Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Estabilidade Uniforme na Fronteira de uma Equação da Onda Semilinear com Dissipação Não Linear na Fronteira

por

José Hélio Henrique de Lacerda †

sob orientação do

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES

L131e Lacerda, José Hélio Henrique de.
Estabilidade uniforme na fronteira de uma equação da onda semilinear com dissipação não linear na fronteira / José Hélio Henrique de Lacerda. – Campina Grande, 2018.
158 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo".
Referências.

1. Teoremas de Existência. 2. Existência de Solução. 3. Dissipação Não Linear. 4. Taxa de Decaimento. I. Lourêdo, Aldo Trajano. II. Título.

CDU 517.911(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS CRB = 15/93

Estabilidade Uniforme na Fronteira de uma Equação da Onda Semilinear com Dissipação Não Linear na Fronteira

por

José Hélio Henrique de Lacerda

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino - UEM

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda - UEPB

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Julho /2018

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas benções alcançadas durante todo esse percurso; Agradeço ao professor Dr. Aldo Trajano Lourêdo, pela orientação, por sua dedicação e paciência em atender e ouvir todos os seus orientandos sempre que necessário, por sua sensibilidade em perceber e compreender as dificuldades de cada um, nos incentivando e nos fazendo acreditar que é possível vencer os obstáculos, pelo aprendizado matemático, em fim, pelo exemplo de simplicidade e generosidade; Aos professores participantes da banca, Manuel Milla Miranda e Juan Soriano por suas valiosas sugestões e observações, em especial ao professor Dr. Manuel Milla Miranda pelas grandes contribuições no nosso trabalho, as quais, com certeza, foram de grande valia e tornou o trabalho mais didático; A todos os professores da graduação e do mestrado que contribuíram ricamente para o meu aprendizado; Ao professor Dr. Davis Matias de Oliveira que foi meu orientador na graduação, com quem tive a oportunidade de aprender muito, em especial, pelo exemplo de altruísmo e humildade; A minha família, principalmente a minha mãe Lúcia de Fátima; A minha esposa Cláudia, que esteve sempre ao meu lado me apoiando em todos os momentos; A todos os amigos do mestrado com quem tive a oportunidade de estudar e aprender, em especial Jeovany e Wallace que me ajudaram nos momentos mais difíceis; aos funcionários do Curso de Matemática da UFCG, em especial a Andrezza e Aninha.

Dedicatória

Dedico o presente trabalho a minha família e meus professores, em especial, minha mãe Lúcia e a minha esposa Cláudia Coutinho.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é fazer um estudo detalhado do trabalho Uniform Boundary Stabilization of Semilinear Wave Equations with Nonlinear Boundary Damping dos autores I. Lasiecka e D. Tataru [18]. Aqui, estudamos a existência de solução do Problema (1), via teoria dos operadores maximais monótonos, bem como o decaimento da energia $E(t)$ associada ao problema

$$\left| \begin{array}{ll} u_{tt} = \Delta u - f_0(u), & \text{sobre } \Omega \times (0,\infty); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g\left(u_t\big|_{\Gamma_1}\right) - f_1\left(u\big|_{\Gamma_1}\right) & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty); \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0,\infty); \\ u(0) = u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \quad u_t(0) = u_1 \in L^2(\Omega), & \end{array} \right. \tag{1}$$

onde Ω é uma região aberta limitada do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, com fronteira regular $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, sendo Γ_0 e Γ_1 fechados e disjuntos, isto é, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, ν um vetor unitário externo normal à fronteira Γ_1 e

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega); \quad v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \right\}.$$

Palavras - Chaves: Existência de solução. Dissipação não linear. Taxa de decaimento.

Abstract

The main objective of this dissertation is to make a detailed study of the work Uniform Boundary Stabilization of Semilinear Wave Equations with Nonlinear Boundary Damping of the authors I. Lasiecka and D. Tataru [18]. Here, we study the existence of solution of Problem (1), via theory of the monotonous maximal operators, as well as the decay of energy E(t) associated with the problem

$$\left|\begin{array}{ll} u_{tt} = \Delta u - f_0(u), & \text{on } \Omega \times (0,\infty); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g\left(u_t\big|_{\Gamma_1}\right) - f_1\left(u\big|_{\Gamma_1}\right) & \text{on } \Gamma_1 \times (0,\infty); \\ u = 0, & \text{on } \Gamma_0 \times (0,\infty); \\ u(0) = u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \quad u_t(0) = u_1 \in L^2(\Omega), & \end{array}\right. \tag{1}$$

where Ω is a bounded open region in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, with a smooth boundary $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, with Γ_0 and Γ_1 closed and disjoint, ν is an outer unit vector normal to the boundary Γ_1 and

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega); \quad v = 0 \text{ on } \Gamma_0\right\}.$$

Key-Words: Existence of solution. Non-linear dissipation. Decay rate.

Notações e Símbolos

- Por $\mathbb{K}$ representamos o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$;
- Por $\mathbb{R}_+$ representamos o subconjunto de $\mathbb{R}$, formado pelos números reais não negativos;
- $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$, ($n$ vezes);
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha^n}$, onde $\alpha = (\alpha_{1,}\alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{K}^n$;
- $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$, operador derivação de ordem $|\alpha|$;
- Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, escrevemos $\beta \leq \alpha$ para indicar $\beta_i \leq \alpha_i$, para todo $i = 1, 2, .., n$;
- $\nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_n u)$;
- $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$;
- $E \overset{cont}{\hookrightarrow} F$, indica a imersão contínua $E \subset F$, do espaço topológico E no espaço topológico F;
- Ω é um subconjunto aberto limitado regular do $\mathbb{R}^n$;
- Γ representa a fronteira de Ω;
- Γ_0 representa um pedaço da fronteira Γ de Ω, $\Gamma_0 \cap (\Gamma \diagdown \Gamma_0) = \varnothing$;
- $C^k(\Omega)$, $k = 1, 2, 3, ...$, conjunto das aplicações definidas em Ω cujas derivadas de ordem k são contínuas em Ω;
- $C^0(\Omega)$, conjunto das funções contínuas em Ω;
- $\overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$, é o fecho, em Ω, do conjunto $\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}$. As vezes, quando não causar confusão, escrevemos simplesmente $\overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}$;
- $\mathit{supp}\, u = \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$, suporte, em Ω, da função contínua $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$;
- $Q = \Omega \times (0, T)$ subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$;
- $\Sigma_i = \Gamma_i \times (0, T)$, $\quad (i = 0, 1)$;
- $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ representa a derivada na direção normal exterior;

- $\rightharpoonup$ significa convergência fraca;

- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ significa a convergência fraca estrela;

- X' designa o dual topológico de X;

- $\mathcal{L}(X, Y)$ designa o espaço das transformações lineares limitadas de X em Y. Quando $X = Y$ escrevemos simplesmente $\mathcal{L}(X)$.

Sumário

Introdução

No estudo de problemas envolvendo Equações Diferenciais Parciais não lineares é comum passar pelas seguintes etapas: construir um problema aproximado e mostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, tal problema possui uma solução v_n; provar que a sequência $(v_n)_n$ possui uma subsequência que converge em uma determinada topologia para uma função v; passar ao limite no problema aproximado, para a partir daí, observar que tal limite é solução do problema original. No entanto, um ponto importante a ser enfatizado na abordagem básica para provar a existência de soluções de problemas não lineares, sem reivindicar unicidade, é que por mais suave que sejam os dados iniciais, as soluções correspondentes ao problema não linear não precisam ser regulares. Além disso, elas não necessariamente, dependem continuamente dos dados iniciais, uma vez que, na ausência de unicidade, uma determinada solução não precisa ser aquela produzida pelo argumento de aproximação de existência mencionado anteriormente. Por isso, é necessário um tratamento especial.

Como observado em [18], o problema de decaimento uniforme da equação da onda tem sido bastante estudado. Contudo, os casos cujas condições de fronteiras são não lineares, são marcados por ambos os seguintes recursos: as não linearidades dão origem a um problema monótono; o termo dissipativo na fronteira é de crescimento polinomial, pré-atribuído, na origem. Tal propriedade contribui, entre outras coisas, para conferir uma estrutura específica à equação, que permite a construção de uma função padrão de Lyapunov, que é usada para calcular as taxas de decaimento desejadas. No trabalho realizado por I. Lasiecka e D. Tataru [18] as duas propriedades acima são dispensadas e é justamente neste fato que consistem as dificuldades técnicas para resolver com êxito o problema da existência de soluções e a obtenção de taxas de decaimento globais e uniformes.

Nosso principal objetivo nesta dissertação é fazer um estudo didático do artigo Uniform Boundary Stabilization of Semilinear Wave Equations with Nonlinear Boundary Damping dos autores I. Lasiecka e D. Tataru [18] o qual trata a existência de solução, via teoria de operadores maximais monótonos, (ver V. Barbu [2], H. Brezis [5] ou V. Kormornik [17]) e o decaimento da energia $E := E(t)$ associada a solução do Problema (1),

$$\left| \begin{array}{ll} u_{tt} = \Delta u - f_0(u), & \text{sobre } \Omega \times (0,\infty); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g\left(u_t|_{\Gamma_1}\right) - f_1\left(u|_{\Gamma_1}\right) & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty); \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0,\infty); \\ u(0) = u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \quad u_t(0) = u_1 \in L^2(\Omega), & \end{array} \right. \tag{1}$$

onde Ω é uma região aberta limitada do $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, com fronteira regular $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, sendo Γ_0 e Γ_1 fechados e disjuntos, isto é, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, ν um vetor normal unitário exterior à fronteira Γ_1 e

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega); \quad v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \right\}.$$

As seguintes hipóteses são feitas sobre as funções não lineares f_i e g $(i = 0, 1)$.

Hipótese: (H-1) Para a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(i) $g(s)$ é uma função contínua e crescente em $\mathbb{R}$;

(ii) $g(s)s > 0$ para $s \neq 0$;

(iii) $M_2 s^2 \leq g(s)s \leq M_1 s^2$, para $|s|_{\mathbb{R}} \geq 1$, e alguns M_1 e M_2, com $0 < M_2 \leq M_1$.

Hipótese: (H-2) Para a função $f_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(i) $f_0(s) \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$, contínua, de classe $C^1(\mathbb{R})$ por partes e diferenciável em $s = 0$;

(ii) $f_0(s)s \geq 0$, para $s \in \mathbb{R}$;

(iii) $|f_0'(s)|_{\mathbb{R}} \leq N(1 + |s|^{k_0 - 1}_{\mathbb{R}})$, $\quad 1 < k_0 < \dfrac{n}{n-2}$, para $N < |s|_{\mathbb{R}}$, com N suficientemente grande e $n > 2$.

Hipótese: (H-3) Para a função $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(i) $f_1(s)$ é uma função contínua diferenciável em $s = 0$;

(ii) $f_1(s)s \geq 0$, para $s \in \mathbb{R}$;

(iii) $|f_1(s)|_{\mathbb{R}} \leq M|s|^{k_1}_{\mathbb{R}} + A|s|_{\mathbb{R}}$, para $s \in \mathbb{R}, k_1 < \dfrac{n-1}{n-2}$ e M, A constantes dadas.

Assim como feito em [18], nossa abordagem básica para provar a existência de soluções, sem exigir unicidade, depende de uma construção a partir de problemas aproximados adequados, de modo que se obtenha soluções aproximadas e, em seguida, a passagem ao limite produz a reivindicação desejada de existência de soluções para o problema original. Estudamos também, a taxa de decaimento da energia $E := E(t)$ associada a solução do sistema, a qual é dada em função do semigrupo associado a solução do Problema (1).

Este trabalho está dividido do seguinte modo:

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos básicos sobre Distribuições para funções reais, funções vetoriais, Espaços de Sobolev e resultados gerais de traço. Além disso, enunciamos e demonstramos alguns resultados de fundamental importância no decorrer deste trabalho.

No Capítulo 2, mostramos a existência de solução (Teorema 2.1), via a teoria de operadores maximais monótonos, como feito em V. Barbu [2], H. Brezis [5] ou V. Kormornik [17].

No Capítulo 3 demonstramos o Teorema 3.1, que também trata a existência de solução, utilizando as aproximações obtidas no Teorema 2.1.

No Capítulo 4, obtemos a taxa de decaimento da energia associada a solução do Problema (1). Além disso, apresentamos, em síntese, um problema cujo estudo é baseado no método aqui aplicado.

Por fim, no Capítulo 5 são enunciados mais alguns resultados importantes utilizados no decorrer deste trabalho.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

No que segue, apresentaremos algumas definições e conceitos básicos relacionados a teoria das Distribuições, Análise Funcional, Teoria da Medida, Espaços de Sobolev, teoria de Semigrupos de operadores lineares limitados, entre outros, que serão de fundamental importância no estudo seguinte. Contudo, por serem resultados bastante conhecidos, muitos deles não serão demonstrados.

1.1 Espaços Funcionais

Nesta seção, veremos alguns conceitos básicos relacionados as teorias das Distribuições e dos Espaços de Sobolev. Ao leitor interessado em um estudo mais abrangente sobre estes temas recomendamos L. A. Medeiros e M. Milla. Miranda, [28] ou V. Cavalcanti e M. Cavalcanti [7].

Primeiro, fixemos algumas notações e símbolos utilizados. Representando por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e por $\mathbb{N}$ o monoide dos números naturais. Dados $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{K}^n$ definimos,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \qquad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha^n}.$$

Além disso, denotamos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

o operador derivação de ordem $|\alpha|$. Quando $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, definimos $D^0 u = u$, para toda função u e, para $\alpha = (0, 0, ..., i, ..., 0)$, tem-se $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, a derivada parcial com relação a variável x_i. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, escrevemos $\beta \leq \alpha$ para indicar $\beta_i \leq \alpha_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Temos ainda $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ e, $E \overset{cont}{\hookrightarrow} F$ indica a imersão contínua $E \subset F$, do espaço topológico E no espaço topológico F. Ademais, se Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e Γ a sua fronteira, escrevemos $\overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$ para representar o fecho, em Ω, do conjunto $\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}$.

Definição 1.1 (**Suporte**). *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e u uma função numérica mensurável definida em Ω. Considere $(\mathcal{O}_i)_{i\in\Lambda}$ a família de todos os subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i$ de Ω tais que $u = 0$, quase sempre em $\mathcal{O}_i$, para todo $i \in \Lambda$. Então, $u = 0$ quase sempre no conjunto aberto $\mathcal{O} = \bigcup_{i\in\Lambda} \mathcal{O}_i$. Com isto, definimos o* ***suporte*** *de u, denotado por $supp(u)$, como sendo o conjunto fechado $\Omega \backslash \mathcal{O}$. Quando a função u é contínua, temos*

$$supp(u) := \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Observação 1.1. *Se u e v são funções numéricas mensuráveis em Ω e $\lambda \in \mathbb{K}$, com $\lambda \neq 0$, mostra-se que (ver L. A. Medeiros e M. M. Miranda, [28] ou V. Cavalcanti e M. Cavalcanti [7])*

- *$supp(u + v) \subset supp(u) \bigcup supp(v)$;*
- *$supp(uv) \subset supp(u) \bigcap supp(v)$;*
- *$supp(\lambda u) = \lambda supp(u)$;*
- *$supp(T_y)u = y + supp(u)$, onde $T_y u$ definida por $T_y u(x) = u(x - y)$ é a translação de u por y.*

1.1.1 Espaços $L^p(\Omega)$ e $L^p_{loc}(\Omega)$

Representamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o Espaço de Banach das (classes de) funções numéricas u, mensuráveis definidas em Ω tais que $|u|^p_{\mathbb{R}}$ é integrável à Lebesgue, em Ω. Em símbolos:

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \int_\Omega |u(x)|^p_{\mathbb{R}} dx < \infty \right\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p_{\mathbb{R}} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso particular $p = 2$, mostra-se que $L^2(\Omega)$ é um Espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v}(x) dx,$$

onde $\overline{v}$ denota o complexo conjugado de v (quando se tratar do corpo dos complexos).

Além disso, quando $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ é o Espaço de Banach das (classes de) funções numéricas, mensuráveis essencialmente limitadas em Ω. Em suma:

$$L^\infty(\Omega) := \{u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{mensuráveis e } \exists C > 0;\ |u(x)|_{\mathbb{R}} \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|_{\mathbb{R}} = \inf\{C;\ |u(x)|_{\mathbb{R}} \leq C, \text{ quase sempre } \Omega\}.$$

Mostra-se que se $u \in L^\infty(\Omega)$, então $|u(x)|_{\mathbb{R}} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Denotamos ainda, por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p_{\mathbb{R}}$ é integrável à Lebesgue, sobre cada compacto $\mathcal{K}$ de Ω. Dadas uma sucessão (u_ξ) em $L^p_{loc}(\Omega)$ e $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, dizemos que $u_\xi \longrightarrow u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, se para cada compacto $\mathcal{K}$ em Ω temos

$$\lim_{\xi\to\infty}(u_\xi - u) = \lim_{\xi\to\infty}\int_{\mathcal{K}} |u_\xi(x) - u(x)|^p_{\mathbb{R}} dx = 0.$$

É possível mostrar que $L^p_{loc}(\Omega)$ é um **Espaço de Fréchet**, isto é, um espaço localmente convexo completo que é metrizável. Mostra-se ainda que $L^p_{loc}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^1_{loc}(\Omega)$.

1.1.2 Espaço das Funções Testes

Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das funções a valores reais definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com suporte compacto, que são infinitamente diferenciáveis. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados **funções testes**, observe que $C_0^\infty(\Omega) \neq \emptyset$, pois

Exemplo 1.1. *Seja $\rho\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$\rho(x) := \left|\begin{array}{lll} exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2_{\mathbb{R}^n}}\right), & se & \|x\|_{\mathbb{R}^n} < 1 \\ 0, & se & \|x\|_{\mathbb{R}^n} \geq 1, \end{array}\right. \tag{1.1}$$

onde $\|x\|^2_{\mathbb{R}^n} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. A função ρ pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$supp(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1\}.$$

Exemplo 1.2. *Sejam ρ a função do exemplo anterior e $k = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx$. Para cada $\xi = 1, 2, 3, \cdots$, considere a função $\rho_\xi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\rho_\xi(x) = \frac{\xi^n}{k}\rho(\xi x), \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostra-se que, para cada ξ, ρ_ξ é uma função teste em $\mathbb{R}^n$, a qual possui as seguintes propriedades:

(i) $0 \leq \rho_\xi(x) \leq \dfrac{\xi^n}{k}$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\xi(x) = \int_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{\xi}} \rho_\xi(x)dx = 1$;

(iii) $supp(\rho_\xi) = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{\xi}\right\}$.

Observação 1.2. *É importante destacar que uma sucessão (ρ_ξ) de funções testes, definidas em $\mathbb{R}^n$, gozando das propriedades* (i), (ii) *e* (iii) *é denominada* ***sucessão regularizante.*** *Além disso, vale o*

1.1.3 Topologia Sobre C_0^∞

Denomina-se **Espaço das Funções Testes**, denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, o conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a seguinte topologia: sejam (ϕ_ξ) uma sequência de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\phi_\xi \longrightarrow \phi$, em $\mathcal{D}(\Omega)$ se existe um compacto $\mathcal{K}$ de Ω tal que

(i) $supp(\phi_\xi) \subset \mathcal{K}, \quad \forall \xi \in \mathbb{N}$;

(ii) $D^\alpha \phi_\xi \longrightarrow D^\alpha \phi$ uniformemente sobre $\mathcal{K}, \forall \alpha \in \mathbb{N}$.

Observação 1.3. *Note que sendo $(\phi_\xi) \subset C_0^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi_\xi \longrightarrow \phi$, em $\mathcal{D}(\Omega)$ se, e somente se, $(\phi_\xi - \phi) \longrightarrow 0$, em $\mathcal{D}(\Omega)$. Além disso, vale o*

Teorema 1.1. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros e M. Milla. Miranda [28]. ■

1.1.4 Distribuições Sobre Ω

Denotamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o **Espaço das Distribuições** sobre Ω, o qual é formado pelos funcionais lineares, contínuos $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, ou seja,

(i) T é linear;

(ii) Se $\phi_\nu \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $\langle T, \phi_\nu\rangle \longrightarrow \langle T, \phi\rangle$, em $\mathbb{R}$. Onde $\langle T, \phi\rangle$ denota a distribuição T aplicada à ϕ.

Exemplo 1.3. *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Considere* $T_u \in \mathcal{D}(\Omega)$ *definida por*

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. *É possível demonstrar, sem muitas dificuldades, que* T_u *é uma distribuição sobre* Ω*, isto é,* T_u *é linear e contínua.*

Observação 1.4. *Sejam* (T_ν) *uma sucessão em* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ *e* $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$*, dizemos que*

$$T_\nu \longrightarrow T, \text{ em } \mathcal{D}^{'}(\Omega) \text{ quando } \langle T_\nu, \phi \rangle \longrightarrow \langle T, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Identificando $L^2(\Omega)$ *com o seu dual, prova-se a seguinte cadeia de imersões densas*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Definição 1.2 (**Derivada Distribucional**)**.** *Sejam* T *uma distribuição sobre* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *um multi-índice. A derivada de* T*, de ordem* $|\alpha|$*, é definida como sendo o funcional* $D^\alpha T$ *dado por:*

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lema 1.1 (**Du Bois Raymond**)**.** *Sejam* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e* $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *em quase todo ponto de* Ω*, isto é,*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração: Para a prova veja H. Brezis [4]. ∎

Observação 1.5. *Como consequência imediata do Lema de Du Bois Reymond 1.1 temos que se* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$*, então* $T_u = T_v$ *se, e somente se,* $u = v$ *em quase todo ponto de* Ω*. Por isso, dizemos que* T_u *é univocamente determinada por* u *sobre* Ω*. Isto nos permite identificar* u *à distribuição* T_u*, por ela definida. Deste modo, escrevemos simplesmente* u *no lugar de* T_u*. Por outro lado, o funcional* $D^\alpha T$ *é uma distribuição sobre* Ω*, isto é,* $D^\alpha T$ *é linear e se* $T_\nu \longrightarrow T$ *em* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$*, então* $D^\alpha T_\nu \longrightarrow D^\alpha T$ *em* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$*, para todo* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$*. Além disso, segue da definição que toda distribuição possui derivadas de todas as ordens, no sentido exposto acima. Segue-se ainda, que se* Ω *é um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$*,* $u \in L^p(\Omega)$*, com* $1 \leq p \leq \infty$*, então* u *possui derivada distribucional de todas as ordens, entretanto, não é verdade que em geral,* $D^\alpha u$ *seja uma função de* $L^p(\Omega)$*. Este fato motivou a definição do espaço de funções, denominado Espaço Sobolev.*

1.2 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Seja X um Espaço de Banach. Denotamos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\phi\colon (0,T) \longrightarrow X$ que são indefinidamente diferenciáveis e possuem suporte compacto em $(0,T)$. De forma similar ao que foi feito acima, diremos que $\phi_n \longrightarrow \phi$, em $\mathcal{D}(0,T;X)$, se existe um compacto $\mathcal{K}$ de $(0,T)$, tal que

(i) $supp(\phi)$, $supp(\phi_\xi) \subset \mathcal{K}$, $\forall \xi \in \mathbb{N}$;

(ii) Para cada $\xi \in \mathbb{N}$, $\phi_\xi \longrightarrow \phi$ uniformemente em X, $\forall t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas $T\colon \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow X$ será denotado por $\mathcal{D}'(0,T,X)$, isso significa que se $\phi_\xi \longrightarrow \phi$, em $\mathcal{D}(0,T)$, então $\langle T, \phi_\xi\rangle \longrightarrow \langle T, \phi\rangle$ em X. Diremos ainda que $T_\xi \longrightarrow T$, em $\mathcal{D}'(0,T;X)$, se $\langle T_\xi, \phi\rangle \longrightarrow \langle T, \phi\rangle$ em X, para todo $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T,X)$, munido da convergência acima, é denominado **Espaço das Distribuições Vetoriais** de $(0,T)$ com valores em X.

Definição 1.3. *Uma função ϕ é dita fortemente mensurável quando existe uma sequência de funções simples (φ_ξ) tal que $\varphi_\xi \longrightarrow \phi$ em X, quase sempre em $(0,T)$.*

Observação 1.6. *Prova-se que o conjunto $\{\theta\zeta, \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \zeta \in X\}$ é total [1] em $\mathcal{D}(0,T,X)$.*

Denotamos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o Espaço de Banach das (classes de) funções u definidas em $(0,T)$, com valores em X que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ é integrável à Lebesgue, com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = \infty$, representamos por $L^\infty(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o Espaço de Banach das (classes de) funções u definidas em $(0,T)$, com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$. Tal espaço é munido com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} := \sup_{0\leq t\leq T} ess\|u(t)\|_X. \tag{1.2}$$

Observação 1.7. *No caso particular em que $p = 2$ e X é um Espaço de Hilbert, define-se, em $L^2(0,T;X)$, a estrutura Hilbertiana:*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} := \int_0^T \big(u(t), v(t)\big)_X dt, \qquad \|u\|^2_{L^2(0,T;X)} := \int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt. \tag{1.3}$$

[1] Um conjunto Υ é dito **total** em X se o conjunto das combinações lineares finitas de elementos de Υ são densas em X.

Ademais, se X é reflexivo, $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vale a identificação

$$\big[L^p(0,T;X)\big]' \cong L^q(0,T;X'),$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Quando $p = 1$ tem-se a identificação

$$\big[L^1(0,T;X)\big]' \cong L^\infty(0,T;X').$$

Por outro lado, se Ω é um conjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ e $Q := \Omega \times (0,T)$ é um cilindro em $\mathbb{R}^{n+1}$, para $1 \leq p < \infty$, temos

$$L^p\big(0,T;L^p(\Omega)\big) \cong L^p(Q).$$

As demonstrações de tais identificações podem ser encontradas em R. Edwards [12] ou R. Dinculeanu [11].

Definição 1.4. *Dada $T \in \mathcal{D}(0,T;X)$, definimos a derivada de T, de ordem n, como sendo a* ***Distribuição Vetorial*** *sobre $(0,T)$, com valores em X, dada por:*

$$\Big\langle \frac{d^nT}{dt^n}, \varphi \Big\rangle := (-1)^n \Big\langle T, \frac{d^n\varphi}{dt^n} \Big\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Denotamos ainda por $C^0([0,T];X)$, o Espaço de Banach das funções u definidas em $[0,T]$ com valores em X, munido com a norma

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X.$$

Por fim, consideramos o Espaço de Hilbert $H_0^1(0,T;X)$, definido por

$$H_0^1(0,T;X) := \big\{u \in L^2(0,T;X); u' \in L^2(0,T;X), \quad e \quad u(0) = u(T) = 0\big\},$$

munido com o produto escalar

$$(u,v)_{H_0^1(0,T;X)} := \int_0^T \big(u(t),v(t)\big)_X dt + \int_0^T \big(u'(t),v'(t)\big)_X dt.$$

Denotando por $H^{-1}(0,T;X)$ o dual de $H_0^1(0,T;X)$ e, usando o Teorema de Representação de Riesz 5.14 para identificar $L^2(0,T;X)$ com o seu dual, mostra-se a seguinte cadeia de imersões

$$\mathcal{D}(0,T;X) \hookrightarrow H_0^1(0,T;X) \hookrightarrow L^2(0,T;X) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X).$$

Apesar do grande número de resultados importantes relativos aos espaços acima definidos, mencionaremos apenas alguns, contudo, esclarecemos que outros resultados sobre este assunto podem ser encontrados em L. A. Medeiros [25], R. Teman [36] ou V. Cavalcanti e M. Cavalcanti [7].

Lema 1.2. *Sejam X um Espaço de Banach, X' o seu dual e $u, g \in L^1(0,T;X)$. São equivalentes:*

(i) *u é quase sempre uma primitiva de g, mais precisamente, existe $\zeta \in X$, que não depende de t, tal que*
$$u(t) = \zeta + \int_0^t g(s)ds;$$

(ii) *para cada $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$, temos*
$$\int_0^t u(t)\phi'(t)dt = -\int_0^t g(s)\phi(s)ds,$$
$g = \dfrac{du}{dt}$, no sentido das distribuições;

(iii) *para cada $\eta \in X$*
$$\frac{d}{dt}\langle u(t), \eta\rangle = \langle g(t), \eta\rangle,$$
no sentido das distribuições sobre $(0,T)$.

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [25]. ■

Corolário 1.1. *Sejam X e Y Espaços de Banach tais que a imersão $X \hookrightarrow Y$ é contínua. Se $u \in L^1(0,T;X)$ e $\dfrac{du}{dt} \in L^1(0,T;Y)$, então $u \in C^0([0,T];Y)$.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [25]. ■

Teorema 1.2. *Sejam X, Y Espaços de Hilbert tais que $X \overset{cont}{\hookrightarrow} Y$, $u \in L^p(0,T,X)$, $u' \in L^p(0,T,Y)$ e $1 \le p \le \infty$, então $u \in C^0([0,T];Y)$.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [25]. ■

Teorema 1.3. *Sejam $u \in [L^q(0,T;X)]'$, $v \in L^p(0,T;X)$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então*
$$\langle u, v\rangle_{[L^q(0,T;X)]' \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_{X' \times X} dt.$$

Demonstração: Ver R. Dinculeanu [11] ou R. Edwards [12]. ■

Proposição 1.1. *Considere $u \in L^2(0,T;X)$. Existe uma única $\phi \in H^{-1}(0,T;X)$ tal que*
$$\langle \phi, \theta\xi\rangle = \big(\langle u', \theta\rangle, \xi\big), \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T), \quad \forall \xi \in X.$$

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [29]. ■

Com base na proposição acima, identificando u' com ϕ, diremos que se $u \in L^2(0,T;X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T;X)$. Além disso, vale a

Proposição 1.2. *Sendo X um Espaço de Hilbert, a aplicação*

$$u \in L^2(0,T;X) \mapsto u' \in H^{-1}(0,T;X)$$

é linear e contínua.

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [29]. ■

Para enunciarmos o próximo resultado precisamos da seguinte observação: representamos por $C_s([0,T];Y)$ o espaço das funções fracamente contínuas de $[0,T]$ em Y. Isto significa que para cada elemento do dual de Y, isto é, $\forall y \in Y'$, a aplicação $t \mapsto \langle u(t), y\rangle$ é contínua.

Teorema 1.4. *Sejam X e Y Espaços de Banach, sendo X reflexivo. Suponha que a imersão $X \hookrightarrow Y$ é densa e contínua. Então*

$$L^\infty(0,T:X) \cap C_s([0,T]:Y) = C_s([0,T]:X).$$

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [25]. ■

1.3 Os Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$

Nesta seção apresentaremos, de forma resumida, alguns conceitos e propriedades básicas dos Espaços de Sobolev.

Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, m um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o **Espaço de Sobolev**, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, com $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| \leq m$. Em símbolos:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

sendo D^α no sentido das distribuições. Mostra-se que $W^{m,p}(\Omega)$ é uma Espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p_{L^p(\Omega)} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \tag{1.1}$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad p = \infty. \tag{1.2}$$

Quando $p = 2$, usamos a notação $H^m(\Omega)$ no lugar de $W^{m,2}(\Omega)$. Verifica-se (veja M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28]) que $H^m(\Omega)$ é um Espaço de Hilbert com o produto escalar

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}. \tag{1.3}$$

Observação 1.8. *É importante comentar que usando o Lema Du Bois Reymond 1.1, mostra-se que se $u \in W^{m,p}(\Omega)$ então supp$(D^\alpha u) \subset$ supp(u), para todo $|\alpha| \le m$. Por outro lado, quando $m = 0$, tem-se $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Além disso, como mostrado em M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28], $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, porém, também em [28] verifica-se que para $m \ge 1$, em geral, $\mathcal{D}(\Omega)$ não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Por esta razão, denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,*

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Analogamente ao caso definido anteriormente, quando $p = 2$ escrevemos $H_0^m(\Omega)$ no lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$, isto é,

$$W_0^{m,2}(\Omega) := H_0^m(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}.$$

Supondo $1 \le p < \infty$, $1 < q \le \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, denotamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ e $H^{-m}(\Omega)$ os duais topológicos de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$, respectivamente. Por fim, como para $1 < p < \infty$, os espaços $L^p(\Omega)$ são reflexivos e, de acordo com o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, toda sucessão limitada em E possui uma subseção fracamente convergente. Prova-se que sendo $1 < p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo, isto é o que afirma o

Teorema 1.5. *Se $1 < p < \infty$ então o Espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um Espaço de Banach reflexivo.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros [25] ou V. Cavalcanti e M. Cavalcanti [7]. ■

Enunciaremos a seguir a Desigualdade de Poincaré, a partir da qual, com certas hipóteses sobre Ω, podemos verificar que em $H_0^m(\Omega)$, a norma do "gradiente" e a norma induzida por $H^m(\Omega)$ sobre este espaço, são equivalentes. Antes porém, seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, diremos que Ω é limitado em uma direção x_i do $\mathbb{R}^n$ se a projeção de Ω sobre o eixo x_i é um conjunto limitado da reta.

Lema 1.3 (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos que Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$ e limitado em alguma direção x_i. Existe uma constante $C(\Omega)$ tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), (1 \leq p \leq +\infty).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Sobre $H_0^1(\Omega)$, a expressão $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$ é um produto escalar que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ e esta é equivalente à norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28] ou H. Brezis [4]. ■

Encerramos esta seção com as seguintes definições:

Definição 1.5 (Imersões: Contínua/Compacta). *Considere os Espaços de Hilbert H e H_1, munidos com as normas $\|\cdot\|_H$ e $|\cdot|_{H_1}$, respectivamente. Suponha que $H_1 \subset H$ e considere $\tau : H_1 \longrightarrow H$ a injeção canônica de H_1 em H, que a cada $u \in H_1$ faz corresponder um $\tau u \in H$. Dizemos que τ é o operador imersão (ou a imersão) de H_1 em H.*

*Além disso, dizemos que a **imersão τ é contínua**, quando existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_H \leq C|u|_{H_1}, \quad \forall u \in H_1.$$

*A aplicação τ é dita **imersão compacta** quando a imagem, por τ, de conjuntos limitados de H_1 são conjuntos relativamente compactos de H, isto é, conjuntos cujos fechos são compactos em H.*

1.4 Espaços de Sobolev Fracionados

Sendo Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ regular, e $s > 0$ um número real. Nesta seção apresentamos a definição e algumas propriedades dos espaços $H^s(\Omega)$, os quais, são estudados com maior profundidade em Lions-Magenes [22] e em M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28]. Para isso, daremos outra caracterização dos espaços $H^m(\Omega)$ vistos na seção anterior. Em síntese, temos

$$H^m(\Omega) := \big\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq m\big\}.$$

Antes de definirmos o espaço $H^s(\Omega)$, são necessárias algumas observações preliminares sobre as distribuições temperadas, cujos detalhes podem ser encontrados em [28]. Vejamos:

Diz-se que uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ decresce rapidamente no infinito quando, para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$P_k(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2_{\mathbb{R}^n})^k |D^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

ou equivalentemente

$$\lim_{\|x\|\to\infty} P(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

para todo polinômio P de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}$.

Considere o espaço vetorial $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ das funções que decrescem rapidamente no infinito. Dizemos que uma sucessão (ϕ_ξ), em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, converge para zero quando, para todo $k \in \mathbb{N}$, a sucessão $\big(P_k(\phi_\xi)\big)$ converge para zero em $\mathbb{K}$. Ademais, a sucessão (ϕ_ξ) converge para ϕ, em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se $\big(P_k(\phi_\xi - \phi)\big)$ converge para zero em $\mathbb{K}$.

Exemplo 1.4. *Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*
De fato, desde que $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe um compacto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ tal que supp$(\phi) \subset \mathcal{K}$. Logo, dados $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, é possível encontrar $\sigma > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, com $\|x\|_{\mathbb{R}^n} > \sigma$, tenha-se

$$\|x\|^k_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \phi(x)| = 0 < \varepsilon,$$

mostrando que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.9 (Espaço de Schwartz). *O espaço das funções que decrescem rapidamente no infinito $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é conhecido como* **Espaço de Schwartz***.*

Definição 1.6 (Distribuição Temperada). *As formas lineares definidas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, contínuas, no sentido da convergência acima em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, são denominadas distribuições temperadas. O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas, com a convergência pontual, será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T, \quad \text{em} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{se} \quad \lim_{\nu\to\infty} \langle T_\nu, \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Antes de prosseguirmos precisamos definir a importante Transformada de Fourier.

Definição 1.7. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A* **Transformada de Fourier** *de f, denotada por $\hat{f}$, é uma função definida sobre o espaço $\mathbb{R}^n$ e dada pela fórmula*

$$\hat{f}(\zeta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-2\pi i\langle\zeta,x\rangle} f(x) dx,$$

onde $\langle\zeta, x\rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ e $i = \sqrt{-1}$.

Considere a função $J_m(x) = (1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2)^{\frac{m}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Mostra-se que $J_m(x)$ decresce lentamente no infinito. Para finalmente definirmos o espaço $H^s(\Omega)$ precisamos do seguinte resultado:

Proposição 1.3. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ temos:*

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{S}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28]. ∎

Motivados pela proposição anterior, para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, consideramos a função $J_s(x) = (1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2)^{\frac{s}{2}}$ e definimos o espaço vetorial $H^s(\mathbb{R}^n)$ por:

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x) \hat{v}(x) dx,$$

e a norma induzida

$$\|x\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2)^s |\hat{u}(x)|_{\mathbb{R}}^2 dx.$$

Mostra-se em M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28] que $H^s(\mathbb{R}^n) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}^n)$. Ademais, tem-se:

Proposição 1.4. *Para todo $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um Espaço de Hilbert. Além disso, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é continuo e densamente imerso em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28]. ∎

Observação 1.10. *Para todo $s \in \mathbb{R}$, denotaremos o dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$ por $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, ou seja,*

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) := (H^s(\mathbb{R}^n))'.$$

O resultado abaixo é, também, um fator de motivação para a definição do espaço $H^s(\Omega)$.

Proposição 1.5. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^m. Então*

$$H^m(\Omega) = \{u = v|_{\Omega}; v \in H^m(\mathbb{R}^n)\}.$$

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28]. ■

Quando Ω é um aberto limitado e regular do $\mathbb{R}^n$, define-se o espaço $H^s(\Omega)$ por

$$H^s(\Omega) := \{u = v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \inf\{\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w|_\Omega = u\}.$$

Proposição 1.6. *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ e Ω é um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^{s_2}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Lions-Magenes [22]. ■

Finalizamos esta seção caracterizando o espaço $H^s(\Gamma)$. Como bem é observado por M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros, em [28], no caso em que

$$\Omega := \mathbb{R}^n_+ := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad e \quad x_n > 0\},$$

tem-se $\Gamma = \{(x', 0); x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. Assim, identificando cada função u definida em Γ com uma função do $\mathbb{R}^{n-1}$ em $\mathbb{R}$ tal que $x' \mapsto u(x', 0)$, segue-se que o espaço vetorial $\mathcal{D}(\Gamma)$, das funções definidas em Γ com derivadas parciais de todas as ordens, é dado por $\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ e, $L^p(\Gamma) = L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Logo, nesse caso particular, temos $H^s(\Gamma) = H^s(\mathbb{R}^{n-1})$.

Para o caso onde Γ é a fronteira de um aberto limitado regular Ω do $\mathbb{R}^n$, consideremos $Q := \{y; y = (y', y_n); \|y'\| \leq 1 \text{ e } -1 < y_n < 1\}$, $Q^+ := \{y \in Q; y_n > 0\}$ e $Q^- := \{y \in Q; y_n < 0\}$. Além disso, sejam $\sum := Q \cap \{y_n = 0\}$ e $\{(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_K, \varphi_k)\}$ um sistema de cartas locais para Γ. A cobertura aberta $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de $\overline{\Omega}$ determina uma partição C^∞ da unidade subordinada, isto é, existem $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

(i) $supp(\theta_0) \subset \Omega;\ supp(\theta_i) \subset U_i,\ i = 1, 2, \ldots, k;$

(ii) $0 \leq \theta_i \leq 1;$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \theta_i(x) = 1, \forall x \in \overline{\Omega}.$

Seja u uma função integrável definida sobre Γ, por (i) temos

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k} (\theta_i u)(x), \text{ para quase todo } x \in \Gamma. \tag{1.1}$$

Para cada $1 \leq i \leq k$, definimos

$$u_i(y) = (\theta_i u)(\varphi^{-1}(y)).$$

Observe que

$$S(u\theta_i) = \overline{\{x \in \Omega; (u\theta_i) \neq 0\}} \subset supp(\theta_i) \cap \Gamma \subset U_i \cap \Gamma.$$

Daí, segue-se que $S(u\theta_i)$ é um compacto do $\mathbb{R}^n$, já que a interseção de fechados é ainda um fechado e $U_i \cap \Gamma$ é limitado. Assim, o conjunto

$$S(u_i) = \overline{\{x \in \Omega; (u\theta_i) \neq 0\}},$$

é um compacto do $\mathbb{R}^{n-1}$ contido no aberto Γ, pois $\varphi_i(S(u\theta_i)) = S(u_i)$ e φ é contínua em $S(u\theta_i)$. Note que $supp(u_i) \subset S(u_i) \subset \Gamma$. Então, podemos estender u_i da seguinte forma:

$$\tilde{u}_i(y) = \left| \begin{array}{ll} (u\theta_i)(\varphi^{-1}(y)), & \text{se } y \in \Gamma \\ 0, & \text{se } y \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Gamma. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Desta construção vemos que $\tilde{u}_i$ possui as mesmas propriedades de u_i. Neste caso, como u é integrável, então $\tilde{u}_i$ é também integrável e

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)dy = \int_{U_i \cap \Gamma} u(x)\theta_i(x)J_i(x)d\Gamma,$$

onde $J_i(x)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\Gamma_i = U \cap \Gamma$. Por outro lado, se para cada $1 \leq i \leq k$, $\tilde{u}_i$ for integrável, temos por (1.1) que u também será e

$$\int_\Gamma u(x)d\Gamma = \sum_{i=1}^k \int_\Gamma (u\theta_i)(x)d\Gamma = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)\overline{J}(y)dy.$$

Com isso, denotando por $d\Gamma$, a medida sobre Γ induzida pela medida de Lebesgue, definiremos o espaço $L^p(\Gamma)$ como sendo o espaço das funções em L^p, somáveis sobre Γ, para a medida $d\Gamma$ com a norma

$$\left| \begin{array}{ll} \|v\|_{L^p(\Gamma)} := \left(\displaystyle\int_\Gamma |v(x)|^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \|v\|_{L^\infty} := \displaystyle\sup_{x \in \Gamma} ess|v(x)|, & p = \infty. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Do mesmo modo, usando a partição da unidade (θ_i), $1 \leq i \leq k$, definimos

$$L^p(\Gamma) := \{v : \Gamma \to \mathbb{R}; v\theta_i \circ \widetilde{\theta_i}^{-1} = \tilde{v}_i \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \ldots, k\},$$

munido da norma

$$\|v\|_{L^p(\Gamma)} := \left(\sum_{i=1}^k \|\tilde{v}_i\|^p_{\mathbb{R}^{n-1}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

a qual mostra-se que é equivalente a norma dada em (1.3).

