}_1 \oplus \tilde{J}_2$, onde $\tilde{J}_0 = span(I_2, b)$ e $\tilde{J}_1 = span(a)$, é isomorfo, como álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, à $J_2$ com a graduação não escalar.*

## 3.2 Identidades para a graduação não escalar

Na seção anterior, mostramos que a álgebra de Jordan das matrizes simétricas de ordem 2, comumente denotada por $J_2$, tem (a menos de isomorfismo) duas graduações não triviais pelo grupo $\mathbb{Z}_2$. Nesta seção, iremos descrever as identidades graduadas para essa álgebra com a graduação não escalar.

Denotaremos por $T := T_2(J_2)$ o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $J_2$, com a graduação escalar. A concatenação de duas matrizes representará o produto na álgebra de Jordan $M_2(K)^{(+)}$, e "$\cdot$" representará o produto usual de matrizes. Lembramos que, $|u|$ é o $\mathbb{Z}_2$-grau de um elemento homogêneo na álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Denotaremos por $I$ o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas gerado pelos polinômios:

$$x_1(x_2x_3) - x_2(x_1x_3), \text{ se } |x_1| = |x_2| \tag{3.1}$$

$$(y_1y_2, z_1, z_2) - (y_1(y_2, z_1, z_2) + y_2(y_1, z_1, z_2) - 2z_1(z_2, y_1, y_2)), \tag{3.2}$$

$$(y_1y_2, y_3, z_1) - (y_1(y_2, y_3, z_1) + y_2(y_1, y_3, z_1)), \tag{3.3}$$

$$(z_1z_2, x_1, x_2), \tag{3.4}$$

$$(y_1, y_2, z_1, x, y_3) - (y_1, y_3, z_1, x, y_2). \tag{3.5}$$

Aqui $(a, b, c)$ denota o associador entre os elementos $a$, $b$ e $c$. Nosso objetivo nessa seção é mostrar que $I$ é igual a $T$.

Com a finalidade de facilitar a compreensão do texto, indicamos acima do símbolo "$=$" (assim como "$\equiv$", em alguns casos) a identidade ou resultado, da qual a igualdade (ou equivalência) segue. Por exemplo, $M \overset{(3.4)}{\equiv} N$ indica que a equivalência $M \equiv N$ é consequência da Identidade (3.4). Outro exemplo, a equivalência $M \overset{P.\ 3.1.1}{\equiv} N$ significa que $N$ é consequência de $M$ pela Proposição 3.1.1. Neste caso, L., T., P., etc, significa Lema, Teorema, Proposição, etc., respectivamente.

**Lema 3.2.1** *Os polinômios (3.1)-(3.5) são identidades graduadas para a álgebra de Jordan $J_2$. Em outras palavras, $I \subseteq T$.*

**Demonstração:** Mostremos que os elementos geradores de $I$ se anulam quando substituídos por elementos da base de $J_2$. Isto é suficiente para mostrar que $I \subset T$, pois os polinômios que geram $I$ são todos multilineares. Iremos analisar caso a caso.

**O polinômio** (3.1)**:** Se algum $x_i$ for substituído por $I_2$ o resultado é trivial, já que $I_2 \in \mathcal{Z}(J)$. Assim, temos dois casos a analisar. Suponha que $x_1$ e $x_2$ possam ser substituídos por $a$. Neste caso,

$$a(a\bar{x}_3) - a(a\bar{x}_3) = 0.$$

Aqui $\bar{x}$ significa que $x$ foi substituído por algum elemento compatível em $J_2$. O caso em que $x_1$ e $x_2$ possam ser substituídos por $b$ é análogo. Portanto, tal polinômio está em $T$.

Para os próximos polinômios, lembramos que $|y_i| = 0$ e $|z_i| = 1$, para todo $i$.

**O polinômio** (3.2)**:** Analisemos as possibilidades de substituição admissível. É claro que se substituirmos $I_2$ em alguma variável $y_i$ temos que tal resultado é zero. Assim é suficiente substituir por $a$ nas variáveis $y_i's$ e $b$ nas variáveis $z_i's$. Neste caso temos:

$$\begin{aligned}(a^2, b, b) - (a(a, b, b) + a(a, b, b) - 2b(b, a, a)) &= -(a(a, b, b) + a(a, b, b) - 2b(b, a, a)) \\ &= -2a(ab^2) + 2b(ba^2) \\ &= 0,\end{aligned}$$

pois $a^2 = b^2 = I_2$. Concluindo que tal polinômio está também em $T$.

**O polinômio** (3.3). Novamente analisemos as possibilidades da substituição admissível. Como no caso anterior, se substituirmos $I_2$ em alguma variável $y_i's$ temos o resultado. Assim é suficiente substituir para os casos compatíveis com a graduação. Note que

$$(a^2, a, b) - (a(a, a, b) + a(a, a, b)) = -2a(a, a, b) = -2a(a^2b) = 0.$$

Neste caso, o polinômio (3.3) está em $T$.

**O polinômio** (3.4). Este caso é o mais simples de todos, pois $b^2 = I_2$, ou seja, $z_1z_2 \in \mathcal{Z}(J_2)$. O resultado segue para este caso.

Por fim, **o polinômio** (3.5). Como de costume se substituirmos $I_2$ em alguma variável $y_i's$ temos o resultado. Assim, as únicas substituições a serem consideradas são $a$ nas variáveis $y_i's$ e $b$ nas variáveis $z_i's$. Temos então:

$$(a, a, b, \bar{x}, a) - (a, a, b, \bar{x}, a) = 0.$$

E o resultado, neste último caso, também é satisfeito.

Como cobrimos todos os casos, temos que $I \subseteq T$. $\blacksquare$

Como o corpo é infinito, afim de provar a inclusão $T \subseteq I$, podemos considerar apenas identidades graduadas multihomogêneas, como vimos na Seção 1.5 do Capítulo 1.

Seja $L = \dfrac{SJ(X)}{I}$ a álgebra relativamente livre $\mathbb{Z}_2$-graduada na variedade das álgebras que satisfazem $I$. Aqui $SJ(X)$ é a álgebra livre de Jordan especial $\mathbb{Z}_2$-graduada construída na Seção 1.3. Ainda manteremos a notação para as variáveis $y$ e $z$ em $L$, onde $y$ (com ou sem índice) representa as variáveis pares e $z$ (com ou sem índice) representa as ímpares. Note que, a Identidade (3.4), que está em $I$, implicará que os elementos $z_iz_j$ estão no centro associativo de $L$, já que $(z_1z_2, x_1, x_2) = 0$ em $L$. Portanto, a subálgebra de $L$ gerada por todos $z_iz_j$ é associativa. Como $I$ é um ideal graduado, segue da Proposição 1.2.8, que a álgebra $L$ é graduada, sendo sua graduação induzida pela graduação em $SJ(X)$. Logo, $L = L_0 \oplus L_1$.

**Notação 3.2.2** *O chapéu sobre qualquer variável significará que ela pode não aparecer, e neste caso, consideramos 1 em seu lugar.*

**Proposição 3.2.3** *A subálgebra $L_0$ de $L$ é associativa. Além disso, a subálgebra de $L$ gerada por $L_1$ é associativa.*

**Demonstração:** Primeiramente, note que $(y_1, y_2, y_3) \overset{(3.1)}{=} 0$ em $L$.

De fato,

$$(y_1, y_2, y_3) = (y_1y_2)y_3 - y_1(y_2y_3) = -(y_1(y_3y_2) - y_3(y_1y_2)) \in I.$$

Logo, $L_0$ é associativa, já que $y_i$'s pode ser substituído por qualquer elementos em $L_0$. Agora, seja $w$ um monômio tal que $degw = n$ em $[L_1]$, aqui $[L_1]$ denota a subálgebra de $L$ gerada por $L_1$. Vamos mostrar agora que $[L_1]$ é associativa. Primeiramente, mostremos a seguinte afirmação

**Afirmação 1:** $w = (u)\widehat{z_i}$, para algum $z_i$ e algum monômio $u \in L_C$ (centro associativo de $L$).

De fato, faremos a demonstração por indução em $n$. Se $n = 1$, então $w = z$ e $u = 1$, e portanto segue o resultado. Suponha que $n > 1$, e que a afirmação é verdadeira para monômios de grau no máximo $n - 1$. Então $w = (w_1) \cdots (w_k)$, onde $w_i$'s estão em $[L_1]$ (aqui pode haver qualquer arranjo de parênteses). Pela hipótese de indução, podemos assumir que, para cada $i$, $w_i = (u_i)\widehat{z}_{t_i}$, com $u_i \in L_C$. Como $u_i$ está no centro associativo, podemos reduzir o caso a $w = (u)(w')$, onde $u \in L_C$ e $w'$ é o produto de algumas variáveis $z$, com alguma distribuição de parênteses. Por outro lado, segue da Identidade (3.4) que o produto de quaisquer duas variáveis $z$ está no centro associativo de $L_C$, então podemos transferi-la para $u$. Agora, temos duas possibilidades. Se o grau de $w'$ é par, temos que $w \in L_C$. E se é ímpar, então $w = (u')z$, onde $u' \in L_C$.

Com a afirmação "em mãos" considere $w_i = u_i\widehat{z}_{t_i}$, $i = 1, 2, 3$, três elementos de $[L_1]$. Pela Identidade (3.1), temos que $(z_1, z_2, z_3) = 0$ em $L$. Assim, obtemos:

$$(w_1, w_2, w_3) = (u_1u_2u_3)(\widehat{z}_{t_1}, \widehat{z}_{t_2}, \widehat{z}_{t_3}) = 0 \text{ em } L.$$

Se alguma das variáveis $\widehat{z}_{t_i}$ não aparece então em seu lugar aparece 1, e neste caso o associador se anula trivialmente. Portanto temos o resultado. ■

Agora, seja $\Omega \subseteq L$ o menor subconjunto de $L$ com a propriedade que se $f_1, f_2, f_3$ são elementos em $\Omega \cup X$, então $(f_1, f_2, f_3) \in \Omega$. Chamaremos os elementos de $\Omega$ de **associadores**.

Denotamos por $SJ(X)^{(n_1,\ldots,n_k)}$ a componente multihomogênea de $SJ(X)$ que consiste dos polinômios homogêneos de grau $n_i$ na variável $x_i$, $1 \leq i \leq k$, e de grau 0 nas demais variáveis. Analogamente, definimos $L^{(n_1,\ldots,n_k)}$. Além disso, escolhemos o subconjunto $\Omega_0$ de $\Omega$ da seguinte forma: Se $\Omega \cap L^{(n_1,\ldots,n_k)} \neq \emptyset$, então escolhemos um elemento arbitrário (mas não nulo) de $\Omega \cap L^{(n_1,\ldots,n_k)}$, de modo que $\Omega_0$ não contenha nenhum outro elemento desta interseção.

Agora definamos o conjunto $A \subseteq L$ que consiste dos elementos dos quatro tipos a seguir:

(i) $(y_{i_1} \cdots y_{i_k})(z_{j_1} \cdots z_{j_t})$;

(ii) $(y_{i_1} \cdots y_{i_k})u^1$;

(iii) $(y_{i_1} \cdots y_{i_k})(z_{j_1}u^1)$;

(iv) $(y_{i_1} \cdots y_{i_k})u^0$.

Aqui, $k, t \geqslant 0$ e $u^i \in \Omega_0$ é um associador e não variáveis com $|u^i| = i$, para $i = 0, 1$, ou seja, $deg(u^i) \geqslant 3$. A Proposição 3.2.3 permite não nos preocuparmos com os parênteses nas expressões acima. Seja $S = span(A)$ o subespaço de $L$ gerado por $A$. Mostraremos que $L = S$, mas, primeiramente, mostraremos que todo elemento de $\Omega$ é igual a um elemento de $\Omega_0$, a menos de sinal. Para isto, necessitaremos de ferramentas que serão demonstrados nos próximos lemas.

**Lema 3.2.4** *Os polinômios*

*(i)* $(x_1, x_2, x_3)$, *se* $|x_1| = |x_3|$*;*

*(ii)* $(y_1 z_1, y_2, y_3) - y_1(z_1, y_2, y_3)$*;*

*(iii)* $(z_1, y_1, \ldots, y_{2k}) - (z_1, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(2k)})$*, para qualquer permutação* $\sigma$ *no grupo simétrico* $\mathcal{S}_{2k}$*;*

*(iv)* $(z_1, y_1, \ldots, y_{2k}, z_2, y_{2k+1}) - (z_{\tau(1)}, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(2k)}, z_{\tau(2)}, y_{\sigma(2k+1)})$*, para toda permutação* $\sigma \in \mathcal{S}_{2k+1}$ *e* $\tau \in \mathcal{S}_2$*,*

*estão em* $I$*.*

**Demonstração:**

(i) Por hipótese $|x_1| = |x_3|$, assim

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2)x_3 - x_1(x_2 x_3) = -x_1(x_3 x_2) + x_3(x_1 x_2) \overset{(3.1)}{=} 0 \text{ em } L \ ,$$

donde segue o resultado.

(ii) Para este item, observe que

$$((y_1 z_1)y_2)y_3 \overset{P.3.2.4.(i)}{=} ((y_2 z_1)y_1)y_3 = (y_1(y_2 z_1))y_3 \overset{P.3.2.4.(i)}{=} ((y_2 z_1)y_3)y_1$$

e

$$(y_1 z_1)(y_2 y_3) \overset{P.3.2.4.(i)}{=} ((y_2 y_3)z_1)y_1.$$

Logo,

$$(y_1 z_1, y_2, y_3) = (y_1 z_1 y_2)y_3 - y_1 z_1(y_2 y_3) = ((y_2 z_1)y_3)y_1 - ((y_2 y_3)z_1)y_1 = y_1(z_1, y_2, y_3).$$

Daí,

$$(y_1 z_1, y_2, y_3) - y_1(z_1, y_2, y_3) = 0 \text{ em } L.$$

Portanto, $(y_1 z_1, y_2, y_3) - y_1(z_1, y_2, y_3) \in I$, e assim, provamos $(ii)$.

(iii) Para provar $(iii)$ utilizaremos da Identidade (3.5). Provemos por indução sobre $k$. Para $k = 1$, temos:

$$\begin{aligned}(z_1, y_1, y_2) - (z_1, y_2, y_1) &= (z_1y_1)y_2 - z_1(y_1y_2) - (z_1y_2)y_1 + z_1(y_2y_1)\\ &= (z_1y_1)y_2 - (z_1y_2)y_1 \overset{(3.1)}{=} 0\end{aligned}$$

em $L$. Logo, $(z_1, y_1, y_2) - (z_1, y_2, y_1) \in I$. Para $k > 1$, suponhamos que para $k - 1$ o polinômio em $(iii)$ pertence a $I$. Considerando $\sigma(1), \sigma(2) \in \{1, 2\}$, temos, pelo caso $k = 1$ e da hipótese de indução, que:

$$\begin{aligned}((z_1, y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}), y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(2k)}) &\equiv_I (((z_1, y_1, y_2), y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(2k)}))\\ &\equiv_I (((z_1, y_1, y_2), y_3, \ldots, y_{2k})).\end{aligned}$$

Considerando a hipótese de indução para o caso geral. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\sigma(4) = 1$, ou seja,

$$(z_1, y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)} \ldots, y_{\sigma(2k)}) \equiv_I ((y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, z_1, y_{\sigma(3)}, y_1), y_{\sigma(5)} \ldots, y_{\sigma(2k)}). \tag{3.6}$$

A Identidade (3.5) implica que

$$(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, z_1, y_{\sigma(3)}, y_1) \equiv_I (y_{\sigma(1)}, y_1, z_1, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(2)}).$$

O resultado segue substituindo a equivalência anterior em (3.6), utilizando o mesmo processo para a variável $y_2$ e, assim, a Equivalência (3.6) se reduz ao caso anterior. Logo, $(z_1, y_1, \ldots, y_{2k}) - (z_1, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(2k)}) \in I$.