Definimos o espaço $D(\Gamma)$ da seguinte forma:

$$\mathcal{D}(\Gamma) := \{v : \Gamma \to \mathbb{R}; \widetilde{v\theta_i} \circ \varphi^{-1} \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), \forall m \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, k\},$$

onde

$$C^m(\Gamma) := \{v : \Gamma \to \mathbb{R}; v\theta_i \circ \widetilde{\theta_i}^{-1} = \tilde{u}_i \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), \forall m \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, k\}.$$

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathcal{D}(\Gamma) &\to \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\mapsto \phi_i(u) = \tilde{u}_i = \widetilde{u\theta_i} \circ \varphi^{-1}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Sendo $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, temos

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i v(y) dy = \int_{U_i \cap \Gamma} u(x)\theta_i(x)v(\varphi_i(x))J_i(x) d\Gamma, \tag{1.5}$$

onde $J_i(x)$ é uma função infinitamente diferenciável sobre $U_i \cap \Gamma$. Definindo

$$\psi_i(v) := \left| \begin{array}{ll} \theta_i(x)v(\varphi_i(x))J_i(x), & x \in U_i \cap \Gamma \\ 0, & x \in \Gamma \backslash U_i \cap \Gamma, \end{array} \right.$$

de (1.5) podemos escrever

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_\Gamma u(x)\psi_i(v)(x) dx$$

ou ainda, desde que $\psi_i(v) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, tem-se

$$\langle \phi_i(u), v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \langle u, \psi_i(v) \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma) \times \mathcal{D}(\Gamma)}. \tag{1.6}$$

De (1.6) e como $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Gamma)$, resulta que a aplicação definida em (1.4) se prolonga, continuamente, a uma aplicação que continuaremos denotando por ϕ_i, de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$.

Por fim, definimos para todo $s \in \mathbb{R}$ o espaço.

$$H^s(\Gamma) := \{u; \phi_i(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \ldots, k\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} := \left(\sum_{j=1}^k \|\phi_i(u)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Observação 1.11. *Mostra-se em M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28] que a definição do espaço $H^s(\Gamma)$ não depende do sistema de cartas locais de Γ. Ademais, verifica-se que sistemas* *distintos, possuindo as mesmas propriedades, geram normas equivalentes a dada em (1.7). Portanto, a definição do espaço $H^s(\Gamma)$ não depende do sistema de cartas locais escolhido. Para uma exposição bem mais ampla dos Espaços de Sobolev em uma variedade recomendamos E. Hebey [15]. A seguir, enunciaremos alguns resultados, antes porém, lembremos que: se Ω é um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que Ω é* ***bem regular*** *se sua fronteira Γ é uma variedade de classe C^∞ de dimensão $n-1$ e Ω está localmente em um único lado de Γ, ou seja, $\bar{\Omega}$ é uma variedade com bordo de classe C^∞, sendo Γ o seu bordo.*

Proposição 1.7. *O espaço $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.*

Demonstração: Ver Lions-Magenes [22]. ■

Proposição 1.8. *O espaço $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ está continuamente imerso em $L^2(\Gamma)$.*

Demonstração: Ver Lions-Magenes [22]. ■

1.5 Alguns Resultados Sobre a Teoria do Traço

Condiremos Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ. Representamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço vetorial das funções reais definidas em Ω, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, denotamos por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ. Por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ representamos o conjunto de todas as funções $\rho\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ pertencentes a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, restritas a $\overline{\Omega}$. Em símbolos:

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) := \{\phi|_{\overline{\Omega}} = \rho, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Proposição 1.9. *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28]. ■

De acordo com a Proposição 1.9 e pelo fato que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^1(\Omega)$, podemos estender a aplicação

$$\left|\begin{array}{l} \gamma_0\colon \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \qquad\quad u \mapsto \gamma_0 u = u\big|_{\Gamma}, \end{array}\right.$$

à uma única aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0,

$$\left| \begin{array}{l} \gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \qquad\qquad u \mapsto \gamma_0 u = u\big|_{\Gamma}, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}). \end{array} \right. \tag{1.1}$$

A aplicação dada em (1.1) é denominada *aplicação traço de ordem zero.*

Teorema 1.6. *O núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28]. ■

Mais geralmente, em face de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ser denso em $H^m(\Omega)$ a aplicação

$$\gamma_j \colon \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

pode ser estendida à uma única aplicação linear e contínua, tal que

$$\left.\frac{\partial u^j}{\partial \nu^j}\right|_{\Gamma} = \gamma_j u, \ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \forall j = 1, \ldots, m-1.$$

Desse modo, usando a notação $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ para representar o Espaço de Hilbert

$$H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \cdots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.7 (Teorema do Traço). *A aplicação linear*

$$u \longmapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \cdots, \gamma_{m-1} u) = \left(u\Big|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\Big|_{\Gamma}, \cdots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_A^{m-1}}\Big|_{\Gamma} \right),$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, prolonga-se à uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de $W^{m,p}(\Omega)$ em $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$. Mais precisamente, existe uma única aplicação linear e contínua γ,

$$\left| \begin{array}{l} \gamma : H^m(\Omega) \to \displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \qquad\qquad u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u), \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \end{array} \right. \tag{1.2}$$

com a topologia natural do espaço $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dada por

$$\|w\|_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \|w_0\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|w\|_{H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \ldots + \|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

onde $w = (w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}) \in \displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Além disso, $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$ e γ admite uma inversa à direita, a qual é linear e contínua.

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28] ou Lions-Magenes [22]. ■

Observação 1.12. *A aplicação γ é denominada aplicação traço de ordem m. Com base no estudo acima, quando dizemos que as funções de $H_0^1(\Omega)$ se anulam na fronteira de Ω, na verdade estamos afirmando que $H_0^1(\Omega)$ é o núcleo da aplicação γ_0.*

Encerramos esta seção apresentando um breve resumo do estudo realizado em M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28] sobre o **traço da derivada normal**, onde mostre-se que tomando u em um espaço conveniente, o traço da sua derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ pertence a certo Espaço de Sobolev $H^{-s}(\Gamma)$, sendo $s > 0$ um número real.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com normal externa ν e com fronteira bem regular Γ. Dada $v \in H^1(\Omega)$, $\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$; assim, se $v \in H^2(\Omega)$ então $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$ e $\gamma_0 \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Gamma)$, daí, faz sentido falar sobre a derivada de v na direção ν normal à Γ, isto é, $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}$. Com isso, definimos $\gamma_0 \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \gamma_1 v$. Segue da teoria do traço que γ_1 é uma aplicação contínua de $H^2(\Omega)$ em $L^2(\Gamma)$ de modo que para todo par de funções $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H^2(\Omega)$ vale a fórmula de Green

$$\int_\Omega \Delta v u dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma.$$

E se $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ então

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_\Gamma \Big(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big) dx.$$

Considere o espaço vetorial $\mathcal{H}^0(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, o qual munido com o produto escalar

$$\big(u, v\big)_{\mathcal{H}^0(\Omega)} := \big(u, v\big)_{L^2(\Omega)} + \big(\Delta u, \Delta v\big)_{L^2(\Omega)},$$

é um Espaço de Hilbert. Verifica-se os seguintes resultados:

Proposição 1.10. *$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^0(\Omega)$.*

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28]. ■

Teorema 1.8. *A aplicação*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\bar{\Omega}) & \to & H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \\ u & \mapsto & (\gamma_0 u, \gamma_1 u) \end{array} \right.$$

se estende à uma aplicação linear e contínua de $\mathcal{H}^0(\Omega)$ em $H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma)$.

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [28]. ■

Observação 1.13. *Se Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^2 e $u, \Delta u \in L^2(\Omega)$ então a aplicação $L^2(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ é contínua e, por isso*

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Gamma)}. \tag{1.3}$$

Por outro lado,a imersão $H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é contínua. Assim,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}. \tag{1.4}$$

Portanto, de (1.3) e (1.4), obtemos

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Gamma)}.$$

1.5.1 Traço em $L^2(0, T, H^m(\Omega))$

Nesta seção apresentaremos alguns resultados obtidos por M. M. Miranda [29] sobre o traço em $L^2(0, T, H^m(\Omega))$. Vimos anteriormente que existe uma aplicação traço

$$\gamma\colon H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{1.5}$$

que é linear, contínua e sobrejetora.

Definamos a aplicação

$$\hat{\gamma}\colon L^2(0, T, H^m(\Omega)) \to L^2\left(0, T, \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \tag{1.6}$$

$$u \mapsto \hat{\gamma}u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t),$$

onde $\gamma u(t)$ é a função em (1.5) aplicada ao vetor $u(t) \in H^m(\Omega)$. Mostra-se que a aplicação (1.6) é linear, contínua e sobrejetora.

Proposição 1.11. *Seja $u \in L^2(0, T, H^m(\Omega))$ tal que $u' \in L^2(0, T, H^m(\Omega))$, então $\hat{\gamma}u' = (\hat{\gamma}u)'$.*

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [29]. ■

1.5.2 Traço em $H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$

No que segue, enunciaremos para funções de $H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$, um resultado de traço devido a M. Milla. Miranda [29]. Mostra-se que se $f \in H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$ então $f = \phi^0 + \psi^0$, com $\phi^0, \psi^0 \in L^2(0,T,H^m(\Omega))$. Sejam $\mathbb{L} = L^2(0,T,H^m(\Omega)) \times L^2(0,T,H^m(\Omega))$, M o subespaço fechado de $\mathbb{L}$ e os vetores $\{\alpha, \beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0,T,H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0,T,H^m(\Omega))} = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(0,T,H^m(\Omega))$. Considere $M^\perp$ o complemento ortogonal de M. Definindo a aplicação

$$\begin{aligned} H^{-1}(0,T,H^m(\Omega)) &\to M^\perp \\ f \quad &\mapsto \{\phi_f^0, \psi_f^0\}, \end{aligned}$$

onde $\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \xi_f$ é tal que $\|f\| = \|\{\phi_f^0, \psi_f^0\}\|$ e

$$\xi_f = \big\{\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \mathbb{L}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v') = \langle f, v\rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega)\big\},$$

isto é, o conjunto dos $\{\phi_f, \omega_f\} \in \mathbb{L}$ tais que $f = \phi_f + \psi_f$. Verifica-se que a aplicação definida acima é uma isometria linear e contínua.

Para $f \in H^{-1}(0,T,H^m(\Omega))$ define-se $\tilde{\gamma} f$ da seguinte forma:

$$\langle \tilde{\gamma} f, w\rangle = \int_0^T (\gamma\phi_f^0, w)_Y dt + \int_0^T (\gamma\psi_f^0, w')_Y dt,$$

com $w \in H^{-1}\left(0, T, \sum_{j=0}^{m-1} H^{m-j\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, a qual é linear e contínua. Desse modo, fica definida a aplicação linear e contínua

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : H^{-1}(0,T,H^m(\Omega)) &\to H^{-1}\left(0, T, \sum_{j=0}^{m-1} H^{m-j\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ f &\mapsto \tilde{\gamma} \end{aligned}$$

Esta aplicação é denominada **aplicação traço** para as funções de $H^{-1}(0,T,H^m(\Omega))$.

1.5.3 Interpolação de Espaços

Com base no estudo feito por M. Milla. Miranda [29], o objetivo desta seção é apresentar uma introdução ao estudo de certos operadores A^α e de certos espaços $X_\theta := [V,H]_\theta$ (interpolação ou construção de espaços "intermediários", entre determinados Espaços Hilbert V e H). Entretanto, destacamos que uma abordagem bem mais ampla sobre tais temas é feita em Lions-Magenes [22]. Por outro lado, ao leitor interessado, várias aplicações destas teorias, tratando problemas envolvendo Equações Diferenciais, podem ser encontradas em I. Lasiecka-H. Triggiani [19] ou em I. Lasiecka-H. Triggiani [20].

Considere V e H Espaços de Hilbert, munidos com os produtos internos $((\cdot,\cdot)), (\cdot,\cdot)$ respectivamente, sendo a dimensão de V infinita e $V \subset H$, tais que a injeção de V em H é contínua e V é denso em H. Seja $a(u,v)$ uma forma sesquilinear contínua em $V \times V$. Denotamos por $D(A)$ o conjunto dos $u \in V$ tais que a forma antilinear $v \mapsto a(u,v)$ é contínua em V com a topologia induzida por H. Como V é denso em H podemos prolongar esta forma antilinear a todo H. Além disso, pelo Teorema de Representação de Riesz 5.14, para cada $u \in D(A)$ existe um único $Au \in H$ tal que

$$a(u,v) = (Au, v), \qquad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{1.7}$$

Segue-se, então, que

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \quad \text{satisfazendo} \quad a(u,v) = (f,v), \ \ \forall v \in V\}.$$

Com essa caracterização de $D(A)$, verifica-se que $D(A)$ é um subespaço linear de H e que $A\colon D(A) \to H$, definido por (1.7), é um operador de H dado pela tripla $\{V, H, a(u,v)\}$. Se, além e ser uma forma sesquilinear contínua em $V \times V$, $a(u,v)$ for coerciva, isto é, $\exists C > 0$, tal que

$$|a(v,v)| \geq C\|v\|^2 \quad \forall v \in V, \tag{1.8}$$

então valem os seguintes resultados:

Teorema 1.9. *Se $a(u,v)$ verifica (1.8), então para cada $f \in H$ existe único $u \in D(A)$ tal que*

$$Au = f. \tag{1.9}$$

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [30]. ■

Proposição 1.12. *Suponha que $a(u,v)$ satisfaz (1.8). Então $D(A)$ é denso em H e A é um operador fechado de H.*

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [30]. ■

Agora, considere S um operador fechado de H com domínio $D(S) \subset H$. Introduzimos em $D(S)$ o produto interno

$$(u,v)_{D(S)} = (u,v)_H + (Su, Sv)_H. \tag{1.10}$$

Como S é fechado em H, segue-se que $D(S)$ é um Espaço de Hilbert com o produto interno dado em (1.10). Suponha que:

$$\left|\begin{array}{l} \text{o operador } \ A \ \text{ é definido pela terna } \ \{V, H, a(u,v)\} \\ \exists \ \ \alpha_0, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \quad \text{tais que } \ Re[a(v,v) + \alpha_0(v,v)] \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V; \\ V \overset{comp}{\hookrightarrow} H \qquad \text{(imerção compacta),} \end{array}\right. \tag{1.11}$$

o operador B é definido pela terna

$$\{V, H, b(u,v)\}, \qquad \text{onde} \qquad b(u,v) = a(u,v) + \alpha_0(u,v). \tag{1.12}$$

Feitas tais considerações já podemos apresentar, entre outros resultados, o importante Teorema Espectral.

Teorema 1.10 (Teorema Espectral). *Sob condição (1.11) e supondo $a(u,v)$ hermitiano, isto é, $a(u,v) = \overline{a(u,v)}$, são válidos:*

(i) *A é autoadjunto e existe um sistema ortonormal completo (enumerável) (w_γ) constituído por autovetores de A;*

(ii) *se (λ_γ) são os autovalores de A correspondentes aos autovetores (w_γ), então $\lambda_\gamma \longrightarrow \infty$,*

$$D(A) = \left\{ u \in H; \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_\gamma^\alpha |(u, w_\gamma)|^2 < \infty \right\} \tag{1.13}$$

e

$$Au = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_\gamma (u, w_\gamma) w_\gamma \qquad \forall u \in D(A). \tag{1.14}$$

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [30]. ■

Supondo válida a condição (1.11) e sendo $a(u,v)$ hermitiano, como consequência do Teorema Espectral 1.10 mostra-se que:

Proposição 1.13. *Com a notação acima, tem-se*

$$D(A^m) = \left\{ u \in H; \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_\gamma^{2m} |(u, w_\gamma)|^2 < \infty \right\} \tag{1.15}$$

e

$$A^m u = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_\gamma^m (u, w_\gamma) w_\gamma \qquad \forall u \in D(A^m), \tag{1.16}$$

onde m é um número inteiro positivo.

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [30]. ■

Motivados por este resultado apresentamos a

Definição 1.8. *Seja $h(\lambda)$ uma função qualquer de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Definimos $h(\lambda)$ como um operador de H com domínio*

$$D(h(A)) = \left\{u \in H; \sum_{\gamma=1}^{\infty} h^2(\lambda_\gamma)|(u, w_\gamma)|^2 < \infty\right\} \tag{1.17}$$

e

$$h(A)u = \sum_{\gamma=1}^{\infty} h(\lambda_\gamma)(u, w_\gamma)w_\gamma \qquad \forall u \in D(h(A)), \tag{1.18}$$

onde os w_γ são os autovetores de $h(A)$ associados aos correspondentes autovalores $h(\lambda_\gamma)$.

Proposição 1.14. *$h(A)$ um operador autoadjunto de H.*

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [30]. ■

Observação 1.14. *Sabendo que um operador R de H é positivo quando $(Ru, u)_H \geq 0$, para todo u em H (no caso em questão vemos que A é positivo se, e somente se $\lambda_\gamma \geq 0, \quad \forall \gamma$), mostra-se que $h(A)$ é positivo se, e somente se, $h(\lambda_\gamma) \geq 0, \quad \forall \gamma$.*

A proposição seguinte determina a raiz quadrada de um operador positivo A.

Proposição 1.15. *Suponha que A é positivo. Então o operador S de H com domínio*

$$D(S) := \left\{u \in H; \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_\gamma |(u, w_\gamma)|^2 < \infty\right\} \tag{1.19}$$

e definido por

$$Su := \sum_{\gamma=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_\gamma}(u, w_\gamma)w_\gamma \qquad \forall u \in D(S), \tag{1.20}$$

é o único operador autoadjunto positivo de H que satisfaz $S^2 = A$.

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [30]. ■

O operador S definido acima, denotado por $A^{\frac{1}{2}}$, é denominado raiz quadrada positiva de A.

Considere o Espaço de Hilbert $D(B^{\frac{1}{2}})$ equipado com o produto interno

$$(u, v)_{D(B^{\frac{1}{2}})} := \left(B^{\frac{1}{2}}u, B^{\frac{1}{2}}v\right)_H.$$

Temos:

Proposição 1.16. *Sob as condições descritas acima:*

(i) $V = D(B^{\frac{1}{2}})$;

(ii) *Se A é positivo, então* $D(A^{\frac{1}{2}}) = D(B^{\frac{1}{2}})$.

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [30]. ■

Finalmente, considere os Espaços de Hilbert V e H, nas condições anteriormente estudadas, quais sejam: a imersão de V ém H é compacta, V é denso em H e tem dimensão infinita; o operador A é definido pela terna $\{V, H, ((u, v))\}$; (λ_γ) é uma sucessão de autovalores de A ($\lambda_\gamma > 0$, $\lambda \to \infty$) associados a sucessão ortonormal (completa) de autovetores (w_γ).

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, denotaremos por A^α o operador autoadjunto positivo de H definido pela função

$$h(\lambda) = \left| \begin{array}{lll} \lambda^\alpha, & \text{se} & \lambda \geq 0 \\ 0, & \text{se} & \lambda < 0, \end{array} \right.$$

isto é,

$$D(A^\alpha) := \left\{ u \in H; \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_\gamma^{2\alpha} |(u, w_\gamma)|^2 < \infty \right\} \tag{1.21}$$

e definido por

$$A^\alpha u := \sum_{\gamma=1}^{\infty} \lambda_\gamma^\alpha (u, w_\gamma) w_\gamma \qquad \forall u \in D(A^\alpha). \tag{1.22}$$

Denotando por S a raiz quadrada de A, pela Proposição 1.16 vemos que

$$V = D(S) \qquad \text{e} \qquad ((u, v)) = (Su, Sv) \qquad \forall u, v \in V.$$

Definimos os Espaços de Hilbert

$$X_\theta := [V, H]_\theta = D(S^{1-\theta}) \qquad (1 \leq \theta \leq 1),$$

com o produto interno

$$(u, v)_{X_\theta} = (S^{1-\theta} u, S^{1-\theta} v)_H$$

e a norma do gráfico de $S^{1-\theta}$, isto é,

$$\left(\|u\|_H^2 + \|S^{1-\theta} u\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que $X_0 = [V, H]_0 = V$, $X_1 = [V, H]_1 = H$, para $\theta_1 \leq \theta_2$ tem-se $X_{\theta_1} \subset X_{\theta_2}$ e vale o seguinte resultado:

Proposição 1.17. *Se $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$, então a imersão de X_{θ_1} em X_{θ_1} é contínua e densa.*

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda [30]. ■

Observação 1.15. *Considerando em V e H, novos produtos internos equivalentes aos aqui definidos e, definindo $Y_\theta := [V, H]_\theta$, com relação a estes novos produtos internos, mostra-se em Lions-Magenes [22] que se tem $Y_\theta = X_\theta$ e suas normas são equivalentes. Por outro lado, sendo Ω um subconjunto aberto limitado e bem regular do $\mathbb{R}^n$ (veja a Observação 1.11), s um número real positivo e m um número inteiro, tais que $s > m$. Também em [22] verifica-se que os espaços*

$$H^s(\Omega) := [H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_{1-\frac{s}{m}},$$

*denominados **Espaços de Sobolev de ordem** s, não dependem dos inteiros m com a propriedade acima, na verdade o que mudam são as normas, sendo estas, todas equivalentes. Temos ainda:*

Teorema 1.11. *Seja Ω um aberto limitado e bem regular do $\mathbb{R}^n$. Então*

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\Omega),$$

para quaisquer $s_1, s_2 > 0, \quad 0 < \theta < 1$, (com normas equivalentes).

Demonstração: Ver Lions-Magenes [22]. ■

Teorema 1.12. *Sejam Ω um aberto limitado e bem regular do $\mathbb{R}^n$ e Γ sua fronteira. Então*

$$[H^{s_1}(\Gamma), H^{s_2}(\Gamma)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\Gamma),$$

para quaisquer $s_1 > s_2$ em $\mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$, (com normas equivalentes).

Demonstração: Ver Lions-Magenes [22]. ■

Teorema 1.13. *Seja Ω um aberto limitado e bem regular do $\mathbb{R}^n$. O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^s(\Omega)$ se, e somente se, $s \leq \dfrac{1}{2}$. Nesse caso, $H_0^s(\Omega) = H^s(\Omega)$. Quando $s > \dfrac{1}{s}$ tem-se $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$ estritamente. Onde $H_0^s(\Omega)$ denota o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^s(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Lions-Magenes [22]. ■

Teorema 1.14. *Sejam Ω um aberto limitado e bem regular do $\mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$. Para todo $\epsilon > 0$, a injeção*

$$H^s(\Omega) \longrightarrow H^{s-\epsilon}(\Omega),$$

é compacta.

Demonstração: Ver Lions-Magenes [22]. ■

Teorema 1.15. *Seja Ω um aberto limitado e bem regular do $\mathbb{R}^n$. Dados $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$, com $s_1 > s_2 > s_3$. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante $C(\epsilon)$ tal que*

$$\|u\|_{H^{s_2}(\Omega)} \leq \epsilon \|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} + C(\epsilon)\|u\|_{H^{s_3}(\Omega)}, \qquad \forall u \in H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Lions-Magenes [22]. ■

Mais geralmente tem-se:

Teorema 1.16. *Sejam X, Y, Z Espaços de Banach com $X \subset Y \subset Z$ e a injeção $X \longrightarrow Y$ é compacta. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante $C(\epsilon)$ tal que*

$$\|u\|_Y \leq \epsilon \|u\|_X + C(\epsilon)\|u\|_Z, \qquad \forall u \in X.$$

Demonstração: Ver Lions-Magenes [22]. ■

1.6 Operadores Monótonos e Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção veremos algumas definições e conceitos básicos sobre operadores não lineares em Espaços de Banach; além de alguns resultados envolvendo operadores maximais monótonos, cujos detalhes podem ser encontrados em V. Barbu [2]. Apresentaremos ainda, importantes propriedades a cerca da teoria de Semigrupos de operadores lineares, as quais, são estudadas de forma detalhada em A. M. Gomes [14], A. Pazy [32] , V. Barbu [2] e S. Zheng [23]. No que segue, não nos esforçaremos para a generalidade e, em vez disso, trataremos apenas algumas classes especiais de Semigrupos, como por exemplo, Semigrupos dissipativos, uma vez que este não é o nosso foco; ademais, a teoria de Semigrupo é geralmente aceita como parte integrante da Análise Funcional e está incluída na maioria dos tratados sobre este tema.

1.6.1 Operadores Maximais Monótonos

Considere os espaços vetoriais reais X e Y. Denotaremos por $X \times Y$ o conjunto $\{(x, y); x \in X \text{ e } y \in Y\}$, por $\mathcal{P}(Y)$ denotamos o conjunto de todos os subconjuntos de Y. Dizemos que $A\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ é um operador de X em Y se a cada $x \in X$, A associa $Ax \in \mathcal{P}(Y)$ e nesse caso definimos:

1. O domínio do operador A: $D(A) := \{x \in X; Ax \neq \varnothing\}$;

2. O conjunto imagem do operador A: $\Re(A) := \bigcup_{x \in X} Ax$;

3. O Gráfico de A: $Gr(A) := \{(x, y); y \in Ax\}$.

Se para cada $x \in D(A)$ o conjunto Ax for unitário então diremos que A é **unívoco** (ou **univalente**), caso contrário, diremos que A é **multívoco** (ou **multivalente**), e nesse caso, A pode ser visto como um subconjunto de $X \times Y$. Quando o operador A é unívoco, denotamos $A \colon D(A) \subset X \to Y$. Além disso, por X' representamos o dual de X, isto é,

$$X' := \{f \colon X \to \mathbb{R}; f \text{ é linear e contínua}\},$$

por fim, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ denota a dualidade entre X' e X.

Definição 1.9 (Operador monótono). *Dizemos que um operador $A \colon D(A) \subset X \to \mathcal{P}(X')$, (ou $A \colon D(A) \subset X' \to \mathcal{P}(X)$) é* **monótono** *se*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_{X' \times X} \geq 0, \qquad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Gr(A).$$

Se A for unívoco a definição acima pode ser reescrita como

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle_{X' \times X} \geq 0, \qquad \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

Quando A é unívoco e linear é suficiente verificar que

$$\langle Ax, x \rangle_{X' \times X} \geq 0, \qquad \forall x \in D(A).$$

Exemplo 1.5 (Subdiferencial). *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi \colon H \to (-\infty, \infty]$ uma função própria e convexa sobre H, isto é, $\varphi \not\equiv \infty$ e*

$$\varphi\big(tx + (1-t)y\big) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Considere o operador multívoco $\partial\varphi$ chamado ***subdiferencial*** *de φ definido por*

$$\left| \begin{array}{l} \partial\varphi : H \longrightarrow \mathcal{P}(H') \\ \quad x \mapsto \partial\varphi(x) = \{y \in H'; \varphi(z) \geq \varphi(x) + \langle y, z - x \rangle_{H' \times H} \quad \forall z \in H\} \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Observe que $\partial\varphi$ é um operador monótono, visto que para $x_1, x_2 \in H$, $y_1 \in \partial\varphi(x_1), y_2 \in \partial\varphi(x_2)$, em particular temos

$$\varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle_{H' \times H}, \qquad e \qquad \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) + \langle y_2, x_2 - x_1 \rangle_{H' \times H}.$$

Assim,

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \geq \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \langle y_2, x_2 - x_1 \rangle_{H' \times H} + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle_{H' \times H},$$

o que implica

$$\begin{aligned}
&\langle y_2, x_2 - x_1 \rangle_{H' \times H} + \langle y_1, x_2 - x_1 \rangle_{H' \times H} \leq 0 \\
\Longleftrightarrow& - \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle_{H' \times H} - \langle y_1, x_1 - x_2 \rangle_{H' \times H} \leq 0 \\
\Longleftrightarrow&(-1)\big(\langle y_2, x_1 - x_2 \rangle_{H' \times H} - \langle y_1, x_1 - x_2 \rangle_{H' \times H}\big) \leq 0 \\
\Longleftrightarrow&\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle_{H' \times H} \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\partial\varphi$ é monótono.

Operador Maximal Monótono

Antes de definirmos operador maximal monótono, precisamos dizer o que significa ser maximal. Para isso, consideremos a seguinte relação no conjunto de todos os operadores de X em Y.

$$A \leq B \Longleftrightarrow Gr(A) \subset Gr(B).$$

Mostra-se que a relação "$\leq$" definida acima é de ordem parcial, ou seja:

- é reflexiva: $Gr(A) \subset Gr(A)$;
- é antissimétrica: se $Gr(A) \subset Gr(B)$ e $Gr(B) \subset Gr(A)$ então $Gr(A) = Gr(A)$;
- é transitiva: se $Gr(A) \subset Gr(B)$ e $Gr(B) \subset Gr(C)$ então $Gr(A) \subset Gr(C)$.

Observação 1.16. *A palavra "parcial" significa que podem existir a, b tais que nem $a \leq b$ nem $b \leq a$. Nesse caso, dizemos que a e b são elementos **incomparáveis**. Por outro lado, um conjunto M é **totalmente ordenado** ou uma **cadeia**, quando é parcialmente ordenado e dois quaisquer elementos são comparáveis, ou seja, dados $x, y \in M$ vale sempre $x \leq y$ ou $y \leq x$ (ou ambos). Um **limite superior**, ou **uma cota superior**, para um subconjunto W de um conjunto parcialmente ordenado P é um elemento $u \in P$ tal que*

$$a \leq u, \qquad \text{para todo } a \in W.$$

*Vale observar que pendependo de P e de W tal elemento pode não existir. Entretanto, quando existe, um elemento $m \in P$ é dito **maximal** se*

$$m \leq a \qquad \text{implicar} \qquad m = a.$$

Definição 1.10 (Operador maximal monótono). *Dizemos que um operador* $A\colon D(A) \subset X \to \mathcal{P}(X')$ *é* ***maximal monótono*** *quando* A *é elemento maximal no espaço de todos os operadores monótonos de* X*, isto é, dado qualquer operador monótono* $B\colon D(B) \subset X \to \mathcal{P}(X')$ *se* $A \leq B$*, então* $A = B$.

Exemplo 1.6. *Sejam* H *um Espaço de Hilbert e* $\varphi\colon H \to (-\infty, \infty]$ *uma função convexa sobre* H*,* $\varphi \not\equiv \infty$ *e semicontínua inferiormente. Seja* $y \in H$*, com o auxilio da aplicação convexa e semicontínua inferiormente* $x \mapsto \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x - y\|_H^2$*, mostra-se que o operador subdiferencial definido no Exemplo 1.5 é maximal monótono.*

O resultado seguinte é equivalente a definição de operador maximal monótono apresentada acima.

Proposição 1.18. *O operador* $A\colon D(A) \subset X \to \mathcal{P}(X')$ *é maximal monótono se, e somente se, para todo* $(x_0, y_0) \in X' \times X$ *tal que*

$$\langle y_0 - y, x_0 - x\rangle_{X' \times X} \geq 0, \qquad \forall (x, y) \in Gr(A),$$

tem-se $(x_0, y_0) \in Gr(A)$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponhamos, por contradição, que A é maximal monótono e que existe $(x_0, y_0) \in X' \times X$ tal que

$$\langle y_0 - y, x_0 - x\rangle_{X' \times X} \geq 0, \qquad \forall (x, y) \in Gr(A) \quad \text{com} \quad (x_0, y_0) \notin Gr(A).$$

Seja $\tilde{A}$ tal que $Gr(\tilde{A}) = Gr(A) \cup \{(x_0, y_0)\}$, é claro que $A \leq \tilde{A}$ e $\tilde{A}$ é monótono, o que contradiz a maximalidade de A.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que A é maximal monótono e seja $B\colon D(B) \subset X \to \mathcal{P}(X')$ um operador monótono tal que $A \leq B$. Considere $(x_0, y_0) \in Gr(B)$, sendo B monótono tem-se

$$\langle y_0 - y, x_0 - x\rangle_{X' \times X} \geq 0, \qquad \forall (x, y) \in Gr(B).$$

Em particular, para todo $(x, y) \in Gr(A)$, logo, por hipótese $(x_0, y_0) \in Gr(A)$. Então $Gr(B) \subset Gr(A)$, isto é, $B \leq A$ e pela antissimetria segue-se que $A = B$. ∎

Observação 1.17. *Se* A *é maximal monótono e* λ *é um número positivo qualquer então os operadores* λA *e* A^{-1} *são maximais monótonos.*

Lema 1.4. *Sejam* X *um Espaço de Banach reflexivo e* $A\colon X \to X'$ *um operador maximal monótono. Se* $\big(u_m, v_m\big) \in D(A)$*,* $u_m \rightharpoonup u$*,* $v_m \rightharpoonup v$ *e qualquer um dos dois itens abaixo se verifica, isto é,*

(i) $\lim_{m,n\to\infty} sup\big(u_m - u_n, v_m - v_n\big)_X \leq 0$;

ou

(ii) $\lim_{m\to\infty} sup\big(u_m - u, v_m - v\big)_X \leq 0$.

Então, $(u, v) \in D(A)$ *e* $\big(u_m, v_m\big)_X \longrightarrow \big(u, v\big)_X$.

Demonstração: Ver V. Barbu [2] . ■

Definição 1.11 (Operadores: hemicontínuo/coercivo). *Um operador* $A\colon X \to X'$ *é dito* **hemicontínuo** *se para todo* $x, y \in X$

$$A(x + ty) \rightharpoonup A(x), \qquad quando \qquad t \longrightarrow 0.$$

A é ***coercivo*** *quando*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle Ax, x\rangle_{X'\times X}}{\|x\|} = \infty.$$

Os resultados seguintes caracterizam operadores maximais monótonos em Espaços de Banach reflexivos.

Proposição 1.19. *Sejam* H *um Espaço de Hilbert e* $A\colon H \to H$ *um operador monótono. Se* A *é hemicontínuo, então* A *é maximal monótono.*

Demonstração: Ver V. Barbu [2]. ■

Teorema 1.17. *Sejam* X *e* X' *espaços reflexivos e estritamente convexos; seja* $F\colon X \to X'$ *a aplicação dualidade de* X*. Considere o operador monótono (multívoco)* $A\colon X \to X'$*. Então* A *é maximal monótono se, e somente se, para todo* $\lambda > 0$ *(equivalentemente, para algum* λ*),* $\Re(A + \lambda F) = X'$.

Demonstração: Ver V. Barbu [2]. ■

Corolário 1.2. *Sejam* X *um espaço reflexivo e* $B\colon X \to X'$ *um operador monótono limitado e hemicontínuo. Se o operador (multivoco)* $A\colon X \to X'$ *é maximal monótono então* $A + B$ *é maximal monótono.*

Demonstração: Ver V. Barbu [2] . ■

Observação 1.18. *Note que, em particular, o Corolário 1.2 mostra que qualquer operador monótono limitado e hemicontínuo de* X *em* X' *é maximal monótono. Por outro lado, o teorema seguinte não exige limitação.*

Teorema 1.18. *Sejam X um espaço reflexivo e $B\colon X \to X'$ um operador monótono e hemi-contínuo. Então, B é maximal monótono. Se além disso, B é coercivo então $\Re(B) = X'$.*

Demonstração: Ver V. Barbu [2] . ■

Teorema 1.19. *Sejam X um espaço reflexivo e $A\colon X \to X'$ um operador (multívoco) maximal monótono. Então, $\Re(A) = X'$ se, e somente se, A^{-1} é localmente limitado em cada ponto $x' \in \Re(A) = D(A^{-1})$.*

Demonstração: Ver V. Barbu [2]. ■

Teorema 1.20. *Sejam X um espaço reflexivo e $A, B\colon X \to X'$ operadores maximais monótonos. Suponha que*

$$\big(intD(A)\big) \cap D(B) \neq \varnothing.$$

Então, $A + B$ é maximal monótono.

Demonstração: Ver V. Barbu [2] . ■

O Teorema 1.20 contém um caso especial da seguinte versão do Corolário 1.2. Vejamos:

Corolário 1.3. *Sejam X um espaço reflexivo e $B\colon X \to X'$ um operador monótono e hemi-contínuo. Seja o operador (multivoco) $A\colon X \to X'$ maximal monótono, então $A+B$ é maximal monótono. Além disso, se $A + B$ é coercivo então $\Re(A + B) = X'$.*

Teorema 1.21 (Teorema de Minty). (i) *Um operador $A\colon H \to H'$, sobre um Espaço de Hilbert H é maximal monótono se, e somente se, $\Re(A + \lambda I) = H'$, para algum $\lambda > 0$;*
(ii) *Se um operador monótono A, definido em um Espaço de Hilbet H, é contínuo e $D(A) = H$, então A é maximal monótono.*

Demonstração: Ver H. Brezis [5]. ■

1.6.2 Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares

Veremos a seguir um breve resumo da importante teoria de Semigrupos. No entanto, assim como feito anteriormente, por se tratar de resultados bastante conhecidos, muitos deles não serão demonstrados.

Definição 1.12. *Sejam X um Espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ o conjunto dos operadores lineares limitados de X. Uma aplicação $S\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ é um* **Semigrupo de operadores lineares limitados**, *de X, se*

(i) $S(0) = I$, *onde* I *é o operador identidade de* $\mathcal{L}(X)$*;*

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+$.

Definição 1.13. *Dizemos que o Semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é* **uniformemente contínuo**, *se*

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

Definição 1.14. *O Semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito de* **classe** C^0, *ou* **fortemente contínuo** *se,*

$$\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Por vezes, quando $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ for um Semigrupo de classe C^0 vamos dizer simplesmente que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-Semigrupo. Ademais, por simplicidade, em algumas situações, também serão usadas as notações $S(t)$ ou simplesmente S no lugar de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Lema 1.5. *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0*-Semigrupo em* X*, onde* X *é um Espaço de Banach. Então, existem* $M \geq 1$ *e* $\delta > 0$ *tais que* $0 \leq t \leq \delta$*,*

$$\|S(t)\| \leq M.$$

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32] ou S. Zheng [23]. ∎

Teorema 1.22. *Sejam* X *um Espaço de Banach e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0*-Semigrupo em* X*. Então, existem constantes* $M \geq 1$ *e* $\omega \geq 0$ *tais que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32] , V. Barbu [2] ou S. Zheng [23]. ∎

Corolário 1.4. *Todo Semigrupo de classe* C^0 *é fortemente contínuo em* $\mathbb{R}_+$*, isto é, se* $t \in \mathbb{R}_+$ *então*

$$\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração: Com efeito, seja $t \in \mathbb{R}_+$, de $h > 0$ vemos que

$$\begin{aligned}\big\|S(t+h)x - S(t)x\big\| &= \big\|S(t)[S(h) - I]x\big\| \\ &\leq \big\|S(t)\big\|\big\|(S(h) - I)x\big\| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$. Se $0 < h < t$,

$$\begin{aligned}\big\|S(t-h)x - S(t)x\big\| &= \big\|S(t-h)[I - S(h)]x\big\| \\ &\leq \big\|S(t-h)\big\|\big\|(S(h) - I)x\big\| \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $h \to 0^+$, pelo Teorema 1.22, obtemos

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

$\blacksquare$

Observação 1.19. *Do exposto acima, quando $\omega_0 < 0$, existe $M \geq 1$ tal que*

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

neste caso, diz-se que S é um **Semigrupo uniformemente limitado de classe** C^0. *Se além disso, $M = 1$, S é dito um* **Semigrupo de contrações de classe** C^0.

Definição 1.15. *O operador A definido por:*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \ \ existe \right\},$$

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(A),$$

é dito **gerador infinitesimal do Semigrupo** S. *Algumas vezes o operador linear $\dfrac{S(h) - I}{h}$, $(h > 0)$ será denotado por A_h.*

Proposição 1.20. *Sejam S um Semigrupo de classe C^0 e A o gerador infinitesimal de S.*

(i) *Se $x \in D(A)$ então $S(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{1.2}$$

(ii) *Se $x \in D(A)$, então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau. \tag{1.3}$$

(iii) *Se $x \in X$ então $\displaystyle\int_s^t S(\tau)x d\tau \in D(A)$ e*

$$S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau)x d\tau. \tag{1.4}$$

Demonstração: Fixado $t > 0$, para $h > 0$ temos

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} x = \frac{S(t)S(h) - S(t)}{h} x = \frac{S(h) - I}{h} S(t)x = A_h S(t)x = S(t)A_h x.$$

Vamos justificar a última igualdade. Note que,

$$S(t)A_hx = S(t)\frac{S(h)-I}{h}x = \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} = \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = $$
$$= \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = A_hS(t)x.$$

Como $x \in D(A)$ então $S(t)x \in D(A)$ daí, existe o limite $AS(t)x$, portanto podemos passar ao limite na igualdade acima, donde segue que $S(t)Ax$ existe e; ademais

$$\begin{aligned} A_hS(t)x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h+t)x - S(t)x}{h} = \\ &= \frac{d^+}{dt}S(t)x, \end{aligned} \tag{1.5}$$

Por outro lado, para $0 < h < t$,

$$S(t-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h}\right) = \frac{S(t-h)S(h)x - S(t-h)x}{h} = \frac{S(t)x - S(t-h)x}{h},$$

o que implica

$$\frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} - S(t)A_hx = S(t-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h}\right) - S(t)A_hx. \tag{1.6}$$

Somando e subtraindo $S(t-h)A_hx$ no lado direito de (1.6), temos

$$S(t-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h}\right) - S(t)A_hx - S(t-h)A_hx + S(t-h)A_hx$$

$$= \underbrace{S(t-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h} - A_hx\right)}_{(I)} + \underbrace{\big(S(t-h) - S(t)\big)A_hx}_{(II)}. \tag{1.7}$$

Vamos analisar (I) e (II) separadamente. Como,

$$\left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h} - A_hx\right)\right\| \leq \|S(t-h)\|\left\|\frac{S(h)x - x}{h} - A_hx\right\|,$$

e como $x \in D(A)$, segue da limitação de $S(t-h)$ que

$$\left\|S(t-h)\left(\frac{S(h)x - x}{h} - A_hx\right)\right\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } h \to 0^+. \tag{1.8}$$

Por outro lado, olhando agora (II), da continuidade forte de $S(\cdot)x$, temos

$$\|(S(t-h) - S(t))A_hx\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } h \to 0^+. \tag{1.9}$$

Logo, por (1.7), (1.8), (1.9) e, observando (1.6) vemos que

$$\left\|\frac{S(t)x - S(t-h)x}{h} - S(t)A_hx\right\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } h \to 0^+,$$

donde, a derivada à esquerda de $S(t)x$ é dada por

$$\frac{d^-}{dt}S(t)x = S(t)Ax. \tag{1.10}$$

Então, de (1.5), (1.10)

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = S(t)Ax = AS(t)x,$$

o que prova (i). Agora, para mostrar (ii) observe que basta integrar (1.2) de s a t, obtendo

$$\int_s^t \frac{d}{dt}S(t)xd\tau = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau,$$

ou seja,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau,$$

e (ii) se verifica. Finalmente, para justificar (iii) notemos que para $h > 0$, com $h < t$

$$\begin{aligned}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)xd\tau &= \frac{1}{h}\left[S(h)\int_0^t S(\tau)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau\right]\\ &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t S(h)S(\tau)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau\right]\\ &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t S(\tau+h)xd\tau - \int_0^t S(\tau)xd\tau\right]\\ &= \underbrace{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau}_{I_1} - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)xd\tau.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Afirmação 1: Para cada $x \in X$ e $h > 0$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau = S(t)x.$$

De fato, note que

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - S(t)x\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\big[S(\tau)x - S(t)x\big]d\tau\right\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|S(\tau)x - S(t)x\|d\tau.$$

Daí, sendo $S(\cdot)x$ contínua, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|S(\tau)x - S(t)x\| < \epsilon, \text{ sempre que } |\tau - t| < \delta,$$

portanto, para $h > 0$ pequeno

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau - S(t)x\right\| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\epsilon d\tau = \frac{1}{h}\epsilon h = \epsilon,$$

donde, concluímos que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau = S(t)x,$$

o que prova a Afirmação 1 e mostra que o limite em I_1 existe. Logo, passando ao limite em (1.11), quando $h \to 0^+$, resulta

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\int_0^t S(\tau)x d\tau = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau - \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x d\tau = S(t)x - x.$$

Por fim, segue-se que

$$\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A),$$

com

$$A\left(\int_0^t S(\tau)x d\tau\right) = \lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)-I}{h}\left(\int_0^t S(\tau)x d\tau\right) = S(t)x - x.$$

■

Proposição 1.21. (i) *O gerador infinitesimal de um Semigrupo de classe C^0 é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X.*

(ii) *Um operador A fechado com domínio denso em X é o gerador infinitesimal de no máximo um Semigrupo de classe C^0.*

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Antes de enunciarmos o próximo resultado precisamos da seguinte definição:

Definição 1.16. *Seja S um Semigrupo de classe C^0 e A o seu gerador infinitesimal. Considere $A^0 = I$, $A^1 = A$ e supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo:*

$$D(A^n) := \{x; x \in D(A^{n-1}) \;\; e \;\; A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$Ax := A(A^{n-1}x), \quad \forall x \in D(A^n).$$

Proposição 1.22. *Seja S um Semigrupo de classe C^0 e A seu gerador infinitesimal. Temos:*

1. *$D(A^n)$ é um subespaço de X e A^n é um operador linear de X.*

2. *Se $x \in D(A^n)$, então $S(t)x \in D(A^n), \forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n}S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. *Seja $n \in \mathbb{N}$, se $x \in D(A^n)$ então $\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A^{n+1})$ e*

$$A^{n+1}\left(\int_0^t S(\tau)x d\tau\right) = S(t)A^n x - A^n x.$$

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Teorema 1.23. *Seja A o gerador infinitesimal de um Semigrupo de classe C^0, ou seja, fortemente contínuo em X, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X.*

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Lema 1.6. *Seja A um operador linear fechado de X. Pondo para cada $x \in D(A^k)$,*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|, \tag{1.12}$$

o funcional $|\cdot|_k$ é uma norma em $D(A^k)$ com a qual $D(A^k)$ é um Espaço de Banach.

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Proposição 1.23. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo, então para todo $x \in D(A^k)$*

$$S(t)x \in C^{n-k}\big([0,\infty];[D(A^k)]\big), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Definição 1.17. *Diz-se que um C_0-Semigrupo S, com gerador infinitesimal A, é* **diferenciável** *para $t > t_0 \geq 0$ se $S(t)x \subset D(A)$, $\forall t > t_0$. Diz-se que S é* **diferenciável** *se S é diferenciável para $t > 0$.*

Teorema 1.24. *Seja S um Semigrupo diferenciável, para $t > t_0$ e $S^{(n)}(t)$, o operador linear definido por $S^{(n)}(t) = A^n S(t)$, $A^0 = I, n = 0, 1, \ldots$ Então o operador $S^{(n)}(t)$ possui as seguintes propriedades:*

(i) $\forall t > (n+1)t_0$ *e todo s tal que $t - t_0 > s > nt_0$, tem-se*

$$S^{(n)}(t)x = S(t-s)S^{(n)}(s)x, \quad \forall x \in X, \quad n = 0, 1, \ldots; \tag{1.13}$$

(ii) $S^{(n)}(t)$ *é limitado para todo $t > nt_0, n = 0, 1, \ldots;$*

(iii) $S^{(n)}(t) = \left[AS\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \left[S^{(1)}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n, \quad \forall t > nt_0, \; n = 1, 2, \ldots$

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Teorema 1.25. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-Semigrupo. Se A é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $u \in D(A)$. Então,*

$$S(\cdot)u \in C^0([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X),$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = AS(t)u = S(t)Au.$$

Demonstração: A segunda parte já foi mostrada na Proposição 1.20. Além disso, nessas condições, já vimos que

$$\frac{d}{dt}(S(\cdot)u) = S(\cdot)Au \in C^0([0,\infty); X), \qquad \text{daí,} \qquad S(\cdot)u \in C^1([0,\infty); X).$$

Também já sabemos que $S(t)u \in D(A)$, quando $u \in D(A)$. Assim, considerando $D(A)$ com a norma

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_X,$$

temos

$$S(\cdot)u \in C^0([0,\infty); D(A)), \tag{1.14}$$

pois, dado $t \in [0,\infty)$ e $\{t_n\} \subset [0,\infty)$ com $t_n \longrightarrow t$, quando $n \to \infty$ em $[0,\infty)$, sendo

$$\|S(t_n)u - S(t)u\|_{D(A)} = \|S(t_n)u - S(t)u\|_X + \|AS(t_n)u - AS(t)u\|_X,$$

como $S(\cdot)u$ é contínua, resulta

$$\|S(t_n)u - S(t)u\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

logo,

$$\|AS(t_n)u - AS(t)u\| = \|S(t_n)Au - S(t)Au\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Portanto,

$$\|S(t_n)u - S(t)u\|_{D(A)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

o que mostra (1.14). Então,

$$S(\cdot)u \in C^0([0,\infty); D(A) \cap C^1([0,\infty); X).$$

■

Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \tag{1.15}$$

Como consequência da Proposição 1.20 e usando o resultado a seguir, mostraremos a existência e unicidade de solução clássica para o PVI (1.15). Antes porém, precisamos dizer o que significa ser solução clássica. Vejamos:

Definição 1.18. *Dizemos que uma função $u \in X$ é solução clássica de*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

quando

$$u \in C^0([0,\infty); D(A) \cap C^1([0,\infty); X),$$

e u verifica o PVI.

Corolário 1.5. *Se A é o gerador infinitesimal do C_0-Semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então para todo $u_0 \in D(A)$,*

$$u(t) = S(t)u_0,$$

é a única solução do PVI

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

Demonstração: Para cada $u_0 \in D(A)$, seja $u(t) = S(t)u_0$, daí,

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}(S(t)u_0) = AS(t)u_0, \quad \forall u_0 \in D(A),$$

logo, pelo Teorema 1.25, $u(t) = S(t)u_0$ é solução do (1.15).

Observe que tal função é a única solução. De fato, suponha que $w(t)$ é solução do PVI (1.15). Defina,

$$v(s) = S(t-s)w(s).$$

Assuma por um instante que

$$\frac{d}{ds}v(s) = \frac{d}{ds}(S(t-s)w(s)) = -AS(t-s)w(s) + AS(t-s)w(s) = 0, \tag{1.16}$$

daí concluímos que v é constante. Como

$$v(t) = S(t-t)w(t) = S(0)w(t) = w(t),$$

e

$$v(0) = S(t-0)w(0) = S(t)w(0) = S(t)u_0,$$

pois, w é solução do PVI (1.15), sendo v constante tem-se

$$w(t) = S(t)u_0 = u(t).$$

Agora, vamos justificar a igualdade em (1.16). Note que

$$\frac{d}{ds}v(s) = \lim_{h\to 0}\frac{v(s+h)-v(s)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{S(t-(s+h))w(s+h)-S(t-s)w(s)}{h}.$$

Assim, somando e subtraindo o termo $S(t-s)w(s+h)$, obtemos

$$\frac{d}{ds}v(s) = \lim_{h\to 0}\frac{S(t-(s+h))w(s+h)-S(t-s)w(s+h)+S(t-s)w(s+h)-S(t-s)w(s)}{h},$$

isto é,

$$\frac{d}{ds}v(s) = \lim_{h\to 0}\frac{[S(t-(s+h))-S(t-s)]w(s+h)+S(t-s)[w(s+h)-w(s)]}{h}. \tag{1.17}$$

Por outro lado:

Afirmação 2:

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t-s)[w(s+h)-w(s)]}{h} = AS(t-s)w(s). \tag{1.18}$$

De fato,

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(t-s)[w(s+h)-w(s)]}{h} = S(t-s)\left(\lim_{h\to 0}\frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right) = S(t-s)\frac{d}{ds}w(s) =$$
$$= S(t-s)Aw(s) = AS(t-s)w(s).$$

Afirmação 3:

$$\lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s)]w(s+h)}{h} = -AS(t-s)w(s). \tag{1.19}$$

De fato,

$$\lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s)]w(s+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s-h+h)]w(s+h)}{h}$$

e, por propriedades de Semigrupo

$$\lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s)]w(s+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{S(t-s-h)[I-S(h)]w(s+h)}{h},$$

logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{[S(t-s-h)-S(t-s)]w(s+h)}{h} = -\lim_{h\to 0}S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h), \tag{1.20}$$

Agora, note que

$$\left\| S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h) - AS(t-s)w(s)\right\| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left\| S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h) - S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s)\right\|}_{N_1} +$$

$$+ \underbrace{\left\| S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s) - S(t-s-h)Aw(s)\right\|}_{N_2} +$$

$$+ \underbrace{\left\| S(t-s-h)Aw(s) - S(t-s)Aw(s)\right\|}_{N_3}.$$

Afirmação 4: Quando $h \to 0$ temos:

1. $N_1 \longrightarrow 0$;
2. $N_2 \longrightarrow 0$;
3. $N_3 \longrightarrow 0$;

Prova de 1. Sendo $S(t-s-\cdot)$ limitada, temos

$$\begin{aligned} N_1 &= \left\| S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)(w(s+h)-w(s))\right\| \\ &\leq c_1 \left\| \left(\frac{S(h)-I}{h}\right)(w(s+h)-w(s))\right\|, \end{aligned}$$

logo, somando e subtraindo $S(h)w'(s)$ e $w'(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} N_1 \leq c_1 &\left\| S(h)\left(\frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right) - S(h)w'(s)\right\| \\ &+ c_1\left\| S(h)w'(s) - w'(s)\right\| + c_1\left\| w'(s) - \frac{w(s+h)-w(s)}{h}\right\|, \end{aligned}$$

donde segue que

$$N_1 \leq \left\| S(h)w'(s) - S(h)w'(s)\right\| + \left\| S(h)w'(s) - w'(s)\right\| + \left\| w'(s) - w'(s)\right\|,$$

pela diferenciabilidade de w e continuidade de $S(\cdot)w'(s)$, verifica-se (1).

Prova de 2. Como $S(\cdot)$ é limitado, existe $c_1 > 0$ tal que

$$N_2 \leq c_1 \left\| \left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s) - Aw(s)\right\|.$$

Logo, passando ao limite, pela definição de gerador infinitesimal, temos

$$\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s) \longrightarrow Aw(s),$$

donde segue que $w(s) \in D(A)$ e $N_2 \longrightarrow 0$.

Prova de 3. Segue da continuidade forte da função

$$S(t-s-\cdot)Aw(s).$$

Logo,

$$\left\|S(t-s-h)\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)w(s+h) - AS(t-s)w(s)\right\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad h \to 0. \tag{1.21}$$

Portando, de (1.17), (1.20) e (1.21) juntamente com as afirmações acima o Teorema 1.25 fica provado. (Para mais detalhes e outras aplicações recomendamos também R. A. de Melo [27]) ■

Definição 1.19. *Seja A um operador em um Espaço de Banach X. Denominamos o* **conjunto resolvente** *de A, denotado por $\rho(A)$, como sendo*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

onde

$$\mathcal{L}(X) := \{L : X \longrightarrow X; \quad \textit{é linear e contínuo}\}.$$

Definição 1.20. *Denominamos o* **espectro** *de A sendo o conjunto*

$$\sigma(A) := \mathbb{C}\backslash\rho(A).$$

Observação 1.20. *Representamos a família $R(\lambda; A)$ por*

$$R(\lambda; A) := \{(\lambda I - A)^{-1}; \quad \lambda \in \rho(A) \ e \ (\lambda I - A) \in \mathcal{L}(X)\},$$

onde $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é dito o **operador resolvente** *de A associado a λ, sendo λ real ou complexo. Algumas vezes, por simplicidade, o operador $R(\lambda; A)$ é também denotado por $R(\lambda)$.*

Lema 1.7. *Seja $f : [0, h] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, então*

$$\frac{1}{h}\int_0^h f(\tau)d\tau \longrightarrow f(0), \quad h \to 0^+.$$

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Teorema 1.26. *Se A é o gerador infinitesimal de um Semigrupo de contração $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então $(\lambda I - A)$ é invertível para todo $\lambda > 0$ e*

$$(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda), \tag{1.22}$$

além disso, tem-se para cada $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Uma questão importante a ser analisada, na tentativa de resolver o Problema de Cauchy, é obter condições necessárias e suficientes para que o operador linear A seja gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo $S(t)$. Nesse sentido, os importantes teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips, ajudam a responder essa questão.

Teorema 1.27 (Hille-Yosida). *Um operador linear A sobre um Espaço de Banach X, é um gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo de contrações se, e somente se:*

1. *A é fechado e densamente definido.*

2. *O conjunto resolvente $\rho(A)$ contém $\mathbb{R}_+$ e para todo $\lambda > 0$, vale*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Agora, para apresentarmos outra caracterização dos geradores infinitesimais dos Semigrupos de contrações, dada pelo o Teorema de Lummer-Phillips, precisamos de algumas definições.

Definição 1.21. *Seja X um Espaço de Banach, X' o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X'. Para cada $x \in X$ definimos*

$$J(x) := \{x' \in X';\ \langle x, x' \rangle = \|x\|^2 = \|x'\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach 5.9, $J(x) \neq \varnothing, \quad \forall x \in X$.

Definição 1.22. *Uma* **aplicação dualidade** *é uma aplicação $j\colon X \longrightarrow X', \forall x \in X$; além disso*

$$\|j(x)\| = \|x\|.$$

Definição 1.23. *O operador* $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ *é* **maximal** *se,*

$$\Re(I + A) = X,$$

isto é, $\forall f \in X$*, existe* $u \in D(A)$ *tal que* $(I + A)u = f$.

Definição 1.24. *O operador linear* $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ *é* **dissipativo** *se, para alguma aplicação dualidade* j

$$Re\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A),$$

se, além disso, existe $\lambda > 0$ *tal que* $Im(\lambda I - A) = X$*, então dizemos que* A *é* **maximal dissipativo** *ou simplesmente* **m-dissipativo**.

Diz-se que A *é* **acretivo (m-acretivo)** *se* $-A$ *for dissipativo (m-dissipativo).*

Proposição 1.24. *Se* A *é dissipativo, então*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \|x\|, \quad \forall \lambda > 0 \quad e \quad \forall x \in D(A).$$

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Proposição 1.25. *Se* A *é* $m-$*dissipativo e* $Im(\lambda_0 I - A) = X$, $\lambda_0 > 0$ *então:*

1. $\lambda_0 \in \rho(A)$ *e* A *é fechado;*

2. $(0, \infty) \subset \rho(A)$*;*

3. $\Re(\lambda I - A) = X, \forall \lambda > 0$.

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Observação 1.21. *Para simplificar a notação vamos escrever* $A \in G(M, \omega)$ *para exprimir que* A *é o gerador infinitesimal de um Semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores lineares limitados de classe* C^0, S *satisfaz a condição*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t > 0.$$

Teorema 1.28 (Lumer-Phillips). *Dizemos que* $A \in G(1, 0)$ *se, e somente se,* A *é* $m-$*dissipativo e densamente definido.*

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Observação 1.22. *Se X é um Espaço de Hilbert, então $A\colon D(A) \subset X \longrightarrow X$ é dissipativo se:*

$$Re\langle Ax, x\rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Lema 1.8. *Seja $B\colon X \longrightarrow X$ um operador linear, contínuo e com inverso contínuo. Seja $S \in \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|S\|< \frac{1}{\|B^{-1}\|},$$

então, $B + S$ é um operador linear contínuo e invertível.

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

O resultado a seguir simplifica bastante os cálculos para mostrar que A é o gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo de contrações de um Espaço de Hilbert H.

Proposição 1.26 (Liu-Zheng). *Seja $A\colon D(A) \subset H \to H$ um operador linear com $\overline{D(A)} = H$, onde H é um Espaço de Hilbert. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$ então A é o gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo de contrações de H.*

Demonstração: Sendo $0 \in \rho(A)$ então $(0I - A)$ é invertível e limitado. Logo

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

Vamos mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda I - A = A(\lambda A^{-1} - I)$ é invertível, sempre que

$$0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(H)}.$$

De fato, como A é invertível, pelo Lema 1.8, tomando $B = -I$ e $S = \lambda A^{-1}$, para $|\lambda|< \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, tem-se que $(\lambda A^{-1} - I)$ é invertível, e como a composição de operadores invertíveis é invertível segue-se que $(\lambda I - A)$ é invertível. Agora, usando a série de Neumann para operadores:

$$\sum_{j=0}^{\infty} T^j = \frac{1}{I - T}, \quad \text{se} \quad \|T\|< 1$$

segue que, se $0 < \|\lambda A^{-1}\|< 1$, então

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} &= [A(\lambda A^{-1} - I)]^{-1} = (\lambda A^{-1} - I)^{-1}A^{-1} = A^{-1}(\lambda A^{-1} - I)^{-1} = \\ &= A^{-1}\frac{1}{(\lambda A^{-1} - I)} = -A^{-1}\frac{1}{(I - \lambda A^{-1})} = -A^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda A^{-1})^j.\end{aligned}$$

Assim, para $0 < \|\lambda A^{-1}\|< 1$

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)^{-1}\| &= \left\| -A^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda A^{-1})^j\right\| \leq \|A^{-1}\|\left\|\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda A^{-1})^j\right\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\|\sum_{j=0}^{\infty}\|(\lambda A^{-1})^j\|\leq \|A^{-1}\|\sum_{j=0}^{\infty}\|(\lambda A^{-1})\|^j\leq \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H) \text{ desde que } \quad 0 < \|\lambda A^{-1}\| < 1.$$

Note que,

$$0 < \|\lambda A^{-1}\| < 1 \Longleftrightarrow 0 < \|A^{-1}\| < \frac{1}{|\lambda|}, \quad \text{para} \quad \lambda \neq 0.$$

Por isso, se $\lambda > 0$ então

$$0 < \lambda \|A^{-1}\| < 1 \Longleftrightarrow 0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Considerando o caso em que $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, temos

$$0 < |\lambda| < \|A^{-1}\|^{-1}. \tag{1.23}$$

Desse modo, como $\overline{D(A)} = H$, A é dissipativo e $(\lambda I - A)$ é bijetivo sobre a condição (1.23), então pelo Teorema de Lumer-Phillips 1.28, A é o gerador infinitesimal do C_0-Semigrupo de contração.

■

Teorema 1.29. *Sejam X um Espaço de Banach e A um operador fechado não limitado e sobrejetor de X. Se o domínio de A tem imersão compacta em X, então a inversa de A é um operador compacto.*

Demonstração: Ver A. Gomes [14], A. Pazy [32]. ■

Encerramos esta seção com algumas definições básicas, as quais são estudadas adequadamente em A. Balakrishnan [1].

Definição 1.25 (Uniformemente estável). *Um Semigrupo $S(t)$ é* **uniformemente estável** *(ou* **exponencialmente estável***) ou simplesmente* **estável** *se*

$$\|S(t)\| \longrightarrow 0, \qquad \textit{quando} \quad t \to \infty.$$

Observação 1.23. *Duas diferentes e equivalentes condições para uniformidade estável são:*

(i) $\|S(t)\| < 1, \qquad$ *para algum* $\quad t > 0$;

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \|S(t)x\|^2 dt < \infty, \qquad \forall x \in H.$

Definição 1.26 (Fortemente estável). *Um Semigrupo $S(t)$ é* ***fortemente estável*** *se*

$$\|S(t)x\| \longrightarrow 0, \qquad \textit{quando} \quad t \to \infty,$$

para cada $x \in H$.

Observação 1.24. *A estabilidade forte não precisa implicar estabilidade uniforme, porém, pelo princípio da limitação uniforme podemos ver prontamente que a forte estabilidade implica que:*

(i) $\|S(t)\| \leq M < \infty$; *e consequentemente*

(ii) $Re\sigma(A) \leq w_0 \leq 0$, *onde* A *é o gerador infinitesimal de* S.

Definição 1.27 (Fracamente estável). *Um Semigrupo* $S(t)$ *é **fracamente estável** se*

$$\big(S(t)x, y\big)_H \longrightarrow 0, \qquad \textit{quando} \quad t \to \infty,$$

para cada $x, y \in H$.

Observação 1.25. *A fraca estabilidade não precisa, no entanto, implicar uma forte estabilidade, porém, pelo princípio da limitação uniforme, a estabilidade fraca implica que o Semigrupo é limitado.*

1.7 Resultados básicos

Nesta seção, sempre que não houver risco de confusão (com a notação) denotaremos o produto interno de $L^2(\Omega)$ por $(\cdot, \cdot)$ e a norma induzida por $|\cdot|$. Também denotaremos o produto interno em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ por $((\cdot, \cdot))$ e a norma em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ por $\|\cdot\|$. Mostra-se em D. Robert e J. Lions [10] que em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ vale a desigualdade de Poincaré.

Consideremos o operador $A = -\Delta$ definido pela terna $\big\{H^1_{\Gamma_0}(\Omega), L^2(\Omega), ((u, v))\big\}$. Decorre da Teoria Espectral, (confira em M. Milla. Miranda [30]) que

$$D(-\Delta) = \left\{u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\right\}.$$

Além disso, também em M. Milla. Miranda [30] verifica-se que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

A seguir, apresentaremos um resultado que nos garantirá a existência de solução para o problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = z \text{ sobre } \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{1.24}$$

Lema 1.9. *Dados* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $z \in L^2(\Gamma_1)$, *existe uma única* $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ *solução do Problema* (1.24) *e*

$$\|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C\|z\|_{L^2(\Gamma_1)}. \tag{1.25}$$

Prova: Seja $a\colon H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\to\mathbb{R}$ definida por

$$a(u,v)=((u,v)),\forall u,v\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Tem-se que a é uma forma bilinear contínua e coerciva. Seja $L\colon H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\to\mathbb{R}$ dada por

$$\langle L,v\rangle=(f,v)+\int_{\Gamma_1} zvd\Gamma,\forall v\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Note que L é uma forma linear e contínua sobre $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. De fato,

i) L é linear

Sejam $v,w\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $\alpha\in\mathbb{R}$. Assim,

$$\langle L,\alpha v+w\rangle=(f,\alpha v+w)+\int_{\Gamma_1} z(\alpha v+w)d\Gamma=\alpha(f,v)+(f,w)+\alpha\int_{\Gamma_1} zvd\Gamma+\int_{\Gamma_1} zwd\Gamma=$$

$$=\alpha(f,v)+\alpha\int_{\Gamma_1} zvd\Gamma+(f,w)+\int_{\Gamma_1} zwd\Gamma=\alpha\langle L,v\rangle+\langle L,w\rangle.$$

ii) L é contínua

Sabemos que

$$\int_{\Gamma_1} zvd\Gamma=(z,v)_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz 5.3 e pela imersão contínua $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, com constante de imersão C_1, obtemos

$$|\langle L,v\rangle|\leq|f||v|+|z|_{L^2(\Gamma_1)}|v|_{L^2(\Gamma_1)}\leq C_1|f|\|v\|+|z|_{L^2(\Gamma_1)}|v|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Por outro lado, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\overset{cont}{\hookrightarrow}L^2(\Gamma_1)$. Além disso, pelo Teorema do Traço 1.7, temos:

$$|\gamma_0 v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\leq C_3\|v\|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}|\langle L,v\rangle|&\leq C_1|f|\|v\|+C_2|z|_{L^2(\Gamma_1)}|v|_{L^2(\Gamma_1)}\leq C_1|f|\|v\|+C_2|z||v|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\\&\leq C_1|f|\|v\|+C_2C_3\|v\|=C\|v\|,\end{aligned}$$

onde $C=C_1|f|+C_2C_3|z|_{L^2(\Gamma_1)}$. Portanto, pelo Lema de Lax-Milgram 5.10, existe um único $u\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tal que

$$a(u,v)=\langle L,v\rangle,$$

ou ainda

$$((u,v))=\langle L,v\rangle.$$

Assim,

$$((u,v)) = (f,v) + \int_{\Gamma_1} zv d\Gamma, \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{1.26}$$

Em particular, (1.26) é válida para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então,

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Pela fórmula de Green 5.1, como $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx.$$

Assim,

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx. \tag{1.27}$$

Daí,

$$(-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.28}$$

Desde que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, de (1.28) segue que

$$(-\Delta u, v) = (f, v), \forall v \in L^2(\Omega). \tag{1.29}$$

Por (1.29), obtemos $-\Delta u = f$ em $L^2(\Omega)$. Portanto,

$$\int_\Omega \big[-\Delta u(x) - f(x)\big]\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Resultando, pelo Lema de Du Bois Reymond 1.1, que $-\Delta u = f$ quase sempre em Ω. Daí, segue por regularidade elíptica que $u \in H^2(\Omega)$, donde segue que $u \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$.

Por outro lado, desde que $u \in H^2(\Omega)$ e $\Delta u \in L^2(\Omega)$, segue pela fórmula de Green 5.1 que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = (\Delta u, f) + ((u,v)). \tag{1.30}$$

Substituindo (1.26) em (1.30), tem-se

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = (\Delta u, f) + (f,v) + \int_{\Gamma_1} zv d\Gamma$$

o que implica

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} zv d\Gamma.$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz 5.14, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \langle z, v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)},$$

donde segue que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = z$ em $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Como $z \in L^2(\Gamma_1)$, resulta

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = z \text{ em } L^2(\Gamma_1).$$

Por fim, usando o fato de que o operador traço de ordem zero é sobrejetivo quando definido em $L^2(\Gamma_1)$, obtém-se

$$\|u\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C\|z\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

■

Agora, considere o operador

$$\begin{aligned} N\colon L^2(\Gamma_1) &\longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \\ z &\longmapsto \quad Nz = u, \end{aligned} \tag{1.31}$$

ondes u é a solução do Problema (1.24) .

Seja o operador $A = -\Delta$, definindo pela terna $\left\{H^1_{\Gamma_0}(\Omega), L^2(\Omega), \big(\nabla u, \nabla v\big)_{L^2(\Omega)}\right\}$. Vamos assumir que a fronteira Γ é de classe C^2. Então, denotando por $D(A)$ o domínio de A, segue-se que

$$D(A) = \left\{u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_1\right\}. \tag{1.32}$$

Além disso, da Teoria Espectral (veja M. Milla. Miranda [30]) segue que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Da teoria dos espaços $H^s(\Omega)$, para ε suficientemente pequeno, temos as imersões

$$H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \hookrightarrow D(A^{\frac{3}{4}-\varepsilon}) \hookrightarrow D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{1.33}$$

Assim, de (1.25) e (1.33), obtemos o operador $\tilde{N}\colon L^2(\Gamma_1) \to D(A^{\frac{1}{2}})$, ainda denotado por N, ou seja,

$$\left|\begin{array}{l} N\colon L^2(\Gamma_1) \longrightarrow D(A^{\frac{1}{2}}) \\ \text{e} \\ \|Nz\|_{D(A^{\frac{1}{2}})} \leq C\|z\|_{L^2(\Gamma_1)}, \qquad \forall z \in L^2(\Gamma_1). \end{array}\right. \tag{1.34}$$

Usando (1.24) e (1.31) resulta

$$\Big((A^{\frac{1}{2}})Nz, (A^{\frac{1}{2}})v\Big)_{L^2(\Omega)} = \big(\underbrace{\Delta Nz}_{=0}, v\big)_{L^2(\Omega)} + \int_\Gamma \frac{\partial Nz}{\partial \nu} v d\Gamma = \int_{\Gamma_1} z v d\Gamma_1, \tag{1.35}$$

para todo $z \in L^2(\Gamma_1)$ e todo $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$.

Verifica-se também da Teoria Espectral, como feito em M. Milla. Miranda [30], que

$$\left|\begin{array}{l} A\colon D(A^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow \big(D(A^{\frac{1}{2}})\big)' := D(A^{-\frac{1}{2}}) \\ \langle Au, v\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} = \big(A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\big)_{L^2(\Omega)}. \end{array}\right. \tag{1.36}$$

Então,

$$\left| \begin{array}{l} A^*\colon D(A^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow D(A^{-\frac{1}{2}}) \\ \langle A^* v, w\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} = \langle v, Aw\rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})\times D(A^{-\frac{1}{2}})} = \big(A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\big)_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right. \tag{1.37}$$

Temos ainda

$$N^*\colon D(A^{-\frac{1}{2}}) \longrightarrow L^2(\Gamma_1).$$

De modo que

$$N^*A^* : D(A^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow L^2(\Gamma_1)$$

e, para $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$, $z \in L^2(\Gamma_1)$ vale

$$\big(N^*A^*v, z\big)_{L^2(\Gamma_1)} = \langle A^*v, Nz\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} = \langle v, ANz\rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})\times D(A^{-\frac{1}{2}})} = \big(A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}Nz\big)_{L^2(\Omega)}.$$

Com isso, de (1.35) obtemos

$$\big(N^*A^*v, z\big)_{L^2(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} zv d\Gamma_1.$$

Estes cálculos produzem, então o seguinte lema:

Lema 1.10. *Com a construção acima, tem-se*

$$\left| \begin{array}{l} N^*A^* : D(A^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow L^2(\Gamma_1) \\ N^*A^*v = v\big|_{\Gamma_1} \end{array} \right. \tag{1.38}$$

e

$$\big(N^*A^*v, z\big)_{L^2(\Gamma_1)} = \langle v, ANz\rangle_{D(A^{\frac{1}{2}})\times D(A^{-\frac{1}{2}})} = \int_{\Gamma_1} zv d\Gamma_1, \quad \forall v \in D\big(A^{\frac{1}{2}}\big), \quad \forall z \in L^2(\Gamma_1). \tag{1.39}$$

Capítulo 2

Teorema de Existência

2.1 Primeiro resultado principal

Nesta seção veremos um primeiro resultado referente a existência de solução associada ao Problema (1).

Teorema 2.1. *Assuma que:*

(i) *As funções $f_0(s)$ e $f_1(s)$ são Lipschitz contínuas em $\mathbb{R}$, com $sf_i(s) \geq 0$, para $s \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1)$;*

(ii) *$g(s)$ é uma função contínua, monótona crescente em $\mathbb{R}$;*

(iii) *$g(s)s \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$;*

(iv) *$\alpha(s_1 - s_2) \leq g(s_1) - g(s_2)$, para todo $(s_1 - s_2) \geq 0$ e algum $\alpha > 0$ fixo.*

Então, o Problema (1) tem única solução $u \in C^0\big(0, \infty; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\big) \cap C^1\big(0, \infty; L^2(\Omega)\big)$. Ademais, se g satisfaz o item (iii) *na Hipótese (H-1), tem-se*

$$u_t\Big|_{\Gamma} \in L^2\big(0, \infty; \Gamma_1\big), \qquad \frac{\partial}{\partial \nu} u \in L^2\big(0, \infty; \Gamma_1\big). \tag{2.1}$$

Demonstração: Sempre que não houver perigo de causar confusão com a notação, escreveremos, por exemplo, simplesmente $g(v)$ no lugar $g(v(\cdot))$, ficando implícito que tal expressão pertence a $\mathbb{R}$. Além disso, por simplicidade, algumas constantes que aparecerem em algumas desigualdades serão denotadas pelo mesmo símbolo.

Este teorema pode ser demonstrado usando resultados da teoria de Semigrupos não lineares. Com esse objetivo, começamos considerando o Espaço de Hilbert $E = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, equipado com o produto escalar

$$\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right)_E = \left(A^{\frac{1}{2}}(u_1), A^{\frac{1}{2}}(u_2) \right)_{L^2(\Omega)} + (v_1, v_2)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Introduza, em E, o operador $\mathcal{A}$ definido por

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ A\big(u + N[g(v) + f_1(u)]\big) + f_0(u) \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

onde

$$D(\mathcal{A}) := \Big\{ u, v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega); u + N[g(v) + f_1(u)] \in D(A) \Big\},$$

sendo A e N como na Seção 1.7. Como $u + N[g(v) + f_1(u)] \in D(A)$, então existem

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}, \qquad \frac{\partial N}{\partial \nu}[g(v) + f_1(u)]$$

e por (1.32), temos

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\Big(u + N[g(v) + f_1(u)] \Big) = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial N}{\partial \nu}\big[g(v) + f_1(u) \big] = 0, \qquad \text{em} \qquad \Gamma_1.$$

Ademais, de (1), com $u_t = v$, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(v) + f_1(u) = 0, \qquad \text{em} \qquad \Gamma_1.$$

Note que a equação (1) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix}_t = -\mathcal{A} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix}.$$

Feitas tais considerações nossos próximos passos são:

(1) Mostrar que para w suficientemente grande, $\mathcal{A} + wI$ é um operador monótono de E;

(2) Provar que com o w acima, $\mathcal{A} + wI$, é maximal monótono (veja o Teorema 1.21).

Sejam L_0 e L_1 as contantes de Lipschitz de f_0 e f_1, respectivamente. Temos

$$\left| \begin{array}{ll} |f_0(s_1) - f_0(s_2)|_{\mathbb{R}} \leq L_0 |s_1 - s_2|_{\mathbb{R}}, & \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R} \\ |f_1(s_1) - f_1(s_2)|_{\mathbb{R}} \leq L_1 |s_1 - s_2|_{\mathbb{R}}, & \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Dados $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ em $D(\mathcal{A})$, seja

$$X := \left(\mathcal{A}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{A}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)_E. \tag{2.5}$$

Como

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \mathcal{A}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -v_1 \\ A\big(u_1 + N[g(v_1) + f_1(u_1)]\big) + f_0(u_1) \end{bmatrix} - \\ &\quad - \begin{bmatrix} -v_2 \\ A\big(u_2 + N[g(v_2) + f_1(u_2)]\big) + f_0(u_2) \end{bmatrix} =\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} v_2 - v_1 \\ A(u_1 - u_2) + AN[g(v_1) - g(v_2)] + AN[f_1(u_1) - f_1(u_2)] + f_0(u_1) - f_0(u_2) \end{bmatrix}.$$

Por (2.2) temos

$$\begin{aligned} X = {} & \underbrace{\left(A^{\frac{1}{2}}(v_2 - v_1), A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)\right)_{L^2(\Omega)}}_{Y_1} + \underbrace{\left(A(u_1 - u_2), v_1 - v_2\right)_{L^2(\Omega)}}_{Y_2} + \\ & + \underbrace{\left(AN[g(v_1) - g(v_2)], v_1 - v_2\right)_{L^2(\Omega)}}_{Y_3} + \underbrace{\left(AN[f_1(u_1) - f_1(u_2)], v_1 - v_2\right)_{L^2(\Omega)}}_{Y_4} + \\ & + \underbrace{\left(f_0(u_1) - f_0(u_2), v_1 - v_2\right)_{L^2(\Omega)}}_{Y_5}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 &= \left(A^{\frac{1}{2}}(v_2 - v_1), A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)\right)_{L^2(\Omega)} + \left(A(u_1 - u_2), v_1 - v_2\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(A^{\frac{1}{2}}(v_2 - v_1), A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)\right)_{L^2(\Omega)} - \left(A(u_1 - u_2), v_2 - v_1\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(A^{\frac{1}{2}}(v_2 - v_1), A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)\right)_{L^2(\Omega)} - \left(A^{\frac{1}{2}}(v_2 - v_1), A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando o Lema 1.10 e o item (iv) da hipótese do Teorema 2.1, tem-se

$$\begin{aligned} Y_3 &= \left(AN[g(v_1) - g(v_2)], v_1 - v_2\right)_{L^2(\Omega)} = \left(A^{\frac{1}{2}}N[g(v_1) - g(v_2)], A^{\frac{1}{2}}(v_1 - v_2)\right)_{L^2(\Omega)} = \\ &= \left\langle AN[g(v_1) - g(v_2)], v_1 - v_2\right\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} = \int_{\Gamma_1} \big[g(v_1(\cdot)) - g(v_2(\cdot))\big]\big[v_1(\cdot) - v_2(\cdot)\big]d\Gamma_1 \\ &\geq \alpha\|v_1 - v_2\|_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Do mesmo modo, utilizando também (2.4) e as desigualdades de Hölder 5.3 e Young 5.1.

$$
\begin{aligned}
\left|Y_4\right|_{\mathbb{R}} &= \left|\Big(AN[f_1(u_1)-f_1(u_2)], v_1-v_2\Big)_{L^2(\Omega)}\right|_{\mathbb{R}} \\
&= \left|\int_{\Gamma_1}\left[f_1(u_1(\cdot))-f_1(u_2(\cdot))\right]\left[v_1(\cdot)-v_2(\cdot)\right]d\Gamma_1\right|_{\mathbb{R}} \\
&\leq \int_{\Gamma_1}|f_1(u_1(\cdot))-f_1(u_2(\cdot))|_{\mathbb{R}}|v_1(\cdot)-v_2(\cdot)|_{\mathbb{R}}d\Gamma_1 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}L_1\|u_1-u_2\|_{L^2(\Gamma_1)}\sqrt{\alpha}\|v_1-v_2\|_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\leq \frac{L_1^2}{2\alpha}\|u_1-u_2\|^2_{L^2(\Gamma_1)}+\frac{\alpha}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Gamma_1)}.
\end{aligned}
$$

Como $\|w\|_{L^2(\Gamma_1)}\leq C_0\|w\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}$, para todo w em $D(A^{\frac{1}{2}})$, resulta

$$
\left|Y_4\right|_{\mathbb{R}} \leq \frac{L_1^2}{2\alpha}C_0^2\|u_1-u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}+\frac{\alpha}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Gamma_1)}.
$$

Assim,

$$
Y_4 \geq -\frac{L_1^2}{2\alpha}C_0^2\|u_1-u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}-\frac{\alpha}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Gamma_1)}. \tag{2.8}
$$

Analogamente, novamente de (2.4) e das desigualdades de Hölder 5.3 e Young 5.1.

$$
\begin{aligned}
\left|Y_5\right|_{\mathbb{R}} &= \left|\Big(f_0(u_1)-f_0(u_2), v_1-v_2\Big)_{L^2(\Omega)}\right|_{\mathbb{R}} \leq \int_{\Omega}|f_0(u_1(\cdot))-f_0(u_2(\cdot))|_{\mathbb{R}}|v_1(\cdot)-v_2(\cdot)|_{\mathbb{R}}d\Omega \\
&\leq \frac{L_0^2}{2}\|u_1-u_2\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Omega)}\leq \frac{L_0^2}{2}C_1^2\|u_1-u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}+\frac{1}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
Y_5 \geq -\frac{L_0^2}{2}C_1^2\|u_1-u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}-\frac{1}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.9}
$$

Então, de (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
X = Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5 &\geq \alpha\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Gamma_1)}-\frac{L_1^2}{2\alpha}C_0^2\|u_1-u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}-\frac{\alpha}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Gamma_1)}- \\
&-\frac{L_0^2}{2}C_1^2\|u_1-u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}-\frac{1}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&=\frac{\alpha}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Gamma_1)}-K_1\|u_1-u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}-\frac{1}{2}\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

onde $K_1 = \dfrac{L_1^2C_0^2}{2\alpha}+\dfrac{L_0^2C_1^2}{2}$.

Considere o número real w, dado por

$$
w = K_1+\frac{1}{2} \tag{2.11}
$$

e seja

$$
Y := w\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)_E,
$$

isto é,

$$Y := w\left(\begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix}\right)_E = w\Big(A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2), A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)\Big)_{L^2(\Omega)} + w\|v_1 - v_2\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= w\left\|\begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix}\right\|^2_E = w\|u_1 - u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})} + w\|v_1 - v_2\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Combinando (2.10) e (2.12), resulta

$$X + Y = \frac{\alpha}{2}\|v_1 - v_2\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - K_1\|u_1 - u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})} - \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ + \Big(K_1 + \frac{1}{2}\Big)\|u_1 - u_2\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})} + \Big(K_1 + \frac{1}{2}\Big)\|v_1 - v_2\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Portanto $\mathcal{A} + wI$ é monótono. Para provar que $\mathcal{A} + wI$ é maximal monótono, pelo Teorema de Minty 1.21, é suficiente provar que para algum $\tilde{\lambda} > 0$, suficientemente grande, a equação

$$\Big(\mathcal{A} + wI + \tilde{\lambda}I\Big)\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

tem solução $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ em $D(\mathcal{A})$, para qualquer $\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ em E.

Com efeito, observe que sendo $\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in E$, tem-se $h_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ e $h_2 \in L^2(\Omega)$, para todo $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A})$ e $w + \tilde{\lambda} = \lambda > 0$, a identidade

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \lambda I\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

implica,

$$\begin{bmatrix} -v + \lambda u \\ A\Big(u + N[g(v) + f_1(u)]\Big) + f_0(u) + \lambda v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$-v + \lambda u = h_1 \Longrightarrow u = \frac{h_1 + v}{\lambda}. \tag{2.15}$$

Daí,

$$A\Big(\frac{h_1 + v}{\lambda}\Big) + AN\Big[g(v) + f_1\Big(\frac{h_1 + v}{\lambda}\Big)\Big] + f_0\Big(\frac{h_1 + v}{\lambda}\Big) + \lambda v = h_2, \tag{2.16}$$

o que acarreta

$$A\frac{v}{\lambda} + ANg(v) + ANf_1\Big(\frac{h_1 + v}{\lambda}\Big) + f_0\Big(\frac{h_1 + v}{\lambda}\Big) + \lambda v = h_2 - A\frac{h_1}{\lambda}. \tag{2.17}$$

Considere os operadores

$$B\colon D(A^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow D(A^{-\frac{1}{2}}) \qquad \text{e} \qquad C\colon D(A^{\frac{1}{2}}) \longrightarrow D(A^{-\frac{1}{2}}),$$

definidos por

$$\left| \begin{array}{l} Bv := ANg(v) + ANf_1\Big(\dfrac{h_1+v}{\lambda}\Big) \\ Cv := A\dfrac{v}{\lambda} + f_0\Big(\dfrac{h_1+v}{\lambda}\Big) + \lambda v. \end{array} \right. \tag{2.18}$$

Note que, $Bv + Cv = h_2 - A\dfrac{h_1}{\lambda} \in D(A^{-\frac{1}{2}})$.

A ideia aqui é aplicar o Teorema 1.20. Para isso, precisamos mostrar que B e C são maximais monótonos e que C é coercivo. Note que, se mostrarmos que $B+C$ é maximal monótono, então, pelo Corolário do Teorema 1.20, o lado esquerdo de (2.17) é sobrejetivo. Logo, dado $h_2 - A\dfrac{h_1}{\lambda} \in D(A^{-\frac{1}{2}})$ existe $v \in D(A^{\frac{1}{2}})$ tal que (2.17) é satisfeita. Desse modo, tomando u como em (2.15) o par (u, v) resolve a equação (2.13), para qualquer (h_1, h_2) em E.

Afirmação 1: Para $\lambda > 0$ suficientemente grande, B é maximal monótono.

Com efeito, primeiro observe que B é monótono, isto é,

$$\langle Bv_1 - Bv_2, v_1 - v_2\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} \geq 0, \qquad \forall v_1, v_2 \in D(B).$$

De fato, sendo L_1 e α como dados anteriormente, seja $\lambda > 0$, tal que $L_1 < \alpha\lambda$. Então, para $s_1 < s_2$ em $\mathbb{R}$, por (2.4) (x fixo), obtemos

$$\left| f_1\Big(\frac{h_1(x)+s_1}{\lambda}\Big) - f_1\Big(\frac{h_1(x)+s_2}{\lambda}\Big)\right|_{\mathbb{R}} \leq \frac{L_1}{\lambda}|s_1 - s_2|_{\mathbb{R}}.$$

Logo,

$$f_1\Big(\frac{h_1(x)+s_1}{\lambda}\Big) - f_1\Big(\frac{h_1(x)+s_2}{\lambda}\Big) \geq -\frac{L_1}{\lambda}|s_1 - s_2|_{\mathbb{R}}. \tag{2.19}$$

Definindo

$$\theta(s) := g(s) + f_1\Big(\frac{h_1(x)+s}{\lambda}\Big),$$

como por hipótese, $\alpha(s_2 - s_1) \leq g(s_2) - g(s_1)$, usando também (2.19), segue-se que

$$\begin{aligned} \theta(s_2) - \theta(s_1) &= g(s_2) + f_1\Big(\frac{h_1+s_2}{\lambda}\Big) - g(s_1) - f_1\Big(\frac{h_1(x)+s_1}{\lambda}\Big) \\ &\geq \alpha(s_2 - s_1) - \frac{L_1}{\lambda}(s_2 - s_1) = \Big(\alpha - \frac{L_1}{\lambda}\Big)(s_2 - s_1) \geq 0, \end{aligned}$$

sempre que $L_1 < \alpha\lambda$. Por isso, $\theta(s)$ é crescente, quase sempre em Ω, para $L_1 < \alpha\lambda$. Desse modo, usando (1.39), obtém-se (veja a Seção 1.7)

$$\begin{aligned} \big\langle Bv_1 - Bv_2, v_1 - v_2\big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} &= \big\langle AN(\theta v_1) - AN(\theta v_2), v_1 - v_2\big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} \\ &= \int_{\Gamma_1} \big[\theta(v_1(x)) - \theta(v_2(x))\big]\big[v_1(x) - v_2(x)\big] d\Gamma_1 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

mostrando que B é monótono. Para provar que B é maximal monótono, pelo Teorema 1.18, basta mostrar que B é hemicontínuo, ou seja,

$$\big\langle B(v_1+tv_2),z\big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})}\longrightarrow \big\langle Bv_1,z\big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})},\qquad \text{quando } t\to 0 \tag{2.20}$$

para todo z em $D(A^{\frac{1}{2}})$. Mas, isso segue da monotonicidade crescente de θ e do fato que sendo f_1 e g contínuas, tem-se $\theta\big(v_1(x)+tv_2(x)\big)\longrightarrow\theta\big(v_1(x)\big)$, quando $t\to 0$. Daí, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $|t|_{\mathbb{R}}<\delta$ implica

$$\big|\theta\big(v_1(x)+tv_2(x)\big)-\theta\big(v_1(x)\big)\big|_{\mathbb{R}}<\frac{\varepsilon}{med\Gamma_1},$$

logo

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_1}\theta\big(v_1(x)+tv_2(x)\big)d\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}\theta\big(v_1(x)\big)\Gamma_1\right|_{\mathbb{R}}&\leq\int_{\Gamma_1}\big|\theta\big(v_1(x)+tv_2(x)\big)-\theta\big(v_1(x)\big)\big|_{\mathbb{R}}d\Gamma_1\\&<\frac{\varepsilon}{med\Gamma_1}\int_{\Gamma_1}d\Gamma_1=\varepsilon,\quad \text{sempre que } |t|_{\mathbb{R}}<\delta.\end{aligned}$$

Como, (confira a Seção 1.7)

$$\big\langle B(v_1+tv_2),z\big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})}=\int_{\Gamma_1}\theta\big(v_1(x)+tv_2(x)\big)z(x)d\Gamma_1,$$

resulta que

$$\big\langle B(v_1+tv_2),z\big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})}\longrightarrow \big\langle Bv_1,z\big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})},\qquad \text{quando } t\to 0.$$

Afirmação 2: Para $\lambda>0$ suficientemente grande, C é maximal monótono e coercivo.