(iv) Note que para mostrar este caso, basta considerarmos a permutação identidade, isto é, $\sigma = 1$. Uma vez que se tomarmos

$$f = (z_1, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(2k)}, z_2, y_{\sigma(2k+1)}) \text{ com } \sigma(2k+1) = i \neq 2k + 1,$$

então

$$\begin{aligned}f &\overset{P.3.2.4.(iii)}{\equiv_I} (z_1, y_1, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_{2k+1}, z_2, y_i)\\ &= ((z_1, y_1, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_{2(k-1)}), y_{2k}, y_{2k+1}, z_2, y_i)\\ &\overset{(1.1)}{\equiv_I} -(y_{2k}, y_{2k+1}, (z_1, y_1, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_{2(k-1)}), z_2, y_i)\\ &\overset{(3.5)}{=} -(y_{2k}, y_i, (z_1, y_1, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_{2(k-1)}), z_2, y_{2k+1})\\ &\overset{(1.1)}{\equiv_I} ((z_1, y_1, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_{2(k-1)}), y_i, y_{2k}, z_2, y_{2k+1})\\ &\overset{P.3.2.4.(iii)}{\equiv_I} (z_1, y_1, \ldots, y_{2k}, z_2, y_{2k+1}).\end{aligned}$$

Primeiramente, suponhamos $k = 1$. Por (3.1), segue que:

$$((y_1y_2)z_1)z_2 = ((y_1y_2)z_2)z_1.$$

e

$$(y_1(y_2z_1))z_2 = (y_1z_2)(y_2z_1) = (y_2(y_1z_2))z_1 = (y_1(y_2z_2))z_1.$$

Portanto,

$$(y_1, y_2, z_1)z_2 = (y_1, y_2, z_2)z_1 \tag{3.7}$$

Daí,

$$\begin{aligned}(y_1, y_2, z_1)(z_2y_3) \overset{(3.7)}{=} (y_1, y_2, z_2y_3)z_1 &\overset{P.3.2.4.(ii)}{=} (y_3(y_1, y_2, z_2))z_1 \\ &\overset{P.3.2.4.(i)}{=} (y_1, y_2, z_2)(y_3z_1).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Além disso, temos que $(z_1, y_1, y_2, z_2, y_3) = ((z_1, y_1, y_2)z_2)y_3 - (z_1, y_1, y_2)(z_2y_3)$. Então, por (3.7) e (3.8), podemos transpor $z_1$ e $z_2$ na primeira e segunda parcela do lado direito da igualdade, provando assim o caso $k = 1$. Suponhamos agora que para todo inteiro menor ou igual a $k - 1$, o polinômio em $(iv)$ pertence a $I$. Mostremos agora que o polinômio em $(iv)$ pertence a $I$ para $k > 1$. Para isso, iremos mostrar que as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}(z_1, y_1, \ldots, y_{2k})z_2 &= (z_2, y_1, \ldots, y_{2k})z_1;\\ (z_1, y_1, \ldots, y_{2k})(y_{2k+1}z_2) &= (z_2, y_1, \ldots, y_{2k})(y_{2k+1}z_1),\end{aligned}$$

são identidades graduadas em $L$. Note que, pela Identidade (3.7),

$$(z_1, y_1, \ldots, y_{2k})z_2 = (z_2, y_{2k-1}, y_{2k})(z_1, y_1, \ldots, y_{2k-2}).$$

Novamente usando indução em $k$, suponhamos que

$$(z_1, y_1, \ldots, y_{2k-2})z_2 = (z_2, y_1, \ldots, y_{2k-2})z_1.$$

Daí, $(z_2, y_{2k-1}, y_{2k})(z_1, y_1, \ldots, y_{2k-2}) = z_1(z_2, y_{2k-1}, y_{2k}, y_1, \ldots, y_{2k-2})$. Pelo item (iii) segue a primeira igualdade que queríamos.

A segunda igualdade é análoga, para isto observe que

$$\begin{aligned}(z_1, y_1, \ldots, y_{2k})(y_{2k+1}z_2) &\overset{(3.8)}{=} (z_2, y_{2k-1}, y_{2k})(y_{2k+1}(z_1, y_1, \ldots, y_{2k-2}))\\ &\overset{P.3.2.4.(i)}{=} ((z_2, y_{2k-1}, y_{2k})y_{2k+1})(z_1, y_1, \ldots, y_{2k-2})\\ &\overset{H.I.}{=} (z_1y_{2k+1})(z_2, y_{2k-1}, y_{2k}, y_1, \ldots, y_{2k-2}).\end{aligned}$$

Aqui "H.I." significa "hipótese de indução". Concluindo a igualdade. E, assim verificamos que as duas igualdades valem em $L$. Note que o item (iv) segue das duas últimas igualdades citadas.

■

**Lema 3.2.5** *Os polinômios a seguir são identidades em $L$.*

*(i)* $(y_1, z_2, (y_2z_1)) - (y_2(y_1, z_1, z_2) + z_1(y_1, y_2, z_2))$;

*(ii)* $z_1(z_2, z_3, y_1)$;

*(iii)* $(z_1z_2)(z_3, x, y_1) + (z_1, z_2, y_1, x, z_3)$;

*(iv)* $(y_1, z_1, z_2)(y_2, z_3, z_4) - z_1(y_1, z_2, z_3, y_2, z_4)$;

*(v)* $(y_1, y_2, z_1)(y_3, y_4, z_2) - z_1(z_2, y_1, y_2, y_3, y_4)$.

*Em outras palavras, os polinômios acima estão em $I$.*

**Demonstração:**

(i) Note que $(y_1, z_2, (y_2z_1)) = (y_1z_2)(y_2z_1) - y_1(z_2(y_2z_1))$, e

$$y_1(z_2(y_2z_1)) = y_1(y_2(z_1z_2) + (y_2, z_1, z_2)) = (y_1y_2)(z_1z_2) + y_1(y_2, z_1, z_2), \tag{3.9}$$

pois $z_1z_2$ está no centro associador de $L$. Além disso,

$$(z_1, y_2, y_1z_2) = (z_1y_2)(y_1z_2) - z_1(y_2(y_1z_2)) = (y_1z_2)(z_1y_2) - z_1((y_1z_2)y_2)$$

é zero em $L$, pela Identidade (3.1). Esta última igualdade implica que vale, em $L$,

$$\begin{aligned}(y_1z_2)(y_2z_1) &= z_1(y_2(y_1z_2)) \\ &= z_1((y_1y_2)z_2 - (y_2, y_1, z_2)) \\ &= (y_1y_2)(z_1z_2) + (y_1y_2, z_2, z_1) - z_1(y_1, y_2, z_2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Destes comentários segue que

$$\begin{aligned}(y_1, z_2, (y_2z_1)) &\overset{(3.9)}{=} (y_1z_2)(y_2z_1) - ((y_1y_2)(z_1z_2) + y_1(y_2, z_1, z_2)) \\ &\overset{(3.10)}{=} (y_1y_2, z_2, z_1) - z_1(y_1, y_2, z_2) - y_1(y_2, z_1, z_2) \\ &\overset{(3.2)}{=} y_2(y_1, z_1, z_2) - 2z_1(z_2, y_1, y_2) - z_1(y_1, y_2, z_2) \\ &\overset{(1.1)}{=} y_2(y_1, z_1, z_2) + z_1(y_1, y_2, z_2),\end{aligned}$$

concluindo o item (i).

(ii) De modo análogo, (ii) segue das Identidades (3.1) e (3.4) já que

$$z_1((z_2z_3)y_1) \stackrel{(3.4)}{=} (z_2z_3)(z_1y_1) = ((z_2z_3)z_1)y_1 \stackrel{(3.1)}{=} ((z_1z_2)z_3)y_1$$

e, analogamente, $((z_1z_2)z_3)y_1 \stackrel{(3.4)}{=} (z_1z_2)(z_3y_1) \stackrel{(3.1)}{=} (z_1(z_2(z_3y_1)))$. Daí,

$$z_1(z_2, z_3, y_1) = z_1((z_2z_3)y_1 - z_2(z_3y_1)) = z_1((z_2z_3)y_1) - ((z_1z_2)z_3)y_1 = 0.$$

E o item (ii) é obtido.

(iii) Por verificação simples, observamos que

$$(z_1z_2)(z_3, x, y_1) = (z_1z_2)((z_3x)y_1 - z_3(xy_1))$$

e

$$(z_1, z_2, y_1, x, z_3) = ((z_1z_2)y_1x)z_3 - (z_1z_2)y_1(xz_3) - (z_1(z_2y_1)x)z_3 + (z_1(z_2y_1)(xz_3)).$$

Somando essas igualdades, temos:

$$\begin{aligned} (z_1z_2)(z_3, x, y_1) + (z_1, z_2, y_1, x, z_3) &= (z_1z_2)((z_3x)y_1) - (z_1z_2)(z_3(xy_1)) + \\ &+ ((z_1z_2)y_1x)z_3 - (z_1z_2)y_1(xz_3) - \\ &- (z_1(z_2y_1)x)z_3 + z_1(z_2y_1)(xz_3) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} (z_1(z_2y_1)x)z_3 - z_1(z_2y_1)(xz_3), \end{aligned}$$

uma vez que $z_1z_2$ está no centro associativo de $L$. Novamente pela Identidade (3.4) temos que

$$(z_1(z_2y_1), x, z_3) = 0 \text{ em } L\ ,$$

temos que a identidade graduada (iii) é válida.

(iv) Agora mostraremos $(iv)$. Segue das identidades (3.4) e (3.1) que

$$\begin{aligned} ((y_1z_1)z_2)(y_2, z_3, z_4) &\stackrel{(3.4)}{=} (y_2, z_3((y_1z_1)z_2), z_4) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} (y_2, y_1z_1(z_3z_2), z_4) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} (y_2, y_1(z_1z_3z_2), z_4) \\ &\stackrel{P.(3.2.3)}{=} (z_1z_2)(y_2, (y_1z_3), z_4). \end{aligned}$$

Logo $((y_1z_1)z_2)(y_2,z_3,z_4) = (z_1z_2)(y_2,(y_1z_3),z_4)$. Pelo item (i) segue que

$$(y_2,(y_1z_3),z_4) \overset{(1.1)}{=} (y_2,z_4,(y_1z_3)) \overset{P.3.2.5.(i)}{=} (y_1(y_2,z_3,z_4)+z_3(y_2,y_1,z_4)),$$

implicando

$$((y_1z_1)z_2)(y_2,z_3,z_4) = (z_1z_2)(y_1(y_2,z_3,z_4)+z_3(y_2,y_1,z_4)).$$

Como $z_1z_2$ está no centro associativo de $L$, temos

$$((y_1z_1)z_2)(y_2,z_3,z_4) = ((z_1z_2)y_1)(y_2,z_3,z_4)+((z_1z_2)z_3)(y_2,y_1,z_4).$$

Portanto,

$$(y_1,z_1,z_2)(y_2,z_3,z_4) = ((z_1z_2)z_3)(y_2,y_1,z_4).$$

Da identidade (3.4) segue que $z_1z_2$ e $(y_1z_2)z_3$ estão no centro associativo, e portanto $z_1(y_1,z_2,z_3,y_2,z_4) = (z_1(z_2z_3))(y_1,y_2,z_4)$. Como $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$, e valem as Identidades (1.1) e (3.1), concluímos que

$$(y_1,z_1,z_2)(y_2,z_3,z_4) = z_1(y_1,z_2,z_3,y_2,z_4).$$

(v) Mostremos agora $(v)$. Na demonstração da identidade $(i)$ do Lema 3.2.4 já mostramos que $((y_1y_2)z_1)z_2 = ((y_1y_2)z_2)z_1$. Segue que

$$\begin{aligned}(y_1,y_2,z_1)(y_3,y_4,z_2) &\overset{(3.7)}{=} (y_1,y_2,(y_3,y_4,z_2))z_1\\ &\overset{(1.1)}{=} -(y_3,y_4,z_2,y_1,y_2)z_1\\ &\overset{(1.1)}{=} (z_2,y_3,y_4,y_1,y_2)z_1.\end{aligned}$$

Agora aplicamos a identidade graduada $(iii)$ do Lema 3.2.4, e assim podemos ordenar as variáveis $y$ no último associador.

■

A proposição a seguir mostra que a escolha dos elementos de $\Omega_0$ pode ser realmente arbitrária.

**Proposição 3.2.6** *Sejam $u_1$ e $u_2$ dois associadores não nulos em $L$ do mesmo multigrau. Então, $u_1 = \pm u_2$.*

**Demonstração:** Seja $u \in \Omega$. Lembremos que $a$ e $b$ foram tomadas como sendo as matrizes $a = e_{11} - e_{22}$ e $b = e_{12} + e_{21}$ em $J_2$. Note que as substituições onde o grau da primeira entrada é igual ao grau da terceira entrada do associador, estão trivialmente em $I$ por conta do item $(i)$ do Lema 3.2.4.

**Afirmação 1:** Se substituímos toda variável par de $u$ pela matriz $a$, e toda variável ímpar pela matriz b então o resultado desta substituição é :

$$\begin{cases} \pm a, & \text{se } |u| = 0 \\ \pm b, & \text{se } |u| = 1 \end{cases}.$$

Esta afirmação pode ser demonstrada por indução em $deg(u)$. Se $deg(u) = 3$ então $(a, a, b) = -(b, a, a) = b$ e $(b, b, a) = -(a, b, b) = a$. Consideremos $u = (u_1, u_2, u_3)$, onde os $u_i$, $i = 1, 2, 3$, são associadores de comprimento menor que o de $u$, e assim aplicaremos indução e finalizamos a prova da Afirmação 1.

Pela Lema 1.3.12, todo associador $u \in \Omega$ é uma combinação linear de associadores próprios. Então, provaremos inicialmente a proposição para associadores próprios. Para isso, mostremos a seguinte afirmação.