De fato, primeiro observe que

$$C(v)=A\frac{v}{\lambda}+f_0\Big(\frac{h_1+v}{\lambda}\Big)+\lambda v$$

é monótono, visto que

$$\begin{aligned}\big\langle Cv_1-Cv_2,v_1-v_2\big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})}&=\Big\langle\frac{1}{\lambda}A(v_1-v_2),v_1-v_2\Big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})}+\lambda\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Omega)}\\&+\Big\langle f_0\Big(\frac{h_1+v_1}{\lambda}\Big)-f_0\Big(\frac{h_1+v_2}{\lambda}\Big),v_1-v_2\Big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})}\\&=\frac{1}{\lambda}\|A^{\frac{1}{2}}(v_1-v_2)\|^2_{L^2(\Omega)}+\lambda\|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Omega)}+\\&+\Big(f_0\Big(\frac{h_1+v_1}{\lambda}\Big)-f_0\Big(\frac{h_1+v_2}{\lambda}\Big),v_1-v_2\Big)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Como, por (2.4),

$$\left|f_0\Big(\frac{h_1(\cdot)+v_1(\cdot)}{\lambda}\Big)-f_0\Big(\frac{h_1(\cdot)+v_2(\cdot)}{\lambda}\Big)\right|_{\mathbb{R}}\big|v_1(\cdot)-v_2(\cdot)\big|_{\mathbb{R}}\leq\frac{L_0}{\lambda}\big|v_1(\cdot)-v_2(\cdot)\big|^2_{\mathbb{R}},$$

temos

$$\left[f_0\Big(\frac{h_1(\cdot)+v_1(\cdot)}{\lambda}\Big)-f_0\Big(\frac{h_1(\cdot)+v_2(\cdot)}{\lambda}\Big)\right]\left[v_1(\cdot)-v_2(\cdot)\right]\geq -\frac{L_0}{\lambda}\big|v_1(\cdot)-v_2(\cdot)\big|_{\mathbb{R}}^2.$$

Daí

$$\int_\Omega\left[f_0\Big(\frac{h_1(\cdot)+v_1(\cdot)}{\lambda}\Big)-f_0\Big(\frac{h_1(\cdot)+v_2(\cdot)}{\lambda}\Big)\right]\left[v_1(\cdot)-v_2(\cdot)\right]d\Omega\geq -\frac{L_0}{\lambda}\int_\Omega|v_1(\cdot)-v_2(\cdot)|_{\mathbb{R}}^2d\Omega,$$

ou seja,

$$\left(f_0\Big(\frac{h_1+v_1}{\lambda}\Big)-f_0\Big(\frac{h_1+v_2}{\lambda}\Big),v_1-v_2\right)_{L^2(\Omega)}\geq -\frac{L_0}{\lambda}\|v_1-v_2\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Assim,

$$\left\langle Cv_1-Cv_2,v_1-v_2\right\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})}\geq\frac{1}{\lambda}\|A^{\frac{1}{2}}(v_1-v_2)\|_{L^2(\Omega)}^2+\Big(\lambda-\frac{L_0}{\lambda}\Big)\|v_1-v_2\|_{L^2(\Omega)}^2\geq 0,$$

para $L_0<\lambda^2$. Logo, $C(v)$ é monótono, para todo $L_0<\lambda^2$. Por outro lado, para mostrar que C é hemicontínua, primeiro observamos que a aplicação $\eta(s):=\lambda s+f_0\left(\dfrac{h_1+s}{\lambda}\right)$ é Lipschitz contínua, pois

$$\big|\eta(s_1)-\eta(s_2)\big|_{\mathbb{R}}=\left|\lambda(s_1-s_2)+f_0\left(\frac{h_1+s_1}{\lambda}\right)-f_0\left(\frac{h_1+s_2}{\lambda}\right)\right|_{\mathbb{R}}\leq\Big(\lambda+\frac{L_0}{\lambda}\Big)\big|s_1-s_2\big|_{\mathbb{R}}.$$

Além disso, como

$$\left|f_0\left(\frac{h_1+s_1}{\lambda}\right)-f_0\left(\frac{h_1+s_2}{\lambda}\right)\right|_{\mathbb{R}}\leq\frac{L_0}{\lambda}\big|s_1-s_2\big|_{\mathbb{R}},$$

devemos ter

$$f_0\left(\frac{h_1+s_1}{\lambda}\right)-f_0\left(\frac{h_1+s_2}{\lambda}\right)\geq-\frac{L_0}{\lambda}\big|s_1-s_2\big|_{\mathbb{R}}.$$

Logo, para $s_1\geq s_2$, temos

$$\eta(s_1)-\eta(s_2)=\lambda(s_1-s_2)+f_0\left(\frac{h_1+s_1}{\lambda}\right)-f_0\left(\frac{h_1+s_2}{\lambda}\right)\geq\Big(\lambda-\frac{L_0}{\lambda}\Big)(s_1-s_2).$$

Assim, para $L_0<\lambda^2$, $\eta(\cdot)$ é monótona crescente. Portando, C é Lispchitz contínua e monótona, donde concluímos que C é hemicontínua.

Mostremos que (para λ grande) C é coercivo, isto é,

$$\lim_{\|v\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}\to\infty}\frac{\left\langle Cv,v\right\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})}}{\|v\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}}=\infty.$$

De (1.36) segue que

$$\|v\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}^2=\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.22}$$

Ademais,

$$\frac{\langle Cv, v\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})}}{\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{1}{\lambda}\frac{\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{\lambda}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \infty,$$

quando $\|A^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \infty$.

Com efeito, por (1.36), tem-se

$$\begin{aligned}
\big\langle Cv, v\big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} &= \Big\langle A\frac{v}{\lambda} + \lambda v + f_0\Big(\frac{h_1+v}{\lambda}\Big), v\Big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} \\
&= \frac{1}{\lambda}\|A^{\frac{1}{2}}(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \Big\langle f_0\Big(\frac{h_1+v}{\lambda}\Big), v\Big\rangle_{D(A^{-\frac{1}{2}})\times D(A^{\frac{1}{2}})} \\
&= \frac{1}{\lambda}\|A^{\frac{1}{2}}(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \Big(f_0\Big(\frac{h_1+v}{\lambda}\Big), v\Big)_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{\lambda}\|A^{\frac{1}{2}}(v)\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

já que para λ suficientemente grande vale

$$\lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \Big(f_0\Big(\frac{h_1+v}{\lambda}\Big), v\Big)_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

De fato, inicialmente observe que $f_0(0) = 0$, visto que por hipótese, $sf_0(s) \geq 0$, daí

$$s > 0 \Longrightarrow \ f_0(s) > 0 \quad \text{e} \quad s < 0 \ \Longrightarrow f_0(s) < 0.$$

Agora, usando a continuidade de f_0, considere as sequências $(s_m) \subset \mathbb{R}$, com $s_m > 0$ e $s_m \to 0$, e $(\xi_m) \subset \mathbb{R}$, com $\xi_n < 0$ e $\xi_m \to 0$. Pelas observações acima vemos que

$$f_0(0) = \lim_{m\to\infty} f_0(s_m) \geq 0 \text{ e } f_0(0) = \lim_{m\to\infty} f_0(\xi_m) \leq 0,$$

donde $f_0(0) = 0$. Desse modo, sendo f_0 Lipschitz, temos

$$\begin{aligned}
\Big| f_0\Big(\frac{h_1(\cdot)+v(\cdot)}{\lambda}\Big)v(\cdot)\Big|_{\mathbb{R}} &= \Big| f_0\Big(\frac{h_1(\cdot)+v(\cdot)}{\lambda}\Big) - f_0(0)\Big|_{\mathbb{R}} |v(\cdot)|_{\mathbb{R}} \\
&\leq \frac{L_0}{\lambda}|h_1(\cdot)+v(\cdot)|_{\mathbb{R}}|v(\cdot)|_{\mathbb{R}} \leq \frac{L_0}{\lambda}|h_1(\cdot)|_{\mathbb{R}}|v(\cdot)|_{\mathbb{R}} + \frac{L_0}{\lambda}|v(\cdot)|^2_{\mathbb{R}},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

daí

$$f_0\Big(\frac{h_1(\cdot)+v(\cdot)}{\lambda}\Big)v(\cdot) \geq -\frac{L_0}{\lambda}|h_1(\cdot)|_{\mathbb{R}}|v(\cdot)|_{\mathbb{R}} - \frac{L_0}{\lambda}|v(\cdot)|^2_{\mathbb{R}}.$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder 5.3, tem-se

$$\begin{aligned}
\lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \Big(f_0\Big(\frac{h_1+v}{\lambda}\Big), v\Big)_{L^2(\Omega)} &= \lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega f_0\Big(\frac{h_1(v(\cdot))+v(\cdot)}{\lambda}\Big)v(\cdot)d\Omega \\
&\geq \lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{L_0}{\lambda}\int_\Omega \big[|h_1(\cdot)|_{\mathbb{R}}|v(\cdot)|_{\mathbb{R}} + |v(\cdot)|^2_{\mathbb{R}}\big]d\Omega \\
&\geq \lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{L_0}{\lambda}\big[\|h_1\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\big] \\
&= \Big(\lambda - \frac{L_0}{\lambda}\Big)\|v\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{L_0}{\lambda}\|h_1\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Supondo $v \neq 0$, queremos provar que

$$\left[\left(\lambda - \frac{L_0}{\lambda}\right)\|v\|_{L^2(\Omega)} - \frac{L_0}{\lambda}\|h_1\|_{L^2(\Omega)}\right]\|v\|_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Então, basta provar que

$$\left(\lambda - \frac{L_0}{\lambda}\right)\|v\|_{L^2(\Omega)} - \frac{L_0}{\lambda}\|h_1\|_{L^2(\Omega)} \geq 0,$$

isto é,

$$\frac{\left[\lambda^2 - L_0\right]\|v\|_{L^2(\Omega)}}{\lambda} - \frac{L_0\|h_1\|_{L^2(\Omega)}}{\lambda} \geq 0,$$

ou ainda,

$$\left[\lambda^2 - L_0\right]\|v\|_{L^2(\Omega)} - L_0\|h_1\|_{L^2(\Omega)} = \lambda^2\|v\|_{L^2(\Omega)} - L_0\left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|h_1\|_{L^2(\Omega)}\right) = a\lambda^2 - c \geq 0,$$

onde, $a = \|v\|_{L^2(\Omega)}$ e $c = L_0\left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|h_1\|_{L^2(\Omega)}\right)$. Considere

$$P(\lambda) = a\lambda^2 - c.$$

Vamos analisar para quais valores de λ, tem-se $P(\lambda) \geq 0$. Primeiro calculemos formalmente as raízes de P. Sendo $\triangle$ o descriminante, temos $\triangle := 0 - 4a(-c) = 4ac$, e as raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\triangle}}{2a} \qquad \lambda_2 = \frac{-\sqrt{\triangle}}{2a}.$$

Seja $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 > \lambda_1$ e $\lambda_0^2 > L_0$. Então, $a\lambda_0 > a\lambda_1$ e

$$a\lambda_0^2 - c > a\lambda_1^2 - c = P(\lambda_1) = 0.$$

Portanto, para todo $\lambda > \lambda_0 + \lambda_0^2$, tem-se

$$\left(\lambda - \frac{L_0}{\lambda}\right)\|v\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{L_0}{\lambda}\|h_1\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Logo, para tais valores de λ,

$$\lambda\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(f_0\left(\frac{h_1 + v}{\lambda}\right), v\right)_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

Concluímos, portanto, que $C(v)$ é coercivo (veja o Teorema 1.18). Além disso, $B(v)$ e $C(v)$ são maximais monótonos e

$$int\big(D(B)\big) \cap D(C) \neq \emptyset,$$

pelo Teorema 1.20, $B + C$ é maximal monótono. Por outro lado, sendo C coercivo, $B + C$ é coercivo e, pelo Teorema 1.18 segue-se que $(B+C)\big(D(A^{\frac{1}{2}})\big) = D(A^{-\frac{1}{2}})$, ou seja, o lado esquerdo de (2.17) é sobrejetivo, isso significa que para $h_2 - \frac{1}{\lambda}Ah_1$ em $D(A^{-\frac{1}{2}})$ existe v em $D(A^{\frac{1}{2}})$ tal que

$$Bv + Cv = h_2 - \frac{1}{\lambda}Ah_1,$$

para $L_0 < \lambda^2$ e $L_1 < \alpha\lambda$, onde $\lambda > \lambda_0 + \lambda_0^2$.

Considere $u = \dfrac{h_1 + v}{\lambda}$ em $D(A^{\frac{1}{2}})$. Assim, por (2.17) obtemos

$$A\big(u + N[g(v) + f_1(u)]\big) + f_0(u) + \lambda v = h_2.$$

Como $\big(h_2 - f_0(u) - \lambda v\big) \in L^2(\Omega)$, resulta que $\big(u + N[g(v) + f_1(u)]\big) \in D(A)$. Então, para $\tilde{\lambda} > \lambda^2 + \alpha\lambda$, o operador

$$(\mathcal{A} + wI) + \tilde{\lambda}I$$

é sobrejetivo e, pelo Teorema de Minty 1.21 $\mathcal{A} + wI$ é maximal monótono. Sendo assim, desde que $D(\mathcal{A})$ é denso em E, por resultados da teoria de Semigrupos não lineares (veja V. Barbu [2]), a equação

$$\left|\begin{array}{l} Y' + \mathcal{A}Y + wI = wI \\ Y(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}, \qquad y_0 \in D(A^{\frac{1}{2}}), \qquad y_1 \in L^2(\Omega), \end{array}\right. \tag{2.26}$$

tem única solução $Y \in C^0\big([0,\infty); E\big)$. Com isso, o Problema (1) tem uma solução generalizada $u \in C^0\big((0,\infty); D(A^{\frac{1}{2}})\big) \cap C^1\big((0,\infty); L^2(\Omega)\big)$.

Por fim, provemos que se vale a Hipótese $(H-1)-$(iii), então

$$u_t\big|_\Gamma \in L^2\big(0,\infty;\Gamma_1\big), \qquad \frac{\partial}{\partial \nu}u \in L^2\big(0,\infty;\Gamma_1\big). \tag{2.27}$$

Ora, dado $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A})$, tem-se

$$v_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad v_0\big|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma), \tag{2.28}$$

ou seja, $v_0\big|_\Gamma \in L^2(\Gamma)$. Como $u_0 \in D(\mathcal{A})$ implica $u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, temos

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \gamma_1 u_0 \in L^2(\Gamma).$$

Vamos mostrar que $g\big(v_0\big|_\Gamma\big) \in L^2(\Gamma_1)$. De fato, primeiro observe que sendo $g(s)s > 0$, para $s \neq 0$, temos $g(0) = 0$ (basta argumentar como no caso anterior para f_0).

Estudaremos, agora, os casos $|s| < 1$ e $|s| \geq 1$, para obtermos desigualdades que nos permitam provar que $g(v_0) \in L^2(\Gamma)$.

- Se $|s| < 1$ então $-1 < s < 1$. Ademais:

(i) Se $0 \leq s < 1$ então $0 \leq g(s) \leq g(1) \Longrightarrow [g(s)]^2 \leq g(s)g(1) \leq g(1)g(1) = [g(1)]^2$;

(ii) Se $-1 < s < 0$ então $g(-1) < g(s) < g(0) = 0 \Longrightarrow 0 < g(s)g(s) < g(s)g(-1)$.

Como $g(-1) < g(s)$, pois g é crescente e, sendo $g(-1) < 0$ temos $g(s)g(-1) < g(-1)g(-1) = [g(-1)]^2$. Logo, das desigualdades:

$$0 \leq [g(s)]^2 < g(s)g(-1) \quad \text{ e } \quad g(s)g(-1) < g(-1)g(-1) = [g(-1)]^2,$$

obtemos $0 \leq [g(s)]^2 < [g(-1)]^2$. Seja $k = \max\{[g(-1)]^2, [g(1)]^2\}$, então $[g(s)]^2 \leq k$, para todo s satisfazendo $|s| < 1$.

- Se $|s| \geq 1$, pela Hipótese $(H-1)-(\text{iii})$, tem-se $M_2|s|_{\mathbb{R}}^2 \leq |sg(s)|_{\mathbb{R}} \leq M_1|s|_{\mathbb{R}}^2$, o que acarreta $|g(s)|_{\mathbb{R}} \leq M_1|s|_{\mathbb{R}}$.

De posse das desigualdades acima já podemos mostrar que $g(v_0) \in L^2(\Gamma)$. Com efeito, (usando a notação $|\cdot|$, no lugar de $|\cdot|_{\mathbb{R}}$) para qualquer $v_0(x) \in \mathbb{R}$ temos $|v_0(x)| < 1$ ou $|v_0(x)| \geq 1$. Para $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in D(\mathcal{A})$, de (2.28), segue-se que $v_0 \in L^2(\Gamma)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |g(v_0(x))|^2 d\Gamma &= \int_{\{x\in\Gamma:|v_0(x)|<1\}} |g(v_0(x))|^2 d\Gamma + \int_{\{x\in\Gamma:|v_0(x)|\geq 1\}} |g(v_0(x))|^2 d\Gamma \\
&\leq \int_{\{x\in\Gamma:|v_0(x)|<1\}} k d\Gamma + M_1^2 \int_{\{x\in\Gamma:|v_0(x)|\geq 1\}} |v_0(x)|^2 d\Gamma \\
&\leq k med(\Gamma) + M_1^2 C_1 = C < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $g(v_0) \in L^2(\Gamma)$.

Agora, se $\big(u(t), u_t(t)\big)$ denota a solução de (1), correspondendo ao valor inicial $(u_0, v_0) \in D(\mathcal{A})$. Então, por propriedades da teoria de Semigrupo, vemos que $\big(u(t), u_t(t)\big) \in D(\mathcal{A})$ e, consequentemente

$$u_t\big|_{\Gamma_1} \in L^\infty\big(0, T; L^2(\Gamma_1)\big), \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_1} \in L^\infty\big(0, T; L^2(\Gamma_1)\big). \tag{2.29}$$

Sendo, por $(H-1)-(\text{iii})$, $\alpha(s_1 - s_1) \geq g(s_1 - g(s_2))$, temos:

- Se $0 \leq s$ então $0 \leq s - 0$ e $\alpha s = \alpha(s-0) \leq g(s) - g(0) = g(s) \Longrightarrow \alpha s^2 \leq sg(s)$;
- Se $0 \geq s$ então $0 \leq -s = 0 - s$ e $-\alpha s = \alpha(0-s) \leq g(0) - g(s) \Longrightarrow \alpha s^2 \leq sg(s)$.

Em qualquer caso,

$$\alpha s^2 \leq sg(s). \tag{2.30}$$

Para concluir a prova deste teorema vamos utilizar uma identidade para a energia $E(t)$ associada a solução do Problema (1). Tal resultado é dado pela Proposição 3.1, cujos, enunciado e demonstração serão adiados para o Capítulo 3, a partir da qual obtemos

$$E(t) + \int_0^t \int_{\Gamma_1} u_t g(u_t) d\Gamma_1 ds = E(0), \tag{2.31}$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \int_{\Gamma_1} F_1(u) d\Gamma_1 + \int_\Omega F_0(u) d\Omega, \tag{2.32}$$

com

$$F_i(s) \equiv \int_0^s f_i(t)dt, \qquad (i = 0, 1).$$

Desde que $t > 0$ implica $f_i(t) > 0$ e, $t < 0$ implica $f_i(t) < 0$, $(i = 0, 1)$ segue-se que $F_i(s) \geq 0$, pois

$$s > 0 \Longrightarrow F_i(s) = \int_0^s f_i(t)dt \geq 0, \qquad (i = 0, 1),$$

e

$$s < 0 \Longrightarrow F_i(s) = -\int_s^0 f_i(t)dt = \int_s^0 -f_i(t)dt \geq 0 \qquad (i = 0, 1).$$

Logo, usando (2.30), (2.31) e (2.32), obtemos

$$E(t) + \alpha \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 ds \leq E(t) + \int_0^t \int_{\Gamma_1} u_t g(u_t) d\Gamma_1 ds = E(0).$$

Assim,

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma_1 dt \leq \|\nabla u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \\ + 2\int_{\Gamma_1} F_1\big(u(0)\big) d\Gamma_1 + 2\int_\Omega F_0\big(u(0)\big) d\Omega. \tag{2.33}$$

Vamos obter estimativas para as duas últimas integrais. Sendo as funções f_i Lipschitz, com $f_i(0) = 0$ $(i = 0, 1)$, temos $|f_i(s)| = |f_i(s) - f_i(0)| \leq L_i|s|$; assim, $F_i\big(u(0)\big) \leq C_i|u(0)|^2$, com $i = 0, 1$. Ademais, por hipótese $u(0) = u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $u_t(0) = u_1 \in L^2\Omega)$, donde

$$2\int_\Omega F_0\big(u(0)\big) d\Omega \leq C \int_\Omega |u(0)|^2 d\Omega \leq C\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a imersão $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset L^2(\Gamma_1)$ e a continuidade da aplicação $\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, tem-se

$$2\int_{\Gamma_1} F_1\big(u(0)\big) d\Gamma_1 \leq C_1\|u_0\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq C_2\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)},$$

onde para a última estimativa aplicamos a desigualdade de Poincaré 1.3. Portanto,

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)}d\Gamma_1 dt \leq C\Big(\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\Big). \tag{2.34}$$

Como, $D(\mathcal{A})$ é denso em E, a desigualdade (2.34) pode ser estendida para todo $u_0, v_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$; desse modo, $u_t \in L^2\big(0,\infty; L^2(\Gamma_1)\big)$. Além disso, pela Hipótese $(H-1)-(\mathrm{iii})$ e por (2.34), vemos que $g(u_t) \in L^2\big(0,\infty; L^2(\Gamma_1)\big)$. Por outro lado, sendo f_1 Lipschitz, com $f_1(0) = 0$, segue do Teorema 5.6 que $f_1(u) \in L^2\big(0,\infty; L^2(\Gamma_1)\big)$. Logo, da identidade

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u_t|_{\Gamma_1}) - f_1(u|_{\Gamma_1}), \qquad \text{sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty)$$

concluímos que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2\big(0,\infty; L^2(\Gamma_1)\big)$. Isto encerra a prova. ■

Capítulo 3

Segundo Resultado Principal

No que segue, assim como feito por I. Lasiecka e D. Tataru em [18], nossa abordagem básica para provar a existência de soluções, sem reivindicar unicidade, depende de uma construção a partir de problemas aproximados, adequados, de modo que se obtenha soluções aproximadas e, em seguida, a passagem ao limite produz a reivindicação desejada de existência de soluções para o problema original. No entanto, um ponto importante a ser enfatizado, no presente caso, é que por mais suaves que sejam os dados iniciais, as soluções correspondentes ao problema não-linear não precisam ser regulares. Além disso, elas não necessariamente dependem continuamente dos dados iniciais, uma vez que, na ausência de unicidade, uma determinada solução não precisa ser aquela produzida pelo argumento de aproximação de existência mencionado anteriormente. Por isso, é necessário um tratamento especial.

Esclarecemos que, assim como feito anteriormente, neste capítulo, com o intuito de simplificar a escrita, sempre que for conveniente, expressões do tipo $v(\cdot)$, $g(v(\cdot))$ e $|g(v(\cdot))|_{\mathbb{R}}$, serão denotadas simplesmente por v, $g(v)$ e $|g(v)|$, respectivamente.

Considerando as hipóteses abaixo, mostraremos os principais resultados.

Hipóteses: (H-1)

(i) $g(s)$ é uma função contínua e crescente em $\mathbb{R}$;

(ii) $g(s)s > 0$ para $s \neq 0$;

(iii) $M_2 s^2 \leq g(s)s \leq M_1 s^2$, para $|s|_{\mathbb{R}} \geq 1$, e (algum) $0 < M_2 \leq M_1$.

Hipóteses: (H-2)

(i) $f_0(s) \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$ é contínua e de classe $C^1(\mathbb{R})$ por pedaços e diferenciável em $s = 0$;

(ii) $f_0(s)s \geq 0$, para $s \in \mathbb{R}$;

(iii) $|f_0'(s)|_{\mathbb{R}} \leq N(1+|s|_{\mathbb{R}}^{k_0-1})$, $\;1 < k_0 < \dfrac{n}{n-2}$, para $|s|_{\mathbb{R}} > N$, com N suficientemente grande, $n > 2$.

Hipóteses: (H-3)

(i) $f_1(s)$ é uma função contínua diferenciável em $s = 0$;

(ii) $f_1(s)s \geq 0$ para $s \in \mathbb{R}$;

(iii) $|f_1(s)|_{\mathbb{R}} \leq M|s|_{\mathbb{R}}^{k_1} + A|s|_{\mathbb{R}}$, para $s \in \mathbb{R}, k_1 < \dfrac{n-1}{n-2}$, sendo M e A constantes dadas.

Antes de enunciarmos o primeiro resultado deste capítulo, vamos deduzir formalmente a equação da energia $E(t)$, associada a solução (u, u_t) do Problema (1), a qual, como já mencionado, é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right) + \int_{\Gamma_1} F_1(u)d\Gamma_1 + \int_\Omega F_0(u)d\Omega, \tag{3.1}$$

onde,

$$F_i(s) \equiv \int_0^s f_i(t)dt, \qquad\qquad (i = 0, 1).$$

Para deduzir (3.1), vamos assumir que as funções envolvidas (u, u_t) possuam regularidades que nos permitam aplicar integração por partes e a fórmula de Green 5.1. Assim, multiplicando a equação $u_{tt} = \Delta u - f_0(u)$ (em (1)), por u_t e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_\Omega u_{tt}u_t d\Omega = \int_\Omega \Delta u u_t d\Omega - \int_\Omega u_t f_0(u)d\Omega. \tag{3.2}$$

Vamos analisar cada integral separadamente. Note que

$$\int_\Omega u_{tt}u_t d\Omega = \big(u_{tt}(t), u_t(t)\big)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(u_t(t), u_t(t)\big)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{3.3}$$

pela fórmula de Green 5.1

$$\int_\Omega \Delta u u_t d\Omega = -\int_\Omega \nabla u \nabla u_t d\Omega + \int_\Gamma u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma, \tag{3.4}$$

onde

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla u_t d\Omega = -\big(\nabla u(t), \nabla u_t(t)\big)_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\nabla u(t), \nabla u(t)\big)_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{3.5}$$

Além disso, sendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$, com $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \varnothing$ e como, por hipótese,

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g\big(u_t|_{\Gamma_1}\big) - f_1\big(u|_{\Gamma_1}\big) \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ u = 0, \qquad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,\infty) \end{array} \right.$$

denotando $-g\big(u_t|_{\Gamma_1}\big) - f_1\big(u|_{\Gamma_1}\big)$ simplesmente por $-g(u_t) - f_1(u)$, obtemos

$$\int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_1 = -\int_{\Gamma_1} u_t g(u_t) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} u_t f_1(u_t) d\Gamma_1. \tag{3.6}$$

Então, substituindo (3.5) e (3.6) em (3.4), tem-se

$$\int_{\Omega} \Delta u u_t d\Omega = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_{\Gamma_1} u_t g(u_t) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} u_t f_1(u_t) d\Gamma_1. \tag{3.7}$$

Agora, definindo

$$F_i(s) := \int_0^s f_i(t)dt, \qquad (i = 0,1),$$

vemos que, $\dfrac{dF_i}{ds}(s) = f_i(s), \quad (i = 0,1)$. Logo,

$$\frac{dF_i}{dt}(u(t)) = \frac{\partial F_i}{\partial u}(u(t))\frac{du}{dt}(t) = f_i(u(t))u_t(t), \qquad (i = 0,1)$$

donde

$$-\int_{\Gamma_1} u_t(t) f_1(u(t)) d\Gamma_1 = -\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} F_1(u(t)) d\Gamma_1 \tag{3.8}$$

e

$$-\int_{\Omega} u_t(t) f_0(u(t)) d\Omega = -\frac{d}{dt}\int_{\Omega} F_0(u(t)) d\Omega. \tag{3.9}$$

Portando, substituindo (3.9), (3.8) em (3.7) e o resultado obtido juntamente com (3.3), em (3.2), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Gamma_1} F_1(u)d\Gamma_1 + \int_{\Omega} F_0(u)d\Omega\right] = -\int_{\Gamma_1} u_t g(u_t) d\Gamma_1. \tag{3.10}$$

Considerando

$$E(t) := \frac{1}{2}\Big(\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \int_{\Gamma_1} F_1(u)d\Gamma_1 + \int_{\Omega} F_0(u)d\Omega,$$

obtemos a assertiva (3.1). Observe que $\dfrac{d}{dt}E(t) \leq 0$ e

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \int_{\Gamma_1} u_t g(u_t) d\Gamma_1 dt. \tag{3.11}$$

Teorema 3.1. *Assuma as hipóteses $(H-1)$–$(H-3)$. Para qualquer $(u_0,u_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, o Problema (1) possui uma solução $u \in C^0_{loc}\big(0,\infty; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\big) \cap C^1_{loc}\big(0,\infty; L^2(\Omega)\big)$ tal que*

$$u_t \in L^2_{loc}\big(0,\infty;\Gamma_1\big), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2_{loc}\big(0,\infty;\Gamma_1\big). \tag{3.12}$$

Demonstração: A prova deste teorema será feita em etapas: primeiro construímos um problema auxiliar aproximado, para o qual a existência e unicidade de solução é estabelecida pela teoria de Semigrupos não lineares; na segunda etapa obtemos a solução do Problema (1) como limite de soluções das equações aproximadas. Com esse objetivo começamos com a

Proposição 3.1. *Seja u uma função dada em $C^0\big[0,T;H^1(\Omega)\big]\cap C^1\big[0,T;L^2(\Omega)\big]$ tal que*

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt}-\Delta u=f\in L^1\big[0,T;L^2(\Omega)\big] \\ u(0)=u_0\in H^1(\Omega), \qquad u_t(0)=u_1\in L^2(\Omega) \\ u_t,\ \ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma}\in\ L^2\big[0,T;L^2(\Gamma_1)\big] \\ u=0, \quad sobre\ \ \sum_0=\Gamma_0\times(0,T). \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Então, a seguinte identidade da energia é assegurada para cada $0\le t\le T$,

$$E_1(t)-\int_0^t\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma}u_t d\Gamma_1 ds-\int_0^t\int_{\Omega}fu_t d\Omega ds=E_1(0),$$

onde

$$E_1(t)=\frac{1}{2}\Big(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Observação 3.1. *Note que este resultado pode ser formalmente obtido pelo uso da fórmula de Green 5.1 e integração por partes, sobre o tempo. Entretanto, não temos informações suficiente sobre a suavidade da solução; além disso, esta pode não depender continuamente dos dados iniciais, por esta razão, por enquanto vamos aceitá-la e, posteriormente com o auxilio do Lema 3.2, que será enunciado e demonstrado mais adiante, vamos prová-la.*

Considere a seguinte aproximação da equação (1), tendo como parâmetro de aproximação $l\longrightarrow\infty$.

$$\left|\begin{array}{ll} u_{ltt}=\Delta u_l-f_{0l}(u_l), & \text{sobre } \Omega\times(0,\infty) \\ \dfrac{\partial u_l}{\partial\nu}=-g\left(u_{lt}\big|_{\Gamma}\right)-\dfrac{1}{l}u_{lt}\big|_{\Gamma}-f_{1l}\left(u_l\big|_{\Gamma}\right) & \text{sobre } \Gamma_1\times(0,\infty) \\ u_l=0, & \text{sobre } \Gamma_0\times(0,\infty) \\ u_l(t=0)=u_0\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \quad u_{lt}(t=0)=u_1\in L^2(\Omega), & \end{array}\right. \tag{3.14}$$

onde f_{il}, $\quad i=0,1$ são definidas por

$$f_{il}(s):=\left|\begin{array}{lll} f_i(s), & \text{se } \ |s|\le l \\ f_i(l), & \text{se } \ s\ge l \\ f_i(-l), & \text{se } \ s\le -l. \end{array}\right. \qquad (i=0,1) \tag{3.15}$$

Observe que para cada valor do parâmetro l as funções f_{il}, $\quad (i=0,1)$ e $g_l(s)=g(s)+\dfrac{1}{l}s$ satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1. De fato, sem perda de generalidade, podemos assumir que as funções $f_i(s)$ são localmente Lipschitz, visto que do contrário podemos definir $f_{il}(s)=\tilde{f}_i(s), \quad |s|\leq l$ onde $\tilde{f}_i$ é uma função Lipschitz que aproxima f_i. Ademais, se $s_1-s_2\geq 0$ temos

$$g_l(s_1)-g_l(s_2)=\frac{1}{l}(s_1-s_2)+g(s_1)-g(s_2)\geq \alpha(s_1-s_2).$$

Logo, pelo Teorema 2.1, existe uma solução (u_l,u_{lt}) de (3.14) tal que

$$u_l\in C^0\big(0,\infty;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\big)\cap C^1\big(0,\infty;L^2(\Omega)\big)$$

e

$$\frac{\partial u_l}{\partial \nu}\in L^2\big(0,\infty;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\big),\quad u_{lt}\big|_{\Gamma_1}\in L^2(\Sigma_1),\quad g_l(u_{lt})\in L^2\big(0,\infty;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\big). \tag{3.16}$$

Vamos provar que a sequência (ou subsequência) de soluções u_l tem um limite apropriado que é solução do problema original (1). Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.1. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1, quando $l\to\infty$ e $u_l\rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$, temos*

$$\int_\Omega F_{0l}(u)d\Omega+\int_{\Gamma_1}F_{1l}(u|_{\Gamma_1})d\Gamma\leq C(\|u\|_{H^1(\Omega)}), \tag{3.17}$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{(i)}\ f_{1l}\big(u_l|_{\Gamma_1}\big)\longrightarrow f_1\big(u|_{\Gamma_1}\big)\quad \textit{em}\quad L^2(\Gamma_1)\\ \textit{e}\\ \text{(ii)}\ f_{0l}(u_l)\longrightarrow f_0(u)\qquad \textit{em}\quad L^2(\Omega),\end{array}\right. \tag{3.18}$$

onde a constante $C(\|u\|_{H^1(\Omega)})$ depende apenas da norma de u em $H^1(\Omega)$.

Demonstração: Para simplificar a escrita, sempre que for oportuno, as constantes positivas que aparecerem nas desigualdades (ou igualdades) serão denotadas pelo mesmo símbolo.

Considere $u\in H^1(\Omega)$, as imersões de Sobolev

$$\left|\begin{array}{lll}H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega), & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\subset L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma), & n>2\\ H^1(\Omega)\subset L^p(\Omega), & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\subset L^p(\Gamma), & 1\leq p<\infty\quad n=2,\end{array}\right. \tag{3.19}$$

e as injeções compactas

$$\left|\begin{array}{lll}H^1(\Omega)\subset L^{2k_0}(\Omega), & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\subset L^{2k_1}(\Gamma), & n>2\\ H^1(\Omega)\subset L^p(\Omega), & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\subset L^p(\Gamma), & 1\leq p<\infty\quad n=2.\end{array}\right. \tag{3.20}$$

De acordo com a Hipótese $(H-2)$, $f_0(0)=0$, daí usando Teorema do Valor Médio, temos $|f_0(s)|=|f_0(s)-f_0(0)|=|f_0'(\xi)||s|$, com $0\leq|\xi|\leq|s|$. Observe que: para $|\xi|>N$, por

$(H-2)-(\text{iii})$, tem-se $|f_0'(\xi)| \leq N(1+|s|^{k_0-1})$ e consequentemente $|f_0(s)| \leq N(1+|s|^{k_0-1})|s|$. Se $|s| \leq N$, então por $(H-2)-(\text{i})$ existe $C>0$ tal que $|f_0'(\xi)| \leq C$, para todo $\xi \in [-N,N]$; assim $|f_0(s)| \leq C|s| \leq C(|s|+|s|^{k_0})$, para todo $s \in [-N,N]$. Logo, em qualquer caso temos

$$F_{0l}(s) = \int_0^s f_{0l}(t)dt \leq C\left(|s|^2 + |s|^{k_0+1}\right)$$

o que implica

$$\left| \int_\Omega F_{0l}\big(u(x)\big)d\Omega \right| \leq C\int_\Omega |u(x)|^2 d\Omega + C\int_\Omega |u(x)|^{k_0+1}d\Omega.$$

• Caso $n>2$: (o caso $n=2$ é tratado de forma similar) sendo $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\frac{2n}{n-2}} + \dfrac{1}{2} = 1$, pela desigualdade de Hölder 5.3,

$$\int_\Omega |u(x)|^{k_0+1}d\Omega = \int_\Omega |u(x)|^{k_0-1}|u(x)||u(x)|d\Omega$$
$$\leq \|u\|^{k_0-1}_{L^{n(k_0-1)}(\Omega)}\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como $0 < k_0 - 1 < \dfrac{2}{n-2}$, ou seja, $n(k_0-1) < \dfrac{2n}{n-2}$, temos

$$H^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \subset L^{n(k_0-1)}(\Omega) \;\text{ e }\; H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

daí,

$$\int_\Omega |u(x)|^{k_0+1}d\Omega \leq C\|u\|^{k_0-1}_{H^1(\Omega)}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Então,

$$\left| \int_\Omega F_{0l}\big(u(x)\big)d\Omega \right| \leq C\int_\Omega |u(x)|^2 d\Omega + C\int_\Omega |u(x)|^{k_0+1}d\Omega \leq C\big(\|u\|_{H^1(\Omega)}\big).$$

Analogamente, da Hipótese $(H-3)$, obtém-se, $F_{1l}(s) \leq C\big(|s|^2+|s|^{k_1+1}\big)$, donde

$$\left| \int_{\Gamma_1} F_{1l}\big(u(x)\big)d\Gamma_1 \right| \leq C\int_{\Gamma_1} |u(x)|^2 d\Gamma_1 + C\int_{\Gamma_1} |u(x)|^{k_1+1}d\Gamma_1.$$

Desde que

$$\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{\frac{2(n-1)}{n-2}} + \frac{1}{2} = 1$$

tem-se, pela desigualdade de Hölder 5.3,

$$\int_{\Gamma_1} |u(x)|^{k_1+1}d\Gamma_1 \leq \|u\|^{k_1-1}_{L^{2(n-1)(k_1-1)}(\Gamma_1)}\|u\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\Gamma_1)}\|u\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Sendo $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma) \subset L^{2(n-1)(k_1-1)}(\Gamma)$, resulta

$$\int_{\Gamma_1} |u(x)|^{k_1+1}d\Gamma_1 \leq C\|u\|^{k_1-1}_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\|u\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Logo, da continuidade da aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e pelo Teorema do Traço 1.7, obtemos $\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$; desse modo

$$\int_{\Gamma_1} |u(x)|^{k_1+1} d\Gamma_1 \leq C\|u\|^{k_1-1}_{H^1(\Omega)} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Assim,

$$\left| \int_{\Gamma_1} F_{1l}\big(u(x)\big) d\Gamma_1 \right| \leq C\big(\|u\|_{H^1(\Omega)}\big).$$

Portanto,

$$\int_\Omega F_{0l}\big(u(x)\big) d\Omega + \int_{\Gamma_1} F_{1l}\big(u(x)\big) d\Gamma_1 \leq C\big(\|u\|_{H^1(\Omega)}\big),$$

onde a constante $C\big(\|u\|_{H^1(\Omega)}\big)$ depende apenas da norma de u em $H^1(\Omega)$. Isto justifica a primeira parte do lema. Agora, para provar (3.18) $-$ (i) definimos

$$\Gamma_l := \{x \in \Gamma; |u_l(x)| > l\}.$$

Note que em $\Gamma - \Gamma_l$ temos $|u_l(x)| \leq l$; assim, $f_{1l}(u_l(x)) = f_1(u_l(x))$, para todo $x \in \Gamma - \Gamma_l$. Então, usando a desigualdade $|a-b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ e denotando $f_{il}\big(u_l(x)\big)$, $\;x \in \Gamma$, simplesmente por $f_{il}(u_l)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)|^2 d\Gamma &= \int_{\Gamma - \Gamma_l} |\underbrace{f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)}_{=0}|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_l} |f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)|^2 d\Gamma_l \\ &\leq 2\int_{\Gamma_l} |f_{1l}(u_l)|^2 d\Gamma_l + 2\int_{\Gamma_l} |f_1(u_l)|^2 d\Gamma_l. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Seja $\tilde{\Gamma}_l := \{x \in \Gamma_l; u_l(x) > l\}$. Temos

$$\begin{aligned} 2\int_{\Gamma_l} |f_{1l}(u_l)|^2 d\Gamma_l &= 2\int_{\Gamma_l - \tilde{\Gamma}_l} |f_{1l}(u_l)|^2 d\Gamma_l + 2\int_{\tilde{\Gamma}_l} |f_{1l}(u_l)|^2 d\tilde{\Gamma}_l \\ &= 2\int_{\Gamma_l - \tilde{\Gamma}_l} |f_1(-l)|^2 d\Gamma_l + 2\int_{\tilde{\Gamma}_l} |f_1(l)|^2 d\tilde{\Gamma}_l \\ &\leq 2\int_{\Gamma_l} |f_1(-l)|^2 d\Gamma_l + 2\int_{\Gamma_l} |f_1(l)|^2 d\Gamma_l. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Logo, substituindo (3.22) em (3.21), resulta

$$\int_\Gamma |f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)|^2 d\Gamma \leq 2\left[\int_{\Gamma_l} |f_1(u_l)|^2 d\Gamma_l + \int_{\Gamma_l} |f_1(-l)|^2 d\Gamma_l + \int_{\Gamma_l} |f_1(l)|^2 d\Gamma_l\right]. \tag{3.23}$$

Por outro lado, das imersões de Sobolev e da Teoria do Traço, para $n > 2$, segue-se que

$$\left(\int_{\Gamma_l} l^{\frac{2n-2}{n-2}} d\Gamma_l\right)^{\frac{1}{\frac{2n-2}{n-2}}} \leq \left(\int_{\Gamma_l} |u_l|^{\frac{2n-2}{n-2}} d\Gamma_l\right)^{\frac{1}{\frac{2n-2}{n-2}}} \leq \left(\int_{\Gamma} |u_l|^{\frac{2n-2}{n-2}} d\Gamma\right)^{\frac{1}{\frac{2n-2}{n-2}}} \leq C\big(\|u_l\|_{H^1(\Omega)}\big),$$

ou seja,

$$med(\Gamma_l) \leq \big[C\big(\|u_l\|_{H^1(\Omega)}\big)\big] l^{\frac{-2n+2}{n-2}}. \tag{3.24}$$

Analogamente trate-se o caso $n = 2$. Supondo $1 \leq l$, se $1 \leq k_1$ então $2 \leq 2k_1$ e, desde que $1 \leq l \leq |u_l(x)|$, para todo $x \in \Gamma_l$, temos $|u_l(x)|^2 + |u_l(x)|^{2k_1} \leq 2|u_l(x)|^{2k_1}$, $\quad \forall x \in \Gamma_l$. Assim, da Hipótese $(H-3)$, obtemos

$$\int_{\Gamma_l} |f_1(u_l)|^2 d\Gamma_l \leq C \int_{\Gamma_l} |u_l|^{2k_1} d\Gamma_l. \tag{3.25}$$

Além disso,

$$k_1 < \frac{n-1}{n-2} \Longrightarrow k_1(n-2) < (n-1) \Longrightarrow 1 < \frac{n-1}{k_1(n-2)} := p.$$

Considere q de tal modo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, isto é,

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{n-1} - \frac{k_1(n-2)}{n-1} = \frac{n-1-k_1(n-2)}{n-1}.$$

Então, por (3.24), (3.25), pelas imersões (3.19) e a desigualdade de Hölder 5.3, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_l} |f_1(u_l)|^2 d\Gamma_l \leq C \int_{\Gamma_l} |u_l|^{2k_1} d\Gamma_l &\leq \left[\int_{\Gamma_l} \left(|u_l|^{2k_1} \right)^p d\Gamma_l \right]^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Gamma_l} 1^q d\Gamma_l \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq C \left[\int_{\Gamma_l} |u_l|^{\frac{2n-2}{n-2}} d\Gamma_l \right]^{\frac{k_1(n-2)}{n-1}} \left(med\Gamma_l \right)^{\frac{n-1-k_1(n-2)}{n-1}} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad l \to \infty. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Observe que em (3.26) usamos o fato que $\frac{(-2n+2)}{(n-2)} \frac{\left(n-1-k_1(n-2)\right)}{(n-1)} < 0$, pois $n > 2$ e por (3.24)

$$\left(med\Gamma_l \right)^{\frac{n-1-k_1(n-2)}{n-1}} \leq \left(l^{\frac{-2n+2}{n-2}} \right)^{\frac{n-1-k_1(n-2)}{n-1}} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad l \to \infty.$$

Ademais, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma)$ e a continuidade de $\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ implicam

$$\|u\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma)} \leq C_1 \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

e a $u_l \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$ acarreta (lembre que convergência fraca implica limitação)

$$\left[\int_{\Gamma_l} |u_l|^{\frac{2n-2}{n-2}} d\Gamma_l \right]^{\frac{k_1(n-2)}{n-1}} \leq \left(\|u_l\|_{H^1(\Omega)} \right)^{\frac{k_1(n-2)}{n-1}} \leq \tilde{C}\left(\|u_l\|_{H^1(\Omega)} \right),$$

onde, por conta da convergência fraca de u_l em $H^1(\Omega)$, a constante $\tilde{C}\left(\|u_l\|_{H^1(\Omega)}\right)$ independe de l, dependendo apenas da norma de u_l em $H^1(\Omega)$. Por outro lado, também pela Hipótese $(H-3)$, tem-se $|f_1(l)|^2 \leq Cl^{2k_1}$ e $|f_1(-l)|^2 \leq Cl^{2k_1}$. Logo, usando (3.24), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_l} |f_1(u_l)|^2 d\Gamma_l + \int_{\Gamma_l} |f_1(-l)|^2 d\Gamma_l + \int_{\Gamma_l} |f_1(l)|^2 d\Gamma_l \leq C \int_{\Gamma_l} l^{2k_1} d\Gamma_l = Cl^{2k_1} med(\Gamma_l) \ \leq \\ \leq C\left(\|u_l\|_{H^1(\Omega)} \right) l^{2k_1 - \frac{2n-2}{n-2}} \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{3.27}$$

quando $l \to \infty$. Novamente a constante $C\big(\|u_l\|_{H^1(\Omega)}\big)$ depende apenas de $\|u_l\|_{H^1(\Omega)}$. Desse modo, combinado (3.27) e (3.26) com (3.23), vemos que

$$\int_\Gamma |f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)|^2 d\Gamma \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad l \to \infty. \tag{3.28}$$

Mas,

$$\int_\Gamma |f_{1l}(u_l) - f_1(u)|^2 d\Gamma \leq 2\int_\Gamma |f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma |f_1(u_l) - f_1(u)|^2 d\Gamma. \tag{3.29}$$

Vamos analisar a última integral em (3.29). Note que sendo $u_l \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$, temos $u_l \rightharpoonup u$ em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, desde que a imersão $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ em $L^2(\Gamma)$ é compacta, segue-se que existe uma subsequência, ainda denotada por $(u_l)_l$, tal que

$$u_l \longrightarrow u \quad \text{forte em} \quad L^2(\Gamma).$$

Desse modo, existe uma subsequência de $(u_l)_l$, ainda denotada pelo mesmo nome, tal que

$$u_l \longrightarrow u, \quad \text{quase sempre em} \quad \Gamma. \tag{3.30}$$

Logo, $f_1(u_l) \longrightarrow f_1(u)$ em $L^2(\Gamma)$, ou seja,

$$\int_\Gamma |f_1(u_l) - f_1(u)|^2 d\Gamma \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad l \to \infty.$$

Portanto, usando também (3.28) e passando ao limite em (3.29), segue-se que

$$\int_\Gamma |f_{1l}(u_l) - f_1(u)|^2 d\Gamma \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad l \to \infty.$$

Com isso, obtemos a convergência (3.18) − (i). A prova de (3.18) − (ii) pode ser feita seguindo ideias análogas. ■

Para concluir a prova do Teorema 3.1 primeiro observamos que usando as propriedades de regularidades (3.16) estamos em condições de aplicar o resultado para energia, obtido pela Proposição 3.1. Assim, desde que sobre $\Gamma_1 \times (0, \infty)$ vale

$$\frac{\partial u_l}{\partial \nu} = -g\left(u_{lt}\big|_\Gamma\right) - \frac{1}{l}u_{lt}\big|_\Gamma - f_{1l}\left(u_l\big|_\Gamma\right) \Longrightarrow g\left(u_{lt}\big|_\Gamma\right) + \frac{1}{l}u_{lt}\big|_\Gamma = -\frac{\partial u_l}{\partial \nu} - f_{1l}\left(u_l\big|_\Gamma\right),$$

temos

$$\int_0^t \int_{\Gamma_1} u_{lt}\Big[g(u_{lt}) + \frac{1}{l}u_{lt}\Big] d\Gamma_1 ds = -\int_0^t \int_{\Gamma_1} u_{lt}\frac{\partial u_l}{\partial \nu} d\Gamma_1 ds - \int_0^t \int_{\Gamma_1} u_{lt} f_{1l}\left(u_l\right) d\Gamma_1 ds.$$

Logo, do resultado de regularidade dado pela Proposição 3.1, de (3.11), para cada $t > 0$, obtemos

$$E_l(t) + \int_0^t \int_{\Gamma_1} u_{lt}\Big[g(u_{lt}) + \frac{1}{l}u_{lt}\Big] d\Gamma_1 ds = E_l(0), \tag{3.31}$$

sendo $E_l(t)$ como em (3.1), com u_l no lugar de u e f_{il} no lugar de f_i, $\quad (i = 0, 1)$. Agora, pelo resultado (3.17) do Lema 3.1, segue-se que

$$\begin{aligned}
E_l(0) &= \frac{1}{2}\|\nabla u_l(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_{lt}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F_{0l}(u_l(0))d\Omega + \int_{\Gamma_1} F_{1l}(u_l(0))d\Gamma_1 \\
&\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_l(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_{lt}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C\Big(\|u_l(0)\|_{H^1(\Omega)}\Big).
\end{aligned}$$

Como $u_l(t=0) = u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $u_{lt}(t=0) = u_1 \in L^2(\Omega)$, temos

$$E_l(0) \leq C\Big(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}, \|u_0\|_{H^1(\Omega)}\Big), \qquad \text{uniformemente em } \ l. \tag{3.32}$$

Ademais, pela Hipótese $(H-1)$, $u_{lt}g(u_{lt}) \geq 0$ e $|u_{lt}|^2 \leq M_2^{-1}u_{lt}g(u_{lt})$, esta última para $|u_{lt}| \geq 1$. Seja

$$\tilde{\Sigma_1} := \Big\{(x,t) \in \Sigma_1;\ |u_{lt}(x,t)| < 1\Big\}.$$

Usando (3.31) e (3.32), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_1} |u_{lt}|^2 d\Sigma_1 &= \int_{\tilde{\Sigma_1}} |u_{lt}|^2 d\tilde{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_1 - \tilde{\Sigma_1}} |u_{lt}|^2 d\Sigma_1 \\
&\leq med\tilde{\Sigma_1} + M_2^{-1} \int_{\Sigma_1 - \tilde{\Sigma_1}} u_{lt}g(u_{lt})d\Sigma_1 \\
&\leq med\tilde{\Sigma_1} + M_2^{-1} \int_{\Sigma_1} u_{lt}g(u_{lt})d\Sigma_1 \\
&\leq \tilde{C}\Big(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}, \|u_0\|_{H^1(\Omega)}\Big).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Assim,

$$\|u_{lt}\|^2_{L^2(\Sigma_1)} = \int_{\Sigma_1} |u_{lt}|^2 d\Sigma_1 \leq C\Big(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}, \|u_0\|_{H^1(\Omega)}\Big) \tag{3.34}$$

Vamos, agora, mostrar que também é verdadeira a estimativa:

$$\|u_l\|_{C^0(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega))} + \|u_{lt}\|_{C^0(0,T;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{3.35}$$

De fato, como $E_l(0)$ é uniformemente limitada e $E_l(t) \leq E_l(0)$, isto é,

$$\begin{aligned}
E_l(t) &= \frac{1}{2}\|\nabla u_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_{lt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega F_{0l}(u_l(t))d\Omega + \int_{\Gamma_1} F_{1l}(u_l(t))d\Gamma_1 \\
&\leq E_l(0) \leq C,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

em particular $\|u_{lt}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1$. Assim,

$$\|u_{lt}\|_{C^0(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_1. \tag{3.37}$$

Por outro lado, se $\Gamma_0 \neq \varnothing$, como consequência da desigualdade de Poincaré 1.3, a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ é equivalente a norma de u em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e; assim,

$$\|u_l(t)\|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} \leq C_2\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 E_l(0) \leq C.$$

Donde, obtém-se (lembre que, quase sempre, as constantes que surgem estão sendo denotadas pelo mesmo símbolo)

$$\|u_l\|_{C^0(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega))} \leq C. \tag{3.38}$$

Caso seja, $\Gamma_0 = \varnothing$, uma vez que $\|u_{lt}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1$, usando a desigualdade de Young 5.1, vemos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_l|^2 d\Omega = 2\int_\Omega u_l u_{lt} d\Omega \leq \int_\Omega |u_l|^2 d\Omega + \int_\Omega |u_{lt}|^2 d\Omega \leq \int_\Omega |u_l|^2 d\Omega + C_1.$$

Integrando de 0 a t, sendo $u_l(t=0) = u_0$, resulta

$$\|u_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_T + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|u_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Por conseguinte, da desigualdade de Gronwall 5.2, tem-se $\|u_l(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C}$, para algum $\tilde{C} > 0$. Como, por (3.36) $\|\nabla u_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ é limitada, obtemos, também nesse caso, uma estimativa como em (3.38). Com isso, e combinado (3.37) com (3.38) fica justificada da desigualdade (3.35). Portanto, (por (3.35)) existe uma subsequência de u_l, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$u_l \rightharpoonup u\big|_\Gamma \quad \text{fraco em} \quad H^1\big(\Omega \times [0,T]\big). \tag{3.39}$$

Além disso, por (3.34), (3.39), pelo Teorema de Aubin-Lions 5.21 e pelo Teorema do Traço 1.7,

$$\left|\begin{array}{llll} \text{(i)} & u_l\big|_\Gamma \longrightarrow u\big|_\Gamma & \text{forte em} & L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \\ \\ \text{(ii)} & u_{lt}\big|_\Gamma \rightharpoonup u_t\big|_\Gamma & \text{fraco em} & L^2(\Sigma_1). \end{array}\right. \tag{3.40}$$

Observe que das hipóteses $(H-1)-(H-3)$, juntamente com a compacidade das imersões (3.19), (3.20) e por (3.40), segue-se que

$$\left|\begin{array}{llll} \text{(i)} & f_0(u_l) \longrightarrow f_0(u) & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ \text{(ii)} & f_1(u_l|_\Gamma) \longrightarrow f_1(u|_\Gamma) & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \\ \text{(iii)} & g(u_{lt}|_\Gamma) \rightharpoonup g_0 \in L^2(\Sigma_1) & \text{em} & L^2(\Sigma_1), \quad \text{para algum} \quad g_0 \in L^2(\Sigma_1). \end{array}\right. \tag{3.41}$$

Sejam u_l e u_m soluções de (3.14), correspondentes aos parâmetros l e m, respectivamente. Calculando a diferença entre as equações que envolvem u_l e u_m, tem-se

$$u_{ltt} - u_{mtt} = \Delta u_l - \Delta u_m - \big[f_{0l}(u_l) - f_{0m}(u_m)\big],$$

multiplicando a identidade acima por $(u_{lt} - u_{mt})$ e integrando em Ω, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_\Omega \big(u_{ltt} - u_{mtt}\big)(u_{lt} - u_{mt}) d\Omega = & \int_\Omega \big(\Delta u_l - \Delta u_m\big)(u_{lt} - u_{mt}) d\Omega \\ & - \int_\Omega \big[f_{0l}(u_l) - f_{0m}(u_m)\big](u_{lt} - u_{mt}) d\Omega. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Note que

$$\int_\Omega \big(u_{ltt} - u_{mtt}\big)(u_{lt} - u_{mt})d\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u_{lt} - u_{mt})(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.43}$$

e pela formula de Green 5.1

$$\int_\Omega \big(\Delta u_l - \Delta u_m\big)(u_{lt} - u_{mt})d\Omega = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla(u_l - u_m)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Gamma (u_{lt} - u_{mt})\frac{\partial}{\partial\nu}(u_l - u_m)d\Gamma. \tag{3.44}$$

Mas,

$$\frac{\partial u_l}{\partial\nu} = -g\left(u_{lt}\big|_\Gamma\right) - \frac{1}{l}u_{lt}\big|_\Gamma - f_{1l}\left(u_l\big|_\Gamma\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_m}{\partial\nu} = -g\left(u_{mt}\big|_\Gamma\right) - \frac{1}{m}u_{mt}\big|_\Gamma - f_{1m}\left(u_m\big|_\Gamma\right);$$

assim, denotando $u_{lt}\big|_\Gamma$ e $u_{lt}\big|_\Gamma$ simplesmente por u_{lt} e u_{lt}, tem-se

$$\frac{\partial u_l}{\partial\nu} - \frac{\partial u_m}{\partial\nu} = -\Big[g(u_{lt}) - g(u_{mt})\Big] - \Big[\frac{1}{l}u_{lt} - \frac{1}{m}u_{mt}\Big] - \Big[f_{1l}(u_l) - f_{1m}(u_m)\Big].$$

Substituindo em (3.44), resulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big(\Delta u_l - \Delta u_m\big)(u_{lt} - u_{mt})d\Omega = &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla(u_l - u_m)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &- \int_\Gamma (u_{lt} - u_{mt})\Big[g(u_{lt}) - g(u_{mt})\Big]d\Gamma\\ &- \int_\Gamma (u_{lt} - u_{mt})\Big[\frac{1}{l}u_{lt} - \frac{1}{m}u_{mt}\Big]d\Gamma\\ &- \int_\Gamma (u_{lt} - u_{mt})\Big[f_{1l}(u_l) - f_{1m}(u_m)\Big]d\Gamma.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Agora, combinado (3.42), (3.43) e (3.45), integrando de 0 a t e usando o fato que $u_l = u_m = 0$ em $\Gamma_0 \times (0, \infty)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\nabla(u_l - u_m)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|(u_{lt} - u_{mt})(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_{\Gamma_1}(u_{lt} - u_{mt})\big[g(u_{lt}) - g(u_{mt})\big]d\Gamma_1 dt \leq\\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla(u_l - u_m)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|(u_{lt} - u_{mt})(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Sigma_1}|u_{lt} - u_{mt}|\left|\frac{1}{l}u_{lt} - \frac{1}{m}u_{mt}\right|d\Sigma_1 \; +\\ &+ \int_{\Sigma_1}|u_{lt} - u_{mt}|\Big|f_{1l}(u_l) - f_{1m}(u_m)\Big|d\Sigma_1 + \int_Q |u_{lt} - u_{mt}|\big|f_{0l}(u_l) - f_{0m}(u_m)\big|dQ.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Observe que

$$\|\nabla(u_l - u_m)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|(u_{lt} - u_{mt})(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0, \tag{3.47}$$

pois

$$u_l(t=0) = u_0 = u_m(t=0) \quad \text{e} \quad u_{lt}(t=0) = u_1 = u_{mt}(t=0).$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
|u_{lt} - u_{mt}|\left|\frac{1}{l}u_{lt} - \frac{1}{m}u_{mt}\right| &\leq (|u_{lt}| + |u_{mt}|)\left(\frac{1}{l}|u_{lt}| + \frac{1}{m}|u_{mt}|\right) \\
&= \frac{1}{l}|u_{lt}|^2 + \frac{1}{l}|u_{lt}||u_{mt}| + \frac{1}{m}|u_{lt}||u_{mt}| + \frac{1}{m}|u_{mt}|^2 \\
&\leq \frac{1}{l}|u_{lt}|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m}\right)\left(|u_{lt}|^2 + |u_{mt}|^2\right) + \frac{1}{m}|u_{mt}|^2 \\
&\leq \left(\frac{3}{l} + \frac{1}{m}\right)|u_{lt}|^2 + \left(\frac{1}{l} + \frac{3}{m}\right)|u_{mt}|^2.
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

Então, de (3.46), (3.47) e (3.48), vemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\nabla(u_l - u_m)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|(u_{lt} - u_{mt})(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_{\Gamma_1}(u_{lt} - u_{mt})\big[g(u_{lt}) - g(u_{mt})\big]d\Gamma_1 dt \\
&\quad\leq \int_{\Sigma_1}|u_{lt} - u_{mt}|\big|f_{1l}(u_l) - f_{1m}(u_m)\big|d\Sigma_1 + \int_Q\big|f_{0l}(u_l) - f_{0m}(u_m)\big||u_{lt} - u_{mt}|dQ \ + \\
&\quad+\left(\frac{3}{l} + \frac{1}{m}\right)\int_{\Sigma_1}|u_{lt}|^2 d\Sigma_1 + \left(\frac{1}{l} + \frac{3}{m}\right)\int_{\Sigma_1}|u_{mt}|^2 d\Sigma_1.
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

Nosso próximo passo é mostrar que as expressões à direita da desigualdade (3.49) convergem para zero quando $l, m \to \infty$. De fato,

- Da estimativa (3.34) segue que

$$
\left(\frac{3}{l} + \frac{1}{m}\right)\int_{\Sigma_1}|u_{lt}|^2 d\Sigma_1 \longrightarrow 0 \ \text{ e } \ \left(\frac{1}{l} + \frac{3}{m}\right)\int_{\Sigma_1}|u_{mt}|^2 d\Sigma_1 \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \ \ l, m \to \infty.
$$

- Quanto a penúltima integral à direita de (3.49), também por (3.34) existe $C > 0$ tal que $\|u_{lt} - u_{mt}\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq C$, em virtude de (3.39) estamos sob as hipóteses do Lema 3.1, por isso, podemos usar as convergências dadas em (3.18). Ademais, em (3.28) vimos que

$$
\int_{\Gamma_1}|f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)|^2 d\Gamma_1 \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \ \ l \to \infty.
$$

Assim, para $T > 0$ (fixo), dado $\varepsilon > 0$, existe $l_0 > 0$ tal que

$$
\int_{\Gamma_1}|f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)|^2 d\Gamma_1 = \|f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} < \frac{\varepsilon}{T}, \qquad \forall\, l > l_0.
$$

Logo,

$$
\|f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)\|^2_{L^2(\Sigma_1)} = \int_0^T\int_{\Gamma_1}|f_{1l}(u_l) - f_1(u_l)|^2 d\Gamma_1 dt < \int_0^T \frac{\varepsilon}{T}dt \leq \varepsilon, \quad \forall\, l > l_0. \tag{3.50}
$$

Então, usando também a desigualdade de Hölder 5.3, obtemos

$$
\int_{\Sigma_1}|u_{lt} - u_{mt}|\big|f_{1l}(u_l) - f_{1m}(u_m)\big|d\Sigma_1 \leq \|u_{lt} - u_{mt}\|_{L^2(\Sigma_1)}\|f_{1l}(u_l) - f_{1m}(u_m)\|_{L^2(\Sigma_1)} \ \leq
$$

$$\leq C\Big(\underbrace{\|f_{1l}(u_l)-f_1(u_l)\|_{L^2(\Sigma_1)}}_{\longrightarrow\ 0 \text{ por } (3.50)}+\underbrace{\|f_1(u_l)-f_1(u)\|_{L^2(\Sigma_1)}}_{\longrightarrow\ 0 \text{ por } (3.41)}+\underbrace{\|f_1(u)-f_{1m}(u_m)\|_{L^2(\Sigma_1)}}_{\longrightarrow\ 0 \text{ por } (3.18)}\Big).$$

Donde concluímos que

$$\int_{\Sigma_1}|u_{lt}-u_{mt}|\big|f_{1l}(u_l)-f_{1m}(u_m)\big|d\Sigma_1 \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad l,m\to\infty. \tag{3.51}$$

- Finalmente, para a convergência da última integral agimos de forma similar ao caso anterior, primeiro observamos que por (3.39) existe $C>0$ tal que $\|u_{lt}-u_{mt}\|_{L^2(Q)}\leq C$. Além disso, procedendo como no caso de f_{1l}, na demonstração do Lema 3.1 quando obtivemos (3.28), verifica-se que

$$\int_\Omega |f_{0l}(u_l)-f_0(u_l)|^2 d\Omega \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad l\to\infty.$$

Daí, dados $T>0$ e $\varepsilon>0$, existe $l_0>0$ tal que

$$\int_\Omega |f_{0l}(u_l)-f_0(u_l)|^2 d\Omega = \|f_{0l}(u_l)-f_0(u_l)\|^2_{L^2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{T}, \qquad \forall\, l>l_0.$$

Por isso,

$$\|f_{0l}(u_l)-f_0(u_l)\|^2_{L^2(Q)} = \int_0^T\int_\Omega |f_{0l}(u_l)-f_0(u_l)|^2 d\Omega dt < \int_0^T \frac{\varepsilon}{T}dt \leq \varepsilon, \quad \forall\, l>l_0. \tag{3.52}$$

Novamente pelas convergências anteriores e pela a desigualdade de Hölder 5.3, obtemos

$$\int_Q |u_{lt}-u_{mt}|\big|f_{0l}(u_l)-f_{0m}(u_m)\big|dQ \leq \|u_{lt}-u_{mt}\|_{L^2(Q)}\|f_{0l}(u_l)-f_{0m}(u_m)\|_{L^2(Q)} \leq$$

$$\leq C\Big(\underbrace{\|f_{0l}(u_l)-f_0(u_l)\|_{L^2(Q)}}_{\longrightarrow\ 0 \text{ por } (3.52)}+\underbrace{\|f_0(u_l)-f_0(u)\|_{L^2(Q)}}_{\longrightarrow\ 0 \text{ por } (3.41)}+\underbrace{\|f_0(u)-f_{0m}(u_m)\|_{L^2(Q)}}_{\longrightarrow\ 0 \text{ por } (3.18)}\Big).$$

Logo,

$$\int_Q \big|f_{0l}(u_l)-f_{0m}(u_m)\big||u_{lt}-u_{mt}|dQ \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad l,m\to\infty. \tag{3.53}$$

Consequentemente

$$\|\nabla(u_l-u_m)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|(u_{lt}-u_{mt})(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\int_{\Gamma_1}(u_{lt}-u_{mt})\big[g(u_{lt})-g(u_{mt})\big]d\Gamma_1 dt \longrightarrow 0, \tag{3.54}$$

quando $l,m\to\infty$. Em particular, cada termo da expressão (3.54) converge para zero quando $l,m\to\infty$, já que são não negativos. De fato, quanto aos dois primeiros termos não há nada a fazer, para o último basta ver que por $(H-1)$ g é crescente, daí, dados $s_l,s_m\in\mathbb{R}$ se $s_l\leq s_m$ então $g(s_l)\leq g(s_m)$, $\quad (s_l-s_m)\leq 0 \quad$ e $g(s_l)-g(s_m)\leq 0$, o que implica $0\leq (s_l-s_m)\big[g(s_l)-g(s_m)\big]$. Se for $s_l>s_m$, temos $g(s_l)\geq g(s_m)$, $\quad (s_l-s_m)>0$ e $g(s_l)-g(s_m)\geq 0$ donde, novamente, $0\leq (s_l-s_m)\big[g(s_l)-g(s_m)\big]$. Portanto, da convergência (3.54) concluímos que

$$u_l \longrightarrow u \quad \text{em} \quad C^0[0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)] \cap C^1[0,T;L^2(\Omega)] \tag{3.55}$$

e

$$\lim_{l,m\to\infty} \int_{\Sigma 1} (u_{lt} - u_{mt})\big[g(u_{lt}) - g(u_{mt})\big] d\Sigma_1 = 0. \tag{3.56}$$

Ou seja,

$$\lim_{l\to\infty}\left[\int_{\Sigma_1} g(u_{lt})u_{lt} d\Sigma_1 - \lim_{m\to\infty}\int_{\Sigma_1} g(u_{lt})u_{mt} d\Sigma_1 - \lim_{m\to\infty}\int_{\Sigma_1} g(u_{mt})u_{lt} d\Sigma_1\right] + \lim_{m\to\infty}\int_{\Sigma_1} g(u_{mt})u_{mt} d\Sigma_1 = 0.$$

Sendo assim, de (3.40), (3.41) e (3.56), obtém-se

$$\lim_{l\to\infty}\left[\int_{\Sigma_1} g(u_{lt})u_{lt} d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_1} g(u_{lt})u_t d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_1} g_0 u_{lt} d\Sigma_1\right] + \lim_{m\to\infty}\int_{\Sigma_1} g(u_{mt})u_{mt} d\Sigma_1 = 0. \tag{3.57}$$

Por conseguinte, de (3.40) e (3.41), com m no lugar de l, resulta

$$2\lim_{l\to\infty}\int_{\Sigma_1} g(u_{lt})u_{lt} d\Sigma_1 = 2\int_{\Sigma_1} g_0 u_t d\Sigma_1. \tag{3.58}$$

Mas, combinando (3.58) com (3.41), (3.40) e a monotonicidade de g, em virtude do Lema 1.4 segue-se que

$$g_0 = g(u_t|_\Gamma). \tag{3.59}$$

Portanto, de (3.59), (3.39) $-$ (3.41), por passagem ao limite em (3.14), obtemos

$$\left|\begin{array}{ll} u_{tt} = \Delta u - f_0(u), & \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g\left(u_t|_\Gamma\right) - f_1\left(u|_\Gamma\right), & \text{em } L^2(0,\infty;\Gamma_1) \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, & \end{array}\right. \tag{3.60}$$

com a regularidade

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad u_t \in L^2(0,T;\Gamma_1).$$

Isto encerra a prova do Teorema 3.1. ■

Veremos a seguir o resultado anteriormente mencionado, o qual facilitará bastante a prova da Proposição 3.1.

Lema 3.2. *Assuma que certa função* $u \in C^0\big[0,T;H^1(\Omega)\big] \cap C^1\big[0,T;L^2(\Omega)\big]$ *satisfaz* (3.13). *Então, existem sequências de funções*

$$u_l \in C^0\big[0,T;H^2(\Omega)\big] \cap C^1\big[0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\big], \qquad f_l \in C^0\big[0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\big], \tag{3.61}$$

tais que

$$\left| \begin{array}{lll} f_l \longrightarrow f & em & L^1[0,T;L^2(\Omega)], \\ u_{ltt} - \Delta u_l = f_l & & \\ u_l \longrightarrow u & em & C^0[0,T;H^1(\Omega)], \\ u_{lt} \longrightarrow u_t & em & C^0[0,T;L^2(\Omega)], \\ u_{lt} \longrightarrow u_t & em & L^2(\Sigma_1), \\ \dfrac{\partial u_l}{\partial \nu} \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & em & L^2(\Sigma_1). \end{array} \right. \tag{3.62}$$

Demonstração: Por densidade, seja $(f_l)_l$ uma sequência qualquer em $C^0[0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]$ tal que $f_l \longrightarrow f$ em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Considere a sequência de equações lineares

$$\left| \begin{array}{ll} v_{ltt} = \Delta v_l + f_l, & \text{em} \quad Q \\ v_l(0) = v_{0l}, \quad v_{lt}(0) = v_{1l} & \text{em} \quad \Omega \\ v_l = 0, & \text{sobre} \quad \Sigma_0 \\ \dfrac{\partial v_l}{\partial \nu} + v_l = g_l, & \text{em } \Sigma_1 \end{array} \right. \tag{3.63}$$

onde $(v_{0l}, v_{1l}) \in D(A_F)$, com

$$D(A_F) := \left\{ (z,y) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega);\ z = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_0 \ \text{ e } \ \frac{\partial z}{\partial \nu} = -y, \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \right\},$$

$$A_F \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ A[u - Nv] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (v_{0l}, v_{1l}) \longrightarrow (u_0, u_1), \quad \text{em} \quad H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\left| \begin{array}{l} N \colon L^2(\Gamma_1) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ \qquad z \longmapsto Nz = v \Longleftrightarrow \ \Delta v = 0, \ \ \dfrac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_1} = z \ \text{ e } \ v = 0, \ \ \text{em } \Gamma_0 \end{array} \right. \tag{3.64}$$

$$Au = \Delta u, \qquad D(A) := \left\{ u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega), \ \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \ \text{ sobre } \ \Gamma_1 \right\}.$$

Considere a sequência $(g_l)_l$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} g_l \in H^1(0,T;L^2(\Gamma_1) \cap C^0(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \\ g_l(t=0) = 0, \\ g_l \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u_t\big|_{\Gamma}, \quad \text{em } L^2(\Sigma_1). \end{array} \right. \tag{3.65}$$

Sabemos que (veja G. Chen [9]) A_F é um gerador forte estável do Semigrupo de contrações $e^{A_F t}$, sobre o espaço $E := H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Além disso, o operador

$$(Lg)(t) := \int_0^t e^{A_F(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ ANg(s) \end{bmatrix} ds, \tag{3.66}$$

$L\colon L^2(\Sigma_1) \longrightarrow C^0[0,T;E]$ é limitado. Vamos mostrar que para g satisfazendo $g(t=0)=0$, temos

$$\|Lg\|_{C^0(0,T;H^2(\Omega))} + \left\|\frac{d}{dt}Lg\right\|_{C^0(0,T;H^1(\Omega))} \leq C\Big(\|g'\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))} + \|g\|_{C^0(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}\Big). \tag{3.67}$$

Inicialmente, note que podemos escrever

$$(Lg)(t) = -A_F^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg(t) \end{bmatrix} + e^{A_F t}A_F^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A_F(t-s)}A_F^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(s) \end{bmatrix}ds,$$

ou seja,

$$(Lg)(t) = -\begin{bmatrix} Ng(t) \\ 0 \end{bmatrix} + A_F^{-1}(Lg')(t). \tag{3.68}$$

De fato, aplicando integração por partes em (3.66) e supondo $g(t=0)=0$, vemos que

$$\begin{aligned}(Lg)(t) &= -A_F^{-1}e^{A_F(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg(s) \end{bmatrix}\Bigg|_0^t + \int_0^t A_F^{-1}e^{A_F(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(s) \end{bmatrix}ds \\ &= -A_F^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg(t) \end{bmatrix} + A_F^{-1}(Lg')(t).\end{aligned} \tag{3.69}$$

Ademais,

$$-A_F^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ ANg(s) \end{bmatrix} = A_F\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ A[u-Nv] \end{bmatrix},$$

o que implica $v=0$ e $ANg(s)=Au$, isto é, $Ng(s)=u$. Logo,

$$A_F^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ng(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

Desse modo, substituindo (3.70) em (3.69), obtemos (3.68). Além disso, observe que

$$(i)\ \ N \in \mathcal{L}\big(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1); H^2(\Omega)\big), \qquad (ii)\ \ A_F^{-1}L \in \mathcal{L}\big(L^2(\Sigma_1); C^0(0,T;D(A_F))\big).$$

Assim, de (i), tem-se $\|Ng(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|g(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$, o que acarreta

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|Ng(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C\sup_{0\leq t\leq T}\|g(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = C\|g\|_{C^0[0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]}. \tag{3.71}$$

De (ii) segue-se que, $\sup\limits_{0\leq t\leq T}\|(A_F^{-1}L)g'(t)\|_{D(A_F)} = \|(A_F^{-1}L)g'\|_{C^0(0,T;D(A_F)} \leq C\|g'\|_{L^2(\Sigma_1)}$. Logo, (denotando as constantes pelo mesmo símbolo)

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|(A_F^{-1}L)g'(t)\|_{D(A_F)} \leq C\|g'\|_{L^2(\Sigma_1)} = C\|g'\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \leq C\|g'\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_1))}. \tag{3.72}$$

Então, de (3.68), (3.71) e (3.72), resulta

$$
\begin{aligned}
\|Lg\|_{C^0(0,T;H^2(\Omega))} &= \sup_{0\leq t\leq T}\left\|\begin{bmatrix} Ng(t) \\ 0 \end{bmatrix} + (A_F^{-1}L)g'(t)\right\|_{H^2(\Omega)} \\
&\leq C\|g\|_{C^0[0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)]} + C\|g'\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_1))}.
\end{aligned} \tag{3.73}
$$

Note que, sendo $Ng(t) \in H^2(\Omega)$, o vetor $\begin{bmatrix} Ng(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ pode ser identificado com um elemento de $H^2(\Omega)$. Agora, para estabelecer a regularidade de $\dfrac{d}{dt}Lg$, observemos que

$$
\left[\frac{d}{dt}Lg\right](t) = -A_F^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ng'(t) \\ 0 \end{bmatrix} + (Lg')(t) = (Lg')(t). \tag{3.74}
$$

Com efeito, derivando (3.68), obtemos

$$
\left[\frac{d}{dt}Lg\right](t) = -\begin{bmatrix} Ng'(t) \\ 0 \end{bmatrix} + A_F^{-1}\frac{d}{dt}(Lg')(t). \tag{3.75}
$$

Para $0 < h$, suficientemente pequeno, (o caso $h < 0$ é tratado de forma similar) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{(Lg')(t+h) - (Lg')(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} e^{A_F(t+h-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(s) \end{bmatrix}ds - \frac{1}{h}\int_0^t e^{A_F(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(s) \end{bmatrix}ds \\
&= \frac{1}{h}e^{A_Fh}\int_0^t e^{A_F(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(s) \end{bmatrix}ds - \frac{1}{h}\int_0^t e^{A_F(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(s) \end{bmatrix}ds \\
&+ \frac{1}{h}e^{A_Fh}\int_t^{t+h} e^{A_F(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(s) \end{bmatrix}ds \\
&= \frac{e^{A_Fh} - 1}{h}(Lg')(t) + e^{A_Fh}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{A_F(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(s) \end{bmatrix}ds.
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

Assim, uma vez feita a análise também para $h < 0$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(Lg')(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{(Lg')(t+h) - (Lg')(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{A_Fh} - 1}{h}(Lg')(t) + \lim_{h\to 0} e^{A_Fh}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{A_F(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(s) \end{bmatrix}ds \\
&= (Lg')(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

Por fim, substituindo este resultado em (3.75), vemos que

$$\left[\frac{d}{dt}Lg\right](t) = -\begin{bmatrix} Ng'(t) \\ 0 \end{bmatrix} + (Lg')(t) + A_F^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ ANg'(t) \end{bmatrix} = (Lg')(t).$$

Com isso, está justificada a identidade (3.74). Portanto, a assertiva (3.67) segue de (3.66) e (3.74), fazendo para $(Lg')(t)$, um estudo análogo ao feito na obtenção da estimativa para $(Lg)(t)$.

Por outro lado, (veja A.V. Balakrishnan [1]) a solução v_l de (3.63) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} v_l(t) \\ v_{lt}(t) \end{bmatrix} = e^{A_F t}\begin{bmatrix} v_{0l} \\ v_{1l} \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A_F(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ f_l(s) \end{bmatrix} ds + (Lg_l)(t).$$

Desde que $\begin{bmatrix} v_{0l} \\ v_{1l} \end{bmatrix} \in D(A_F)$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ f_l(s) \end{bmatrix} \in D(A_F)$, por argumentos da teoria de Semigrupos (veja, V. Barbu [2] ou A.V. Balakrishnan [1]) concluímos que

$$v_l \in C^0\big(0,T;H^2(\Omega)\big) \cap C^1\big(0,T;H^1(\Omega)\big).$$

Por isso, estamos em condições de aplicar integração por partes para obter a identidade da energia associada a solução da equação (3.63). O argumento que será utilizado é similar ao empregado nos casos anteriores, por esta razão, omitiremos alguns detalhes: primeiro multiplicamos a equação $v_{ltt} = \Delta v_l + f_l$ por v_{lt}, integramos sobre Ω e após análise das integrais envolvidas, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\nabla v_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) &= \int_\Gamma v_{lt}\frac{\partial v_l}{\partial \nu}d\Gamma + \int_\Omega f_l v_{lt} d\Omega \\ &= -\int_\Gamma |v_{lt}|^2 d\Gamma + \int_\Gamma v_{lt} g_l d\Gamma + \int_\Omega f_l v_{lt} d\Omega, \end{aligned} \tag{3.78}$$

onde usamos também a hipótese, $\dfrac{\partial v_l}{\partial \nu} = g_l - v_{lt}$. Sejam v_l e v_m soluções de (3.63). Tomando a diferença entre as equações $v_{ltt} = \Delta v_l + f_l$ e $v_{mtt} = \Delta v_m + f_m$, multiplicando o resultado por $(v_{lt} - v_{mt})$, a equação (3.78) torna-se

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\nabla(v_l - v_m)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|(v_{lt} - v_{mt})(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \\ &= -\int_\Gamma |v_{lt} - v_{mt}|^2 d\Gamma + \int_\Gamma \underbrace{(v_{lt} - v_{mt})(g_l - g_m)}_{I} d\Gamma + \int_\Omega (v_{lt} - v_{mt})(f_l - f_m) d\Omega. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Agora, integrando (3.79) de 0 a t, usando a desigualdade de Young 5.1 (em I) e lembrando que $v_l = v_m = 0$ sobre Σ_0, tem-se

$$\frac{1}{2}\|\nabla(v_l - v_m)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|(v_{lt} - v_{mt})(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \int_\Omega \underbrace{(v_{lt} - v_{mt})(f_l - f_m)}_{J} d\Omega ds -$$

$$-\int_0^t \int_{\Gamma_1} |v_{lt} - v_{mt}|^2 d\Gamma_1 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Gamma_1} |v_{lt} - v_{mt}|^2 d\Gamma_1 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Gamma_1} |g_l - g_m|^2 d\Gamma_1 +$$

$$+\frac{1}{2}\|\nabla(v_l - v_m)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|(v_{lt} - v_{mt})(0)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ou ainda, multiplicando por 2, ambos os lados da desigualdade acima e usando a desigualdade de Young 5.1 em J, obtemos

$$\underbrace{\|\nabla(v_l - v_m)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\varphi_1} + \underbrace{\|(v_{lt} - v_{mt})(t)\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\varphi_2} + \underbrace{\int_0^t \int_{\Gamma_1} |v_{lt} - v_{mt}|^2 d\Gamma_1 ds}_{\varphi_3} \leq$$

$$\leq \int_0^t \underbrace{\int_\Omega |v_{lt} - v_{mt}|^2 d\Omega\, ds}_{=\varphi_2} + \int_0^t \int_\Omega |f_l - f_m|^2 d\Omega ds + \int_0^t \int_{\Gamma_1} |g_l - g_m|^2 d\Gamma_1 + \tag{3.80}$$

$$+\|\nabla(v_{0l} - v_{0m})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_{1l} - v_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.81}$$

Note que, os dois últimos termos em (3.80) convergem para zero quando $l, m \to \infty$, visto que

$$g_l \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} + u_t\big|_\Gamma, \quad \text{em} \quad L^2(\Sigma_1) \text{ e } f_l \longrightarrow f \quad \text{em} \quad L^1(0,T; L^2(\Omega)),$$

bem como as expressões em (3.81), já que são os dados iniciais do problema (3.63). Logo, dado $\varepsilon > 0$, para l e m suficientemente grandes, temos

$$\psi_{l,m}(t) := \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) \leq \varepsilon + \int_0^t \varphi_2(s) ds \leq \varepsilon + \int_0^t \psi_{l,m}(s) ds. \tag{3.82}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall 5.2 em (3.82), tem-se $0 \leq \psi_{l,m}(t) \leq \varepsilon C$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, fazendo $l, m \to \infty$ vemos que $\lim\limits_{l,m\to\infty} \psi_{l,m}(t) = 0$, ou seja,

$$\lim_{l,m\to\infty} \left[\|\nabla(v_l - v_m)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(v_{lt} - v_{mt})(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_{\Gamma_1} |v_{lt} - v_{mt}|^2 d\Gamma_1 ds \right] = 0,$$

donde concluímos que

$$\left| \begin{array}{ll} v_l \longrightarrow v, & \text{em} \quad C^0[0,T; H^1(\Omega)] \cap C^0[0,T; L^2(\Omega)] \\ v_{lt}\big|_\Gamma \longrightarrow v_t\big|_\Gamma & \text{em} \quad L^2(\Sigma_1). \end{array} \right. \tag{3.83}$$

De (3.63) e (3.65) segue que

$$\frac{\partial v_l}{\partial \nu} + v_{lt} = g_l \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} + u_t\big|_\Gamma \quad \text{em} \quad L^2(\Sigma_1). \tag{3.84}$$

Assim, de (3.83) e (3.84), obtém-se

$$\frac{\partial v_l}{\partial \nu} = g_l - v_{lt} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} + u_t\big|_\Gamma - v_t\big|_\Gamma \qquad \text{em} \quad L^2(\Sigma_1).$$

Desse modo, já estamos em condições de passar ao limite em (3.63), fazendo isto obtemos

$$\left| \begin{array}{l} v_{tt} = \Delta v + f, \\ v(0) = u_0, \quad v_t(0) = u_1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = -v_t + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u_t\big|_{\Gamma} \quad \text{sobre } \Sigma_1, \\ v\big|_{\Gamma_0} = 0. \end{array} \right. \tag{3.85}$$

Desde que a função u também satisfaz a equação (3.85), por unicidade de solução para o problema (3.85), devemos ter $v = u$ e, consequentemente $u_l \equiv v_l$, construídas em (3.63), são aproximações da função u. Isto conclui a prova do Lema 3.2. ■

De posse deste resultado, finalmente podemos demonstrar a Proposição 3.1. Vejamos:

Demonstração: Inicialmente, vamos obter a identidade da energia para v_l, solução aproximada de (3.13). Para isso, argumentamos como nos casos anteriores, ou seja, multiplicamos a equação $v_{ltt} - \Delta v_l = f_l$ por v_{lt}, integramos sobre Ω e após análise das integrais envolvidas, usando integração por partes e a fórmula de Green 5.1, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\nabla v_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \int_{\Gamma} v_{lt}\frac{\partial v_l}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\Omega} f_l v_{lt} d\Omega. \tag{3.86}$$

Seja

$$E_1(t) := \frac{1}{2}\|\nabla v_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_{lt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.87}$$

Como, por hipótese, $v_l = 0, \quad$ sobre Σ_0, integrando (3.86) de 0 a t, tem-se

$$E_1(t) - E_1(0) - \int_0^t \int_{\Gamma_1} v_{lt}\frac{\partial v_l}{\partial \nu} d\Gamma_1 ds = \int_0^t \int_{\Omega} f_l v_{lt} d\Omega ds. \tag{3.88}$$

O resultado da Proposição 3.1 segue, em virtude do Lema 3.2, por passagem ao limite. ■

Capítulo 4

Taxa de Decaimento

Para estudar a estabilidade precisamos de algumas condições. Antes porém, fixemos algumas notações utilizadas neste capítulo: com o intuito de simplificar a escrita, assim como feito nos casos anteriores, abusaremos um pouco da notação e sempre que não houver perigo de confusão, algumas expressões serão simplificadas, por exemplo: $|g\big(u(x,t)\big)|_{\mathbb{R}}$ será denotada apenas por $|g(u)|$.