**Afirmação 2:** Todo associador próprio $u$ pode ser escrito como

$$u = (z_{i_1} \cdots z_{i_{2m}})u_t,$$

onde $t = 0,\ 1$, e $u_0 = (z_{i_{2m+1}}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_{2k}})$ e $u_1 = (z_{i_{2m+1}}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_{2k}}, z_{i_{2m+2}}, y_{j_{2k+1}})$. Aqui $m \geq 0$. Faremos indução no grau total nas variáveis $z$, denotado por $n$, em $u$, e além disso definimos $\ell$ dado por $deg(u) = 2\ell + 1$ (devido ao fato que um associador é sempre ímpar e fora temos um número par de variáveis). Se $n = 0$ então não existem tais associadores não nulos, pois $L_0$ é associativa pela Proposição 3.2.3. Suponha que $n = 1$. Se $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ então exatamente uma das variáveis $x_1$ ou $x_3$ é ímpar, portanto podemos assumir que (a menos de um sinal) essa variável é $x_1$, pela Identidade (3.1). Então, aplicamos o Lema 3.2.4 $(iii)$, e assim o resultado vale para todo $\ell$. Suponha que $n = 2$. Se $\ell = 1$ então $u = (z_1, z_2, y_1) = (z_2, z_1, y_1)$ e $deg(u) = 3$. Tome $\ell \geq 2$. Não podemos ter $u = (z_1, z_2, y_1, \ldots)$ já que no lugar das reticências apareceriam apenas variáveis pares (pelo menos duas), e teríamos $u = 0$. Assim temos $u = (z_1, y_1, \ldots, y_p, z_2, y_{p+1}, \ldots)$ com $p \geq 1$. (Os índices nas variáveis podem ser permutados mas usamos essa notação mais simples.) Observe que o inteiro

$p$ é par, pois caso contrário teríamos $u = 0$. Além disso, os pontos mais a direita representam variáveis pares. Como o associador $(z_1, y_1, \ldots, y_p, z_2)$ é par (na graduação) e temos $n = 2$ variáveis ímpares, os pontos mais a direita na verdade não aparecem. Assim concluímos que $u = (z_1, y_1, \ldots, y_p, z_2, y_{p+1})$, onde $p$ é par, e assim terminamos com esse caso para todo $\ell$ utilizando Lema 3.2.4 $(iv)$. Suponha agora que $n \geq 3$. Vamos provar que neste caso $u = (z_{i_1} \cdots z_{i_{2m}})u'$ onde $u'$ tem 1 ou 2 variáveis ímpares, isto é, $u'$ é da forma desejada. Escrevamos $u = (A_1, x_1, x_2)$ onde $A_1$ é um associador de grau menor que $u$. Se $A_1$ contém pelo menos 3 variáveis ímpares, então por indução ($deg(A_1) = deg(u) - 2$) temos $A_1 = (z_{i_1} z_{i_2})A_2$. Aqui $A_2$ é algum associador próprio (ou uma combinação linear de associadores próprios). Por outro lado, $z_1 z_2$ está no centro associativo e portanto

$$u = (z_{i_1} z_{i_2})(A_2, x_1, x_2).$$

Assim, podemos aplicar a indução para $(A_2, x_1, x_2)$. Se, por outro lado, $A_1$ tem apenas uma variável ímpar então $|A_1| = 1$ e $|x_2| = 0$, já que $u \neq 0$. Assim temos $n = 1$ ou 2, mas isso é impossível, pois $n \geq 3$. Desse modo, temos que analisar o caso em que $A_1$ tem exatamente duas variáveis ímpares. Novamente por indução ($n = 2$) podemos assumir que $A_1 = (z_1, y_1, \ldots, y_{2k-2}, z_2, y_{2k-1})$ a menos de uma permutação nas variáveis pares e, separadamente, das variáveis ímpares. Então $|A_1| = 0$, e portanto $x_2$ deve ser algum $z$, e como $n = 3$, $x_1$ é algum $y$. Para simplificar a notação, escrevemos $u = (A_1, y, z)$ e $A_1 = (A_2, z', y')$ onde $A_2$ é um associador com $|A_2| = 1$ e $A_2$ contém exatamente uma variável ímpar. Portanto, $u = (A_2, z', y', y, z)$. Agora, aplicamos a Identidade $(iii)$ do Lema 3.2.5, e em seguida utilizamos o fato que a álgebra gerada por $L_1$ é associativa (e comutativa) para obter:

$$\begin{aligned} u &\overset{L.3.2.5-(iii)}{=} \pm(A_2 z')(y', y, z) \\ &\overset{(1.1)}{=} \pm(A_2 z')(z, y', y) \\ &\overset{(3.4)}{=} \pm((A_2 z')z, y', y) \\ &\overset{P.\ 3.2.3}{=} \pm((z'z)A_2, y', y) \\ &\overset{(3.4)}{=} \pm(z'z)(A_2, y', y). \end{aligned}$$

Isto é, podemos permutar as variáveis $z$ sem restrições; no caso de permutar as variáveis $y$ segue do Lema 3.2.4, itens $(iii)$ e $(iv)$. Logo, vale a Afirmação 2.

Agora, sejam $u$ e $w$ dois associadores (não necessariamente próprios) de mesmo grau multihomogêneo. Escrevemos cada um deles como uma combinação linear de associadores próprios, e em seguida aplicamos os resultados provados acima para associadores próprios. Desse modo, concluímos que $u$ e $w$ diferem apenas por um múltiplo escalar. Mas sendo $u = \alpha w$, e substituindo por $a$ e $b$ as variáveis de $u$, temos que $\alpha = \pm 1$, já que vale a Afirmação 1 feita no início da demonstração. ■

Lembramos que o conjunto $A \subseteq L$ consiste dos elementos dos quatro tipos a seguir:

(i) $(y_{i_1} \cdots y_{i_k})(z_{j_1} \cdots z_{j_t})$;

(ii) $(y_{i_1} \cdots y_{i_k})u^1$;

(iii) $(y_{i_1} \cdots y_{i_k})(z_{j_1} u^1)$;

(iv) $(y_{i_1} \cdots y_{i_k})u^0$,

onde $k, t \geqslant 0$ e $u^i \in \Omega_0$ é um associador e não variáveis com $|u^i| = i$, para $i = 0, 1$, ou seja, $deg(u^i) \geqslant 3$.

O corolário a seguir é uma consequência do Lema 3.2.5 e da Afirmação 2 utilizada na demonstração da proposição anterior.

**Corolário 3.2.7** *Seja $u \in A$. Se substituímos qualquer variável $x$ de $u$ por um associador $w$ tal que $|x| = |w|$, então obtemos uma combinação linear de elementos de $A$.*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.2.3, $L_0$ é associativa. Além disso, $L$ é uma álgebra de Jordan, e portanto, $L_0$ é comutativa. O mesmo vale para $[L_1]$. Como já vimos, $z_i z_j$ está no centro associativo de $L$, e portanto, pode ser "absorvido" pelo associador (ou pelo elemento $z_{j_1} \cdots z_{j_t}$ no caso de elementos do tipo $(i)$ da Definição do conjunto $A$). Agora, analisemos as possíveis substituições de variáveis de elementos de $A$ por associadores. Para isso, devemos utilizar as identidades graduadas do Lema 3.2.5. Caso as substituições das variáveis sejam em $u^0$ ou $u^1$ temos o resultado, já que todo associador é combinação linear de associadores próprios. Resta agora considerar substituições nas variáveis que não estão em associadores. Para o caso $(iii)$ da definição do conjunto $A$, o item $(v)$ do Lema 3.2.5 garante que se substituímos $z$ por $(y_3, y_4, z_2)$ em $(y_1, y_2, z_1)z$, obtemos $z_1(z_2, y_1, y_2, y_3, y_4)$, e assim aplicando o comentário anterior para associadores maiores temos o que queremos. Agora consideremos o item $(i)$ para substituições de $z$ por $(y_1, y_2, z)$. Segue trivialmente caso tenha no máximo uma variável de grau ímpar $z_0$ fora dos associadores, caso tenha mais de um usaremos o item $(iii)$ do Lema 3.2.5. Agora, se substituímos $z$ por $(y_3, y_4, z_2)$ em $(y_1, y_2, z_1)z$, obtemos, pelo Lema 3.2.5 $(v)$, que tal elemento é igual a $z_1(z_2, y_1, y_2, y_3, y_4)$. Resta argumentar os casos $(i) - (iv)$ para as substituições das variáveis $y$ por associadores. Por exemplo, se substituímos $y$ por $(y_2, z_3, z_4)$ em $(y_1, z_1, z_2)y$, do item $(iv)$ do Lema 3.2.5 obtemos $z_1(y_1, z_2, z_3, y_2, z_4)$. Além disso, considerando apenas uma substituição nas variáveis $y$, temos, pelo item $(i)$ do Lema 3.2.5 que

$$y(y_1, z_1, z_2) = (y_1, z_2, (yz_1)) - z_1(y_1, y, z_2)$$

em $L$. Neste caso, retornamos os estudos para os casos anteriores citados. Assim, o resultado segue usando as ferramentas dadas até aqui para associadores de comprimentos maiores. ■

Lembre que $S$ está denotando o espaço vetorial gerado pelo conjunto $A$. Os Lemas a seguir garantem que certos elementos pertencem a $S$.

**Lema 3.2.8** *O polinômio $N = (y_1 \cdots y_k, y, z)$ pertence ao subespaço de $S$ gerado por elementos do tipo $(ii)$ do conjunto $A$.*

**Demonstração:** Seja $S''$ o conjunto de elementos do tipo $(ii)$ do conjunto $A$ de mesmo multigrau de $N$. Mostraremos que $N$ pertence ao subespaço $V$ de $S$ gerado por $S''$. Provaremos por indução sobre $k$. Se $k = 1$, não há o que provar. Podemos escrever, usando a Identidade (3.3),

$$N = (y_1 \cdots y_{k-1})(y_k, y, z) + y_k(y_1 \cdots y_{k-1}, y, z).$$

O elemento $(y_1 \cdots y_{k-1})(y_k, y, z)$ é do tipo $(ii)$. Agora, para mostrar que $y_k N' \in V$, onde $N' = (y_1 \cdots y_{k-1}, y, z)$, devemos aplicar a hipótese de indução ao elemento $N'$ e, neste caso,

$$y_k N' = \sum \alpha_j y_k((y_{i_1}^{(j)} \cdots y_{i_l}^{(j)})u_j^1).$$

Nestas condições é suficiente mostrar que todos os elementos da forma

$$y((y_1\cdots y_p)(z,y_{p+1},\ldots,y_q)), p<k, q-p\equiv 0 \mod 2$$

são combinações lineares de elementos do tipo $(ii)$. Mas este último elemento é igual a

$$(y(y_1\cdots y_p))(z,y_{p+1},\ldots,y_q)-(y,(y_1\cdots y_p),(z,y_{p+1},\ldots,y_q)).$$

O primeiro termo da soma anterior é do tipo $(ii)$ e o segundo é igual, a menos de sinal, a

$$((y_1\cdots y_p),y,(z,y_{p+1},\ldots,y_q)),$$

ver Observação 1.1.13. Primeiro consideramos o elemento $((y_1\cdots y_p),y,z)$. Aplicando indução a este último elemento (ou a Identidade (3.3) várias vezes), obtemos uma combinação linear de elementos do tipo $(ii)$ do conjunto $A$. Mas, pelo Corolário 3.2.7, se substituirmos uma variável por um associador em um elemento de $A$, obtemos novamente elementos de $A$ desde que o $\mathbb{Z}_2$-grau seja preservado. E neste caso ainda pode-se observar que $z$ está na primeira posição do associador. Concluindo que sua substituição por um novo associador é um elemento ainda do tipo $(ii)$. Assim, temos o resultado que queríamos. ■

**Lema 3.2.9** *O polinômio $N=(y_1\cdots y_k,z_1,z_2)$ está em $S$.*

**Demonstração:** Faremos indução sobre $k$. Devemos mostrar que $N$ está no espaço $V$ gerado pelos elementos dos tipos $(iii)$ e $(iv)$ da definição do conjunto $A$. Para $k=1$, não há o que demonstrar. Segue da Identidade (3.2) que

$$N=(y_1\cdots y_{k-1})(y_k,z_1,z_2)+y_k(y_1\cdots y_{k-1},z_1,z_2)-2z_1(z_2,y_1\cdots y_{k-1},y_k). \qquad (3.11)$$

A primeira parcela do lado direito da igualdade acima é um elemento de $S$ (do tipo $(iv)$). Por indução, podemos assumir que $((y_1\cdots y_{k-1}),z_1,z_2)\in V$ é uma combinação linear de elementos dos tipos $(iii)$ e $(iv)$. Além disso, os elementos dos tipos $(iii)$ e $(iv)$ são produtos dos elementos pares, e consequentemente, estão na álgebra associativa $L_0$. Assim, multiplicando estes por $y_k$ resulta em elementos do mesmo tipo, já que aqui não precisamos nos preocupar com os parênteses. Resta mostrar que a última parcela da Igualdade (3.11) é elemento de $V$. Aplicando o Lema 3.2.8 em $(z_2,y_1\cdots y_{k-1},y_k)$, podemos escrever este como uma combinação linear de elementos do tipo $(ii)$. Portanto é suficiente provar que elementos da forma $M = z_1((y_1 \cdots y_n)(z_2, y_{n+1}, \ldots, y_m))$, $n < k$ (já que $m \geq 2$) e $m - n$ sendo par, estão em $V$. Mas temos que

$$M = (y_1 \cdots y_n)(z_1(z_2, y_{n+1}, \ldots, y_m)) - (z_1, (z_2, y_{n+1}, \ldots, y_m), y_1 \cdots y_n).$$

Aqui a primeira parcela da direita é do tipo $(iii)$. E o segundo também é um elemento de $V$ devido a hipótese de indução combinado com o Corolário 3.2.7, aqui usa-se as mesmas ideias da demonstração do lema anterior. ■

**Lema 3.2.10** *Se $s \in S$, então $sz \in S$.*

**Demonstração:** Primeiro notamos que os elementos de $A$ dos tipos $(ii), (iii), (iv)$ podem ser obtidos de elementos do tipo $(i)$ substituindo uma variável $x$ por um associador $u$ tal que $|u| = |x|$ e lembrando que $z_1z_2$ está no centro associativo de $L$. Então o lema será consequência do Corolário 3.2.7, se provarmos que

$$((y_1 \cdots y_k)(z_1 \cdots z_p))z \in S.$$

Se o número $p$ é par, então $z_1 \cdots z_p$ está no centro associativo de $L$, e assim, "absorve" a variável $z$. Desse modo, obtemos um elemento do tipo $(i)$. Então suponha que $p$ é ímpar. Neste caso, o elemento $z_2 \cdots z_p$ está no centro e basta mostrar que o elemento $R = ((y_1 \cdots y_k)z_1)z \in S$. Podemos observar que

$$R = ((y_1 \cdots y_k), z_1, z) + (y_1 \cdots y_k)(z_1z).$$

Pelo Lema 3.2.9 a primeira parcela a direita está em $S$, enquanto a segunda já é do tipo $(i)$. ■

**Lema 3.2.11** *O elemento $N = ((y_1 \cdots y_k), (y_{k+1} \cdots y_n), z) \in S$.*

**Demonstração:** Segue diretamente aplicando o Colário 3.2.7 e Lema 3.2.8. ■

**Lema 3.2.12** *O elemento $R = (y_1 \cdots y_k)((y_{k+1} \cdots y_n)z)$ pertence à $S$.*

**Demonstração:** A demonstração segue do Lema 3.2.11 e do fato de que $L_0$ é associativa. ∎

**Proposição 3.2.13** *O conjunto A gera a álgebra relativamente livre L.*

**Demonstração:** Afirmamos que os elementos

$$R = ((y_1 \cdots y_p)z_1)((y_{p+1} \cdots y_q)z_2) \in S.$$

De fato, como $(z_1, y, z_2)$ é uma identidade graduada, temos que $R$ pode ser escrito como $R = z_1((y_1 \cdots y_p)((y_{p+1} \cdots y_q)z_2))$. Assim, nossa afirmação segue do Lema 3.2.12 e do Lema 3.2.10. Além disso, o produto de um número par de elementos de $L_1$ pertence ao centro associativo de $L$. Portanto, o fato que $R \in S$, juntamente com o Corolário 3.2.7 implica que o produto de dois elementos de A pertence a $S = span(A)$. Logo, $S$ é uma subálgebra de $L$. Como $X \subseteq S$ por definição, e $X$ gera $L$ como álgebra concluímos que $S = L$. ∎

Isto conclui o comentário feito antes do Lema 3.2.4. A partir de agora, iremos dedicar o resto desta seção para demonstrar que as Identidades (3.1)-(3.5) formam uma base para o $T$-ideal das identidades de $J_2$, munido com a graduação não escalar. Para isto consideremos a seguinte definição.

**Definição 3.2.14** *Sejam $u_1, u_2$ elementos em $A$. Diremos que $u_1$ e $u_2$* **são semelhantes** *se $u_1 = (y_{i_1}^{n_1} \cdots y_{i_k}^{n_k})a_1$ e $u_2 = (y_{i_1}^{n_1} \cdots y_{i_k}^{n_k})a_2$. Aqui os $a_i's, i = 1, 2,$ são da forma $(z_{j_1} \cdots z_{j_p})w_i, p \geq 0,$ e os $w_i$ são associadores.*

Na definição acima, observe que não exigimos $a_1 = a_2$. Em outras palavras, $u_1$ e $u_2$ são semelhantes se, as variáveis pares que aparecem neles fora dos associadores são as mesmas (contando os graus multihomogêneos). Agora, já temos os resultados necessários para demonstrar o principal resultado desta seção.

**Teorema 3.2.15** *Seja $K$ um corpo infinito, com $charK \neq 2$. Então o ideal $T$ das identidades graduadas da álgebra de Jordan $J_2$ das matrizes simétricas $2 \times 2$, munido com a graduação não escalar, é gerado (como um $T$-ideal graduado) pelas identidades de (3.1) a (3.5). Em outras palavras, $T = I$*

**Demonstração:** A prova será dividida em três afirmações.

**Afirmação 1:** Sejam $u_1, \ldots, u_n$ elementos de $A$ de mesmo multigrau. Suponha que não há dois semelhantes entre eles e que $\sum \alpha_i u_i \in T$ é uma identidade graduada para $J_2$, onde $\alpha_i \in K$. Então para todo $i$, temos $\alpha_i = 0$.

Seja $u_i = c_i a_i$ onde os $a_i' s$ são como na Definição 3.2.14, e os $c_i' s$ são produtos de variáveis pares. Neste caso, por não ter termos semelhantes no somatório acima, temos que $c_i \neq c_j$, sempre que $i \neq j$. Como $L_0$ é associativa e comutativa podemos assumir que as variáveis $y$ em cada $c_i$ estão escritas em ordem crescente. Escreva $\sum \alpha_i u_i = f(y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q)$. Suponha ainda que $f \neq 0$. Defina

$$g(y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q) = f(y_1 + 1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q).$$

Temos que, o polinômio $g$ é uma identidade graduada para a álgebra de Jordan $J_2$ e ainda, que $g$ não é multihomogêneo. Como o corpo base é infinito todas suas componentes multihomogêneas também são identidades graduadas para $J_2$. Uma das suas componentes multihomogêneas é exatamente $f$. Seja $h$ a componente homogênea de $g$ não nula de menor grau em $y_1$. (Isto é, consideramos $h$ o polinômio não nulo obtido de $f$ depois de substituirmos o maior número possível de variáveis $y_1$ por 1). O polinômio $h$ é obtido de $f$ através do seguinte procedimento: Primeiro consideramos a soma de todos os $\alpha_i c_i a_i$ onde o grau de $y_1$ em $c_i$ é o maior possível, e descartamos as parcelas restantes. Então, substituímos nestas parcelas todas as entradas $y_1$ em $c_i$ por 1 (e mantemos as variáveis $y_1$ que aparecem em associadores). Desse modo, obtemos exatamente $h$ já que sempre que 1 aparece em um associador o mesmo se anula. O polinômio $h$ não tem variáveis $y_1$ que aparecem fora de associadores. Repetindo o argumento acima para $h(y_1, y_2 + 1, y_3, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q)$ obtemos um polinômio não nulo que não contém $y_2$ fora de associadores, e assim por diante. Finalmente, continuando o processo descrito acima, obtemos um polinômio não nulo $f_1$ que não contém nenhuma variável $y_i$ fora de associadores. Como $f \in T$, segue que $f_1 \in T$. Mas $f_1$ é obtido de $f$ removendo algumas das parcelas e descartando os $c_i$ que são parte das parcelas restantes. Como os $c_1, \ldots, c_n$ são dois a dois distintos concluímos que existe apenas um $a_i$ em $f_1$. Isto é $f_1 = \alpha_i a_i$ para algum $i$. Por outro lado $\alpha_i a_i \in T$ significa que esta é uma identidade graduada para $J_2$. Mas isto só é possível se $\alpha_i = 0$ e neste caso $f_1 = 0$, e $\alpha_i c_i a_i$ não aparece em $f$. Em seguida repetimos o procedimento acima para

$f$ (já tendo descartado o termo $\alpha_i c_i a_i$) e continuamos por indução.

**Afirmação 2:** O conjunto $A$ é linearmente independente módulo o ideal $T$.

Segue da Afirmação 1 que é suficiente considerar somente os elementos de A onde todas as variáveis $y$ aparecem em associadores apenas. Neste caso devemos mostrar que os elementos $z_{j_1} \cdots z_{j_t}, u^1, z_{j_1} u^1, u^0$, são linearmente independentes. Lembrando que os $u^i$ são associadores e não variáveis, segue que esses elementos têm multigraus dois a dois distintos, pela definição do conjunto $\Omega_0$, e não podem ser linearmente dependentes. Donde segue nossa afirmação.

**Afirmação 3:** A inclusão $T \subseteq I$ é válida.

Como o corpo base é infinito, basta considerar $f \in T$ um polinômio multihomogêneo afim de provar a afirmação. Como $I \subseteq T$, segue da Proposição 3.2.13 que

$$f \equiv \sum \alpha_i u_i \mod I.$$

Aqui $\alpha_i \in K$ e $u_i \in A$. Caso todos os $u_i$'s não sejam semelhantes podemos aplicar a Afirmação 1, e temos a afirmação. Caso contrário, podemos argumentar, como foi feito na Afirmação 2, para cada $u_i = c_i a_i$. Neste caso, eles se diferem pelos elementos $a_i$ e $a_j$ (dados na Definição 3.2.14), e da Afirmação 2 concluímos que estes são linearmente independentes. Portanto, em todos os casos temos $\alpha_i = 0$, ou seja, $f \in I$. Assim, segue a afirmação.

Para terminar a demonstração do teorema é suficiente lembrar que $I \subseteq T$ e da Afirmação 3 que $T \subseteq I$, donde concluímos que $T = I$.

$\blacksquare$

## 3.3 Identidades para a graduação escalar

Nesta seção, temos como objetivo a descrição das identidades de $J_2$ munida da graduação escalar. Para este fim, os autores Koshlukov e Diniz descreveram um caso mais geral. Na verdade, estudaremos a descrição das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas das álgebras de Jordan $B$ e $B_n$ de uma forma bilinear simétrica não degenerada nos espaços vetoriais $V$ e $V_n$ (respectivamente), com a graduação escalar. Tal graduação consiste naquela cuja a componente neutra é o próprio corpo $K$. Como consequência dessa descrição, uma base para as identidades graduadas da álgebra de Jordan $J_2$, com a graduação requerida, é obtida.

Lembramos que $dimV = \infty$, $dimV_n = n$. Além disso, temos que $B^{(0)} = K$, e $B^{(1)} = V$, e respectivamente $B_n^{(0)} = K$, $B_n^{(1)} = V_n$ (utilizaremos os índices superiores para a graduação para não haver confusão com os casos particulares das álgebras de Jordan $B_0$ e $B_1$). Aqui, iremos manter a notação para as variáveis na álgebra de Jordan especial livre, $X = Y \cup Z$, onde $Y$ são as variáveis pares e $Z$ são as variáveis ímpares. Utilizaremos ainda os resultados e definições que podem ser encontrados na Seção 1.7 do Capítulo 1.

O polinômio

$$(y, x_1, x_2) = 0 \tag{3.12}$$

é uma identidade graduada em $B$ e $B_n$. De fato, sua validade em $B$ (e $B_n$) segue do fato dos elementos pares em $B$ serem escalares.

**Observação 3.3.1** *Segue de* (3.12) *que* $(z_1z_2, x_1, x_2) = 0$. *Além disso,* $(x_1, y, x_2)$ *e* $(x_1, x_2, y)$ *são consequências de* (3.12) *da seguinte forma: Por associador ser um sistema tripo de Lie sobre qualquer álgebra de Jordan, ver Observação 1.3.11, temos que* $(x_1, x_2, y) = -(y, x_2, x_1)$ *e*

$$(x_1, y, x_2) \stackrel{(1.1)}{=} -(y, x_2, x_1) - (x_2, x_1, y) \equiv -(y, x_2, x_1) + (y, x_1, x_2),$$

*e o resultado segue.*

Aqui, denotamos $I$ como sendo o ideal das identidades graduadas definido pelo polinômio (3.12), e $L = \dfrac{SJ(X)}{I}$ denotará a álgebra relativamente livre correspondente. Consideremos $f = f(y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q)$ um polinômio multihomogêneo. Módulo o $T_2$-ideal $I$, podemos escrever $f$ como

$$f(y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q) = y_1^{n_1} \cdots y_p^{n_p} g(z_1, \ldots, z_q),$$

onde $g$ é algum polinômio nas variáveis ímpares. Portanto, $f$ é uma identidade graduada para $B$ (resp., $B_n$) se, e somente se, $g$ também for. Como $g$ é um polinômio de Jordan nas variáveis $z$'s, segue que $f$ é uma identidade graduada para $B$ (resp., $B_n$) se, e somente se, $g$ é uma identidade fraca de Jordan para $(B, V)$ (resp., $(B_n, V_n)$).

Consideramos $M$ como sendo a subálgebra de $L$ gerada pelas variáveis em $Z$.

**Lema 3.3.2** *A álgebra $M = M^{(0)} \oplus M^{(1)}$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada. E a subálgebra $M^{(0)}$ é gerada por todos os produtos $(z_{i_1}z_{j_1})\cdots(z_{i_k}z_{j_k})$ enquanto o espaço vetorial $M^{(1)}$ é gerado por todos os $z_{i_0}(z_{i_1}z_{j_1})\cdots(z_{i_k}z_{j_k})$.*

**Demonstração:** Pela forma que definimos anteriormente, a decomposição de $M$ é de fato uma graduação. As outras duas afirmações do lema também seguem de imediato pela definição de $M$ uma vez que $z_1z_2$ está no centro associativo de $L$ (ver Observação 3.3.1).

■

É importante mencionar que a partir de agora iremos invocar a teoria de invariantes. Para este fim é interessante considerar a álgebra de polinômios $R = K[(t_i \circ t_j)]$ dada na Seção 1.7, e observar que os resultados que ali se encontram, continuam valendo se substituímos $R$ por $M$ (isto é, $t_i$ por $z_i$), uma vez que as variáveis $z_i$ serão substituída por elementos de $V_n$. Para o caso de dimensão infinita, basta fazer $n \to \infty$ para justificar as afirmações.

Para continuarmos, necessitaremos de algumas definições. Vamos chamar a tabela dupla $T$, dada na Definição 1.7.1, simplesmente de **tabela** se todas suas entradas são inteiros positivos. Se, somente se, $p_{11} = 0$ e todas as entradas restantes da tabela $T$ são inteiros positivos, chamaremos $T$ de **0-tabela**. Neste último caso, associamos à 0-tabela $T = (0p_2 \dots p_m \mid q_1q_2 \dots q_m)$ ao polinômio $\tilde{\varphi}(T) \in R$ dado por:

$$\tilde{\varphi}(T) = \sum (-1)^{\sigma} t_{q_{\sigma(1)}} (t_{p_2} \circ t_{q_{\sigma(2)}}) \cdots (t_{p_m} \circ t_{q_{\sigma(m)}}). \tag{3.13}$$

Usando esses comentários, podemos enunciar e provar o seguinte resultado.

**Proposição 3.3.3** *O espaço vetorial $M^{(0)}$ tem uma base que consiste de todos os polinômios associados a tabelas duplamente standard. Além disso, $M^{(1)}$ tem uma base que consiste de todos os polinômios associados a 0-tabelas duplamente standard.*

**Demonstração:** Dos comentários anteriores, temos que $M$ possui uma base consistindo de polinômios $\tilde{\varphi}(T)$, onde $T$ percorre todas as tabelas duplamente standard cujas entradas são inteiros positivos tal que $m_1 \leq n$, ver Teorema 1.7.4. Assim, é suficiente considerar polinômios oriundos de tabelas duplamente standard.

Para mostrar que $M^{(0)}$ tem uma base que consiste de todos os polinômios associados a tabelas duplamente standard, basta observar o Teorema 1.7.4.

Para $M^{(1)}$ também segue do Teorema 1.7.4 da seguinte maneira. Lembramos que nossa forma bilinear é não degenerada. Seja $T$ alguma 0-tabela e consideremos $\tilde{\varphi}(T) = \sum(-1)^{\sigma} z_{q_{\sigma(1)}}(z_{p_2} z_{q_{\sigma(2)}}) \cdots (z_{p_m} z_{q_{\sigma(m)}})$ como sendo o polinômio associado à $T$. Seja $z_0$ uma nova variável. Então $z_0 \circ \tilde{\varphi}(T)$ é representado por uma tabela dupla, e assim, podemos aplicar o mesmo argumento acima. Pelo Teorema 1.7.4, $z_0 \circ \tilde{\varphi}(T)$ será uma combinação linear de tabelas standard. Em uma tabela standard a entrada mais à esquerda da primeira linha deve corresponder a $z_0$, e portanto, temos o resultado. ■

**Observação 3.3.4** *Quando estamos trabalhando com identidades fracas, elas são consideradas dentro da álgebra de Jordan especial livre $SJ(X)$.*

Iremos agora provar um resultado auxiliar que nos ajudará na demonstração do resultado principal desta seção.

**Teorema 3.3.5** *(i) As identidades fracas de Jordan para o par $(B, V)$ são consequências do polinômio $(x_1x_2, x_3, x_4)$.*

*(ii) As identidades fracas de Jordan para o par $(B_n, V_n)$ seguem dos polinômios*

$$(x_1x_2, x_3, x_4) \text{ e } f_n = \sum(-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)}(x_{n+2}x_{\sigma(2)}) \cdots (x_{2n+1}x_{\sigma(n+1)}).$$

*No último somatório, $\sigma$ percorre o grupo simétrico $\mathcal{S}_{n+1}$.*

**Demonstração:** A primeira afirmação segue diretamente do Teorema 1.7.4. O mesmo vale para a segunda afirmação, já que o polinômio $x_0 f_n$ é igual ao polinômio dado em (1.5) e ele se “anula” em todas as tabelas cuja primeira linha tem comprimento maior ou igual a $n + 1$. Neste caso, a primeira entrada não influencia na demonstração, uma vez que a forma é não degenerada. Portanto, temos o resultado.

■

Como consequência imediata o resultado principal, temos:

**Corolário 3.3.6** *(i) O ideal das identidades graduadas da álgebra de Jordan $B$ (com a graduação escalar) coincide com o ideal $I$ gerado por (3.12).*

*(ii) O ideal das identidades graduadas da álgebra de Jordan $B_n$ com a graduação escalar é gerado por* (3.12) *e pela identidade*

$$g_n = \sum (-1)^{\sigma} z_{\sigma(1)}(z_{n+2}z_{\sigma(2)})\ldots(z_{2n+1}z_{\sigma(n+1)}), \sigma \in S_{n+1}. \tag{3.14}$$

*(iii) As identidades graduadas da álgebra de Jordan das matrizes simétricas $2\times 2$ (com a graduação escalar) seguem de* (3.12) *e de $\sum(-1)^{\sigma} z_{\sigma(1)}(z_4 z_{\sigma(2)})(z_5 z_{\sigma(3)})$, onde $\sigma$ percorre $S_3$.*

**Demonstração:** Os itens $(i)$ e $(ii)$ são consequências do Teorema 3.3.5 e dos comentários que precedem o Lema 3.3.2. E o item $(iii)$ é um caso particular de $(ii)$, uma vez que vale o isomorfismo do Exemplo 1.1.30. E assim, segue o resultado. ■

Como havíamos prometido, obtemos como corolário do Teorema 3.3.5 as descrições das identidades graduadas das álgebras $B$, $B_n$ e $J_2$, munidas com a $\mathbb{Z}_2$-graduação dita escalar. E concluímos esse capítulo com a descrição completa das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a álgebra das matrizes simétricas de ordem 2.

# Capítulo 4

# Propriedade de Specht para as identidades 2-graduadas da álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica.

Uma variedade de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas (algumas vezes chamada de 2-graduadas) determinada por uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A$ satisfaz a propriedade de Specht se todos os $T_2$-ideais contendo $T_2(A)$ admitem uma base finita, como $T$-ideal. Tal definição é uma "adaptação" do caso associativo e ordinário bastante conhecido proposto por Specht em 1950.

Neste capítulo, mostraremos que a variedade de álgebras de Jordan $\mathbb{Z}_2$-graduadas geradas por $B_m = K \oplus V$, com a graduação dita "escalar", satisfaz tal propriedade. Este resultado pode ser encontrado no artigo [8], cujo os autores são Diogo Diniz e Manuela da Silva Souza.

Como no capítulo anterior, permaneceremos com a notação para $X = Y \cup Z$, onde $Y$ é o conjunto das variáveis pares e $Z$ as ímpares. Além disso, embora alguns resultados continuem valendo em um contexto mais geral, iremos considerar $K$, a menos que seja mencionado, um corpo de característica zero.