Seja $h(s)$ uma função real definida para $s \geq 0$, côncava,[1] estritamente crescente, $h(0) = 0$ e que satisfaça

$$h\big(sg(s)\big) \geq s^2 + g^2(s), \quad \text{com } |s| \leq N, \qquad \text{para algum} \quad N > 0. \tag{4.1}$$

Observação 4.1. *Em virtude da Hipótese $(H-1)$, é possível provar que tal função h pode sempre ser construída. Na verdade, definindo as funções crescentes k_1, k_2, sobre $\mathbb{R}$, tais que*

$$\left|\begin{array}{ll} k_1\big(sg(s)\big) \geq s^2 + g^2(s), & \quad \textit{para} \;\; s \geq 0 \\ k_2\big(sg(s)\big) \geq s^2 + g^2(s), & \quad \textit{para} \;\; s < 0. \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Então, a função

$$h := conc\big(max\{k_1, k_2\}\big), \qquad\qquad (\textit{envelope côncavo})$$

possui as propriedades desejadas.

Construção das funções k_1 e k_2:

Para facilitar os cálculos vamos considerar a função $g_1(s) = \dfrac{g(s)}{p}$, onde

$$p := max\{|g(-1)|, g(1)\}.$$

[1] Uma função $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é côncava quando, $\beta h(s_1) + (1-\beta)h(s_2) \geq h\big(\beta s_1 + (1-\beta)s_2\big), \quad \forall \beta \in [0,1]$. Prova-se que se h é duas vezes diferenciável então h é côncava se, e somente se, $h''(s) \leq 0$.

Note que $p > 0$, pois pela Hipótese $(H-1)$, $0 < M_2 \leq g(1) \leq M_1$. Além disso, como g é monótona crescente, se $-1 < s < 1$, então $g(-1) \leq g(s) \leq g(1)$, o que implica

$$|g_1(s)| \leq 1, \qquad para \quad |s| \leq 1. \tag{4.3}$$

Seja o número real L, dado por

$$L = \frac{1+\left(\frac{M_1}{p}\right)^2}{\frac{1}{M_2}} > 2. \tag{4.4}$$

Considere as funções

$$\begin{aligned} \alpha\colon (-\infty, 0\,] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y \quad &\mapsto \alpha(y) = e^{2y}. \end{aligned}$$

e

$\theta\colon (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida em cada intervalo $(-n-1, -n]$, (com $n = 0, 1, 2, ...$) por*

$$\theta(y) = Le^{-2(n+1)} + L(e^{-2n} - e^{-2(n+1)})(y+n+1), \qquad (-n-1 < y \leq -n).$$

Observe que:

(i) *θ é continua em $(-\infty, 0]$: pois é continua no interior de cada intervalo de definição e, nos extremos com uma análise simples verifica-se que os limites laterais coincidem;*

(ii) *θ é crescente: pois é contínua e no interior de cada intervalo $(-n-1, -n]$, sua derivada existe e é positiva;*

(iii) *θ é côncava: de fato, basta ver que sua derivada de segunda ordem no interior de cada intervalo $(-n-1, -n]$, satisfaz $\theta''(y) \leq 0$. Ou ainda, se $y_1, y_2 \in (-n-1, -n]$ e $\varepsilon, \delta \in [0, 1]$ são tais que $\varepsilon + \delta = 1$, fazendo $a = Le^{-2(n+1)}$ e $b = L(e^{-2n} - e^{-2(n+1)})$, temos*

$$\begin{aligned} \varepsilon\theta(y_1) + \delta\theta(y_2) &= \varepsilon[a + b(y_1+n+1)] + \delta[a + b(y_2+n+1)] \\ &= (\varepsilon+\delta)a + b[\varepsilon(y_1+n+1) + \delta(y_2+n+1)] \\ &= a + b(\varepsilon y_1 + \delta y_2 + n + 1) \\ &= \theta\big(\varepsilon y_1 + \delta y_2\big); \end{aligned}$$

(iv) $\lim\limits_{y\to-\infty} \theta(y) = 0$: *basta ver que* $\lim\limits_{y\to-\infty} \theta(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \theta(y) = 0$;

(v) $\theta(0) = L$: *visto que $y = 0 \Longrightarrow n = 0$;*

(vi) $\alpha(y) < \theta(y), \quad \forall y \in (-\infty, 0]$: *tal fato pode ser justificado observando que* θ *é côncava,* α *é convexa e* θ *supera* α *nos extremos (à direita) de cada intervalo da forma* $\cdots(-n-2, -n-1], (-n-1, -n]$.

Definindo a função $k_1\colon (-\infty, +\infty) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$, *por*

$$k_1(s) := \left| \begin{array}{ll} L\theta\big(\ln(s^{\frac{1}{2}})\big) & \textit{se} \ \ 0 < s < 1 \\ 0 & \textit{se} \ s = 0 \\ L^2 s & \textit{se} \ \ s \geq 1 \\ Ls & \textit{se} \ \ s < 0. \end{array} \right.$$

Temos que k_1 *é crescente e, fazendo uma análise dos limites laterais verifica-se que* k_1 *é contínua. Além disso, se* $0 < s < 1$ *segue de* (4.3) *que* $0 < g_1(s) < 1$. *Assim,*

$$L\theta(\ln(s)) > L\alpha(\ln(s)) = Le^{2\ln(s)} = Ls^2 \quad \textit{e} \ \ L\theta\big(\ln(g_1(s))\big) > Lg_1^2(s), \qquad (0 < s < 1). \tag{4.5}$$

Do fato de θ *ser côncava e de* (4.4), *tem-se*

$$\begin{aligned} k_1\big(sg_1(s)\big) &= L\theta\big(\ln\big(sg_1(s)\big)^{\frac{1}{2}}\big) = L\theta\Big(\frac{1}{2}\ln(s) + \frac{1}{2}\ln(g_1(s))\Big) \\ &\geq \frac{L}{2}\theta\big(\ln(s)\big) + \frac{L}{2}\theta\big(\ln(g_1(s))\big) \geq \frac{L}{2}s^2 + \frac{L}{2}g_1^2(s) \\ &> s^2 + g_1^2(s), \qquad\qquad (0 < s < 1). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Como $k_1(0) = 0$, *temos*

$$k_1\big(sg_1(s)\big) > s^2 + g_1^2(s) \qquad\qquad (0 \leq s < 1). \tag{4.7}$$

Por outro lado, se $1 \leq |s|$ *pela Hipótese* $(H-1)$

$$0 < \frac{M_2}{p}s^2 \leq sg_1(s) \leq \frac{M_1}{p}s^2.$$

Daí

$$sg_1(s) = |sg_1(s)| \leq \frac{M_1}{p}s^2 \Longrightarrow |g_1(s)| \leq \frac{M_1}{p}|s| \Longrightarrow |g_1(s)|^2 \leq \Big(\frac{M_1}{p}\Big)^2 |s|^2.$$

Então,

$$\frac{\big(\frac{M_1}{p}\big)^2}{\frac{M_2}{p}} s(g_1(s)) \geq \frac{\big(\frac{M_1}{p}\big)^2}{\frac{M_2}{p}} \frac{M_2}{p} s^2 = \Big(\frac{M_1}{p}\Big)^2 |s|^2 \geq |g_1(s)|^2 = g_1^2(s) \tag{4.8}$$

e

$$\frac{1}{\frac{M_2}{p}} sg_1(s) \geq \frac{1}{\frac{M_2}{p}} \frac{M_2}{p} s^2 = s^2. \tag{4.9}$$

Assim, de (4.4), (4.8) *e* (4.9), *resulta*

$$k_1\big(sg_1(s)\big) > s^2 + g_1^2(s), \qquad \textit{para} \qquad 1 \le |s|. \tag{4.10}$$

Se for $-1 < s < 0$, *como* $0 < sg_1(s) = |s||g_1(s)| < 1$, *por* (4.5) *e* (4.6), *com* $|s|$ *e* $|g_1(s)|$ *nos lugares de* s *e* $g_1(s)$, *respectivamente, temos*

$$k_1\big(sg_1(s)\big) = k_1\big(|s||g_1(s)|\big) > |s|^2 + |g_1(s)|^2 = s^2 + g_1^2(s).$$

Portanto,

$$k_1\big(sg_1(s)\big) > s^2 + g_1^2(s), \qquad \forall s \in (-\infty, +\infty).$$

Definindo $k_1(s) = k_2(s)$, *obtemos as funções procuradas.* $\square$

Seja

$$\tilde{h}(x) := h\left(\frac{x}{med\Sigma_1}\right), \qquad x \ge 0$$

onde $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$ e $T > 0$ é uma constante.

Como $\tilde{h}$ é monótona e estritamente crescente (pois assim é h), para todo $c \ge 0$, $c + \tilde{h}$ é invertível. Defina

$$p(x) := (cI + \tilde{h})^{-1}(kx), \tag{4.11}$$

onde k é constante positiva. Então p é positiva, contínua, estritamente crescente (já que é a inversa de uma função positiva e crescente), com $p(0) = 0$. Seja

$$q(x) := x - (I + p)^{-1}(x), \qquad x > 0. \tag{4.12}$$

Desde que p é positiva e crescente, q também o é. Observe que:

$$q = I - (I + p)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad q(I + p) = \big(I - (I + p)^{-1}\big)(I + p) = (I + p) - I = p.$$

Logo

$$q = p(I + p)^{-1}.$$

Considere as seguintes hipóteses adicionais:

Hipótese: (H-4) Com $h := x - x^0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, a seguinte condição geométrica é válida.

$$h\nu \le 0, \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0.$$

A figura abaixo, ilustra uma situação satisfazendo a hipótese acima.

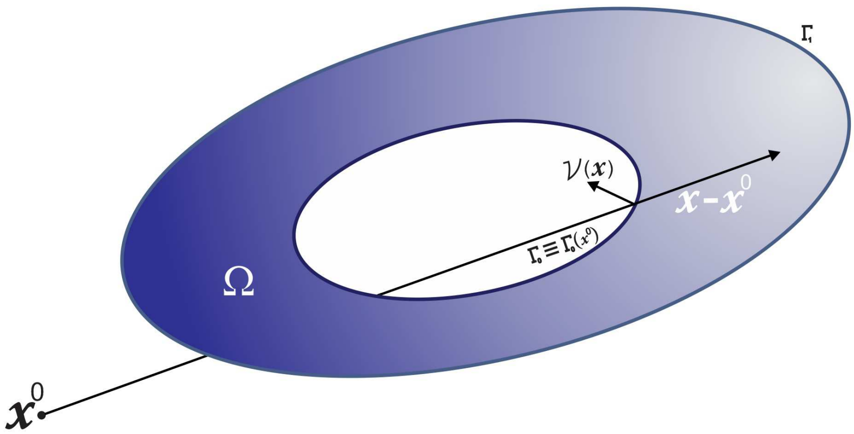

Figura 4.1: $\Gamma_0 \equiv \Gamma_0(x^0) := \{x \in \Gamma;\ (x - x^0) \cdot \nu(x) \leq 0\}$

Hipótese: (H-5) Pelo menos um dos itens abaixo é assegurado:

(i) f_0 é linear;

(ii) $\Gamma_0 = \varnothing$ e $f_0(u)u \geq \epsilon u^2$, para algum $\epsilon > 0$ ou $f_1(u)u \geq \epsilon u^2$, para algum $\epsilon > 0$;

(iii) $\Gamma_0 = \partial\Omega_1 \neq \varnothing$, onde Ω_1 é convexo e $\Omega_1 \cap \Omega = \varnothing$.

Teorema 4.1. *Assuma as hipóteses $(H-1)$–$(H-5)$. Seja (u, u_t) a solução de (1) com as propriedades obtidas no Teorema 3.1. Então, para algum $T_0 > 0$*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right)(E(0)), \quad para\ t > T_0, \tag{4.13}$$

onde $S(t)$ é a solução (semigrupo de contrações) da Equação Diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0) \tag{4.14}$$

e $q(s)$ é dado como em (4.12), sendo a constante k em (4.11), em geral, dependente (a menos que $k = 1$, onde $k = \max\{k_0, k_1\}$) de $E(0)$, e a constante $c = \dfrac{1}{med\Sigma_1}(M_1 + M_2^{-1})$.

Mantendo a notação $Q := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_i := \Gamma_i \times (0,T)$, $(i = 0, 1)$, para provar o Teorema 4.1, começamos com a:

Proposição 4.1. *Assuma a Hipótese $(H-4)$. Seja $u \in C^0\big(0,T; H^1(\Omega)\big) \cap C^1\big[0,T; L^2(\Omega)\big]$ tal que (3.13) se verifica. Então*

$$\int_{\alpha}^{T-\alpha} \left[\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dt \leq C\left[\|\nabla u\|^2_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right]$$

$$+C\left[\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}|u_t|^2 d\Sigma_1+\int_Q |f|^2 dQ\right]+C_T\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]}, \tag{4.15}$$

onde a constante C não depende de T, $0<\rho<\min\left\{\alpha,\frac{1}{2}\right\}$ é suficientemente pequeno, arbitrário e fixo.

Demonstração: Em virtude do Lema 3.2 é suficiente provar a desigualdade (4.15) para funções $u\in C^0[0,T;H^2(\Omega)]\cap C^1[0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]$, satisfazendo (3.13). Então, multiplicando (3.13) por $h\nabla u$, com $h:=x-x^0$ para algum $x^0\in\mathbb{R}^n$ e, aplicando integração por partes, tem-se

$$\int_Q u_{tt}h\nabla u dQ=\int_\Omega u_t h\nabla u d\Omega\Big|_0^T-\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}h\nu|u_t|^2 d\Sigma_1+\frac{n}{2}\int_Q|u_t|^2dQ; \tag{4.16}$$

e

$$\begin{aligned}\int_Q \Delta u h\nabla u dQ=\frac{1}{2}\int_\Sigma\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 h\nu d\Sigma-\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 h\nu d\Sigma_1+\\+\int_{\Sigma_1}h\nabla_\tau u\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Sigma_1+\left(\frac{n}{2}-1\right)\int_Q|\nabla u|^2dQ,\end{aligned} \tag{4.17}$$

onde

$$\nabla u=\nabla_\tau u+\frac{\partial u}{\partial\nu}\nu \qquad \text{e} \qquad |\nabla u|^2=|\nabla_\tau u|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2,$$

sendo $\nabla_\tau u$ o gradiente tangencial. De fato, como $h=(x-x^0)=(x_1-x_1^0,...,x_n-x_n^0)$, multiplicando a equação

$$u_{tt}-\Delta u=f$$

por $h\nabla u$ e integrando sobre Q, resulta

$$\int_Q u_{tt}h\nabla u dQ-\int_Q\Delta u h\nabla u dQ=\int_Q fh\nabla u dQ. \tag{4.18}$$

Vamos analisar a primeira integral à esquerda em (4.18). Vejamos:

$$\int_Q u_{tt}h\nabla u dQ=\int_\Omega\int_0^T u_{tt}\sum_{i=1}^n(x_i-x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}dtd\Omega=\sum_{i=1}^n\int_\Omega\int_0^T u_{tt}(x_i-x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}dtd\Omega. \tag{4.19}$$

Note que (abusando um pouco da notação, por exemplo escrevendo $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$)

$$\int_0^T u_{tt}(x_i-x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}dt=u_t(x_i-x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_0^T-\int_0^T u_t(x_i-x_i^0)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_i}dt. \tag{4.20}$$

Como $u\in C^0[0,T;H^2(\Omega)]$ podemos mudar a ordem de derivação, daí

$$u_t(x_i-x_i^0)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_i}=u_t(x_i-x_i^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial t}=\frac{1}{2}(x_i-x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_t^2\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(x_i-x_i^0)u_t^2\right]-\frac{1}{2}u_t^2. \tag{4.21}$$

Substituindo em (4.20), temos

$$\int_0^T u_{tt}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}dt = u_t(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[(x_i - x_i^0)u_t^2\Big]dt + \frac{1}{2}\int_0^T u_t^2 dt. \tag{4.22}$$

Então,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \int_0^T u_{tt}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}dtd\Omega = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_t(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_0^T d\Omega + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{1}{2}\int_0^T u_t^2 dtd\Omega \ - \\ - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[(x_i - x_i^0)u_t^2\Big]dtd\Omega.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Substituindo (4.23) em (4.19), usando os teoremas de Gauss-Green 5.2 e de Fubini 5.3, obtemos

$$\begin{aligned}\int_Q u_{tt}h\nabla u dQ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \int_0^T u_{tt}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}dtd\Omega \\ &= \int_\Omega \big[u_t h\nabla u\big]d\Omega\Big|_0^T + \frac{n}{2}\int_Q |u_t|^2 dQ \ - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} h\nu|u_t|^2 d\Sigma_1.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Portanto (4.16) está verificado. Por outro lado,

$$\int_Q \Delta u h\nabla u dQ = \int_0^T \int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt = \int_0^T \sum_{i,j}\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt. \tag{4.25}$$

Temos,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_j}\left[\delta_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + (x_i - x_i^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right],$$

onde,

$$\delta_{i,j} = \left| \begin{array}{ll} 1, & \text{se} \ \ i \neq j \\ 0, & \text{se} \ \ i = j. \end{array} \right. . \tag{4.26}$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] - \frac{\partial u}{\partial x_j}\delta_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{4.27}$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = (x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right],$$

(4.27) torna-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] - \frac{\partial u}{\partial x_j}\delta_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{2}(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]. \tag{4.28}$$

Substituindo (4.28) em (4.25) resulta

$$\int_Q \Delta u h \nabla u dQ = \int_0^T \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big] dxdt - \int_0^T \sum_{i,j}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\delta_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i} dxdt \;-$$
$$- \int_0^T \sum_{i,j}\int_\Omega \frac{1}{2}(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2\Big] dxdt. \tag{4.29}$$

Analisando separadamente cada integral em (4.29), pelo Teorema de Gauss-Green 5.2, tem-se

$$\int_0^T \sum_{i,j}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big] dxdt = \int_0^T \sum_{i,j}\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j d\Gamma dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{i,j}\int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j d\Gamma_0 dt + \int_0^T \sum_{i,j}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_i - x_i^0)\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j d\Gamma_1 dt =$$

$$= \int_0^T \int_{\Gamma_0} \Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|^2 h\nu d\Gamma_0 dt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} h \nabla u d\Gamma_1 dt. \tag{4.30}$$

Para obter a última igualdade utilizamos o Lema 5.6 (para detalhes veja [26] Capítulo 3). Agora, usando (4.26), segue-se que

$$- \int_0^T \sum_{i,j}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\delta_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i} dxdt = -\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega dt. \tag{4.31}$$

Por fim, novamente da integração por partes e pelo Teorema de Gauss-Green 5.2

$$- \int_0^T \sum_{i,j}\int_\Omega \frac{1}{2}(x_i - x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2\Big] dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i,j}\int_\Gamma (x_i - x_i^0)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2 \nu_i d\Gamma dt \;+$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i,j}\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2\Big] dxdt. \tag{4.32}$$

Como, (confira o Lema 5.6 ou veja [26] Capítulo 3)

$$\frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i,j}\int_\Gamma (x_i - x_i^0)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2 \nu_i d\Gamma dt = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i,j}\int_{\Gamma_0} (x_i - x_i^0)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2 \nu_i d\Gamma_0 dt \;+$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i,j}\int_{\Gamma_1} (x_i - x_i^0)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2 \nu_i d\Gamma_1 dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0} \Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|^2 h\nu d\Gamma_0 dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1} |\nabla u|^2 h\nu d\Gamma_1 dt, \tag{4.33}$$

e

$$\frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i,j}\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2 dxdt = \frac{n}{2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega dt. \tag{4.34}$$

Substituindo (4.33), (4.34) em (4.32) e levando o resultado obtido, juntamente com (4.31) e (4.30), à (4.29), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_Q \Delta u h\nabla u dQ =& \int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_0 dt + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}h\nabla u d\Gamma_1 dt - \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega dt \;\; - \\
&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_0 dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2 h\nu d\Gamma_1 dt + \frac{n}{2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_0 dt + \left(\frac{n}{2}-1\right)\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega dt \;\; + \\
&+ \underbrace{\int_0^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}h\nabla u d\Gamma_1 dt}_{I} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2 h\nu d\Gamma_1 dt}_{II}.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Seja $\beta = \{\tau_1, ..., \tau_{n-1}\}$ uma base ortonormal do plano tangente a $x \in \Gamma_1$. Temos

$$
\nabla u = \lambda\nu + \nabla_\tau u \qquad \text{em} \quad \Gamma_1,
$$

onde ∇_τ é o gradiente tangencial. Assim, $\nabla u\,\nu = \lambda|\nu|^2 + \nabla_\tau u\,\nu = \lambda$, pois $\nabla_\tau u \perp \nu$ e $|\nu| = 1$. Mas, pelo Lema 5.6, $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\nu_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ em Γ_1, então

$$
\nabla u\;\nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial\nu}\nu_i\nu_i = \frac{\partial u}{\partial\nu}\sum_{i=1}^n \nu_i^2 = \frac{\partial u}{\partial\nu}, \qquad \text{em} \quad \Gamma_1,
$$

donde $\lambda = \dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ e, portanto

$$
\nabla u = \frac{\partial u}{\partial\nu}\nu + \nabla_\tau u \qquad \text{em} \quad \Gamma_1, \tag{4.36}
$$

$$
|\nabla u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + |\nabla_\tau u|^2, \quad \text{em} \quad \Gamma_1. \tag{4.37}
$$

De (4.36) temos,

$$
h\nabla u = \frac{\partial u}{\partial\nu}h\nu + h\nabla_\tau u \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}h\nabla u = \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 h\nu + \frac{\partial u}{\partial\nu}h\nabla_\tau u, \quad \text{em} \;\; \Gamma_1.
$$

Daí,

$$
\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}h\nabla u d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}h\nabla_\tau u d\Gamma_1. \tag{4.38}
$$

Multiplicando (4.37) por $h\nu$ e integrando, tem-se

$$
\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2 h\nu d\Gamma_1 = \int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1}|\nabla_\tau u|^2 h\nu d\Gamma_1. \tag{4.39}
$$

Substituindo (4.38) e (4.39) em I e II na equação (4.35), resulta

$$\begin{aligned}\int_Q \Delta u h\nabla u dQ &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_0 dt + \left(\frac{n}{2}-1\right)\int_Q |\nabla u|^2 dQ + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_1 dt \\ &+ \int_{\Sigma_1}\frac{\partial u}{\partial \nu} h\nabla_\tau u d\Sigma_1 - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_1 dt - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 h\nu d\Sigma_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_0 dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Gamma_1 dt + \left(\frac{n}{2}-1\right)\int_Q |\nabla u|^2 dQ \\ &+ \int_{\Sigma_1}\frac{\partial u}{\partial \nu} h\nabla_\tau u d\Sigma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 h\nu d\Sigma_1 \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Sigma}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Sigma + \left(\frac{n}{2}-1\right)\int_Q |\nabla u|^2 dQ + \int_{\Sigma_1}\frac{\partial u}{\partial \nu} h\nabla_\tau u d\Sigma_1 \ - \\ &- \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 h\nu d\Sigma_1,\end{aligned} \tag{4.40}$$

que é justamente a equação (4.17).

Agora, de (4.16), (4.17) e, como pela Hipótese $(H-4)$, $h\nu \leq 0$ sobre Γ_0, obtemos

$$\begin{aligned}\int_Q fh\nabla u dQ &= \int_Q u_{tt}h\nabla u dQ - \int_Q \Delta u h\nabla u dQ \\ &= \int_\Omega u_t h\nabla u d\Omega\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} h\nu|u_t|^2 d\Sigma_1 + \frac{n}{2}\int_Q |u_t|^2 dQ + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 h\nu d\Sigma_1 \ - \\ &- \frac{1}{2}\int_\Sigma\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Sigma - \int_{\Sigma_1} h\nabla_\tau u\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Sigma_1 - \frac{n}{2}\int_Q |\nabla u|^2 dQ + \int_Q |\nabla u|^2 dQ \\ &\geq \frac{n}{2}\int_Q \left[|u_t|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \int_Q |\nabla u|^2 dQ + \int_\Omega u_t h\nabla u d\Omega\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Sigma_1 \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 h\nu d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_1} h\nabla_\tau u\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Sigma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} h\nu|u_t|^2 d\Sigma_1.\end{aligned} \tag{4.41}$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}\int_Q \left[|u_t|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \int_Q |\nabla u|^2 dQ \leq \int_Q fh\nabla u dQ + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Sigma_1 \ - \\ - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 h\nu d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} h\nabla_\tau u\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Sigma_1 \ - \\ - \int_\Omega u_t h\nabla u d\Omega\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} h\nu|u_t|^2 d\Sigma_1.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Sendo h contínua em $\bar{Q}$, tem-se $|h(x)|\leq C_1$, para todo $x \in Q$ e algum $C_1 > 0$. Desde que

$$\left|\begin{array}{l}\|u_t(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup\limits_{0\leq s\leq T} ess\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)} = \|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \\ \\ \|\nabla u(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup\limits_{0\leq s\leq T} ess\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))},\end{array}\right. \tag{4.43}$$

resultam

$$-\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 h\nu d\Sigma_1 \leq \int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2|h\nu| d\Sigma_1 \leq C_1\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 d\Sigma_1 \tag{4.44}$$

e

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 h\nu d\Sigma_1+\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} h\nu|u_t|^2 d\Sigma_1 \le C_1\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_1 + C_1\int_{\Sigma_1}|u_t|^2 d\Sigma_1. \tag{4.45}$$

Pela desigualdade de Young 5.1

$$\begin{aligned}\int_Q fh\nabla u dQ &\le \int_Q |h||f\nabla u| dQ \le \int_Q\left[\frac{C_1^2}{2}|f|^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2\right]dQ\\ &\le C_2\int_Q |f|^2 dQ+\frac{1}{2}\int_Q|\nabla u|^2 dQ.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Analogamente

$$\int_{\Sigma_1} h\nabla_\tau u\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Sigma_1 \le \int_{\Sigma_1}\left|h\nabla_\tau u\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|d\Sigma_1 \le \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_1 + C_3\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 d\Sigma_1, \tag{4.47}$$

e

$$\begin{aligned}-\int_\Omega u_t h\nabla u d\Omega\Big|_0^T &\le \left[C_4\int_\Omega |u_t|^2 d\Omega+\int_\Omega|\nabla u|^2 d\Omega\right]_0^T\\ &\le C_5\left\{\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right\},\end{aligned} \tag{4.48}$$

onde na última desigualdade usamos o fato que

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega |u_t|^2 d\Omega+\int_\Omega|\nabla u|^2 d\Omega\right]_0^T &= \left[\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right]_0^T\\ &= \left[\|u_t(T)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\right]-\left[\|u_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\\ &\le \|u_t(T)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Logo, substituindo (4.44), (4.45), (4.46), (4.47) e (4.48) em (4.42) e denotando por C a maior das contantes que aparecem à direita de cada desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}\int_Q\left(|u_t|^2-|\nabla u|^2\right)dQ+\frac{1}{2}\int_Q|\nabla u|^2 dQ \le C&\left\{\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right\}+\\ &+C\left\{\int_{\Sigma_1}|u_t|^2 d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 d\Sigma_1+\int_Q|f|^2 dQ\right\}+\\ &+C\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_1.\end{aligned} \tag{4.49}$$

Retornando a identidade $u_{tt}-\Delta u = f$, multiplicando-a por u e integrando sobre Q, tem-se

$$\int_Q u_{tt} u dQ - \int_Q \Delta u\, u dQ = \int_Q fu dQ. \tag{4.50}$$

Da integração por partes, sendo $u\big|_{\Sigma_0}=0$, resultam

$$\int_Q u_{tt} u dQ = \left[\int_\Omega u_t u d\Omega\right]_0^T - \int_Q |u_t|^2 dQ \tag{4.51}$$

e

$$-\int_Q \Delta u\, udQ = \int_Q \nabla u \nabla u dQ - \int_\Sigma u\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Sigma = \int_Q |\nabla u|^2 dQ - \int_{\Sigma_1} u\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Sigma_1. \tag{4.52}$$

Substituindo (4.51) e (4.52) em (4.50), obtemos

$$\int_Q \left(|\nabla u|^2 - |u_t|^2\right) dQ = \int_Q f u dQ - \left[\int_\Omega u_t u d\Omega\right]_0^T + \int_{\Sigma_1} u\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Sigma_1.$$

Desse modo, fixado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, mas arbitrário, pela desigualdade de Young 5.1, argumentando como anteriormente e usando a desigualdade de Poincaré 1.3, para obter $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$, segue-se que

$$\begin{aligned}\int_Q \left(|\nabla u|^2 - |u_t|^2\right) dQ \leq C\int_{\Sigma_1}\left[\frac{1}{\epsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \epsilon|u|^2\right] d\Sigma_1 + C\frac{1}{\epsilon}\int_Q |f|^2 dQ + \epsilon C\int_Q |u|^2 dQ \\ + C\left\{\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right\},\end{aligned} \tag{4.53}$$

onde na expressão acima e nas próximas expressões, sempre que for cabível, as constantes que aparecerem à diteira das desigualdades serão denotadas por C, visto que sempre podemos considerar a maior delas. Como,

$$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\Sigma_1)} \leq C\|u\|_{H^1(Q)},$$

isto é,

$$\epsilon\int_{\Sigma_1}|u|^2 d\Sigma_1 \leq \epsilon C\int_Q |u|^2 dQ + \epsilon C\int_Q |\nabla u|^2 dQ. \tag{4.54}$$

Então, para $0 < \frac{n-1}{2} < a < \frac{n}{2}$, multiplicando (4.53) por a e usando (4.54), tem-se

$$\begin{aligned}a\int_Q \left(|\nabla u|^2 - |u_t|^2\right) dQ - \epsilon a C\int_Q |\nabla u|^2 dQ \leq C\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_1 + C\int_Q |f|^2 dQ + C\int_Q |u|^2 dQ + \\ + C\left\{\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right\}.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Combinando (4.49) com (4.55), obtemos

$$\begin{aligned}&\left[a + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} - \epsilon a C\right]\int_Q |\nabla u|^2 dQ + \left(\frac{n}{2} - a\right)\int_Q |u_t|^2 dQ \leq \\ &\leq C\int_Q |u|^2 dQ + C\left\{\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1}|u_t|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 d\Sigma_1 + \int_Q |f|^2 dQ\right\} + \\ &+ C\left\{\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right\}.\end{aligned}$$

Seja $k = a + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} > 0$. Vamos escolher $\epsilon > 0$ de modo que $k - \epsilon a C > 0$; assim, basta tomar $0 < \epsilon < \frac{k}{aC}$. Para tal ϵ, seja $0 < d = min\left\{k - \epsilon a C, \frac{n}{2} - a\right\}$, então

$$d\left[\int_Q |\nabla u|^2 dQ + \int_Q |u_t|^2 dQ\right] \leq \left[a + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} - \epsilon a C\right]\int_Q |\nabla u|^2 dQ + \left(\frac{n}{2} - a\right)\int_Q |u_t|^2 dQ.$$

Logo,

$$\int_Q \left(|\nabla u|^2+|u_t|^2\right) dQ \leq C\left\{\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}|u_t|^2 d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}|\nabla_\tau u|^2 d\Sigma_1+\int_Q |f|^2 dQ\right\}+ \\ + C\left\{\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right\}+C\int_Q |u|^2 dQ. \tag{4.56}$$

Por outro lado, do Lema 7.2, desigualdade (7.5) em [21], (veja Lema 5.13 no Apêndice B) tem-se

$$\int_\alpha^{T-\alpha}\int_{\Gamma_1}|\nabla_\tau u|^2 d\Gamma_1 dt \leq C_{\rho,\alpha}\left[\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2+|u_t|^2\right] d\Sigma_1+C_{\rho,\alpha}\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(Q)}+C_{\rho,\alpha}\int_Q |f|^2 dQ, \tag{4.57}$$

onde α e ρ são as contantes dadas nas hipóteses. Como, $0<\rho+\dfrac{1}{2}<1$, temos

$$H^{\frac{1}{2}+\rho}(Q)\hookrightarrow H^0(Q)=L^2(Q).$$

Então, em (4.56), tomando $(\alpha, T-\alpha)$ no lugar de $(0,T)$ e usando (4.57), vemos que

$$\int_\alpha^{T-\alpha}\int_\Omega |\nabla u|^2 dQ+\int_\alpha^{T-\alpha}\int_\Omega |u_t|^2 dQ \leq C_{\rho,\alpha}\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_1+C_{\rho,\alpha}\int_{\Sigma_1}|u_t|^2 d\Sigma_1+ \\ + C_{\rho,\alpha}\int_Q |f|^2 dQ+C\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+ \\ + C\|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+C_{\rho,\alpha}\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(Q)}. \tag{4.58}$$

Como,

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(Q)}=\inf\left\{\|v\|_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^{n+1})},\quad v\big|_Q=u\right\}\leq \|v\|_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^{n+1})}$$

e

$$\|v\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^{n+1})}=\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(1+\|(x,t)\|^2_{\mathbb{R}^{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}+\rho}|\hat{v}(x,t)|^2_{\mathbb{R}} dt dx,$$

desde que

$$1+\|(x,t)\|^2_{\mathbb{R}^{n+1}}=1+t^2+\|x\|^2_{\mathbb{R}^n}\leq \underbrace{1+T^2}_{C(T)}+\|x\|^2_{\mathbb{R}^n}\leq C(T)+C(T)\|x\|^2_{\mathbb{R}^n}\leq C(T)\left(1+\|x\|^2_{\mathbb{R}^n}\right)$$

tem-se,

$$\|v\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^{n+1})}\leq \int_{\mathbb{R}} C(T)\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|^2_{\mathbb{R}^n})^{\frac{1}{2}+\rho}|\hat{v}(x,t)|^2_{\mathbb{R}} dt dx \leq C(T)\int_{\mathbb{R}}\|v(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^n)} dt.$$

Daí,

$$\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(Q)}\leq C(T)\int_{\mathbb{R}}\|v(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^n)} dt. \tag{4.59}$$

Por propriedade de ínfimo, para todo $\xi>0$, existe $\|v_\xi\|_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^n)}$ tal que

$$\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)}\leq \|v_\xi\|_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^n)}<\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)}+\xi.$$

Assim, passando ao limite quando $\xi \to 0$, segue-se

$$\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)} = \lim_{\xi\to 0}\|v_\xi\|_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{onde} \quad v_\xi\big|_{\Omega} = u(t).$$

Seja

$$\bar{v}_\xi(x,t) = \left| \begin{array}{ll} tv_\xi, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \quad t > T. \end{array} \right.$$

Por (4.59), temos

$$\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(Q)} \leq C(T)\int_{\mathbb{R}}\|\bar{v}_\xi(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^n)}dt \leq C(T)\int_0^T \|v_\xi\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\mathbb{R}^n)}dt,$$

fazendo $\xi \to 0$, tem-se

$$\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(Q)} \leq C(T)\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)} = C(T)\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]},$$

substituindo este resultado em (4.58), obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{T-\alpha}\left[\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}\right]dt \leq C\left\{\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1}|u_t|^2 d\Sigma_1 + \int_Q |f|^2 dQ\right\} + \\ + C\left[\|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right] + \\ + C_T\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]}.\end{aligned} \tag{4.60}$$

■

Em virtude do Teorema 3.1, a solução do Problema (1) possui as propriedades de regularidade listadas em (3.13). Assim, estamos em condições de aplicar a identidade da energia descrita pela Proposição 3.1. Tal fato, será utilizado para provar a:

Proposição 4.2. *Assuma as hipóteses $(H-1)$–$(H-4)$. Seja (u, u_t) solução do Problema (1), cuja existência é garantida pelo Teorema 3.1. Então,*

$$\int_0^T E(t)dt \leq C\big(E(0)\big)\left[\int_{\Sigma_1}\left[|g(u_t)|^2 + |u_t|^2+|f_1(u)|^2\right]d\Sigma_1 + \int_Q \left[|f_0(u)|^2+|u|^2\right]dQ + E(T)\right]. \tag{4.61}$$

Observação 4.2. *Antes de começarmos a demonstração de tal resultado, como já mencionado em outros casos, por simplicidade, algumas expressões serão simplificadas, por exemplo, $|u(\cdot,\cdot)|_{\mathbb{R}}$, será denotada por $|u|$ e; além disso, em desigualdades do tipo "$\leq$" quando, à direita, aparecerem constantes positivas multiplicando algumas expressões, tais constantes serão denotadas pelo mesmo simbolo, visto que, nestas condições, a desigualdade permanece válida se considerarmos a maior das constantes.*

Demonstração: Como $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g\big(u_t\big|_{\Gamma_1}\big) - f_1\big(u\big|_{\Gamma_1}\big)$, pelo resultado da Proposição 3.1, tem-se

$$E(t) + \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(u_t)u_t d\Gamma_1 ds = E(0), \tag{4.62}$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \int_{\Gamma_1} F_1(u)d\Gamma_1 + \int_{\Omega} F_0(u)d\Omega$$

e,

$$F_i(s) = \int_0^s f_i(t)dt, \quad i = 0, 1.$$

Por outro lado, da Proposição 4.1, resulta

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{T-\alpha} \left[\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dt \leq C\left[\|\nabla u\|^2_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} + \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right] + \\ + C\int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |f_1(u)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1 + \\ + C\int_Q |f_0(u)|^2 dQ + C_T\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]}.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Sendo $F_i \geq 0$, $(i = 0, 1)$ e $g(u_t)u_t \geq 0$, de (4.62) obtemos

$$\begin{aligned}E(0) \geq E(t) &= \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \int_{\Gamma_1} F_1(u)d\Gamma_1 + \int_{\Omega} F_0(u)d\Omega \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \qquad 0 \leq t \leq T.\end{aligned} \tag{4.64}$$

Em particular,

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2E(0) \qquad \text{e} \qquad \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2E(0), \qquad \forall \ 0 \leq t \leq T,$$

donde

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2E(0) \qquad \text{e} \qquad \sup_{0\leq t\leq T} \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2E(0)$$

o que, juntamente com a desigualdade de Young 5.1, implicam

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq CE(0) &\leq CE(T) + C\int_0^T \int_{\Gamma_1} g(u_t)u_t d\Gamma_1 ds \\ &\leq CE(T) + C\int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1.\end{aligned}$$

Substituindo em (4.63), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{T-\alpha} \left[\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dt \leq C\int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |f_1(u)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1 + CE(T) + \\ + C\int_Q |f_0(u)|^2 dQ + C_T\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]}.\end{aligned} \tag{4.65}$$

Fixado $0 < \alpha \leq T$, de (4.64) segue-se que

$$\int_0^\alpha \left[\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dt \leq 2\alpha E(0),$$

então, aplicando a desigualdade de Young 5.1 em (4.62), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \left[\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dt + \int_{T-\alpha}^T \left[\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dt \\ \leq 4\alpha E(0) \\ \leq 4\alpha\left[E(T) + \int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1\right]. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Logo, de (4.65) e (4.66) vemos que

$$\begin{aligned} \int_Q \left[|\nabla u|^2+|u_t|^2\right] dQ \leq C\left[E(T) + \int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |f_1(u)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1\right] \\ + C\int_Q |f_0(u)|^2 dQ + C_T\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} dt \leq C\left[E(T) + \int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |f_1(u)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1\right] \\ + C\int_Q |f_0(u)|^2 dQ + C_T\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]}. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Do item (iii), nas hipóteses $(H-2)$ e $(H-3)$, obtém-se, respectivamente, (confira a demonstração do Lema 3.1)

$$F_0(s) \leq C\left(|s|^2+|s|^{k_0+1}\right) \quad \text{e} \quad F_1(s) \leq C\left(|s|^2+|s|^{k_1+1}\right),$$

visto que, por exemplo, da Hipótese $(H-3)$

$$F_1(s) = \int_0^s f_1(t)dt \leq \int_0^s |f_1(t)|dt \leq \int_0^s \left(M|t|^{k_1} + A|t|\right)dt \leq C\left(|s|^{k_1+1} + |s|^2\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_\Omega F_0\big(u(t)\big)d\Omega + \int_{\Gamma_1} F_1\big(u(t)\big)d\Gamma_1 \leq C\int_\Omega |u(t)|^2 d\Omega + C\int_{\Gamma_1} |u(t)|^2 d\Gamma_1 + \\ + C\left[\int_\Omega |u(t)|^{k_0+1} d\Omega + \int_{\Gamma_1} |u(t)|^{k_1+1} d\Gamma_1\right]. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Vamos analisar, separadamente, as três últimas integrais acima. Para isso, recordemos as imersões de Sobolev (3.19) e as injeções compactas (3.20).

- Caso $n > 2$: sendo $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\frac{2n}{n-2}} + \dfrac{1}{2} = 1$, pela desigualdade de Hölder 5.3,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(t)|^{k_0+1} d\Omega &= \int_\Omega |u(t)|^{k_0-1}|u(t)||u(t)| d\Omega \\ &\leq \|u(t)\|^{k_0-1}_{L^{n(k_0-1)}(\Omega)} \|u(t)\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Como $0 < k_0 - 1 < \dfrac{2}{n-2} \Longrightarrow n(k_0-1) < \dfrac{2n}{n-2}$,

$$H^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \subset L^{n(k_0-1)}(\Omega) \quad \text{e} \quad H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

tem-se

$$\int_\Omega |u(t)|^{k_0+1} d\Omega \leq C\|u(t)\|^{k_0-1}_{H^1(\Omega)} \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Ademais, $\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq CE(0)$, então

$$\int_\Omega |u(t)|^{k_0+1} d\Omega \leq CE(0)\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.70}$$

Analogamente, desde que $\dfrac{1}{2(n-1)} + \dfrac{1}{\frac{2(n-1)}{n-2}} + \dfrac{1}{2} = 1$, tem-se

$$\int_{\Gamma_1} |u(t)|^{k_1+1} d\Gamma_1 \leq \|u(t)\|^{k_1-1}_{L^{2(n-1)(k_1-1)}(\Gamma_1)} \|u(t)\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\Gamma_1)} \|u(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Sendo $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma) \subset L^{2(n-1)(k_1-1)}(\Gamma)$, resulta

$$\int_{\Gamma_1} |u(t)|^{k_1+1} d\Gamma_1 \leq C\|u(t)\|^{k_1-1}_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \|u(t)\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Logo, da continuidade da aplicação $\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e pelo Teorema do Traço 1.7, obtemos

$$\int_{\Gamma_1} |u(t)|^{k_1+1} d\Gamma_1 \leq C\|u(t)\|^{k_1-1}_{H^1(\Omega)} \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Como $\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq CE(0)$, tem-se

$$\int_{\Gamma_1} |u(t)|^{k_1+1} d\Gamma_1 \leq CE(0)\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.71}$$

Por fim, novamente por imersões e da teoria do traço

$$\int_{\Gamma_1} |u(t)|^2 d\Gamma_1 \leq C\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.72}$$

Então, substituindo (4.70), (4.71) e (4.72) em (4.69), obtemos

$$\int_\Omega F_0(u(t)) d\Omega + \int_{\Gamma_1} F_1(u(t)) d\Gamma_1 \leq C\big(E(0)\big) \left[\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 d\Omega + \int_\Omega |u(t)|^2 d\Omega\right]. \tag{4.73}$$

Integrando (4.73) de 0 a T, vemos que

$$\int_0^T \left[\int_\Omega F_0(u(t))d\Omega + \int_{\Gamma_1} F_1(u(t))d\Gamma_1\right] dt \leq C\big(E(0)\big)\left[\int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_Q |u|^2 dQ\right] \quad (4.74)$$

- Caso $n = 2$: é tratado de forma similar.