## 4.1 Propriedade de base finita para conjuntos quaseordenados

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados sobre a propriedade da base finita dos conjuntos quaseordenados, ferramenta importante para a obtenção do resultado principal. Ver [15] para maiores detalhes sobre tal assunto e citeCentrone Manuela Fabrizio,Giambruno e Manuela para outras aplicações em ambientes distintos.

**Definição 4.1.1** *Uma relação "$\leq$" em um conjunto não vazio $A$ é uma* **quaseordem** *se valem:*

*(i)* $a \leq a$ *(reflexividade);*

*(ii) Se* $a \leq b$ *e* $b \leq c$ *então* $a \leq c$ *(transitividade),*

*para todo* $a$, $b$, $c \in A$. *Neste caso, dizemos que* $A$ *é um* **conjunto quaseordenado** *e denotamos* $(A, \leq)$.

Seja $(A, \leq)$ um conjunto quaseordenado. Se para todo $a, b \in A$, toda vez que $a \leq b$ e $b \leq a$ implicar em $a = b$ (antissimetria), a relação é chamada de **ordem parcial** e o conjunto $A$ é dito **parcialmente ordenado**. Se além disso, quaisquer dois elementos do conjunto são comparáveis, ou seja, $a \leq b$ ou $b \leq a$, dizemos que a ordem é **total** e o conjunto é **totalmente ordenado**.

**Exemplo 4.1.2** *O conjunto dos números naturais* $\mathbb{N}$ *munido da ordem usual é um conjunto totalmente ordenado.*

**Definição 4.1.3** *Sendo* $B$ *um subconjunto de um conjunto quaseordenado* $A$ *(digamos que* $A$ *está munido de uma quaseordem* $\leq$*), definimos* **o fecho de** $B$ *como sendo o conjunto* $\overline{B} = \{a \in A \mid \text{ existe } b \in B \text{ tal que } b \leq a\}$. *É claro que* $B \subseteq \overline{B}$. *Dizemos que* $B$ *é* **fechado**, *se* $\overline{B} = B$.

**Observação 4.1.4** *Sejam* $B$ *e* $C$ *subconjuntos de um conjunto quaseordenado* $A$ *tal que* $B \subseteq C$. *Seja* $a \in \overline{B}$, *então existe* $b \in B$ *tal que* $b \leq a$. *Por* $B \subseteq C$, *temos que* $b \in C$, *implicando que* $a \in \overline{C}$. *Neste caso, é fato esperado que* $\overline{B} \subseteq \overline{C}$.

**Definição 4.1.5** *Dizemos que um conjunto quaseordenado satisfaz a* ***propriedade de base finita****, se todo subconjunto fechado de $A$ é o fecho de um conjunto finito.*

O teorema a seguir é uma caracterização para tal propriedade. Aqui decidimos destacar apenas três equivalências, as quais serão importantes nos nossos estudos. Não poderíamos deixar de informar que o resultado original, que pode ser encontrado em [15, Theorem 2.1], tem uma lista de cinco equivalências da Definição 4.1.5.

**Teorema 4.1.6** *As seguintes condições, em um conjunto quaseordenado $(A, \leq)$, são equivalentes:*

*(i)* $(A, \leq)$ *satisfaz a propriedade de base finita;*

*(ii)* *Se $B$ é um subconjunto de $A$, existe um conjunto finito $B_0$ tal que $B_0 \subset B \subset \overline{B_0}$;*

*(iii)* *Toda sequência infinita $\{a_i\}_{i\geq 0}$ de elementos de $A$ possui uma subsequência*

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \leq a_{i_k} \leq \ldots,$$

*com os $a_{i_j}$ todos distintos.*

**Demonstração:** $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Seja $B$ um subconjunto de $A$ e tome $\overline{B}$ o fecho de $B$. Se $B$ for finito, o resultado segue trivialmente, tomando $B_0 = B$. Caso seja infinito, por $A$ satisfazer a propriedade de base finita, temos que existe $B_0$ um conjunto finito tal que $\overline{B_0} = \overline{B}$. Suponha que $B_0 \not\subseteq B$, então existem $a \in B_0 \setminus B$ e $b \in B$ tal que $b \leq a$. Neste caso, tome $B_0' = (B_0 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$. Nestas condições, $\overline{B_0'} = \overline{B}$. Repetindo esse processo um número finito de etapas podemos considerar

$$B_0 \subseteq B \subseteq \overline{B} = \overline{B_0}.$$

A reciproca é trivial pela Observação 4.1.4.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que não valha $(iii)$. Por valer a reflexividade na relação "$\leq$", temos que para cada subsequência

$$\xi\colon a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \leq a_{i_k} \leq \ldots \tag{4.1}$$

de elementos de $B = \{a_i\}_{i\geq 0}$ existe $t > 0$ tal que $a_{i_t} = a_{i_{t+r}}$, com $r > 0$. Neste caso, dizemos que a sequência $\xi$ tem comprimento finito de tamanho $t$. Para cada tal subsequência de $B$, podemos observar que $a_{i_1}$ tem a propriedade que para todo $a \in B$ tal que $a \leq a_{i_1}$ tem-se $a_{i_1} = a$. Como $B$ é infinito e o tamanho das subsequências é finito, temos que qualquer conjunto $B_0 = \{b \in B \mid a \leq b \Rightarrow a = b\}$ definido de modo que $\overline{B}_0 = \overline{B}$, está em correspondência biunívoca com a quantidade de subsequências da forma (4.1). É claro que a quantidade de tais subsequências é infinita, concluindo que não vale o item $(ii)$. E o resultado segue por contra-positiva.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Suponha que exista um subconjunto $B$ de $A$ de modo que todo subconjunto $B_0$ de $A$ que satisfaça

$$B_0 \subset B \subset \overline{B_0} \tag{4.2}$$

seja infinito. Em outras palavras, que não valha $(ii)$ para tal conjunto. Tome $a_1$ elemento de $B$. Então, $B \not\subseteq \overline{\{a_1\}}$. Neste caso, existe $a_2 \in B \setminus \overline{\{a_1\}}$. Novamente, como $B \not\subseteq \overline{\{a_1, a_2\}}$, existe $a_3 \in B \setminus \overline{\{a_1, a_2\}}$. Continuando este processo, e lembrando que todo subconjunto $B_0$ satisfazendo (4.2) é infinito, podemos construir um subconjunto $S_{i+1} = \{a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}\}$ de modo que $a_{i+1} \in B \setminus \overline{S_i}$. Concluímos, com tal construção, que a sequência infinita $S_\infty = \{a_i\}_{i>0}$ não satisfaz a propriedade $(iii)$. E portanto, temos o resultado por contra-positiva novamente. ■

Usando a condição $(iii)$ do teorema anterior temos o seguinte corolário.

**Corolário 4.1.7** *Se $(A_1, \leq_1)$, $\ldots$, $(A_k, \leq_k)$ tem a propriedade de base finita então $(A_1 \times \cdots \times A_k, \leq)$ tem a propriedade de base finita, onde $(a_1, \ldots, a_k) \leq (b_1, \ldots, b_k)$ se e somente se $a_i \leq_i b_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

**Exemplo 4.1.8** *O conjunto $(\mathbb{N}^k, \preceq)$ satisfaz a propriedade da base finita, onde a quase-ordem é dada da seguinte maneira: $(a_1, \ldots, a_k) \preceq (b_1, \ldots, b_k)$ se, e somente se, $a_1 \leq b_1$, $\ldots$, $a_k \leq b_k$ (aqui é a relação de "menor ou igual"). Note que apesar de $(\mathbb{N}, \leq)$ ser um conjunto totalmente ordenado, não podemos afirmar o mesmo para $(\mathbb{N}^k, \preceq)$, pois por exemplo, as sequências $(1, 0, \ldots, 0)$ e $(0, 1, \ldots, 0)$ não são comparáveis.*

**Exemplo 4.1.9** *Seja $m \in \mathbb{N}$. Defina a relação $\leq_m$ em $\mathbb{N}$ como segue:*

$$a_1 \leq_m a_2 \text{ se, e somente se, } a_1 \leq a_2 \text{ e } a_2 - a_1 \equiv 0 \pmod{m}.$$

$(\mathbb{N}, \leq_m)$ *satisfaz a propriedade da base finita. De fato, seja* $\{a_i\}_{i\geq 0}$ *uma sequência de elementos de* $\mathbb{N}$*. Podemos supor, sem perda da generalidade, que essa sequência é não decrescente, ou seja,* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$*, uma vez que o conjunto é totalmente ordenado com relação a ordem "*$\leq$*". Se para cada* $a_i$ *associamos um* $r_i$*, em que* $r_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ *é o resto da divisão de* $a_i$ *por* $m$*, é possível determinar* $r_i$ *de modo que exista uma subsequência* $\{a_{i_j}\}_{j\geq 0}$ *tal que* $r_i \equiv a_{i_1} \equiv a_{i_2} \equiv \cdots \pmod{m}$*, e isso conclui a prova do exemplo.*

## 4.2 Mais ferramentas: Um retorno a teoria de tabelas Standard

Estamos interessados em provar que a variedade das álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas que satisfaz as Identidades (3.12) e (3.14) possui a propriedade de Specht. Como citamos tais polinômios no Capítulo 3, achamos justo lembrar aqui que tais identidades são:

(i) $(y, x_1, x_2)$

(ii) $g_m = \sum(-1)^\sigma z_{\sigma(1)}(z_{m+2}z_{\sigma(2)}) \cdots (z_{2m+1}z_{\sigma(m+1)}), \sigma \in S_{m+1},$ para algum $m \in \mathbb{N}$,

respectivamente. Como consequência do Teorema 3.3.5, obtemos que (3.12) e (3.14) formam uma base para o ideal das identidades 2-graduadas da álgebra de Jordan $B_m$, com a graduação escalar.

Nesta seção faremos uso novamente das técnicas da Teoria de Invariantes (ver Seção 1.7, do Capítulo 1) e da teoria da propriedade da base finita (desenvolvida por Higman em [15] e dada na seção anterior) para determinar que o $T_2$-ideal das identidades graduadas de $B_m$, com a graduação escalar, satisfaz a propriedade de Specht. Para nosso texto ficar mais "flúido", iremos dedicar um pouco mais de atenção à teoria das tabelas standard.

Seja $A$ uma tabela standard da forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k_1 & \tau_1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k_2 & \tau_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k_s & \tau_s & \dots \\ \tau_{s+1} & & & & & & \end{pmatrix},$$

onde $\tau_i > k_i + 1$, $i = 1, \dots, s$ e $\tau_{s+1} > 1$. Como $A$ é Standard, temos

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s. \tag{4.3}$$

Tal afirmação é válida, uma vez que se $k_1 < k_2$, e por $\tau_1 > k_1 + 1$, então temos elementos $p_{ij} > q_{ij}$, $p_{ij}$ na primeira linha e $q_{ij}$ na segunda. O que contradiz o fato da tabela ser Standard. E o resultado segue, uma vez que a quantidade de linhas é um número finito.

**Observação 4.2.1** *É claro que $k_1 > 1$, uma vez que a tabela $A$ é standard e com isso o número 1 aparece, pelo menos, na primeira linha.*

Seja $h_i(A)$ o número de vezes que o número $i - 1$ aparece na sequência (4.3), para $i = 2, \dots, n$. Por exemplo, pela observação anterior, começaremos a pensar em $h_2(A)$, que é o número de linhas que começam com $1\tau$, com $\tau > 2$. Já $h_3(A)$ é o número de linhas que começam com $12\tau$, com $\tau > 3$, etc. Considere a tabela obtida de $A$ excluindo o 1 em cada uma das linhas $h_2(A)$ de $A$ e substituindo-o por 2. Depois exclui o 1 em cada uma das linhas $h_3(A)$ e o substitui por um 3 e assim por diante. Se reordenarmos os elementos em cada linha, a tabela resultante, que é denotada por $F(A)$, é standard.

**Notação 4.2.2** *Seja*

$$T = \left(\begin{array}{cccc|cccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m_1} & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m_1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m_2} & q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{km_k} & q_{k1} & q_{k2} & \cdots & q_{km_k} \end{array}\right)$$

*uma tabela dupla. Podemos associa-lá a uma tabela "simples" da forma*

$$T' = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m_1} \\ q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m_1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m_2} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{km_k} \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots & q_{km_k} \end{pmatrix}.$$

*Denotamos por $F(T)$ a tabela dupla para a qual a tabela "simples" correspondente é $F(T')$.*

Sejam $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ escalares arbitrários em $K$. Lembrando do Polinômio (1.5), substituiremos na combinação linear

$$p = \sum c_i \tilde{\varphi}(T_i),$$

onde as $T_i's$ são tabelas duplas standard distintas, a variável $z_1$ por $z_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i z_i$. O polinômio resultante em $J(B_m) = SJ(X)/T_2(B_m)$ é:

$$\sum \lambda_2^{h_2} \lambda_3^{h_3} \cdots \lambda_n^{h_n} P_{h_2 \ldots h_n}. \tag{4.4}$$

Aqui nós consideramos a ordem lexicográfica nas $n$-uplas $(h_2, \ldots, h_n)$.

**Observação 4.2.3** *O polinômio em (4.4) correspondente ao máximo $(h_2, \ldots, h_n)$ é*

$$\overline{p} = \sum_j \epsilon_j c'_j \tilde{\varphi}(F(T_j))$$

*onde $\epsilon_j = \pm 1$, e a soma é dada pelas tabelas duplas standard $T_j$ na qual a $n$-upla $(h_2(T'_j), h_3(T'_j), \ldots, h_n(T'_j))$ é máxima, ver Polinômio (1.5) junto com a Observação 1.7.2. Além disso, a tabela dupla standard $F(T_j)$ são duas a duas distintas.*

Antes de provarmos o próximo resultado, façamos algumas observações que serão úteis na demonstração. Aqui também será útil relembrar as notações estabelecidas no Lema 3.3.2, isto é, consideraremos a álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $M = M^{(0)} \oplus M^{(1)}$, onde $M^{(0)}$ é subálgebra gerada por todos os produtos $(z_{i_1} z_{j_1}) \cdots (z_{i_k} z_{j_k})$ enquanto o espaço vetorial $M^{(1)}$ é gerado por todos os monômios da forma $z_{i_0}(z_{i_1} z_{j_1}) \cdots (z_{i_k} z_{j_k})$.

**Observação 4.2.4** *Sejam $h$, $h'$ polinômios em $M^{(1)}$ que não dependem de $z_1$. Como a forma bilinear na definição de $B_m$ é não degenerada, a igualdade $hz_1 = h'z_1$ implica que $h = h'$.*

**Observação 4.2.5** *Se $h(z_1, \ldots, z_{m+1}) \in M^{(0)}$ é um polinômio de grau 1 em $z_j$ então existe $h' \in M^{(1)}$ tal que $h = h'z_j$. Para provar essa afirmação, note que, renomeando as variáveis, podemos assumir que $j = 1$. Escrevemos $h$ como uma combinação linear de uma tabela dupla standard. A natureza standard da tabela (esse fato pode ser facilmente contornado se considerarmos a Identidade (3.12)) implica que a entrada mais à esquerda na primeira linha é 1 e isso comprova a afirmação.*

Para dar continuidade ao nosso estudo façamos o uso da seguinte notação:

**Notação 4.2.6** *Denotamos por $T_n$ e $T_n^0$ os polinômios associados à tabela dada por $(12 \ldots n \mid 12 \ldots n)$ e a 0-tabela $(02 \ldots n \mid 12 \ldots n)$, respectivamente.*

**Observação 4.2.7** *A notação anterior foi escolhida para deixar o texto compatível com o artigo [8].*

**Proposição 4.2.8** *Seja $g(z_1, \ldots, z_m)$ um polinômio multihomogêneo de $J(B_m)$ que para quaisquer escalares $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ é invariante sob a substituição do elemento $z_1$ por $z_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i z_i$ (invariante no seguinte sentido: quando substituímos o $z_1$ pela expressão acima, ainda obtemos $g(z_1, \ldots, z_m)$). Então, existe um polinômio $h(z_2, \ldots, z_m)$ que satisfaz uma das seguintes igualdades:*

*(i)* $g(z_1, \ldots, z_m) = (T_m)^k h(z_2, \ldots, z_m)$;

*(ii)* $g(z_1, \ldots, z_m) = (T_m)^{k'} T_m^0 h(z_2, \ldots, z_m)$,

*onde $k, k' \geq 0$. Além disso, se $g \in J(B_m)_0$, então temos a Igualdade (i).*

**Demonstração:** Primeiro, consideramos o caso em que $g \in J(B_m)_0$. Segue da Proposição 3.3.3 que podemos escrever

$$g = \sum c_i \tilde{\varphi}(T_i), c_i \neq 0 \tag{4.5}$$

como uma combinação linear de polinômios associados a tabelas duplas standard duas a duas distintas. Pela invariância de $g$ e pela Observação 4.2.3, obteremos que, para cada $T_i$ em (4.5), $h_2(T_i') = h_3(T_i') = \ldots = h_n(T_i') = 0$. Como as variáveis que aparecem em g são $z_1, \ldots, z_m$, isto implica que a entrada 1 aparece apenas nas linhas de $T_i$ que são iguais a $(12\ldots m \mid 12\ldots m)$, já que cada $h_i(T_i')$ é zero e cada $T_i$ é duplamente stardard. Se $s_i$ é o número de tais linhas, temos que $2s_i = deg_{z_1}g$. Denote por $k$ os valores $s_i$, para cada $i$. Para cada $T_i$ que aparece em (4.5), temos que $\tilde{\varphi}(T_i) = (T_m)^k\tilde{\varphi}(\hat{T}_i)$, onde $\hat{T}_i$ é a tabela obtida de $T_i$ deletando as linhas em que aparece 1 na entrada. Por $g$ ser multihomogêneo, temos a decomposição de $g$ dado em $(i)$.