Agora, usando (4.68) e (4.74), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \left[\int_\Omega F_0(u(t))d\Omega + \int_{\Gamma_1} F_1(u(t))d\Gamma_1\right] dt &\leq C\big(E(0)\big)\left[\int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |f_1(u)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1\right]\\ &\leq C\big(E(0)\big)\left[E(T) + \int_Q |f_0(u)|^2 dQ\right]\\ &+ C\big(E(0)\big)\left[C_T\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]} + C\int_Q |u|^2 dQ\right].\end{aligned} \quad (4.75)$$

Portanto, combinando (4.67) e (4.75), obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt &\leq C\big(E(0)\big)\left[E(T) + \int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |f_1(u)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1\right] +\\ &+ C\big(E(0)\big)\int_Q \left(|f_0(u)|^2 + |u|^2\right) dQ + C\big(E(0)\big)\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]}.\end{aligned} \quad (4.76)$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.16, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C(\epsilon)$, tal que

$$\|u\|^2_{L^2[0,T;H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)]} \leq \varepsilon \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt + C(\varepsilon)\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt. \quad (4.77)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt &\leq C\big(E(0)\big)\left[E(T) + \int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |f_1(u)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1\right]\\ &+ C\big(E(0)\big)\int_Q \left(|f_0(u)|^2 + |u|^2\right) dQ\\ &+ \varepsilon C\big(E(0)\big)\int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt + C\big(E(0)\big)C(\varepsilon)\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt.\end{aligned} \quad (4.78)$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt - \varepsilon C\big(E(0)\big)\int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt &\leq C\big(E(0)\big)\left[\int_{\Sigma_1} \left[|g(u_t)|^2 + |f_1(u)|^2 + |u_t|^2\right] d\Sigma_1\right]\\ &+ C\big(E(0)\big)\int_Q \left(|f_0(u)|^2 + |u|^2\right) dQ + C\big(E(0)\big)E(T)\\ &+ C\big(E(0)\big)C(\varepsilon)\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt.\end{aligned} \quad (4.79)$$

Desde que, $\varepsilon C\big(E(0)\big)\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon C_1\big(E(0)\big)E(t)$, tem-se

$$-\varepsilon C_1\big(E(0)\big)E(t) \leq -\varepsilon C\big(E(0)\big)\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Daí

$$\int_0^T E(t)dt - \varepsilon C_1\big(E(0)\big)\int_0^T E(t)dt \le \int_0^T E(t)dt - \varepsilon C\big(E(0)\big)\int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt,$$

ou seja,

$$\Big[1-\varepsilon C_1\big(E(0)\big)\Big]\int_0^T E(t)dt \le \int_0^T E(t)dt - \varepsilon C\big(E(0)\big)\int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt. \tag{4.80}$$

Logo, para $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $1-\varepsilon C_1\big(E(0)\big) \ge \delta > 0$, tem-se

$$\delta\int_0^T E(t)dt \le \Big[1-\varepsilon C_1\big(E(0)\big)\Big]\int_0^T E(t)dt \le \int_0^T E(t)dt - \varepsilon C\big(E(0)\big)\int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt. \tag{4.81}$$

Combinado (4.81) e (4.79), resulta

$$\int_0^T E(t)dt \le C\big(E(0)\big)\left[\int_{\Sigma_1}\big(|g(u_t)|^2+|f_1(u)|^2+|u_t|^2\big)d\Sigma_1 + \int_Q \big(|f_0(u)|^2+|u|^2\big)dQ + E(T)\right]. \tag{4.82}$$

■

Nosso próximo passo é estimar os termos não lineares que aparecem em (4.82). A proposição seguinte nos ajuda nesse sentido. Vejamos:

Proposição 4.3. *Assuma as hipóteses $(H-1)$–$(H-5)$. Sejam u como acima, $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e $C(\varepsilon)$ uma constante dependendo de ε e possivelmente de $E(0)$. Então,*

$$\int_{\Sigma_1}|f_1(u)|^2d\Sigma_1 \le \varepsilon|E(0)|^{\frac{(k_1-1)}{1-\varepsilon k_1}}\int_0^T E(t)dt + C(\varepsilon)\int_{\Sigma_1}|u|^2d\Sigma_1 \tag{4.83}$$

$$\int_Q |f_0(u)|^2dQ \le \varepsilon|E(0)|^{\frac{(k_0-1)}{1-\varepsilon k_0}}\int_0^T E(t)dt + C(\varepsilon)\int_Q |u|^2dQ. \tag{4.84}$$

Se $k=1$ então os primeiros termos à direita de (4.83) e de (4.84) podem ser omitidos; além disso, nesse caso, $C(\varepsilon)$ independe de $E(0)$.

Demonstração: Provaremos o resultado para $k>1$ (o caso $k=1$ é evidente). Novamente esclarecemos que durante a demonstração, sempre que for oportuno, as constantes positivas que aparecerem à direita das desigualdades serão representadas pelo mesmo símbolo e expressões do tipo $|u(x,t)|_{\mathbb{R}}$ serão denotadas simplesmente por $|u|$.

Usando a Hipótese $(H-3)$ e aplicando a Desigualdade de Interpolação:

$$\|u\|_{L^p} \le \|u\|^{1-q}_{L^2}\|u\|^q_{L^r} \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-q}{2}+\frac{q}{r},$$

com $p=2k_1,\ r=2k_1+s,\ 0<s<\dfrac{1}{2}$ e $0<q<1$, obtemos

$$\int_{\Gamma_1}|f_1(u)|^2d\Gamma_1\le C\int_{\Gamma_1}\left(|u|^2+|u|^{2k_1}\right)d\Gamma_1\le C\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma_1+C\|u\|^{(1-q)2k_1}_{L^2(\Gamma_1)}\|u\|^{2qk_1}_{L^{2k_1+s}(\Gamma_1)},\quad (4.85)$$

onde $0<q<1$, é dado por

$$q=1+\frac{s}{k_1(2-2k_1-s)}.$$

Aplicando, em (4.85), a desigualdade:

$$ab\le\frac{\epsilon^{-p}a^p}{p}+\frac{b^{\bar p}}{\bar p}\epsilon^{\bar p},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{\bar p}=1,$$

com

$$p=\frac{1}{(1-q)k_1}\quad\text{e}\quad \bar p=\frac{1}{1-k_1(1-q)},$$

tem-se

$$\int_{\Gamma_1}|f_1(u)|^2d\Gamma_1\le C\left[\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma_1+\frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{(1-q)k_1}}}\|u\|^2_{L^2(\Gamma_1)}+\epsilon^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}}\|u\|^{\frac{2k_1q}{1-k_1(1-q)}}_{L^{2k_1+s}(\Gamma_1)}\right].\quad (4.86)$$

Além disso, para $0<s<min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{2n-2}{n-2}-2k_1\right\}$ (note que por $(H-3)$, $s>0$), usando as imersões dadas em (3.19), (3.20) e a continuidade da aplicação $\gamma_0\colon H^1(\Omega)\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, tem-se

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\subset L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma_1)\subset L^{s+2k_1}(\Gamma_1)$$

daí,

$$\|u\|_{L^{2k_1+s}(\Gamma_1)}\le C\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\le C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Combinando as desigualdades acima com (4.86), resulta

$$\int_{\Gamma_1}|f_1(u)|^2d\Gamma_1\le C\left[\left(1+\frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{(1-q)k_1}}}\right)\|u\|^2_{L^2(\Gamma_1)}+\epsilon^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}}\|u\|^{\frac{2k_1q}{1-k_1(1-q)}}_{H^1(\Omega)}\right].\quad (4.87)$$

Observe que $\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\le CE(0)$.

Com efeito, se $\Gamma_0\neq\varnothing$ isto é imediato pela desigualdade de Poincaré 1.3. Por outro lado, se $\Gamma_0=\varnothing$ então do item (ii) da Hipótese $(H-5)$, tem-se $uf_0(u)\ge\varepsilon u^2$ ou $uf_1(u)\ge\varepsilon u^2$, para algum $\varepsilon>0$. Como $F_i(s)=\displaystyle\int_0^s f_i(t)dt,\qquad (i=0,1)$, resulta

$$F_0(x)\ge\varepsilon x^2\qquad ou\qquad F_1(x)\ge\varepsilon x^2;$$

assim, usando (4.62) vemos que

$$\begin{aligned}E(0)\ge E(t)&=\frac{1}{2}\left\{\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}+\int_{\Gamma_1}F_1(u)d\Gamma_1+\int_\Omega F_0(u)d\Omega\\&\ge\frac{1}{2}\left\{\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}+\int_{\Gamma_1}F_1(u)d\Gamma_1+\varepsilon\int_\Omega|u|^2d\Omega\\&\ge\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\ge C\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

ou (analogamente)

$$E(0) \geq E(t) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|u(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} \geq C\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)},$$

onde na última desigualdade utilizamos as desigualdades,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C\|u(t)\|_{L^2(\Gamma)},$$

dadas por imersões (veja a Observação 1.13, no Capítulo 1). Por outro lado,

$$\frac{2k_1 q}{1-k_1(1-q)} = 2 + \frac{2(k_1-1)}{1-k_1(1-q)}.$$

Assim, de (4.87), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} |f_1(u)|^2 d\Gamma_1 &\leq C\Big(1 + \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{(1-q)k_1}}}\Big)\int_{\Gamma_1} |u(t)|^2 d\Gamma_1 + C\epsilon^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}}\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\|u(t)\|^{\frac{2(k_1-1)}{1-k_1(1-q)}}_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C(\varepsilon)\int_{\Gamma_1} |u(t)|^2 d\Gamma_1 + \varepsilon|E(0)|^{\frac{2(k_1-1)}{1-k_1(1-q)}} E(t), \end{aligned} \tag{4.88}$$

onde $C(\varepsilon) = C\Big(1 + \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{(1-q)k_1}}}\Big)$, $\varepsilon = C\epsilon^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}}$. Integrando (4.88) de 0 a T, vemos que

$$\int_{\Sigma_1} |f_1(u)|^2 d\Sigma_1 \leq \varepsilon|E(0)|^{\frac{2(k_1-1)}{1-k_1(1-q)}}\int_0^T E(t)dt + C(\varepsilon)\int_{\Sigma_1} |u(t)|^2 d\Sigma_1.$$

Isto prova a assertiva (4.83). A justificativa de (4.84) é similar, por isso será omitida. ■

Sendo assim, das proposições (4.2) e (4.3), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $k = \max\{k_0, k_1\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \Big(1 - \varepsilon[E(0)]^{2(k-1)}\Big)\int_0^T E(t)dt &\leq C\big(E(0)\big)\int_{\Sigma_1} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t(t)|^2\big)d\Sigma_1 + \\ &+ C\big(E(0)\big)\Big\{C(\varepsilon)\underbrace{\int_{\Sigma_1} |u|^2 d\Sigma_1}_{I} + C(\varepsilon)\underbrace{\int_Q |u|^2 dQ}_{II} + E(T)\Big\}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Nosso próximo objetivo é investigar os termos I e II à direita de (4.89). Para tando, precisamos do:

Lema 4.1. *Assuma as hipóteses $(H-1)$–$(H-5)$. Seja (u, u_t) solução de (1). Então para $T > T_0$, com T_0 suficientemente grande, tem-se*

$$\int_{\Sigma_1} |u|^2 d\Sigma_1 + \int_Q |u|^2 dQ \leq C\big(E(0)\big)\int_{\Sigma_1} \big(|u_t|^2 + |g(u_t)|^2\big)d\Sigma_1. \tag{4.90}$$

Demonstração: A prova será feita por contradição. Suponha que tal desigualdade não se verifique, seja $(u_l(t))_l$ uma sequência de soluções de (1), tal que

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{\Sigma_1} |u_l|^2 d\Sigma_1 + \int_Q |u_l|^2 dQ}{\displaystyle\int_{\Sigma_1} |u_{lt}|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} |g(u_{lt})|^2 d\Sigma_1} = \infty, \tag{4.91}$$

onde a energia das condições iniciais $\big(u_l(0), u_{lt}(0)\big)$ é denotada por $E_l(0)$.

Afirmação: $E_l(0)$ é uniformemente limitada (em l), isto é, $E_l(0) \leq M$, para algum $M > 0$ e todo $l \geq 1$. De fato,

$$E_l(0) = \frac{1}{2}\left\{\|\nabla u_l(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{lt}(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} + \int_\Omega F_{0l}(u_l(0))d\Omega + \int_{\Gamma_1} F_{1l}(u_l(0))d\Gamma_1,$$

e como

$$u_l(0) = u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \quad \text{e} \quad y_{lt}(0) = y_1 \in L^2(\Omega), \tag{4.92}$$

segue-se que $\|\nabla u_l(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$ e $\|u_{lt}(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$ são limitadas. Quanto as duas integrais acima, procedemos de forma similar a (uma parte da) demonstração do Lema 3.1. Lembre-se que de acordo com a Hipótese $(H-2)$, temos $|f_0(s)| \leq C(|s| + |s|^{k_0})$. Logo,

$$F_{0l}(u_l(0)) = \int_0^{u_l(0)} f_{0l}(s)ds \leq C\left(|u_l(0)|^2 + |u_l(0)|^{k_0+1}\right)$$

o que implica

$$\left|\int_\Omega F_{0l}\big(u_l(0)\big)d\Omega\right| \leq C\int_\Omega |u_l(0)|^2 d\Omega + C\int_\Omega |u_l(0)|^{k_0+1} d\Omega.$$

Assim, usando (4.92) e as imersões (3.19) vemos que $\int_\Omega F_{0l}(u_l(0))d\Omega$ é limitada. Analogamente, observando que pela Hipótese $(H-3)$, $F_{1l}(s) \leq C\big(|s|^2 + |s|^{k_1+1}\big)$, (veja a demonstração do Lema 3.1), usando (4.92) e as imersões (3.20) verifica-se que $\int_{\Gamma_1} F_{1l}(u_l(0))d\Gamma_1$ é limitada. Com isso justificamos a afirmação feita. □

Por outro lado, de (4.62) e da Hipótese $(H-1)-$(iii), tem-se

$$M_2\int_0^t\int_{\Gamma_1} |u_{lt}|^2 d\Gamma_1 ds + E_l(t) \leq \int_0^t\int_{\Gamma_1} g(u_{lt})u_{lt} d\Gamma_1 ds + E_l(t) = E_l(0) \leq M,$$

ou seja, para $0 \leq t \leq T$,

$$M_2\int_0^t\int_{\Gamma_1} |u_{lt}|^2 d\Gamma_1 ds + \frac{1}{2}\left\{\|\nabla u_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{lt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} + \int_{\Gamma_1} F_1(u_l)d\Gamma_1 + \int_\Omega F_0(u_l)d\Omega \leq M.$$

Então:

- $(u_l)_{l=1}^\infty$ é limitada em $H^1(Q)$;

- $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^{\infty}(0,T;H^1(Q))$;

- $(u_{lt})_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, logo, é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$;

- $(u_{lt})_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^2(\Sigma) = L^2(0,T;L^2(\Gamma))$.

Além disso, como

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

segue-se que

- $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^{\infty}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$, logo, é limitada em $L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$.

Como as injeções $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ são compactas e sendo estes Espaços de Hilbert, pelo Teorema de Aubin-Lions 5.21, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} u_l \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1(Q) \\ u_l \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ em } \ L^{\infty}(0,T;H^1(\Omega)) \\ u_l \longrightarrow u \ \text{ forte em } \ L^2(Q) \\ u_l \longrightarrow u \ \text{ forte em } \ L^2(\Sigma). \end{array} \right. \tag{4.93}$$

Devemos analisar os seguintes casos:

Caso A: Assuma que $u \neq 0$, como para todo $\epsilon > 0$, a injeção $H^1(\Omega) \subset H^{1-\epsilon}(\Omega)$ é compacta, (veja o Teorema 1.14) segue-se que

$$u_l \longrightarrow u \ \text{ forte em } \ C^0(0,T;H^{1-\epsilon}(\Omega)),$$

com a norma uniforme. Logo, como $f_0 \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$, isto é, f_0 é uma função localmente Lipschitz então,

$$f_0(u_l) \longrightarrow f_0(u) \ \text{ em } \ L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Pela continuidade do traço de ordem zero, tem-se

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Sendo $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ limitada em $L^{\infty}(0,T;H^1(\Omega))$, resultam:

- $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^{\infty}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$;

- $(u_{lt})_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Gamma))$.

Como $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$, (imersão compacta), pelo Corolário 4 página 85 em J. Simon [35], (veja o Corolário 5.3 no Apêndice B) vemos que

$$u_l \longrightarrow u \ \text{ forte em } \ C^0(0,T;L^2(\Gamma)),$$

isto é, $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ é relativamente compacta em $C^0(0,T;L^2(\Gamma))$. Daí, pelo Lema 1 página 71 em J. Simon [35], (veja o Lema 5.12 no Apêndice B)

$$\lim_{h\to 0}\|u_l(t+h)-u_l(t)\|_{L^2(\Gamma)}=0, \qquad \forall, l\geq 1, \qquad \forall\ 0\leq t\leq t+h\leq T$$

então (passando a uma subsequência se necessário),

$$\lim_{h\to 0} u_l(x,t+h)=u_l(x,t), \quad \forall l\geq 1, \quad \forall\ 0\leq t\leq t+h\leq T, \quad \text{quase sempre em } \ \Gamma.$$

Assim, da continuidade da função f_1,

$$\lim_{h\to 0} f_1(u_l(x,t+h))=f_1(u_l(x,t)), \quad \forall l\geq 1, \quad \forall\ 0\leq t<t+h\leq T, \quad \text{quase sempre em } \ \Gamma;$$

desse modo, para todo $\varepsilon>0$, existe $\eta>0$ tal que $0<|h|<\eta$ implica

$$\left|f_1(u_l(x,t+h))-f_1(u_l(x,t))\right|<\frac{\varepsilon}{med(\Gamma)}, \quad \forall l\geq 1, \quad \forall\ 0\leq t<t+h\leq T, \quad \text{quase sempre em } \ \Gamma,$$

ou ainda,

$$\left|f_1(u_l(x,t+h))-f_1(u_l(x,t))\right|^2<\frac{\varepsilon^2}{[med(\Gamma)]^2}, \quad \forall l\geq 1, \quad \forall\ 0\leq t<t+h\leq T, \quad \text{quase sempre em } \ \Gamma.$$

Então, para todo $\varepsilon>0$, existe $\eta>0$ tal que $0<|h|<\eta$ implica

$$\|f_1(u_l(t+h))-f_1(u_l(t))\|_{L^2(\Gamma)}<\varepsilon, \quad \forall l\geq 1, \quad \forall 0\leq t<t+h\leq T,$$

logo,

$$\sup_{0\leq t\leq T-h} ess\|f_1(u_l(t+h))-f_1(u_l(t))\|_{L^2(\Gamma)}\leq\varepsilon, \quad \forall l\geq 1$$

sempre que $0<|h|<\eta$. Consequentemente, fazendo $\tau_h f(x)=f(x+h)$, vemos que

$$\|\tau_h f_1 u_l - f_1 u_l\|_{L^\infty(0,T-h;L^2(\Gamma))}\longrightarrow 0, \quad \text{quando} \ \ h\longrightarrow 0, \quad \forall l\geq 1.$$

Como $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\subset L^1_{loc}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$, pelo Teorema 3 página 80 em J. Simon [35], (veja o Teorema 5.26 no Apêndice B)

$$f_1 u_l \longrightarrow \psi \ \text{ forte em } \ C^0(0,T;L^2(\Gamma)). \tag{4.94}$$

Em (4.93) vimos que, $u_l \longrightarrow u$, forte em $L^2(\Sigma)$ e, novamente pela continuidade da função f_1 (passando a uma subsequência se necessário)

$$f_1 u_l \longrightarrow f_1 u, \quad \text{quase sempre em } \Sigma.$$

Analogamente, de (4.94) segue-se que

$$f_1 u_l \longrightarrow \psi, \quad \text{quase sempre em } \Sigma.$$

Logo, por unicidade do limite, $f_1 u(x,t) = \psi(x,t)$, quase sempre em Σ e, portanto,

$$f_1(u_l\big|_\Gamma) \longrightarrow f_1(u\big|_\Gamma) \text{ forte em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma)).$$

Por outro lado, observamos que por (4.91), para todo $r > 0$ existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\displaystyle\int_{\Sigma_1} |u_l|^2 d\Sigma_1 + \int_Q |u_l|^2 dQ}{\displaystyle\int_{\Sigma_1} |u_{lt}|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} |g(u_{lt})|^2 d\Sigma_1} > r, \qquad \forall\, l > l_0.$$

Assim, qualquer que seja $r > 0$, existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $l \geq l_0$, tem-se

$$\int_{\Sigma_1} |u_{lt}|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} |g(u_{lt})|^2 d\Sigma_1 < \frac{1}{r}\Bigg(\underbrace{\int_{\Sigma_1} |u_l|^2 d\Sigma_1 + \int_Q |u_l|^2 dQ}_{\text{é limitado, por}(4.93)}\Bigg).$$

Então, fazendo $r \longrightarrow \infty$, vemos que

$$u_{lt} \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(\Sigma_1) \qquad \text{e} \qquad g(u_{lt}) \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\Sigma_1).$$

Como

$$\left|\begin{array}{ll} u_{ttl} - \Delta u_l = -f_0(u_l) & \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u_l}{\partial \nu} = -g(u_{lt}\big|_{\Gamma_1}) - f_1(u_l\big|_{\Gamma_1}) & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ u_l = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ u_l(0) = u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \quad u_{lt}(0) = u_1 \in L^2(\Omega), & \end{array}\right.$$

passando ao limite, obtemos

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u = -f_0(u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -f_1(u), \quad u_t = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \\ u = 0, \qquad \text{sobre } \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{4.95}$$

fazendo $u_t = v$, tem-se

$$\left|\begin{array}{l} v_{tt} - \Delta v = -f_0'(u)v \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = v = 0, \quad \text{em } \Gamma_1 \\ v = 0 \qquad \text{em } \Gamma_0 \end{array}\right.$$

Vamos, agora, considerar as três possibilidades em $(H-5)$:

(i) se f_0 é linear, então $f_0'(u) = f_0$, daí

$$\left| \begin{array}{l} v_{tt} - \Delta v + f_0(v) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = v = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \\ v = 0 \qquad \text{sobre} \;\; \Gamma_0. \end{array} \right.$$

Logo, por resultados de unicidade da solução da onda, verifica-se que $v = u_t = 0$;

(ii) Se for $\Gamma_0 = \varnothing$, primeiro observemos que $u \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ implica $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(Q)$ e, de acordo com $(H-2)-(\text{iii})$, para T suficientemente grande, podemos aplicar o resultado de unicidade apresentado em A. Ruiz [34] para novamente concluir que $v = u_t = 0$;

(iii) Se vale (iii) em $(H-5)$, adaptando as ideias empregadas em A. Ruiz [34], obtém-se mais uma vez $v = u_t = 0$.

Desse modo, a partir de (4.95), obtemos a equação elíptica

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta u = -f_0(u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -f_1(u), \quad \text{em} \;\; \Gamma_1. \end{array} \right. \tag{4.96}$$

Multiplicando (4.96) por u e integrando sobre Ω, tem-se

$$-\int_\Omega \Delta u \; ud\Omega = \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega - \int_{\Gamma_1} u\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_1 = \int_\Omega f_0(u) ud\Omega,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \int_\Omega f_0(u) ud\Omega + \int_{\Gamma_1} f_1(u) ud\Gamma_1 = 0. \tag{4.97}$$

Como $f_i(s)s \geq 0, \; i = 0, 1$, devemos ter $\nabla u = 0$. Então, se $\Gamma_0 \neq \varnothing$ da desigualdade de Poincaré 1.3 $\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right)$, resulta $u = 0$. Contradição! Já que supomos $u \neq 0$. Se for $\Gamma_0 = \varnothing$, por $(H-5)-(\text{ii})$ e (4.97), obtém-se

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \varepsilon \int_\Omega |u|^2 d\Omega + \int_{\Gamma_1} f_1(u) ud\Gamma_1 \leq 0,$$

ou

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \int_\Omega f_0(u) ud\Omega + \varepsilon \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma_1 \leq 0.$$

Em qualquer caso, vemos que $u = 0$ e temos novamente uma contradição.

Caso B. Assuma que $u = 0$ e denotemos

$$C_l = \left(\|u_l\|^2_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_l\|^2_{L^2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{e} \qquad \tilde{u}_l = \frac{1}{C_l} u_l.$$

Claramente,

$$\|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(\Sigma_1)}+\|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)}= 1. \tag{4.98}$$

Como $u = 0$, então $C_l \longrightarrow 0$, quando $l \to \infty$ e, por (4.91), tem-se

$$\tilde{u}_{lt} \longrightarrow 0 \quad em \quad L^2(\Sigma_1) \tag{4.99}$$

(lembre que $\Upsilon \to \infty \Longrightarrow \frac{1}{\Upsilon} \to 0$). De (4.62) segue-se que $\dfrac{d}{dt}E(t) \leq 0$, logo $E(T) \leq E(t)$ e consequentemente,

$$TE(T) \leq \int_0^T E(t)dt.$$

Assim, aplicando este resultado à solução u_l de (4.62), obtemos

$$TE_l(0) - T\int_{\Sigma_1} g(u_{lt})u_{lt}d\Sigma_1 = TE_l(T) \leq \int_0^T E_l(t)dt,$$

então, para $\varepsilon > 0$ pequeno, tem-se

$$\left(1 - \varepsilon[E_l(0)]^{2(k-1)}\right)\left[TE_l(0) - T\int_{\Sigma_1} g(u_{lt})u_{lt}d\Sigma_1\right] \leq \left(1 - \varepsilon[E_l(0)]^{2(k-1)}\right)\int_0^T E_l(t)dt$$

e de (4.89), para tal ε, resulta

$$\begin{aligned} TE_l(0) - T\int_{\Sigma_1} g(u_{lt})u_{lt}d\Sigma_1 &\leq \tilde{C}\big(E_l(0)\big)\left\{\int_{\Sigma_1}\big(|g(u_{lt})|^2 + |u_{lt}|^2 + |u_l|^2\big)d\Sigma_1\right\} \\ &\quad + \tilde{C}\big(E_l(0)\big)\left\{\int_Q |u_l|^2dQ + E_l(T)\right\}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C}\big(E_l(0)\big) = \dfrac{C\big(E_l(0)\big)}{1 - \varepsilon[E_l(0)]^{2(k-1)}}$. Agora, usando a desigualdade de Young 5.1, para obter

$$\int_{\Sigma_1} g(u_{lt})u_{lt}d\Sigma_1 \leq \int_{\Sigma_1}|g(u_{lt})|^2d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1}|u_{lt}|^2d\Sigma_1,$$

vemos que

$$TE_l(0) - C\big(E_l(0)\big)E_l(T) \leq C_T\big(E_l(0)\big)\left\{\int_{\Sigma_1}\big(|g(u_{lt})|^2 + |u_{lt}|^2 + |u_l|^2\big)d\Sigma_1 + \int_Q |u_l|^2dQ\right\},$$

onde $C_T\big(E_l(0)\big)$ denota $C_T\tilde{C}\big(E_l(0)\big)$. Sendo $E_l(T) \leq E_l(0)$, tem-se

$$\big[T - C\big(E_l(0)\big)\big]E_l(0) \leq C_T\big(E_l(0)\big)\left\{\int_{\Sigma_1}\big(|g(u_{lt})|^2 + |u_{lt}|^2 + |u_l|^2\big)d\Sigma_1 + \int_Q |u_l|^2dQ\right\}.$$

Tomando $T > T_0$, com $T_0 > C\big(E_l(0)\big)$, de modo que $T - C\big(E_l(0)\big) \geq 1$. De (4.62), obtém-se

$$E_l(t) \leq E_l(0) \leq C_T\big(E_l(0)\big)\left\{\int_{\Sigma_1}\big(|g(u_{lt})|^2 + |u_{lt}|^2 + |u_l|^2\big)d\Sigma_1 + \int_Q |u_l|^2dQ\right\}. \tag{4.100}$$

Logo,

$$\|\nabla u_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|u_{lt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C_T\big(E_l(0)\big)\left\{\int_{\Sigma_1}\big(|g(u_{lt})|^2+|u_{lt}|^2+|u_l|^2\big)d\Sigma_1+\int_Q|u_l|^2dQ\right\},$$

dividindo ambos os lados da desigualdade acima por C_l^2, desde que $\tilde{u}_l=\dfrac{1}{C_l}u_l$, resulta

$$\|\nabla \tilde{u}_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\tilde{u}_{lt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C_T\big(E_l(0)\big)\left\{\frac{\displaystyle\int_{\Sigma_1}\big(|g(u_{lt})|^2+|u_{lt}|^2\big)d\Sigma_1}{\|u_l\|^2_{L^2(\Sigma_1)}+\|u_l\|^2_{L^2(Q)}}+1\right\}. \tag{4.101}$$

Note que, por (4.91), a expressão que está multiplicando $C_T\big(E_l(0)\big)$, em (4.101), é limitada.

Daí, denotando a nova constante ainda pelo mesmo nome, tem-se

$$\|\nabla \tilde{u}_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\tilde{u}_{lt}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C_T\big(E_l(0)\big)\quad 0\leq t\leq T. \tag{4.102}$$

Portando, se $\Gamma_0\neq\varnothing$ então $\|v\|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)}\leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$, para todo $v\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Assim, de (4.102) resultam:

- $(\tilde{u}_l)_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $H^1(Q)$;
- $(\tilde{u}_l)_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$.

Se $\Gamma_0=\varnothing$, novamente recorremos a Hipótese $(H-5)-$(ii), para obter

$$\varepsilon\|u_l\|^2_{L^2(\Omega)}=\varepsilon\int_\Omega|u_l|^2d\Omega\leq\int_\Omega F_0(u_l)d\Omega\quad\text{ou}\quad\varepsilon\|u_l\|^2_{L^2(\Gamma_1)}=\varepsilon\int_{\Gamma_1}|u_l|^2d\Gamma_1\leq\int_{\Gamma_1}F_1(u_l)d\Gamma_1,$$

daí,

$$E_l(t)\geq\|\nabla u_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\|u_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\geq C\|u_l(t)\|^2_{H^1(\Omega)}$$

ou

$$E_l(t)\geq\|\nabla u_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\|u_l(t)\|^2_{L^2(\Gamma)}\geq C\|u_l(t)\|^2_{H^1(\Omega)},$$

onde a última desigualdade é justificada pelas desigualdades:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}\leq C\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}\leq C\|u(t)\|_{L^2(\Gamma)},$$

dadas por imersões (veja a Observação 1.13, no Capítulo 1).

Em qualquer caso, temos:

- $(\tilde{u}_l)_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $H^1(Q)$;

- $(\tilde{u}_l)_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$.

Logo, de forma similar aos casos anteriores, (passando a uma subsequência se necessário) tem-se

$$\left|\begin{array}{lll} \tilde{u}_l \rightharpoonup \tilde{u} & \text{em} & H^1(Q) \\ \tilde{u}_l \longrightarrow \tilde{u} & \text{forte em} & L^2(Q) \\ \tilde{u}_l \longrightarrow \tilde{u} & \text{forte em} & L^2(\Sigma). \end{array}\right. \tag{4.103}$$

Ademais, sendo $\tilde{u}_l = \dfrac{1}{C_l}u_l$, temos a equação

$$\left|\begin{array}{ll} \tilde{u}_{ltt} = \Delta\tilde{u}_l - \dfrac{f_0(u_l)}{C_l} & \\ \tilde{u}_l = 0 \ , & \text{sobre } \ \Sigma_0 \\ \dfrac{\partial \tilde{u}_l}{\partial \nu} = \dfrac{-g(u_{lt}) - f_1(u_l)}{C_l}, & \text{sobre } \ \Sigma_1. \end{array}\right. \tag{4.104}$$

Para passar ao limite em (4.104), é necessário que determinemos os limites dos termos não lineares. Para este fim, temos a

Proposição 4.4.

$$\frac{g(u_{lt})}{C_l} \longrightarrow 0 \quad em \quad L^2(\Sigma_1), \quad quando \ \ l \longrightarrow \infty \tag{4.105}$$

$$\frac{f_0(u_l)}{C_l} \longrightarrow f_0'(0)\tilde{u} \quad em \quad L^2(Q), \quad quando \ \ l \longrightarrow \infty \tag{4.106}$$

$$\frac{f_1(u_l)}{C_l} \longrightarrow f_1'(0)\tilde{u} \quad em \quad L^2(\Sigma_1), \quad quando \ \ l \longrightarrow \infty. \tag{4.107}$$

Demonstração: Note que (4.105), segue diretamente de (4.91), pois

$$\int_{\Sigma_1}\left[\frac{g(u_{lt})}{C_l}\right]^2 d\Sigma_1 \leq \frac{\displaystyle\int_{\Sigma_1}|u_{lt}|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1}|g(u_{lt})|^2 d\Sigma_1}{\underbrace{\|u_l\|^2_{L^2(\Sigma_1)} + \|u_l\|^2_{L^2(Q)}}_{C_l^2}} \longrightarrow 0.$$

Logo, por (4.91), $\dfrac{g(u_{lt})}{C_l} \longrightarrow 0$ em $L^2(\Sigma_1)$, quando $l \longrightarrow \infty$. Quanto a (4.106), seja $\triangle_l$ dado por

$$\begin{aligned} \triangle_l &:= \left\|f_0'(0)\tilde{u}_l - \frac{f_0(u_l)}{C_l}\right\|^2_{L^2(Q)} = \int_Q \left|f_0'(0)\tilde{u}_l - \frac{f_0(u_l)}{C_l}\right|^2 dQ \ = \\ &= \int_Q |\tilde{u}_l|^2 \left|f_0'(0) - \frac{1}{\tilde{u}_l C_l} f_0(u_l)\right|^2 dQ, \quad \left(\text{pois} \ \ \tilde{u}_l = \frac{1}{C_l}u_l\right) \\ &= \int_Q |\tilde{u}_l|^2 \left|f_0'(0) - \frac{1}{u_l} f_0(u_l)\right|^2 dQ \\ &= \int_{\{|u_l|\leq\epsilon\}} |\tilde{u}_l|^2 \left|f_0'(0) - \frac{f_0(u_l)}{u_l}\right|^2 dQ + \int_{\{|u_l|>\epsilon\}} |\tilde{u}_l|^2 \left|f_0'(0) - \frac{f_0(u_l)}{u_l}\right|^2 dQ, \end{aligned}$$

onde $\{|u_l|\leq \epsilon\} := \{(x,t)\in Q; |u_l(x,t)|\leq \epsilon\}$. Usando a desigualdade $|a-b|^2\leq 2a^2+2b^2$, tem-se

$$\triangle_l \leq \int_{\{|u_l|\leq\epsilon\}} |\tilde{u}_l|^2\left|f_0'(0)-\frac{f_0(u_l)}{u_l}\right|^2 dQ + 2|f_0'(0)|^2\int_{\{|u_l|>\epsilon\}}|\tilde{u}_l|^2 dQ + 2\int_{\{|u_l|>\epsilon\}}\frac{|\tilde{u}_l|^2|f_0(u_l)|^2}{|u_l|^2}dQ. \tag{4.108}$$

Sendo $\dfrac{\tilde{u}_l}{u_l}=\dfrac{1}{C_l}$ e pela Hipótese $(H-2)$ $|f_0(s)|\leq C\big(|s|+|s|^{k_0}\big)$, resulta

$$\frac{|\tilde{u}_l|^2}{|u_l|^2}|f_0(u_l)|^2 \leq C\left(\frac{|u_l|^2}{C_l^2}+\frac{|u_l|^{2k_0}}{C_l^2}\right),$$

fazendo $\rho_\epsilon := \sup\limits_{\|x\|\leq\epsilon}\left|f_0'(0)-\dfrac{f_0(x)}{x}\right|$, temos

$$\int_{\{|u_l|\leq\epsilon\}} |\tilde{u}_l|^2\left|f_0'(0)-\frac{f_0(u_l)}{u_l}\right|^2 dQ \leq \rho_\epsilon^2\int_{\{|u_l|\leq\epsilon\}}|\tilde{u}_l|^2 dQ \tag{4.109}$$

e

$$\begin{aligned}
2|f_0'(0)|^2&\int_{\{|u_l|>\epsilon\}}|\tilde{u}_l|^2 dQ + 2\int_{\{|u_l|>\epsilon\}}\frac{|\tilde{u}_l|^2|f_0(u_l)|^2}{|u_l|^2}dQ \leq \\
&\leq \int_{\{|u_l|>\epsilon\}}\left[2|f_0'(0)|^2\frac{|u_l|^2}{C_l^2}+2C\left(\frac{|u_l|^2}{C_l^2}+\frac{|u_l|^{2k_0}}{C_l^2}\right)\right]dQ\\
&= \int_{\{|u_l|>\epsilon\}}\left[\left(2|f_0'(0)|^2+2C\right)\frac{|u_l|^2}{C_l^2}+2C\frac{|u_l|^{2k_0}}{C_l^2}\right]dQ\\
&\leq C\int_{\{|u_l|>\epsilon\}}\left(\frac{|u_l|^2}{C_l^2}+\frac{|u_l|^{2k_0}}{C_l^2}\right)dQ,
\end{aligned} \tag{4.110}$$

onde C denota $\Big(2|f_0'(0)|^2+2C\Big)$. Assim, de (4.108), (4.109) e (4.110), obtemos

$$\triangle_l \leq \rho_\epsilon^2\|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)} + C\int_{\{|u_l|>\epsilon\}}\left(\frac{|u_l|^2}{C_l^2}+\frac{|u_l|^{2k_0}}{C_l^2}\right)dQ. \tag{4.111}$$

Note que $f_0'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_0(x)}{x}$, logo, $\rho_\epsilon \longrightarrow 0$ quando $\epsilon\longrightarrow 0$. Como por $(H-2)$, $2k_0>2$ segue-se que $\epsilon^{2k_0-2}<|u_l|^{2k_0-2}$, daí

$$|u_l|^2 < \frac{|u_l|^{2k_0}}{\epsilon^{2k_0-2}},$$

substituindo em (4.111), vemos que

$$\begin{aligned}
\triangle_l &\leq \rho_\epsilon^2\|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)} + C\int_{\{|u_l|>\epsilon\}}\frac{|u_l|^{2k_0}}{C_l^2}\left(1+\frac{1}{\epsilon^{2k_0-2}}\right)dQ\\
&\leq \rho_\epsilon^2\|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)} + C_\epsilon\frac{1}{C_l^2}\|u_l\|^{2k_0}_{L^{2k_0}(Q)}\\
&= \rho_\epsilon^2\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} + C_\epsilon C_l^{2k_0-2}\|\tilde{u}_l\|^{2k_0}_{L^{2k_0}(Q)}, \quad (\text{pois} \ \ u_l = C_l\tilde{u}_l).
\end{aligned}$$

Como $(\tilde{u}_l)_{l=1}^\infty$ é limitada em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ e $H^1(\Omega)\subset L^{2k_0}(\Omega)$, segue-se que $(\tilde{u}_l)_{l=1}^\infty$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^{2k_0}(\Omega))\subset L^{2k_0}(0,T;L^{2k_0}(\Omega)) = L^{2k_0}(Q)$, ou seja,

- $(\tilde{u}_l)_{l=1}^{\infty}$ é limitada em $L^{2k_0}(Q) \subset L^2(Q)$.