Assumimos agora que $g \in J(B_m)_1$ e escrevamos $gz_{m+1}$ como em (4.5). Note que $h_2(T_i') = h_3(T_i') = \ldots = h_m(T_i') = 0$ para cada $T_i$ aparecendo em $gz_{m+1}$. Consequentemente, a entrada 1 aparece apenas nas linhas de $T_i$ iguais a $(12\ldots m \mid 12\ldots m)$ ou $(12\ldots m \mid 23\ldots m+1)$. Esta última linha só aparece no polinômio, no máximo uma vez, se $deg_{z_1}g$ é ímpar e não aparece, caso contrário. Seja $s_i$ o número de linhas em $T_i$ que são iguais a $(12\ldots m \mid 12\ldots m)$. Se $(12\ldots m \mid 23\ldots m+1)$ não aparece em $T_i$, temos que $2s_i = deg_{z_1}g$. Portanto, neste caso para cada $T_i$ que aparece em $gz_{m+1}$, temos $\tilde{\varphi}(T_i) = (T_m)^k\tilde{\varphi}(\hat{T}_i)$, onde $k = deg_{z_1}g/2$. Consequentemente, $gz_{m+1} = (T_m)^k h(z_2, \ldots, z_{m+1})$ e segue das Observações 4.2.4 e 4.2.5 que $g$ é como em $(i)$. Se $(12\ldots m \mid 23\ldots m+1)$ aparece em alguma $T_i$, temos $2k_i + 1 = deg_{z_1}g$ e assim, tal linha deve aparecer em cada $T_i$, pois $g$ é multihomogêneo. O polinômio associado à tabela $(12\ldots m \mid 23\ldots m+1)$ é $\pm T_m^0 z_{m+1}$. Neste caso, $gz_{m+1} = ((T_m)^k T_m^0 h(z_2, \ldots, z_m)z_{m+1})$, onde $k = (deg_{z_1}g - 1)/2$. Desta última igualdade e da Observação 4.2.4, concluímos que g é como em $(ii)$. ∎

## 4.3 Resultado principal: A propriedade de Specht

Denotamos por $M_m$ a subálgebra de $J(B_m) = SJ(X)/T_2(B_m)$ gerada por $m$ variáveis de grau 1, ou seja, gerado por $z_1, \ldots, z_m$. Seja $W$ o subespaço de $J(B_m)$ gerado por $z_1, \ldots, z_m$ e $GL_m$ o grupo de transformações lineares invertíveis de $W$. A ação canônica de $GL_m$ em $M_m$ transforma esta subálgebra em $GL_m$-módulo.

Utilizaremos o próximo lema e a Proposição 4.2.8 para determinar geradores de submódulos irredutíveis de $M_m$.

**Lema 4.3.1** *Seja $g(z_1,\ldots,z_m)$ um polinômio multihomogêneo de $M_m$. O $GL_m$-módulo gerado por $g(z_1,\ldots,z_m)$ é um módulo irredutível se, e somente se, para quaisquer escalares $\lambda_{ij}$, $1 \le i < j \le m$, é invariante sob a substituição de $z_j$ por*

$$\lambda_{1_j} z_1 + \cdots + \lambda_{j-1_j} z_{j-1} + z_j, j = 1,\ldots,m. \tag{4.6}$$

**Demonstração:** Ver [10, Theorem 2.2.11 (i) e (iv), pág. 30]. ■

A seguinte notação será utilizada.

**Notação 4.3.2** *Dado um polinômio $g(z_1,\ldots,z_m)$ em $M_m$ denotamos por $\hat{g}(z_1,\ldots,z_m)$ o polinômio $g(z_m,\ldots,z_1)$, isto é, aquele que surge renomeando as variáveis de $g$ de forma reversa. Denotamos o polinômio correspondente à tabela $(012\ldots m{-}1 \mid 12\ldots m)$ por $S_m$. Deste modo, é fácil observar que $\hat{T_0^m} = \pm S_m$, onde $T_0^m$ é o polinômio obtido na Notação 4.2.6.*

Note que o polinômio $g(z_1,\ldots,z_m)$ em $M_m$ é invariante sob a substituição de $z_m$ por $\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_{m-1} z_{m-1} + z_m$, para qualquer $\lambda_i \in K$, se e somente se o polinômio $\hat{g}(z_1,\ldots,z_m) = g(z_m,\ldots,z_1)$ é invariante sob a substituição de $z_1$ por

$$z_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i z_i, \tag{4.7}$$

para quaisquer $\lambda_i \in K$.

**Corolário 4.3.3** *O polinômio $g(z_1,\ldots,z_m) \in M_m$ gera um $GL_m$-módulo irredutível de $M_m$ se, e somente se, ele é, a menos de multiplicação por escalar, um dos polinômios:*

$$(S_m)^{\delta_m} \cdots (S_1)^{\delta_1} (T_m)^{k_m} \cdots (T_1)^{k_1}, \tag{4.8}$$

*onde $k_1,\ldots,k_m \ge 0$, $\delta_\ell \in \{0,1\}$ e $\delta_\ell \neq 0$ para no máximo um índice $\ell \in \{1,\ldots,m\}$.*

**Demonstração:** Provaremos por indução sobre $m$.

Para $m = 1$ segue de imediato. Agora, seja $g(z_1,\ldots,z_m) \in M_m$ um gerador de um submódulo irredutível. Segue do Lema 4.3.1 e do comentário anterior que $\hat{g}$ é invariante sob a substituição (4.7). Segue da Proposição 4.2.8 que temos duas possibilidades: $\hat{g} = (T_m)^k h(z_2,\ldots,z_m)$ ou $\hat{g} = (T_m)^{k'} T_m^0 h(z_2,\ldots,z_m)$. No primeiro caso, obtemos $g = (T_m)^k h'(z_1,\ldots,z_{m-1})$. Note que, $h'$ é invariante sob a substituição em (4.6), o que implica no resultado. No segundo caso, $g = \pm(T_m)^{k'} S_m h'(z_1, \ldots, z_{m-1})$, com $h'$ invariante sob a substituição em (4.6). Note que isso ocorre apenas se $g \in J(B_m)_1$, e neste caso, $h'$ está em $J(B_m)_0$. Caso tivéssemos mais de um índice $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ com $\delta_\ell \neq 0$ teríamos, por hipótese de indução, apenas mais um e este estaria em $h'$, implicando que $h'$ estaria em $J(B_m)_1$, contradizendo o último fato. Aplicando a hipótese de indução sobre $h'$ temos que, a menos de multiplicação por escalar, $h'$ é da forma $(T_{m-1})^{k_{m-1}} \cdots (T_1)^{k_1}$. ■

**Exemplo 4.3.4** *Seja $B_2$ a álgebra das matrizes simétricas $2\times 2$ sobre $K$ com o produto de Jordan $a \circ b = \frac{(ab+ba)}{2}$. Sabemos que $B_2$ é uma álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica sobre um espaço vetorial de dimensão 2. Neste caso, pelo corolário acima, $g(z_1, z_2) \in M_2$ gera um $GL_2$-submódulo irredutível de $M_2$ se, e somente se, $g(z_1, z_2)$ é a menos de um múltiplo escalar, um dos polinômios:*

- *Se $g \in J(B_2)_0$, temos*

$$(T_1)^{k_1} = (z_1^2)^{k_1}$$
$$(T_2)^{k_2} = (z_1^2 z_2^2 - (z_1 z_2)^2)^{k_2}$$

*e portanto temos a menos de um múltiplo escalar:*

$$(z_1^2 z_2^2 - (z_1 z_2)^2)^{k_2} z_1^{2k_1};$$

- *Se $g \in J(B_2)_1$, temos*

$$(T_1)^{k_1} = (z_1^2)^{k_1}$$
$$(S_1)^{\delta_1} = (z_1)^{\delta_1}$$
$$(S_2)^{\delta_2} = (\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} z_{\sigma(1)}(z_1 z_{\sigma(2)}))^{\delta_2} = (z_1(z_1 z_2) - z_2(z_1 z_1))^{\delta_2}$$
$$(T_2)^{k_2} = (z_1^2 z_2^2 - (z_1 z_2)^2)^{k_2}$$

*e portanto, temos a menos de um múltiplo escalar:*

$$(z_1^2 z_2^2 - (z_1 z_2)^2)^{k_2} z_1^{2k_1+1} \ ou \ (z_1^2 z_2^2 - (z_1 z_2)^2)^{k_2} (\overline{z}_1 z_1 \overline{z}_2) z_1^{2k_1},$$

*onde $\overline{z}_1 = (S_2)^{\delta_2}$ e $\overline{z}_2 = (S_1)^{\delta_1}$.*

Agora, para provarmos que $B_m$ tem a propriedade de Specht, precisamos do seguinte lema:

**Lema 4.3.5** *Sejam $\tilde{T}_k$, $\tilde{S}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ polinômios em $SJ(X)$ tais que a imagem de $\tilde{T}_k$ e $\tilde{S}_k$, sob o homomorfismo canônico, são os polinômios $T_k$ e $S_k$ em $J(B_m)$, respectivamente. O conjunto de polinômios*

$$y_1^{k_0}(\tilde{S_m})^{\delta_m} \cdots (\tilde{S_1})^{\delta_1}(\tilde{T_m})^{k_m} \cdots (\tilde{T_1})^{k_1}, \tag{4.9}$$

*onde $k_0, \ldots, k_m \geq 0$, $\delta_l \in \{0, 1\}$ e $\delta_\ell \neq 0$ para no máximo um índice $\ell \in \{1, \ldots, m\}$, tem a seguinte propriedade: dado qualquer subconjunto $S$ existe um subconjunto finito $\hat{S} \subseteq S$ tal que qualquer polinômio em $S$ é a consequência de um polinômio em $\hat{S} \cup T_2(B_m)$.*

**Demonstração:** Para provar esse lema, definimos em $\mathbb{N}^{2m+1}$ a ordem parcial "$\leq$" da seguinte forma: $(\delta_1, \ldots, \delta_m, k_0, \ldots, k_m) \leq (\delta'_1, \ldots, \delta'_m, k'_0, \ldots, k'_m)$ se $\delta_i \leq \delta'_i$, $k_j \leq k'_j$ para todo $i, j$, compatível. A desigualdade anterior implicará que

$$y_1^{k'_0}(S_m)^{\delta'_m} \cdots (S_1)^{\delta'_1}(T_m)^{k'_m} \cdots (T_1)^{k'_1}$$

é obtida de $y_1^{k_0}(S_m)^{\delta_m} \cdots (S_1)^{\delta_1}(T_m)^{k_m} \cdots (T_1)^{k_1}$ pela multiplicação por um elemento adequado de $J(B_m)$. Pelo Corolário 4.1.7, o conjunto $\mathbb{N}^{2m+1}$, com a ordem parcial descrita acima, tem a propriedade de base finita. Assim, para cada subconjunto $S$ de tais polinômios, é possível obter um $\hat{S}_0$ em $SJ(X)$ com $\overline{\hat{S}_0} \subseteq \bar{S}$ em $J(B_m)$, onde $\overline{\hat{S}_0}$ e $\bar{S}$ é a imagem de $\hat{S}_0$ e $S$, respectivamente, pelo homomorfismo canônico, tal que qualquer elemento de $S$ é consequência de elementos de $\hat{S}_0 \cup T_2(B_m)$, o que implica o resultado.
■

**Definição 4.3.6** *Dizemos que dois conjuntos de polinômios $S$ e $S'$ em $SJ(X)$ são equivalentes se $S \cup T_2(B_m)$ e $S' \cup T_2(B_m)$ geram o mesmo $T_2$-ideal.*

**Teorema 4.3.7** *O ideal $T_2(B_m)$ das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $B_m = K \oplus V$ tem a propriedade de Specht.*

**Demonstração:** Seja $I$ um $T_2$-ideal contendo $T_2(B_m)$. Devemos provar que $I$ é finitamente gerado.

**Afirmação:** Para cada polinômio multilinear $g$ em $I$ existe um conjunto de polinômios $S_g \subseteq I$ de polinômios da forma (4.9) tais que $g$ é consequência de $S_g$, módulo $T_2(B_m)$.

De fato, seja $g(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_n)$ um elemento multilinear em $I$. Trabalhamos na álgebra relativamente livre $J(B_m)$ e denotamos por $\varphi\colon SJ(X) \to J(B_m)$ o homomorfismo canônico. O grupo simétrico $\mathcal{S}_n$ atua nas variáveis ímpares de $\varphi(g)$. Considere $M$ o $\mathcal{S}_n$-módulo gerado por $\varphi(g)$. Pelo Teorema de Maschke, podemos decompor este módulo em uma soma direta de $\mathcal{S}_n$-módulos irredutíveis, digamos

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_q.$$

Aqui, consideraremos, para cada $i = 1, \ldots, q$, o elemento $p_i$ como sendo um gerador do $\mathcal{S}_n$-módulo $M_i$. Daí, o $T_2$-ideal gerado por um conjunto de $q$ polinômios $\{P_1, \ldots, P_q\}$, tal que $\varphi(P_i) = p_i$, junto com $T_2(B_m)$, gera o $T_2$-ideal que contém o polinômio $g$. Como $M_i$ é submódulo de $M$ e $I$ é um $T_2$-ideal, temos que cada $P_i$ está em $I$. Resta provar que cada $P_i$ é consequência de um conjunto de polinômios da forma (4.9), módulo $T_2(B_m)$.

Pela Identidade (3.12) podemos considerar $p_i = y_1 \cdots y_k p'_i(z_1, \ldots, z_n)$ e note que o $\mathcal{S}_n$-módulo gerado por $p'_i$ é isomorfo a $M_i$, como $\mathcal{S}_n$-módulo. Seja $\lambda_i \vdash n$ a partição de $n$ correspondente ao módulo irredutível $M_i$, para cada $i$, ver Teorema 1.6.25. Assim, podemos considerar o $GL_m$-módulo gerado por $p'_i$, denotado por $N_i$. Como o espaço $V$ possui dimensão m, concluímos que $\lambda_{m+1} = 0$, pelo item $(i)$ do Teorema 1.6.29. O Teorema 1.6.28 $(i)$, garante que $N_i$ é soma direta de $GL_m$-módulos irredutíveis e denotemos por $q_i^1, \ldots, q_i^r$ os geradores de suas componentes irredutíveis. O Teorema 1.6.33 $(i)$ informa que cada gerador irredutível é um polinômio simétrico em $m$ conjuntos disjuntos de variáveis e podemos identificar as variáveis em cada conjunto para obter um polinômio multihomogêneo $q_i(y_1, \ldots, y_m)$ cuja completa linearização é $p'_i$.

De mão destes comentários, o Corolário 4.3.3 implica que cada $q_i^j$ é, a menos de escalar, um polinômio da forma (4.8) e, portanto, $y_1^k q_i^j$ é a imagem sob o homomorfismo canônico de um polinômio $Q_i^j$ da forma (4.9). A linearização do polinômio $y_1^k q_i^j$ é, a menos de multiplicação por escalar, $p_i$. Neste caso, para cada $i = 1, \ldots, q$, o polinômio $P_i$ é consequência de polinômios no conjunto $S_i = \{Q_i^1, \ldots, Q_i^r\} \subseteq I$. Portanto, podemos considerar $S_g = S_1 \cup \cdots \cup S_q$. Nestas condições, é claro que $g$ é consequência de elementos de $S_g$ e $S_g \subseteq I$.

Consideremos $S = \cup S_g$, onde a união está sobre todos os polinômios multilineares $g$ em $I$. Como o corpo é de característica zero, segue da afirmação que $I$ é equivalente a $S \cup T_2(B_m)$. Portanto, o lema anterior, junto com o Corolário 3.3.6 implica o nosso resultado. ■

# Capítulo 5

# Identidades polinomiais para álgebras de Jordan de forma bilinear degenerada

No Capítulo 2, estudamos as classificações das graduações em álgebras de Jordan de uma forma bilinear. Em particular, o Teorema 2.3.1 classifica tais graduações para o caso da forma ser simétrica degenerada.

Denotaremos por $J_{n,k} = K \oplus V = B_k \oplus D_{n-k}$ a álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica degenerada $b$ de posto $k$ sobre um corpo $K$, onde $B_k$ é a álgebra de Jordan em que a restrição da forma $b$ ao subespaço vetorial $V'$ (de dimensão $n-1$) é não degenerada e $D_{n-k}$ é o espaço vetorial gerado pelos elementos degenerados de uma base de $V$. Note que

$$dim_K J_{n,k} = dim_K B_k + dim_K D_{n-k} = n + 1.$$

Neste capítulo, sobre um corpo de característica zero, exibiremos identidades polinomiais (no caso ordinário) para tais álgebras no caso em que $k = n - 1$. Tais resultados podem ser encontrados no artigo [26] de autoria de Fabrizio Martino.

## 5.1 Identidades polinomiais para $J_{n,n-1}$

Seja $SJ(X)$ a álgebra livre especial de Jordan livremente gerada pelo conjunto $X$ sobre $K$. É claro que $SJ(X)$ é a subálgebra de $K\langle X\rangle^+$ (a álgebra associativa livre gerada por $X$ com a multiplicação de Jordan $a \circ b = \frac{ab+ba}{2}$). Afim de continuarmos nossos estudos, e com objetivo de deixar o texto "autocontido", iremos enunciar resultados importantes e clássicos na teoria das identidades das álgebras de Jordan $B_k$ e $B$, sem entrar em detalhes de suas demonstrações.

Em [33], Vasilovsky informa que A.V.II'tyakov, em 1985, provou que a variedade de $B_k$ satisfaz a propriedade de Specht, no sentido ordinário. Considerando a álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica degenerada de posto $n-k$, denotado por $J_{n,k} = B_k \oplus D_{n-k}$, sobre um corpo de característica zero. Caso $k < \infty$, temos que $T(J_{n,k})$ está contido em $T(B_k)$, ou seja, faz sentido se perguntar se a variedade gerada por $J_{n,k}$ também possui a propriedade de Specht, no sentido ordinário.

Consideramos de agora em diante, por economia de notação, $J_{n,n-1} = J_n$. Vamos mostrar que a álgebra de Jordan $J_n = K \oplus V$ de uma forma degenerada $b$ de posto 1 é PI-equivalente à álgebra $B_{n-1}$ munida da forma $b$ restrita ao espaço vetorial não degenerado. E para alcançar esse objetivo, precisamos primeiramente conhecer os geradores do $T$-ideal das identidades de $B_k$, obtidos por Vasilovsky em [33]. Ele provou os seguintes resultados:

**Teorema 5.1.1** *[33, Theorem 0.1] Seja $B = K \oplus V$, com $dim_K V = \infty$, a álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica $b$. As identidades*

$$([x,y]^2, z, t) \equiv 0 \tag{5.1}$$

$$\sum_{\sigma\in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x, x_{\sigma(3)}), x) \equiv 0 \tag{5.2}$$

*formam uma base para as identidades polinomiais da variedade $var(B)$, das álgebras de Jordan sobre um corpo infinito, onde $char K \neq 2, 3, 5, 7$.*

**Teorema 5.1.2** *[33, Theorem 0.2] Seja $B_k = K \oplus V$, com $dim_K V = k < \infty$, a álgebra* *de Jordan de uma forma bilinear simétrica b. As identidades*

$$([x,y]^2, z, t) \equiv 0 \tag{5.3}$$

$$\sum_{\sigma\in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x, x_{\sigma(3)}), x) \equiv 0 \tag{5.4}$$

$$\sum_{\sigma\in S_{k+1}} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, \ldots, y_k, x_{\sigma(k+1)}) \equiv 0 \tag{5.5}$$

$$\sum_{\sigma\in S_{k+1}} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, \ldots, y_{k-1}, x_{\sigma(k)})(y_k, x_{\sigma(k+1)}, y_{k+1}) \equiv 0 \quad , \tag{5.6}$$

*formam uma base para as identidades polinomiais da variedade* $var(B_k)$, $k < \infty$, *das álgebras de Jordan sobre um corpo infinito sobre, onde* $char K \neq 2, 3, 5, 7$.

O polinômio em (5.3) é escrito com a multiplicação associativa (em $K\langle X\rangle$), mas podemos escrevê-lo em termos do produto de Jordan, já que $[x,y]^2$ (aqui o comutador não é com o produto de Jordan) satisfaz a hipótese do Teorema 1.3.8.

Vasilovsky em [33], encaminha uma linearização de $[x,y]^2$. Koshlukov e Martino, reescreveram o mesmo usando a multiplicação de Jordan, obtendo:

$$(x_1x_2, x_3, x_4) - x_1(x_2, x_3, x_4) - x_2(x_1, x_3, x_4).$$

Aqui a multiplicação é a de Jordan. Daí, (5.3) se torna

$$((x_1x_2, x_3, x_4) - x_1(x_2, x_3, x_4) - x_2(x_1, x_3, x_4), z, t) \tag{5.7}$$

um polinômio em $SJ(X)$.

Podemos supor que $K$ é algebricamente fechado, considerando $\overline{K}$, o fecho algébrico de $K$ (ver Exemplo 1.5.8), e observando que os polinômios (5.3)-(5.6) tem coeficientes em $K$. Fixemos uma base ortonormal, no sentido que $b(e_i, e_i) = 1$ para todo $e_i$ elemento de alguma base adequada de $V$ com respeito a $b$, digamos $\beta = \{e_1, \ldots, e_{n-1}, d\}$. Esta base juntamente com a unidade 1, forma uma base para $J_n$. Utilizando o produto da álgebra de Jordan, podemos considerar $e_i \circ e_j = \delta_{ij}, d \circ e_i = d^2 = 0$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$, onde $\delta_{ij}$ é o delta de Kronecker. Além disso, a notação acima implica que $B_{n-1} = span_K\{1, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ e $D_1 = span_K\{d\}$.

O próximo lema relaciona as identidades de $J_n$ com as de $B_{n-1}$. Aqui, denotamos por $\overline{x}_i$ a avaliação da variável $x_i$ em um elemento da álgebra.

**Lema 5.1.3** *Seja $J_n = B_{n-1} \oplus D_1$ a decomposição de $J_n$ em soma direta da parte não-degenerada da álgebra com a sua parte degenerada. Um polinômio $f \in SJ(X)$ é uma identidade polinomial para $J_n$, isto é, $f \in T(J_n)$, se e somente se*

$$f \in T(B_{n-1}) \tag{5.8}$$

*e*

$$\sum_{i=1}^{degf} f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_{degf}) \equiv 0. \tag{5.9}$$

*onde os $y_{i's}$ são avaliados em $B_{n-1}$, enquanto os $z_{i's}$ são avaliados em $D_1$.*

**Demonstração:** Como $charK = 0$, basta considerarmos os polinômios multilineares. Por $B_{n-1}$ ser uma subálgebra de $J_n$, segue que $T(J_n) \subseteq T(B_{n-1})$, e consequentemente, a condição (5.8) é satisfeita. Provemos agora a condição (5.9). Seja $f \in P_r$, isto é, $f = f(x_1, \dots, x_r)$ é multilinear. Como cada $\overline{x}_i \in J_n$ podemos então decompor como soma de elementos da forma $\overline{y}_i + \overline{z}_i$, onde $\overline{y}_i \in B_{n-1}$ e $\overline{z}_i \in D_1$. Por $f$ ser multilinear, temos que

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_r) &= f(\overline{y}_1 + \overline{z}_1, \dots, \overline{y}_r + \overline{z}_r) \\ &= f(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_r) + f(\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_r) + \sum_{\overline{\xi}_i \in \{\overline{y}_i, \overline{z}_i\}} f(\overline{\xi}_1, \dots, \overline{\xi}_r). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Como $D_1$ é um ideal de $J_n$ e $D_1^2 = 0$ (já que $D_1 = span_K\{d\}$), então se um monômio de $f$ conter mais de um $z$, este se anula sob qualquer substituição dos elementos de $B_{n-1}$ e $D_1$. Isto implica que (5.10) se torna:

$$f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_r) = f(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_r) + \sum_{i=0}^{r} f(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_{i-1}, \overline{z}_i, \overline{y}_{i+1}, \dots, \overline{y}_r).$$

No segundo membro da igualdade anterior, temos que a primeira parte da equação acima leva valores apenas em $B_{n-1}$ enquanto a segunda parte leva valores em $D_1$, pois contém uma variável $z$ em cada monômio. Logo, essas somas são linearmente independente, e daí, $f$ é uma identidade polinomial de $J_n$ se, e somente se: $f(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_r) = 0$ e $\sum_{i=0}^{r} f(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_{i-1}, \overline{z}_i, \overline{y}_{i+1}, \dots, \overline{y}_r) = 0$. Assim estas duas condições são equivalentes a (5.8) e (5.9), e portanto, o resultado segue. ∎

O lema anterior caracteriza uma condição para que as identidades de $T(B_{n-1})$ estejam em $T(J_n)$. Assim, o nosso objetivo é verificar que os polinômios (5.3)-(5.6) satisfazem a Condição (5.9) do lema. Linearizando os polinômios (5.3) e (5.4), é suficiente provar o resultado principal deste capítulo, avaliando os polinômios multilineares obtidos dos polinômios (5.3)-(5.6) por elementos da base $\beta$ de $J_n$ descrita antes do Lema 5.1.3.

**Proposição 5.1.4** *Para cada $a_1, a_2, a_3 \in J_n$ e $c \in D_1$ seguem as igualdades:*

*(i)* $(a_1, c, a_2) = 0$

*(ii)* $c \cdot (a_1, a_2, a_3) = 0$

**Demonstração:** Sejam $a_i = \alpha_i + v_i + \beta_i d$ e $c = \gamma d$, onde $\alpha_i, \beta_i, \gamma \in K$ e $v_i \in V$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Note que:

$$\begin{aligned}
(a_1, c, a_2) &= (\alpha_1 + v_1 + \beta_1 d, \gamma d, \alpha_2 + v_2 + \beta_2 d) \\
&= ((\alpha_1 + v_1 + \beta_1 d)\gamma d)(\alpha_2 + v_2 + \beta_2 d) - (\alpha_1 + v_1 + \beta_1 d)(\gamma d(\alpha_2 + v_2 + \beta_2 d)) \\
&= \alpha_1 \gamma d \alpha_2 + \alpha_1 \gamma d v_2 + \alpha_1 \gamma d \beta_2 d - (\alpha_1 \gamma d \alpha_2 + v_1 \gamma d v_2 + \beta_1 d \gamma d \beta_2 d) \\
&= \alpha_1 \gamma d(\alpha_2 + v_2 + \beta_2 d) - (\alpha_1 + v_1 + \beta_1 d)\alpha_2 \gamma d \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \gamma d - \alpha_1 \alpha_2 \gamma d = 0,
\end{aligned}$$

o que implica o item $(i)$. Além disso, para mostrar o item $(ii)$, podemos observar que $c \cdot u = 0$, para todo $u \in V \oplus D_1$. Disto, é suficiente mostrar que $(a_1, a_2, a_3) \in V \oplus D_1$, isto é, a componente escalar é igual a zero. Com efeito,

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2, a_3) &= (\alpha_1 + v_1 + \beta_1 d, \alpha_2 + v_2 + \beta_2 d, \alpha_3 + v_3 + \beta_3 d) \\
&= ((\alpha_1 + v_1 + \beta_1 d)(\alpha_2 + v_2 + \beta_2 d))(\alpha_3 + v_3 + \beta_3 d) \\
&- (\alpha_1 + v_1 + \beta_1 d)((\alpha_2 + v_2 + \beta_2 d))(\alpha_3 + v_3 + \beta_3 d) \\
&= (\alpha_1 \alpha_2 + b(v_1, v_2) + \alpha_2 v_1 + \alpha_1 v_2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)d)(\alpha_3 + v_3 + \beta_3 d) \\
&- (\alpha_1 + v_1 + \beta_1 d)(\alpha_2 \alpha_3 + b(v_2, v_3) + \alpha_3 v_2 + \alpha_2 v_3 + (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2)d).
\end{aligned}$$

Calculando a componente escalar, temos que tal expressão é nula. Logo, a componente escalar do elemento $(a_1, a_2, a_3)$ em $J_n$ é zero, donde segue o resultado. ■

**Observação 5.1.5** *É de fácil verificação que para todo $a_i = \alpha_i + v_i \in B_{n-1}$ em $J_n$, para $i = 1, 2, 3$ e $d \in D_1$ temos*

*(I)* $(a_1, a_2, a_3) = (v_1, a_2, a_3)$*. Mais geralmente,* $(a_1, a_2, a_3) = (v_1, v_2, v_3)$*;*

*(II)* $(d, a_1, a_2) = -(a_1, a_2, d) = -b(v_1, v_2)d$*;*

*(III)* $(a_1a_2, a_3, d) = \alpha_1(v_2, v_3, d) + \alpha_2(v_1, v_3, d)$*.*

Com este comentário em mente, tem-se o seguinte resultado.

**Lema 5.1.6** *O polinômio em* (5.3) *ainda é identidade para* $J_n$*.*

**Demonstração:** Seja $f$ o polinômio (5.3). Como o corpo é de característica zero, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f$ é o polinômio multilinear dado em (5.7), uma vez que (5.7) é identidade para $J_n$ se, e somente se, (5.3) é também. Além disso, considere $f_\xi$, onde $\xi \in \{x_1, x_2, x_3, x_4, z, t\}$, a avaliação de $f$ em que a variável $\xi$ assume valor em $D_1$. Vamos mostrar que $\sum_\xi f_\xi = 0$, isto é, que $f$ satisfaz a condição (5.9), onde $\xi$ percorre o conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, x_3, x_4, z, t\}$. Além disso, como $f$ é multilinear, basta avaliar cada variável somente nos elementos da base de $J_n$. Pela primeira equação da Proposição 5.1.4, se $x_3$ ou $z$ pertencer a $D_1$, isso resulta em 0, isto é, $f_{x_3} = f_z = 0$. Analisemos agora

$$f_{x_1} = ((dx_2, x_3, x_4) - d(x_2, x_3, x_4) - x_2(d, x_3, x_4), z, t).$$

Pela Proposição 5.1.4, o fato de $d \cdot a = 0$, para todo $a \in J_n \setminus F \cdot 1$ e a Observação 5.1.5, temos que $f_{x_1}$ é igual a zero. Como $f$ é simétrica com respeito as variáveis $x_1$ e $x_2$, segue que $f_{x_2} = 0$. Seja agora $x_4 = d$, ou seja,

$$f_{x_4} = ((x_1x_2, x_3, d) - x_1(x_2, x_3, d) - x_2(x_1, x_3, d), z, t).$$

Neste caso podemos utilizar os itens (II) e (III) da Observação 5.1.5. Isto implicará $f_{x_4} = 0$. Resta agora analisar o caso $f_t = d$. Temos que:

$$f_t = ((x_1x_2, x_3, x_4) - x_1(x_2, x_3, x_4) - x_2(x_1, x_3, x_4), z, d)$$

$$= [(x_1x_2, x_3, x_4) - x_1(x_2, x_3, x_4) - x_2(x_1, x_3, x_4)z]d.$$

Mas $(x_1x_2, x_3, x_4) - x_1(x_2, x_3, x_4) - x_2(x_1, x_3, x_4)$ tem grau 4 e suas variáveis são avaliadas em $V'$, ver item (I). Então, como $e_i^2 = 1$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$, essa avaliação é um escalar $\alpha \in F$. Isto implica que $f_t = \alpha z d = 0$, já que podemos considerar $z \in J_n \setminus F \cdot 1$. E assim, completamos a demonstração. ■

Para simplificar a notação, escrevemos o produto de quaisquer duas variáveis $x$ e $y$ avaliadas em $V'$ como segue:

$$x \cdot y = \delta(x, y).$$

**Lema 5.1.7** *O polinômio em (5.4) é ainda uma identidade de $J_n$.*

**Demonstração:** A linearização do polinômio (5.4) é

$$g = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, y, x_{\sigma(3)}), z) + \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, z, x_{\sigma(3)}), y) \qquad (5.11)$$

ver Exemplo 1.5.5. Usando a mesma notação do lema anterior e pela primeira igualdade da Proposição (5.1.4), temos que

$$\begin{aligned} g_y &= \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, z, x_{\sigma(3)}), d) \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}, z, x_{\sigma(3)}))d - \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}((x_{\sigma(2)}, z, x_{\sigma(3)})d). \end{aligned}$$

De acordo com a segunda equação da Proposição 5.1.4, a segunda soma é igual a zero. Além disso, como $(a, b, c) = -(c, b, a)$, podemos denotar por $\mathcal{G}$ a primeira soma. Neste caso, podemos expressar $\mathcal{G}$ da seguinte forma: Estendendo a expressão de $\mathcal{G}$ temos

$$\mathcal{G} = [x_1(x_2, z, x_3) - x_2(x_1, z, x_3) - x_3(x_2, z, x_1) - x_1(x_3, z, x_2) + x_2(x_3, z, x_1) + x_3(x_1, z, x_2)] \cdot d.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= 2[x_1(x_2, z, x_3) + x_2(x_3, z, x_1) + x_3(x_1, z, x_2)] \cdot d \\ &= 2[\delta(x_2, z)\delta(x_1, x_3) - \delta(x_1, x_2)\delta(x_3, z) + \delta(x_1, z)\delta(x_2, x_3) \\ &- \delta(x_2, z)\delta(x_1, x_3) + \delta(x_3, z)\delta(x_1, x_2) - \delta(x_1, z)\delta(x_2, x_3)] \cdot d = 0. \end{aligned}$$

Isso implica que $g_y = 0$ e como o polinômio em (5.11) é simétrico com respeito as variáveis $y$ e $z$, temos que $g_z = 0$. Observamos que em $g_{x_i}$ sempre que a variável $x_i$ aparece no associador interno, obtemos zero. Consequentemente, em $g_{x_i}$ aparecem apenas os associadores relacionados às permutações de $S_3$ que fixam o número inteiro $i$, para todo $i = 1, 2, 3$. Devido à simetria de $g$ em relação às variáveis $x_1, x_2$ e $x_3$, basta calcularmos $g_{x_1}$. Temos então,

$$\begin{aligned}
g_{x_1} &= (d,(x_2,y,x_3),z)-(d,(x_3,y,x_2),z)+(d,(x_2,z,x_3),y)-(d,(x_3,z,x_2),y)\\
&= 2[(d,(x_2,y,x_3),z)+(d,(x_2,z,x_3),y)]\\
&= 2[(d(x_2,y,x_3))z-d((x_2,y,x_3)z)+(d(x_2,z,x_3))y-d((x_2,z,x_3)y)]\\
&= -2d[(x_2,y,x_3)z+(x_2,z,x_3)y]\\
&= -2d[(\delta(x_2,y)x_3-\delta(x_3,y)x_2)z+(\delta(x_2,z)x_3-\delta(x_3,z)x_2)y]\\
&- 2d[\delta(x_2,y)\delta(x_3,z)-\delta(x_3,y)\delta(x_2,z)+\delta(x_2,z)\delta(x_3,y)-\delta(x_3,z)\delta(x_2,y)]=0.
\end{aligned}$$

Lembramos que o terceiro símbolo de igualdade segue do fato que $d\cdot a=0$, para todo $a\in J_n\setminus F\cdot 1$, donde segue a demonstração. ■

**Lema 5.1.8** *O polinômio em (5.6) é ainda uma identidade de $J_n$.*

**Demonstração:** Como cada monômio desse polinômio é um produto de dois associadores, a prova segue de imediato pelo item $(ii)$ da Proposição 5.1.4. ■

Iremos agora verificar a condição para o Polinômio (5.5). O exemplo a seguir irá ilustrar nossos comentários e próximos resultados.

**Exemplo 5.1.9** *Consideremos $n=3$ e $k=2$. O Polinômio (5.5) é igual à*

$$\begin{aligned}
h &= (x_1,y_1,x_2,y_2,x_3)-(x_2,y_1,x_1,y_2,x_3)-(x_3,y_1,x_2,y_2,x_1)\\
&- (x_1,y_1,x_3,y_2,x_2)+(x_2,y_1,x_3,y_2,x_1)+(x_3,y_1,x_1,y_2,x_2)\\
&= 2((x_3,y_1,x_1,y_2,x_2)+(x_2,y_1,x_3,y_2,x_1)+(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3)).
\end{aligned}$$

*Recordamos que a base canônica $\mathcal{B}\cup\{1\}$ de $J_3$ é $\{1,e_1,e_2,d\}$. Considerando a avaliação dado por $\varphi(x_1)=\varphi(y_1)=e_1$, $\varphi(x_2)=\varphi(y_2)=e_2$ e $\varphi(x_3)=d$ temos que*

$$\varphi(h)=2((d,e_1,e_1,e_2,e_2)+(e_1,e_1,e_2,e_2,d))=4d\neq 0.$$

*Isto implica que $h$ não está em $T(J_3)$.*

O exemplo anterior sugere que o polinômio dado em (5.5) não é identidade para a álgebra de Jordan $J_n$.

Em resumo, obtemos implicitamente, o resultado principal desse capítulo.

**Teorema 5.1.10** *A álgebra de Jordan $J_n = K \oplus V$ de uma forma bilinear simétrica degenerada $b$ de posto $n-1$ é PI-equivalente à álgebra $B_{n-1}$ munida da forma $b$ restrita ao espaço vetorial não degenerado de $V$, módulo as identidades gerada por* (5.5).

Recentemente, se tem conhecimento de outra maneira de escrever o resultado acima, iremos explicitar o resultado principal obtido por Fidelis, Martino e Shestakov. Aqui não iremos entrar em detalhes no resultado, mas indicamos [12]. Mais precisamente, os autores obtiveram o seguinte resultado.

**Teorema 5.1.11** *Seja $J_n = B_{n-1} \oplus D_1$, a álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica e degenerada $b$. As identidades*

$$\begin{aligned}
([x,y]^2, z, t) &\equiv 0 \\
\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x, x_{\sigma(3)}), x) &\equiv 0 \\
\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, \ldots, y_{n-1}, x_{\sigma(n)}, y_n, x_{\sigma(n+1)}) &\equiv 0 \\
\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, y_1, x_{\sigma(2)}, \ldots, y_{n-2}, x_{\sigma(n-1)})(y_{n-1}, x_{\sigma(n)}, y_n) &\equiv 0,
\end{aligned}$$

*formam uma base para as identidades polinomiais da variedade $var(J_n)$, $n < \infty$, das álgebras de Jordan sobre um corpo de característica 0.*

Um fato interessante, é que o critério estabelecido no Lema 5.1.3 não faz uso da dimensão de $J_n$ ser finita, mas sim o fato dela ter posto 1. Assim, considerando o caso em que $J_\infty = B_\infty \oplus D_1$, temos a descrição completa de suas identidades polinomiais. Mais precisamente,

**Teorema 5.1.12** *Seja $J_\infty = B_\infty \oplus D_1$, a álgebra de Jordan de uma forma bilinear simétrica e degenerada $b$ de posto 1. As identidades*

$$\begin{aligned}
([x,y]^2, z, t) &\equiv 0 \\
\sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, (x_{\sigma(2)}, x, x_{\sigma(3)}), x) &\equiv 0
\end{aligned}$$

*formam uma base para as identidades polinomiais da variedade $var(J_\infty)$ das álgebras de Jordan sobre um corpo de característica 0.*

Terminamos este capítulo combinando o teorema anterior com os resultados principais contidos nos artigos [22] e [33] para deduzir o seguinte resultado:

**Teorema 5.1.13** *O $T$-ideal das identidades de $J_\infty$ satisfaz a propriedade de Specht.*

# Bibliografia


[1] 1 Amitsur, A. S. **Identities in rings with involutions**. Israel Journal of Mathematics. v. 7 (1969), 63-68.

[2] Amitsur, A. S.; Levitzki, J. **Minimal Identities for algebras**. Proceedings of the American Mathematical Society. v. 1 (1950), 449-463.

[3] Bahturin, Y.; Shestakov, I. **Gradings of simple Jordan algebras and their relation to the gradings of simple associative algebras**. Communications in Algebra. v. 29, n. 9 (2001), 4095-4102.

[4] Centrone, L.; Martino, F.; Souza, M. S. **Specht property for varieties of Jordan algebras of almost polynomial growth**. Journal of Algebra, v. 521 (2019), 137-165.

[5] Costa, N. L. **Identidades Polinomiais e Polinômios Centrais para Álgebra de Grassmann**, Dissertação, 2012, UFCG, Campina Grande. Versão Online: http://mat.ufcg.edu.br/ppgmat2/wp-content/uploads/sites/10/2015/12/Nancy.pdf

[6] De Concini, C.; Procesi, C. **A characteristic free approach to invariant theory**. Advances in Mathematics, v. 21, n. 3 (1976), 330-354.

[7] Dehn, M. W. **Über die Grunddlagen der projektiven Geometrie und algemeine Zahlsysteme**. Mathematische Annalen 85 (1922), 184-194.

[8] Diniz, D.; Souza, M. S. **Specht property for the 2-graded identities of the Jordan algebra of a bilinear form.** Communications in Algebra, v. 45, n. 4 (2017), 1618-1626.

[9] Drensky, V. **Free algebras and PI algebras, Graduate course in algebra**. Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.

[10] Drensky, V.; Formanek, E. **Polynomial identity rings**. Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona. Springer, 2004 edition.

[11] Eidt, B. **Espaços separáveis**, TCC, 2017, UFSC, Florianópolis. Versão Online: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/181560/TCC%20-%20Ben%20Hur%20Eidt.pdf-sequence=1.

[12] Fidelis, C.; Martino, F.; Shestakov, I., **Identities for the Jordan algebra of a bilinear form degenerate**, In preparation.

[13] Giambruno, A.; Souza, M. S. **Graded polynomial identities and Specht property of the Lie algebra.** Journal of Algebra, v. 389 (2013), 6-22.

[14] Iltyakov, A. **Specht ideals of identities of certain simple nonassociative algebras**, Algebra i Logika, v. 24, n. 3, (1985), 327–351 (Russian). English Translation: Algebra Logic, v. 24, n. 3 (1985), 210–228.

[15] Higman, G. **Ordering by divisibility in abstract algebras.** Proceedings of the London Mathematical Society. v. 3, n. 2 (1952). 326-336.

[16] Jacobson, N. **Structure and representations of Jordan algebras.** American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIX American Mathematical Society, Providence, R.I. 1968.

[17] James, G.; Kerber, A. **The representation theory of the symmetric group.** With a foreword by P. M. Cohn. With an introduction by Gilbert de B. Robinson. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 16. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1981.

[18] Kaplansky, I. **Problems in the Theory of Rings.** Report of a Conference on Linear Algebras, Long Island, New York, June, 1956, National Academy of Sciences. National Research Council Publication 502, pp. 1-3.

[19] Kemer, A. R. **Varieties and $\mathbb{Z}_2$-Graded Algebras**. Mathematics of the USSR-Izvestiya, v. 25, n. 2 (1985), 359–374.

[20] Kemer, A. R. **Finite Basis Property of Identities of Associative Algebras**. Algebra and Logic, v. 26, n. 5 (1987), 362–397.

[21] Kemer, A. R. **Ideals of identities of associative algebras.** Translated from the Russian by C. W. Kohls. Translations of Mathematical Monographs, 87. American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[22] Koshlukov, P; **Polynomial identities for a family of simple Jordan algebras**, Communications in Algebra, v. 16, n. 7 (1988), 1325-1371.

[23] Koshlukov, P; **Graded polynomial identities for the Lie algebra** $sl_2(K)$, International Journal of Algebra and Computation, v. 18, n. 5 (2008), 825-836.

[24] Koshlukov, P.; Silva, D. D. P. S. **2-graded Polynomial identities for the Jordan algebra of the symmetric matrices of Order Two**. Journal of Algebra, v. 327 (2011), 236-250.

[25] Koshlukov, P.; Martino, F. **Polynomial identities for the Jordan algebra of upper triangular matrices of order two**. Journal of Pure and Applied Algebra. v. 216, n. 11 (2012), 2524-2532.

[26] Martino, F. **Polynomial identities for the Jordan algebra of a degenerate symmetric bilinear form.** Linear Algebra and its Applications, v. 39, n. 12 (2013), 4080-4089.

[27] Procesi, C. **The Invariant Theory of** $n \times n$ **Matrices.** Advances in Mathematics, v. 19, n. 3 (1976), 306-381.

[28] Razmyslov, Y. P. **Identities with trace in full matrix algebras over a field of characteristic zero.** (Russian) Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematika, 38 (1974), 723-756.

[29] Roman, S. **Advanced linear algebra. Graduate Texts in Mathematics**, 135. Springer-Verlag, New York, 1992.

[30] Shestakov, I.; Shirshov, A.; Slin'ko, A.; Zhevlakov, K.; **Rings that are nearly associative.** Translated from the Russian by Harry F. Smith. Pure and Applied Mathematics, 104. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1982.

[31] Smith, B. **A standard Jordan polynomial.** Communications in Algebra. v.5, n. 2 (1977), 207-218.

[32] Souza, M. S. **Propriedade de Specht e crescimento das identidades polinomiais graduadas de** $sl_2$, Tese, 2013, Unicamp, Campinas. Versão Online: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/306362/1/Souza_ManueladaSilva_D.pdf

[33] Vasilovsky, S. Y. **A finite basis for polynomial identities of the Jordan algebra of a bilinear form.** [translation of Trudy Inst. Mat. (Novosibirsk) 16 (1989), Issled. po Teor. Kolets Algebra, 5-37; MR1043623]. Siberian Advances in Mathematics. Siberian Advances in Mathematics, v. 1, n. 4 (1991), 142-185.

[34] Wagner, W. **Über die Grunddlagen der projektiven Geometrie und algemeine Zahlsysteme.** Mathematische. Annalen Uber (1937), 528-564.

[35] Wall, C. T. C. **Graded Brauer groups.** Journal Für die Reine Und Angewandte Mathematik. 213 (1963/64), 187-199.