Então, $\lim\limits_{l\to\infty} sup \triangle_l \leq C\rho_\epsilon^2$, onde $C = \sup\limits_l \|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)}$; assim,

$$0 \leq \lim_{l\to\infty} inf \triangle_l \leq \lim_{l\to\infty} sup \triangle_l \leq C\rho_\epsilon^2 \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0$$

logo

$$\lim_{l\to\infty} \triangle_l = \lim_{l\to\infty} \left\| f_0'(0)\tilde{u}_l - \frac{f_0(u_l)}{C_l} \right\|^2_{L^2(Q)} = 0, \tag{4.112}$$

desde que

$$\frac{f_0(u_l)}{C_l} - f_0'(0)\tilde{u} = \frac{f_0(u_l)}{C_l} - f_0'(0)\tilde{u}_l + f_0'(0)\tilde{u}_l - f_0'(0)\tilde{u},$$

tem-se

$$\left\| \frac{f_0(u_l)}{C_l} - f_0'(0)\tilde{u} \right\|_{L^2(Q)} \leq \left\| \frac{f_0(u_l)}{C_l} - f_0'(0)\tilde{u}_l \right\|_{L^2(Q)} + |f_0'(0)| \|\tilde{u}_l - \tilde{u}\|_{L^2(Q)}.$$

Daí, usando (4.112), (4.103) e passando ao limite, concluímos que

$$\frac{f_0(u_l)}{C_l} \longrightarrow f_0'(0)\tilde{u} \quad \text{em} \quad L^2(Q), \quad \text{quando} \quad l \to \infty$$

isto prova (4.106). A justificativa de (4.107) é similar, observando que de $(H-3)-(\text{iii})$, obtém-se $|f_1(s)| \leq M|s|^{k_1} + A|s|$. ■

Agora, aplicando o resultado da Proposição 4.4 à equação (4.104) e passando ao limite quando $l \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{u}_{tt} = \Delta\tilde{u} - f_0'(0)\tilde{u} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = -f_1'(0)\tilde{u} \quad \text{em} \quad \Sigma_1 \\ \tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_0 \\ \tilde{u}_t = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_1. \end{array} \right. \tag{4.113}$$

Como $\tilde{u}_{tt} = \Delta\tilde{u} - f_0'(0)\tilde{u} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\tilde{u}_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, fazendo $v = \tilde{u}_t \in C^0[0,T;L^2(\Omega)]$, de (4.113) tem-se

$$\left| \begin{array}{l} v_{tt} = \Delta v - f_0'(0)v \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_1 \qquad (\text{ pois } \quad \tilde{u}_t = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_1) \\ v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma_0 \cup \Sigma_1 = \Sigma. \end{array} \right. \tag{4.114}$$

Logo, por resultados de unicidade de solução da equação da onda, para T grande, segue-se que

$$v \equiv \tilde{u}_t \equiv 0 \tag{4.115}$$

daí, retornando a (4.113), usando (4.115), obtemos

$$\left|\begin{array}{l}\Delta\tilde{u}-f_0'(0)\tilde{u}=0 \;\text{ em }\; Q\\ \dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}=-f_1'(0)\tilde{u} \;\text{ sobre }\; \Sigma_1\\ \tilde{u}=0 \;\text{ sobre }\; \Sigma_0.\end{array}\right. \tag{4.116}$$

Por fim, multiplicando a primeira equação de (4.116) por $\tilde{u}$ e procedendo analogamente ao Caso A, tem-se $\tilde{u}=0$. Mas, por (4.98), $\|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(\Sigma_1)}+\|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)}=1$ e, fazendo $l\longrightarrow\infty$ devemos ter

$$\|\tilde{u}\|^2_{L^2(\Sigma_1}+\|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)}=1$$

o que contradiz o fato de ser $\tilde{u}=0$. Isto conclui a prova do Lema 4.1. ■

Usando a desigualdade (4.89), com $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, e por (4.90), obtemos o seguinte resultado:

Proposição 4.5. *Seja $T>0$ suficientemente grande. Então,*

$$E(T)\le C_T\big(E(0)\big)\int_{\Sigma_1}\big(|u_t|^2+|g(u_t)|^2\big)d\Sigma_1.$$

Demonstração: Com efeito, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno, $C_1=1-\varepsilon[E(0)]^{2(k-1)}>0$, multiplicando (4.89) por $\dfrac{1}{C_1}$ e usando (4.90), vemos que

$$\int_0^T E(t)dt\le C\big(E(0)\big)\left\{\int_{\Sigma_1}\big(|u_t|^2+|g(u_t)|^2\big)d\Sigma_1+E(T)\right\}.$$

Já sabemos, de (4.62), que $\dfrac{d}{dt}E(t)\le 0$, o que acarreta $E(T)\le E(t)$, para $0\le t\le T$. Daí,

$$E(T)T\le C\big(E(0)\big)\left\{\int_{\Sigma_1}\big(|u_t|^2+|g(u_t)|^2\big)d\Sigma_1+E(T)\right\};$$

assim,

$$\big[T-C\big(E(0)\big)\big]E(T)\le C\big(E(0)\big)\int_{\Sigma_1}\big(|u_t|^2+|g(u_t)|^2\big)d\Sigma_1.$$

Logo, para T suficientemente grande, de modo que $\big[T-C\big(E(0)\big)\big]\ge\delta>0$, obtemos

$$E(T)\le C_T\big(E(0)\big)\int_{\Sigma_1}\big(|u_t|^2+|g(u_t)|^2\big)d\Sigma_1.$$

■

Antes de finalizarmos a demonstração do Teorema 3.12 apresentamos a seguinte estimativa:

Lema 4.2. *Seja $p(s)$ como definido em (4.11) e seja $T > 0$ suficientemente grande. Então*

$$p(E(T)) + E(T) \leq E(0).$$

Demonstração: Primeiro lembre que de (4.1) temos $h(sg(s)) \geq s^2 + g^2(s)$, com $|s| \leq N$, para algum $N > 0$. Suponha $N \geq 1$ e denotemos

$$\left| \begin{array}{l} \Sigma_A := \left\{(x,t) \in \Sigma_1; |u_t(x,t)| \geq N, \quad \text{com} \quad u_t \in L^2(\Sigma_1)\right\} \\ \Sigma_B := \Sigma_1 - \Sigma_A. \end{array} \right. \tag{4.117}$$

Da Hipótese $(H-1)-$(iii), temos

$$M_2 s^2 \leq sg(s) \leq M_1 s^2, \quad \text{para} \quad |s| \geq 1, \quad 0 < M_2 \leq M_1$$

logo,

$$s^2 < M_2^{-1} sg(s) \tag{4.118}$$

e

$$sg(s) = |sg(s)| \leq M_1 |s|^2 \Longrightarrow |g(s)| \leq M_1 |s| \Longrightarrow g^2(s) \leq M_1 |s||g(s)| = M_1 sg(s). \tag{4.119}$$

Portanto, de (4.118) e (4.119), obtém-se

$$s^2 + g^2(s) \leq \left(M_2^{-1} + M_1\right) sg(s), \quad |s| \geq 1. \tag{4.120}$$

No que segue, para simplificar a escrita, expressões do tipo $v(x,t)$ serão denotadas simplesmente por v. Então, usando a desigualdade acima tem-se

$$\int_{\Sigma_A} \left(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\right) d\Sigma_A \leq \left(M_2^{-1} + M_1\right) \int_{\Sigma_A} u_t g(u_t) d\Sigma_A. \tag{4.121}$$

Por outro lado, de (4.1), da Hipótese $(H-1)-$(ii) e, sendo h crescente, com $h(0) = 0$, tem-se

$$\int_{\Sigma_B} \left(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\right) d\Sigma_B \leq \int_{\Sigma_B} h(u_t g(u_t)) d\Sigma_B \leq \int_{\Sigma_1} h(u_t g(u_t)) d\Sigma_1. \tag{4.122}$$

Pela desigualdade de Jensen 5.20,

$$\int_{\Sigma_B} h(u_t g(u_t)) d\Sigma_B \leq med\Sigma_1 h\left(\frac{1}{med\Sigma_1}\int_{\Sigma_1} u_t g(u_t) d\Sigma_1\right) \leq med\Sigma_1 \tilde{h}\left(\int_{\Sigma_1} u_t g(u_t) d\Sigma_1\right), \tag{4.123}$$

visto que $\tilde{h}(x) = h\left(\dfrac{x}{med\Sigma_1}\right)$. Combinando os resultados (4.121), (4.122) e (4.123), tem-se a estimativa

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \left(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\right) d\Sigma_1 &= \int_{\Sigma_A} \left(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\right) d\Sigma_A + \int_{\Sigma_B} \left(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\right) d\Sigma_B \\ &\leq \left(M_2^{-1} + M_1\right) \int_{\Sigma_1} u_t g(u_t) d\Sigma_1 + med\Sigma_1 \tilde{h}\left(\int_{\Sigma_1} u_t g(u_t) d\Sigma_1\right) \end{aligned} \tag{4.124}$$

a qual, juntamente com a Proposição 4.5, nos fornece

$$E(T) \leq C_T\big(E(0)\big)\left\{\big(M_2^{-1}+M_1\big)\int_{\Sigma_1} u_t g(u_t)d\Sigma_1 + med\Sigma_1 \tilde{h}\left(\int_{\Sigma_1} u_t g(u_t)d\Sigma_1\right)\right\}. \qquad (4.125)$$

Tomando

$$k = \frac{1}{C_T\big(E(0)\big)med\Sigma_1} \quad \text{e} \quad C = \frac{\big(M_2^{-1}+M_1\big)}{med\Sigma_1},$$

de (4.125) e assumindo que $C_T\big(E(0)\big) \geq 1$, (visto que do contrário a multiplicamos por uma constante positiva de modo que a nova expressão obtida possua tal propriedade), tem-se

$$kE(T) \leq C\int_{\Sigma_1} u_t g(u_t)d\Sigma_1 + \tilde{h}\left(\int_{\Sigma_1} u_t g(u_t)d\Sigma_1\right) = (CI+\tilde{h})\left(\int_{\Sigma_1} u_t g(u_t)d\Sigma_1\right).$$

Assim, usando também (4.62), vemos que

$$(CI+\tilde{h})^{-1}(kE(T)) \leq \int_{\Sigma_1} u_t g(u_t)d\Sigma_1 = E(0) - E(T),$$

logo, desde que $p(x) = (CI+\tilde{h})^{-1}(kx)$, obtemos

$$p(E(T)) + E(T) \leq E(0),$$

isto prova o resultado neste caso. Se, por outro lado, for $0 < N < 1$, considere

$$\Sigma_{\tilde{A}} := \big\{(x,t) \in \Sigma_A; N \leq |u_t(x,t)| < 1, \quad \text{com} \quad u_t \in L^2(\Sigma_1)\big\}.$$

Então,

$$\int_{\Sigma_A} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_A = \int_{\Sigma_{A-\tilde{A}}} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_A + \int_{\Sigma_{\tilde{A}}} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_{\tilde{A}}.$$

Observe que em $\Sigma_{A-\tilde{A}}$ vale o item (iii) de $(H-1)$ e consequentemente as análises feitas anteriormente. Por outro lado, sendo g contínua segue-se que $g(s)$ é limitada para $N \leq |s| < 1$, como g é crescente, com $g(0)=0$, definindo $r = max\{|g(-1)|, g(1)\}$ vemos que $|g(s)| \leq r$ para todo s satisfazendo $N \leq |s| < 1$, logo para tais valores de s, $g^2(s) \leq r^2$. Então, $|g(u_t(x,t))|^2 \leq r^2$, para todo $(x,t) \in \Sigma_{\tilde{A}}$, sendo $|u_t(x,t))|^2 < 1$, para todo $(x,t) \in \Sigma_{\tilde{A}}$, destas observações resulta

$$\int_{\Sigma_{\tilde{A}}} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_{\tilde{A}} \leq \int_{\Sigma_{\tilde{A}}} (1+r^2)d\Sigma_{\tilde{A}} = (1+r^2)med\Sigma_{\tilde{A}}.$$

Logo,

$$\int_{\Sigma_A} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_A \leq \big(M_1 + M_2^{-1}\big)\int_{\Sigma_{A-\tilde{A}}} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_A + (1+r^2)med\Sigma_{\tilde{A}}.$$

Temos dois casos a analisar, quais sejam:

- Se
$$(1+r^2)med\Sigma_{\tilde{A}} \leq \big(M_1 + M_2^{-1}\big)\int_{\Sigma_{A-\tilde{A}}} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_A,$$

então
$$\int_{\Sigma_A} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_A \leq 2\big(M_1 + M_2^{-1}\big)\int_{\Sigma_{A-\tilde{A}}} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_A$$
e o resultado segue com
$$C = \frac{2\big(M_2^{-1} + M_1\big)}{med\Sigma_1}.$$

- Caso seja
$$0 \leq \big(M_1 + M_2^{-1}\big)\int_{\Sigma_{A-\tilde{A}}} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_A < (1+r^2)med\Sigma_{\tilde{A}}$$

considere M tal que
$$(1+r^2)med\Sigma_{\tilde{A}} \leq M\big(M_1 + M_2^{-1}\big)\int_{\Sigma_{A-\tilde{A}}} \big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\big)d\Sigma_A,$$
e o resultado segue com
$$C = \frac{M\big(M_2^{-1} + M_1\big)}{med\Sigma_1}.$$

■

Para, finalmente, concluirmos a demonstração do Teorema 4.1 necessitamos do seguinte resultado:

Lema 4.3. *Seja p uma função positiva, crescente tal que $p(0) = 0$. Sendo p crescente, podemos definir a função crescente $q(x) = x - (I+p)^{-1}(x)$. Consideremos uma sequência $(s_m)_{m=1}^{\infty}$, de números positivos, satisfazendo*
$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m. \tag{4.126}$$
Então, $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é a solução da Equação Diferencial
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0 \\ S(0) = s_0 \end{array}\right. \tag{4.127}$$
Além disso, se $p(x) > 0$ para $x > 0$ então $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = 0$.

Demonstração: Observe que tal sequência $(s_m)_{m=1}^{\infty}$ existe, pois sendo p crescente e $p(0) = 0$, existe $(I+p)^{-1}$. Defina
$$s_0 > s_1 = 1, \quad s_2 = (I+p)^{-1}\Big(\frac{s_1}{2}\Big), \quad \ldots \quad , s_{m+1} = (I+p)^{-1}\Big(\frac{s_m}{m+1}\Big), \quad m \geq 2.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
s_2 = (I+p)^{-1}\Big(\frac{1}{2}\Big) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (I+p)(s_2) = \frac{1}{2} < s_1;\\
s_3 = (I+p)^{-1}\Big(\frac{s_2}{3}\Big) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (I+p)(s_3) = \frac{s_2}{3} < s_2;\\
\vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad\qquad \vdots\\
s_{m+1} = (I+p)^{-1}\Big(\frac{s_m}{m+1}\Big) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (I+p)(s_{m+1}) = \frac{s_m}{m+1} < s_m. \ \square
\end{aligned}$$

A prova do Lema 4.3 será feita por indução sobre m. Primeiro notemos que $s_1 \leq S(1)$. Com efeito, de (4.126)

$$(I+p)(s_1) \leq s_0,$$

como $(I+p)^{-1}$ é crescente, tem-se

$$s_1 \leq (I+p)^{-1}(s_0) = s_0 - q(s_0). \tag{4.128}$$

Sendo q uma função positiva, (veja a construção no início deste Capítulo) segue de (4.127) que $\frac{d}{dt}S(t) \leq 0$; assim $S(t)$ é não crescente, isto é,

$$S(t) \leq S(\tau), \qquad \forall t \geq \tau. \tag{4.129}$$

Em particular, para $0 \leq t$, $S(t) \leq S(0) = s_0$ o que implica $q(S(t)) \leq q(S(0)) = q(s_0)$, (pois q é crescente). Logo, integrando (4.127) de 0 a 1, tem-se

$$0 = S(1) - S(0) + \int_0^1 q(S(t))dt \leq S(1) - S(0) + \int_0^1 q(s_0)dt = S(1) - s_0 + q(s_0),$$

donde, por (4.128), $s_1 \leq s_0 - q(s_0) \leq S(1)$.

Agora, suponhamos que o resultado é válido para $m > 1$, isto é, $s_m \leq S(m)$. Vamos mostrar que $s_{m+1} \leq S(m+1)$. De fato, de (4.126) vemos que $(I+p)(s_{m+1}) \leq s_m$, o que implica

$$s_{m+1} \leq (I+p)^{-1}(s_m) = s_m - q(s_m). \tag{4.130}$$

De (4.129), segue-se que para $m \leq t \leq m+1$, vale $S(t) \leq S(m)$, então integrando (4.127) de m a $m+1$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= S(m+1) - S(m) + \int_m^{m+1} q(S(t))dt\\
&\leq S(m+1) - S(m) + \int_m^{m+1} q(S(m))dt\\
&= S(m+1) - S(m) + (m+1)q(S(m)) - mq(S(m))\\
&= S(m+1) - S(m) + q(S(m))\\
&= S(m+1) - (I+p)^{-1}(S(m)),
\end{aligned} \tag{4.131}$$

ou seja,

$$(I+p)^{-1}(S(m)) \leq S(m+1).$$

Como, por hipótese de indução $s_m \leq S(m)$ e $(I+p)^{-1}$ é crescente, de (4.130), obtemos

$$s_{m+1} \leq (I+p)^{-1}(s_m) \leq (I+p)^{-1}(S(m)) \leq S(m+1)$$

como queríamos.

Para finalizar a prova do lema, resta provar que se $p(t) > 0$, para $t > 0$, então $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = 0$. Primeiro note que se $t \in \mathbb{R}_+$ então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq t \leq m+1$, logo

$$0 \leq s_{m+1} \leq S(m+1) \leq S(t),$$

donde $S(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$, portanto $S(t)$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}_+$. Assim,

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = \inf\{S(t), \quad t \geq 0\} = C \geq 0.$$

Vamos provar que $C = 0$. De fato, se $C > 0$ então, por hipótese, $p(C) > 0$, logo

$$C + p(C) = (I+p)(C) > C \Longrightarrow C > (I+p)^{-1}(C)$$

por isso, $0 < q(C)$.

Como $0 \leq S(1) \leq S(0)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S(0) < mq(C)$, isto é,

$$S(0) - mq(C) < 0. \tag{4.132}$$

Seja $0 \leq \tau \leq m \leq t$; assim $S(t) \leq S(m) \leq S(\tau)$ e consequentemente

$$q(S(t)) \leq q(S(m)) \leq q(S(\tau))$$

ou ainda,

$$-q(S(t)) \geq -q(S(m)) \geq -q(S(\tau)), \tag{4.133}$$

donde, por (4.127)

$$S(m) = S(0) - \int_0^m q(S(\tau))d\tau \leq S(0) - mq(S(t)),$$

como $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = C$, fazendo $t \longrightarrow \infty$ na desigualdade acima e usando (4.132), tem-se

$$S(m) \leq S(0) - mq(C) < 0$$

o que é uma contradição visto que $S(t) \geq 0$ em $\mathbb{R}_+$, portanto $C = 0$, ou seja, $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = 0$. ■

Finalmente, já podemos concluir a prova do Teorema 4.1. Vejamos:

Demonstração: (do Teorema 4.1) Lembre-se que o resultado do Lema 4.2 é valido em $(0,T)$, com $T > T_0$, para algum T_0 suficientemente grande. Desde que, para $m \geq 0$, $(m+1)T \geq T > T_0$, o resultado do Lema 4.2 é válido sobre o intervalo $(0,(m+1)T)$. Logo,

$$E\big((m+1)T\big) + p\big(E\big((m+1)T\big)\big) \leq E(0),$$

com

$$k = \frac{1}{C_{(m+1)T}\big(E(0)\big) med\Sigma_1} \quad \text{e} \quad C = \frac{(M_2^{-1} + M_1)}{med\Sigma_1}.$$

Agora, no Lema 4.2, considerando o intervalo $\big(mT,(m+1)T\big)$ no lugar de $(0,T)$, com $m = 0,1,2,...$, tem-se

$$E\big((m+1)T\big) + \tilde{p}\big(E\big((m+1)T\big)\big) \leq E(mT), \tag{4.134}$$

com

$$\tilde{p}(x) = (\tilde{C} + \tilde{h})^{-1}(\tilde{k}x)$$

onde,

$$\tilde{k} = \frac{1}{C_{(m+1)T}\big(E(mT)\big) med\tilde{\Sigma}_1} \qquad \text{e} \qquad \tilde{C} = \frac{M_2^{-1}(M_1^2 + 1)}{med\tilde{\Sigma}_1}$$

sendo $\tilde{\Sigma}_1 := \Gamma_1 \times \big(mT,(m+1)T\big)$. Mas, $med(0,T) = med\big(mT,(m+1)T\big) = T$, daí

$$med\Sigma_1 = med\tilde{\Sigma}_1 \qquad \text{e} \qquad \tilde{C} = C.$$

Como $E(mT) \leq E(0)$, então $k \leq \tilde{k}$ o que acarreta $kx \leq \tilde{k}x$, com $x \geq 0$. Ademais, $p(x) = (CI + \tilde{h})^{-1}(kx)$, logo

$$Cp(x) + \tilde{h}(p(x)) = kx \leq \tilde{k}x \Longrightarrow p(x) \leq (CI + \tilde{h})^{-1}(\tilde{k}x) = \tilde{p}(x),$$

ou seja, $p(x) \leq \tilde{p}(x)$ e por (4.134), obtém-se

$$E\big((m+1)T\big) + p\big(E\big((m+1)T\big)\big) \leq E(mT).$$

Sejam $s_m = E(mT)$, $\quad s_0 = E(0)$, desse modo,

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m, \quad m = 0,1,2,\ldots$$

Assim, pelo Lema 4.3, $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é solução da equação

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0,$$

daí, $E(mT) = s_m \leq S(m)$, para $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $t > T$. Portanto, tomando $t = mT + \tau$, com $0 \leq \tau < T$. Sendo $mT < t$, tem-se

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) = S\left(\frac{t-\tau}{T}\right). \tag{4.135}$$

Como

$$\tau < T \implies \frac{\tau}{T} < 1 \implies -1 < -\frac{\tau}{T} \implies \frac{t}{T} - 1 < \frac{t-\tau}{T} \implies S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right),$$

de (4.135) obtemos

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \qquad t > T.$$

$\blacksquare$

Corolário 4.1. *Assuma que além das hipóteses (H-1)-(H-5), para algumas constantes positivas a, b, tem-se*

$$\left| \begin{array}{l} g(s)s \leq bs^2, \quad \textit{para cada número real } s \\ g(s)s \geq a|s|^{p+1}, \quad \textit{para } |s| \leq 1, \quad \textit{para algum } p \geq 1. \end{array} \right. \tag{4.136}$$

Então,

$$\left| \begin{array}{l} E(t) \leq Ce^{-\alpha t}, \;\; \textit{se } p = 1 \\ E(t) \leq Ct^{\frac{2}{1-p}}, \;\; \textit{se } p > 1, \end{array} \right. \tag{4.137}$$

onde ambas as constantes $C > 0$ e $\alpha > 0$ dependem, em geral, de $E(0)$ (exceto para $k = 1$).

Demonstração: É suficiente construir uma função h com a propriedade (4.1). Na verdade podemos tomar $h = a^{-\frac{2}{p+1}}(1 + b^2)s^m$, onde $m = \dfrac{2}{p+1} \leq 1$. Então,

$$p(s) = (cI + \tilde{h})^{-1}(ks),$$

isto é,

$$cp + d(a, b)s^m = ks,$$

onde $d = d(a, b)$ é uma constante que depende de a e b. Lembrando que

$$q(s) = s - (I + p)^{-1}(s).$$

Desde que para s pequeno e alguma constante $\alpha > 0$, dependendo, em geral, de $E(0)$ (a menos que $k = 1$), tem-se $p(s) \sim \alpha s^{\frac{1}{m}}$ e portanto $q(s) \sim \alpha s^{\frac{1}{m}}$, resolvendo equação (4.14) com q como acima, obtemos

$$S(t)x = \left| \begin{array}{ll} c_1\left(t + c_2 x^{\frac{1-p}{2}}\right)^{\frac{2}{1-p}}, & \text{se } p > 1 \\ e^{-\alpha t}x, & \text{se } p = 1, \end{array} \right. \tag{4.138}$$

onde c_1, c_2 dependem apenas de α e p. Agora, o resultado segue a partir do Teorema 4.1. $\blacksquare$

4.1 Aplicação

Como aplicação do método aqui estudado vamos apresentar, de forma bastante sucinta, um resultado do trabalho intitulado **Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction**, realizado por Marcelo M. Cavalcanti; Valéria N. D. Cavalcanti e Irena Lasiecka. O trabalho acima citado, apesar de tratar um caso bem mais geral de existência e estabilidade, aplica essencialmente a mesma técnica utilizada em [18].

Considere o seguinte modelo de equação de onda semilinear com dissipação não linear na fronteira.

$$\left| \begin{array}{ll} u_{tt} = \Delta u + f(u), & \text{sobre } \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + u + g(u_t) = h(u) & \text{sobre } \Gamma \times (0,\infty) \\ u(0) = u_0 \in H^1(\Omega), \quad u_t(0) = u_1 \in L^2(\Omega), & \end{array} \right. \tag{4.139}$$

onde $f(u), g(u_t), h(u)$ são os operadores Nemytskii[2], associados as funções escalares contínuas $f(s), g(s)$ e $h(s)$, definidas para $s \in \mathbb{R}$. A função $g(s)$ é assumida monótona.

No trabalho em questão, os autores acima citados, têm como foco principal estudar dois pontos: a boa postura do sistema dado por (4.139), no espaço de energia finita, ou seja, $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$; e a obtenção de taxas de decaimento uniformes da energia quando $t \to \infty$.

Boa postura do problema

Para a boa postura do problema, inicialmente supõe-se o caso em que a dissipação é assumida fortemente monótona. Nesse caso, obtém-se exclusividade de soluções.

Usando a notação $U(t) = (u(t), u_t(t))$, $H := H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, o primeiro resultado é dado por:

Teorema 4.2. *Assuma que:*

(i) *g é contínua e fortemente monótona, isto é, existe uma constante positiva ξ tal que $\big[g(s_1) - g(s_2)\big](s_1 - s_2) \geq \xi |s_1 - s_2|^2$;*

(ii) *f é localmente Lipschitz de $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$;*

(iii) *$\tilde{h}(u) := h(u|_\Gamma)$ é localmente Lipschitz de $H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$.*

[2] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as condições de Caratheodory e $M := \{u \colon \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável}\}$. O operador $N_f \colon M \to M$ dado pela fórmula $N_f(u) = f(x, u(x))$ é chamado operador de Nemytskii.

Então, existe única solução local $U \in C^0([0,T_M);H)$ tal que $u_t, \nabla u|_\Gamma \in L^2(0,T_M \times \Gamma)$, onde T_M depende da $|U(0)|_H$ e de m_1, sendo a constante m_1 tal que $sg(s) \geq m_1|s|^2$, $|s| \geq 1$.

Demonstração: Ver M. M. Cavalcanti; V. N. D. Cavalcanti e I. Lasiecka [8]. ■

Observação 4.3. *Note que uma versão global, (com condições globais de Lipschitz impostas a f e h) de existência e unicidade é dada pelo Teorema 2.1. A demonstração do Teorema 4.2 tem como base o argumento utilizado na demonstração do Teorema 2.1, através da teoria dos operadores maximais monótonos.*

O resultado formulado a seguir abre mão da suposição de forte monotonicidade. Porém, nesse caso, a unicidade de soluções de energia finita é perdida. Para enunciar tal resultado considera-se a seguinte hipótese:

Hipótese N-1

(i) g é contínua monótona e satisfaz a seguinte condição de crescimento, para algum $q > 0$

$$m_q|s|^{q+1} \leq sg(s) \leq M_q|s|^{q+1}, \quad \text{para} \qquad |s| \geq 1;$$

(ii) f é localmente Lipschitz de $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$;

(iii) $\tilde{h}(u) := h(u|_\Gamma)$ é localmente Lipschitz de $H^{1-\epsilon}(\Omega) \to L^{\frac{q+1}{q}}(\Gamma)$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Teorema 4.3. *Assuma a Hipótese N-1. Existe uma solução fraca, local, $U \in C^0([0,T_M);H)$, onde T_M depende da norma $|U(0)|_H$ e de m_q. Além disso, $u_t|_\Gamma \in L^{q+1}((0,T_M) \times \Gamma)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in L^{\frac{q+1}{q}}((0,T_M)\times\Gamma)$ e a solução pode não ser única. Se ademais, a priori assumirmos que $|U(t)|_H$, $(t > 0)$ é limitado, então $T_M = \infty$ e a solução fraca satisfaz a identidade da energia*

$$E\big(u(t), u_t(t)\big) + \int_0^t \int_\Gamma g(u_t)u_t d\Gamma dt = E\big(u(0), u_t(0)\big). \tag{4.140}$$

Demonstração: Ver M. M. Cavalcanti; V. N. D. Cavalcanti e I. Lasiecka [8]. ■

Observação 4.4. *O Teorema 4.3 é uma extensão do Teorema 2.1, onde este último fornece o mesmo resultado com $q = 1$.*

Decaimento uniforme

Para estudar taxas de decaimento é preciso impor condições mais específicas assumidas sobre as fontes e a dissipação.

Hipótese N-2

(i) $g \in C^0(\mathbb{R})$ é monótona, $g(0) = 0$ e satisfaz

$$m_1 s^2 \leq sg(s) \leq M_2 s^2, \quad \text{para} \qquad |s| \geq 1;$$

(ii) $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $|f'(s)| \leq C(1 + |s|^{k_0 - 1})$, para todo $s \in \mathbb{R}$, $\quad 1 \leq k_0 \leq \dfrac{n}{n-2}$, $n > 2$ e $1 \leq k_0 < \infty$, $\quad n = 2$;

(iii) $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$ e $|h'(s)|_{\mathbb{R}} \leq C(1 + |s|^{k_1 - 1})$, para todo $s \in \mathbb{R}$, $\quad 1 \leq k_1 < \dfrac{n-1}{n-2}$, $n > 2$ e $1 \leq k_1 < \infty$, $\quad n = 2$.

Observação 4.5. *Em [8] mostra-se que as três primeiras partes da Hipótese N-2 implicam as hipóteses de N-1 (com* $q = 1$*), que por sua vez, garantem a existência local de soluções de energia finita.*

Teorema 4.4 (Taxas de decaimento uniforme). (i) *Assuma que a Hipótese N-2 é assegurada. Então, existe uma solução de energia finita* $u \in C^0\big([0, T_M); H^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0, T_M); L^2(\Omega)\big)$ *e* $u_t, \nabla u|_\Gamma \in L^2(0, T_M; L^2(\Gamma))$*;*

(ii) *Considere todas as soluções fracas de energia finita de modo que a regularidade dada acima seja válida e, além disso* $|u(t)|^2_{L^1(\Omega)} \leq C_1 E_p(u(t))$, $\quad t > 0$. *Então, as soluções correspondentes são globais e definidas sobre* $[0, \infty)$*;*

(iii) *Além disso, suponha que a única solução estacionária de* (4.139)*, dentro da classe de soluções sob consideração, é a solução trivial. Sob as suposições acima, essas soluções satisfazem a estimativa de decaimento conduzida por uma função real positiva* $S(t)$*, definida como a solução da Equação Diferencial*

$$S_t + q^*(S) = 0, \qquad S(0) = E(0) = S_0,$$

onde $q^*(S)$ *é uma função contínua, monótona crescente dada por* $q^*(x) := x - \big(I + p\big)^{-1}(x)$*, sendo* p *como no Capítulo 4.*

Temos

$$E(t) \leq S\Big(\frac{1}{T_0} - 1\Big), \qquad \textit{para } t > T_0$$

e a função $S(t)$ *decai uniformemente para zero.*

Demonstração: Ver M. M. Cavalcanti; V. N. D. Cavalcanti e I. Lasiecka [8]. ∎

Observação 4.6. *Como observado em [8], este nível de generalidade foi alcançado usando uma estabilidade "intrínseca," método desenvolvido em [18]. Nota-se que sob as suposições impostas, soluções fracas, podem, não necessariamente, serem únicas. No entanto, as taxas de decaimento anunciadas no Teorema 4.4 são válidas para todas as soluções fracas com as propriedades prescritas. Isto é conseguido empregando uma aproximação bastante especial, tendo como base o argumento desenvolvido em [18] o qual foi aplicado na demonstração do Teorema* 4.1.

Corolário 4.2. *Se assumirmos que* $g'(0) = 0$ *(isto é, o amortecimento é "fraco" superlinear na origem) e a função* $\sqrt{s}g(\sqrt{s})$ *é convexa para* $s \in [0, s_0]$*, onde* $s_0 > 0$ *pode ser arbitrariamente pequeno, a equação diferencial a ser resolvida torna-se*

$$S_t + \sqrt{S}g(\sqrt{S}) = 0, \qquad S(0) = E(0) = S_0,$$

e $E(t) \leq C\big(E(0)\big)S(t)$*. Mais especificamente, por integração da equação diferencial, com*

$$G(S, S_0) \equiv \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{S}} \frac{1}{g(u)} du,$$

obtemos,

$$S(t) = G^{-1}\Big(-\frac{t}{2}, S_0\Big).$$

Corolário 4.3. *Se* $\lim_{s \to 0} \dfrac{s}{g(s)} = 0$ *e a função* $\sqrt{s}g^{-1}(\sqrt{s})$ *é convexa para* $s \in [0, s_0]$*, onde* $s_0 > 0$ *pode ser arbitrariamente pequeno, a equação diferencial a ser resolvida toma a forma*

$$S_t + \sqrt{S}g^{-1}(\sqrt{S}) = 0, \qquad S(0) = E(0) = S_0,$$

e $E(t) \leq C\big(E(0)\big)S(t)$*. Mais especificamente, por integração da equação diferencial, com*

$$G(S, S_0) \equiv \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{S}} \frac{1}{g^{-1}(u)} du,$$

obtemos,

$$S(t) = G^{-1}\Big(-\frac{t}{2}, S_0\Big).$$

Para concluir vamos ilustrar o procedimento com alguns exemplos apresentados em [8]. Onde, por questão de clareza, em [8] as constantes são normalizadas para que elas não apareçam nas expressões.

Exemplo 4.1. *Considere* $g(s) = s^p$*, próximo da origem,* $p > 1$*. Desde que a função* $s^{\frac{p+1}{2}}$ *é convexa para* $p \geq 1$ *estaremos resolvendo a equação*

$$S_t + S^{\frac{p+1}{2}} = 0. \tag{4.141}$$

Esta equação pode ser integrada diretamente, no entanto, por uma questão de ilustração, da fórmula geral encontramos

$$G(s,S_0)=\int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{s}}u^{-p}du=\frac{1}{1-p}\Big[s^{\frac{-p+1}{2}}-S_0^{\frac{-p+1}{2}}\Big],$$

e

$$G^{-1}(t)=\Big[S_0^{\frac{-p+1}{2}}-t(1-p)\Big]^{\frac{2}{-p+2}}.$$

Assim,

$$E(t)\leq C\big(E(0)\big)\Big[E(0)^{\frac{-p+1}{2}}+t(p-1)\Big]^{\frac{2}{-p+2}}.$$

É claro que as mesmas taxas de decaimento poderiam ser obtidas pela integração direta da equação inicial (4.141).

Exemplo 4.2. *Considere $g(s)=s^3e^{-\frac{1}{s^2}}$, para s próximo da origem. Desde que a função $s^2e^{-\frac{1}{s}}$ é convexa em um bairro da origem, estaremos resolvendo a equação*

$$S_t+S^2e^{-\frac{1}{S}}=0. \tag{4.142}$$

Neste caso,

$$G(S,S_0)=-\frac{1}{2}\Big[e^{-\frac{1}{S}}-e^{-\frac{1}{S_0}}\Big]\quad e\quad G^{-1}(t,S_0)=\Big[\ln\big(e^{\frac{1}{S_0}}-2t\big)\Big]^{-1}.$$

Consequentemente,

$$E(t)\leq C\big(E(0)\big)\Big[\ln\big(e^{\frac{1}{E(0)}}+t\big)\Big]^{-1}.$$

Novamente as taxas de decaimento poderiam ser obtidas por integração direta da equação inicial (4.142).

Exemplo 4.3. *Vamos considerar $g(s)=s|s|e^{-\frac{1}{|s|}}$, para s próximo de zero. Desde que a função $s^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}}$ é convexa sobre $[0,s_0]$ para algum $s_0>0$ pequeno, deveremos resolver a equação deferencial*

$$S_t+S^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}}=0.$$

A função $G(S,S_0)$ é dada por $G(S,S_0)=-\big[e^{\frac{1}{\sqrt{s}}}-e^{\frac{1}{\sqrt{S_0}}}\big]$. Consequentemente

$$G^{-1}(t,S_0)=\frac{1}{\ln^2[e^{\frac{1}{\sqrt{s}}}-t]}$$

e

$$E(t)\leq C\big(E(0)\big)\frac{1}{\ln^2[e^{\frac{1}{\sqrt{E(0)}}}+\frac{1}{2}t]}.$$

Exemplo 4.4. *Tomemos agora,* $g(s) = |s|^{\theta-1}s,\ 0 < \theta < 1$. *Neste caso, a análise é idêntica ao caso do Exemplo 4.1, visto que* $g^{-1}(s) = s^{\frac{1}{\theta}},\ s > 0$ *e* $\dfrac{1}{\theta} > 1$. *Assim, as taxas de decaimento, nesse caso, tornam-se*

$$E(t) \leq C\big(E(0)\big)\left[E(0)^{\frac{-1+\theta}{2\theta}} + t\frac{1-\theta}{\theta}\right]^{\frac{2\theta}{\theta-1}}.$$

Capítulo 5

Apêndices

5.1 Apêndice A

Veremos a seguir alguns resultados importantes utilizados no texto, os quais, por serem bastante conhecidos não serão demonstrados.

Lema 5.1. (***Desigualdade de Young***) *Sejam* p *e* q *expoentes conjugados, isto é,* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *com* $p>1$, α *e* β *números reais não negativos. Então,*

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}.$$

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Lema 5.2. (***Desigualdade de Interpolação***) *Seja* $u \in L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega)$, *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$. *Então* $u \in L^r(\Omega)$, *para todo* $p \leq r \leq q$ *e tem-se*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \tag{5.1}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$, *satisfaz* $\frac{1}{r}=\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver A. Medeiros e M. Milla. Miranda [28]. ■

Lema 5.3. (***Desigualdade de Hölder***) *Sejam* p *e* q *expoentes conjugados, isto é,* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *com* $p>1$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. *Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad e \quad \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Além disso, se $p=q=2$, *temos a* ***Desigualdade de Schwartz***

$$\left|\int fg d\mu\right|_{\mathbb{R}} \leq \int |fg|_{\mathbb{R}} d\mu = \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int |f|^2_{\mathbb{R}} d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |g|^2_{\mathbb{R}} d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ∎

Lema 5.4. (***Desigualdade de Hölder Generalizada***) *Sejam $p_1, p_2, ..., p_n$ números reais, com $p_i \geq 1$ para $i = 1, 2, ..., n$, tais que*

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{p_i} \leq 1.$$

Se $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, 2, ..., n$, então $f = f_1 f_2 \cdots f_n \in L^1(\Omega)$ e

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f_1 \cdot f_2 \cdots f_n|_{\mathbb{R}} d\mu \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Demonstração: Segue por indução. ∎

Lema 5.5. (***Desigualdade de Minkowski***) *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ∎

Teorema 5.1 (fórmulas de Green). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ de classe C^2. Se $v \in H^2(\Omega)$, então:*

1. $\displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla u dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} u ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega);$
2. *Para $u, v \in H^2(\Omega)$, temos* $\displaystyle\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} ds;$
3. *Se $\rho \in \mathcal{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, então*

$$(\Delta\rho, u)_{L^2(\Omega)} + ((\rho, u))_V = \langle \gamma_1 \rho, \gamma_0 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}} \times H^{\frac{1}{2}}}, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demonstração: Ver H. Brezis [4] ou R. Edwards [12]. ∎

Teorema 5.2 (Gauss-Green). *Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u \nu^i d\Gamma,$$

com $i = 1, 2, \cdots, n$.

Demonstração: Ver L. A. Medeiros e M. Milla. Miranda [28]. ∎

Lema 5.6. *Se $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $\Gamma = \partial(\Omega)$, então*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \quad \textit{sobre} \quad \Gamma \quad e \quad |\nabla \varphi|^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)^2.$$

Demonstração: Ver L. A. Medeiros, M. Milla. Miranda e A. T. Lourêdo [26]. ■

Proposição 5.1 (Regra da Cadeia). *Seja $g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$ e $|g'(s)| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e alguma constante M. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$g \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ u) = (g' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Teorema 5.3 (Teorema de Fubini). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ e $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ subconjuntos mensuráveis e, seja $f(x, y)$ uma função integrável em $\Omega \times \Lambda$, com respeito a medida de Lebesgue $dxdy$ em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$. Então, para quase todo $x \in \Omega$ a função $f_x : \Lambda \to \mathbb{R}$, $f_x(y) = f(x, y)$ é integrável em Λ e, para quase todo $y \in \Lambda$ a função $f_y : \Omega \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x, y)$ é integrável em Ω. Além disso, a função*

$$\varphi(x) = \int_\Lambda f(x, y)dy$$

é integrável em Ω e,

$$\psi(y) = \int_\Omega f(x, y)dx$$

é integrável em Λ, com

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(x)dx = \int_\Omega \Big(\int_\Lambda f(x, y)dy\Big)dx = \int_{\Lambda\times\Omega} f(x, y)dydx = \int_{\Omega\times\Lambda} f(x, y)dxdy = \\ = \int_\Lambda \Big(\int_\Omega f(x, y)dx\Big)dy = \int_\Lambda \psi(y)dy.\end{aligned}$$

Demonstração: Ver W. Rudin [33]. ■

Teorema 5.4 (Rellich-Kondrachov). *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1, $j \in \mathbb{N}$. São compactas as imersões:*

- *Se $m < \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), q \in \Big[1, \frac{np}{n - mp}\Big)$;*
- *Se $m = \frac{n}{p}$, então $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), q \in [1, \infty)$.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros e M. Milla. Miranda [28]. ■

Observação 5.1. *Segue do Teorema de Relling-Kondrachov que se Ω é um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$ então a imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, sendo $H^1(\Omega)$ reflexivo, isto nos permite passar de convergências fracas em $H^1(\Omega)$ à convergências fortes em $L^2(\Omega)$.*

Proposição 5.2. *Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^1, $j \in \mathbb{N}$. As seguintes imersões são contínuas:*

- *Se Ω é limitado e $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para, $1 \leq \dfrac{np}{n-mp}$;*
- *Se Ω é limitado e $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para, $1 \leq \dfrac{np}{n-p} = p^*$.*

Demonstração: Ver L. A. Medeiros e M. Milla. Miranda [28]. ■

Observação 5.2. *O número p^* é conhecido como expoente crítico de Sobolev.*

Proposição 5.3. *Considere os números reais p e p' tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.*

1. *$p = 2$ se $n = 1, 2, 3$;*
2. *$p \geq \dfrac{n}{2}$ se $n \geq 4$.*

Então, a imersão $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ é contínua.

Demonstração: Ver M. Milla. Miranda e L. A. Medeiros [31]. ■

Teorema 5.5 (Regularidade). *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado com fronteira Γ de classe C^2. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi + \int_\Omega u\phi = \int_\Omega f\phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde C é uma constante que depende apenas de Ω.

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Teorema 5.6. *Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua tal que $F(0) = 0$, Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $p \in [1, \infty]$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla F(u) = F'(u)\nabla u$, quase sempre em Ω. Além disso, se $p < \infty$ então a aplicação $u \mapsto F(u)$ é contínua de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [6]. ■

Corolário 5.1. *Sejam $1 \leq p, q < \infty$. Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \in W^{1,q}(\Omega)$ e Ω tem fronteira de classe C^1, então $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [6]. ■

Lema 5.7. *Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua tal que $F(0) = 0$ e*

$$G(x) = \int_0^x F(s)ds.$$

Se $u \in C^1(\bar{I}; L^2(\Omega))$, então a função $f(t) = \displaystyle\int_\Omega G(u(t))dx$ pertence a $C^1(\bar{I})$ e

$$f'(t) = \int_\Omega F(u(t))u_t dx, \qquad \forall\ t \in I.$$

Demonstração: Ver Brezis-Cazenave [6]. ■

Lema 5.8 (Imersão de Sobolev). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

- *Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-mp}\right]$;*
- *Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, \infty)$;*
- *Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Teorema 5.7 (Agmon-Douglis-Niremberg). *Suponha que Ω é um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $1 < p < \infty$. Para todo $f \in L^P(\Omega)$, existe uma única solução do problema*

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega.$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \text{ e } \|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

5.2 Apêndice B

Nesta seção apresentamos algumas resultados da Análise Funcional e Análise não Linear utilizados nesta dissertação.

Definição 5.1 (Forma Sesquilinear). *Sejam X e Y espaços vetoriais, sobre o mesmo corpo $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Uma forma sesquilinear (ou funcional sesquilinear) h em $X \times Y$ é uma aplicação*

$$h : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que para todos $x, x_1, x_2 \in X$ e $y, y_1, y_2 \in Y$ e todos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se:

(i) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$;

(ii) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$;

(iii) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$;

(iv) $h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)$ $\qquad$ *($\overline{\beta}$ = complexo conjugado).*

Consequentemente h é linear na primeira variável e conjugada linear na segunda variável. Além disso, quando X e Y são espaços reais e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, no item (iv) *temos $\overline{\beta} = \beta$ e, dizemos que h é uma forma **Bilinear**, no sentido que é linear em ambas a variáveis. Se X e Y são espaços normados e se existe uma constante $C > 0$ tal que para todo x, y*

$$|h(x, y)|_{\mathbb{K}} \leq C\|x\|_X \|y\|_Y,$$

então h é dita limitada e o número

$$\|h\| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|h(x, y)|_{\mathbb{K}}}{\|x\|_X \|y\|_Y} = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |h(x, y)|_{\mathbb{K}},$$

*é chamado norma de h. Uma forma sesquilinear $h(x, y)$ é denominada **hermitiana**, se*

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)}, \qquad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

No caso em que X e Y são espaços reais e $h(x, y)$ satisfaz a condição acima, dizemos que $h(x, y)$ é simétrica.

Teorema 5.8 (**Teorema da Aplicação Aberta**)**.** *Sejam E e F dois Espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e bijetivo de E em F. Existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ∎

Teorema 5.9 (**Hahn-Banach, extensão de Funcionais Lineares**)**.** *Sejam X um espaço vetorial real e p um funcional sublinear em X. Além disso, seja f um funcional linear definido em um subespaço Z de X, satisfazendo*

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in Z.$$

Então, f tem uma extensão linear $\widetilde{f}$ a partir de Z para X satisfazendo

$$\widetilde{f}(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in X \qquad (I)$$

isto é, $\widetilde{f}$ é um funcional linear em X, satisfazendo (I) em X e $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para cada $x \in Z$.

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Teorema 5.10 (**Hahn-Banach, em Espaços Normados**)**.** *Seja f um funcional linear limitado em um subespaço Z de um espaço normado X. Existe um funcional linear limitado $\widetilde{f}$ em X que é uma extensão de f para X e tem a mesma norma, isto é, $\|\widetilde{f}\|_X = \|f\|_Z$, onde*

$$\|\widetilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |\widetilde{f}(x)|, \qquad\qquad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} |f(x)|,$$

sendo $\|f\|_Z = 0$ no caso trivial $Z = \{0\}$.

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Teorema 5.11 (**Banach-Alaoglu-Bourbaki**)**.** *Seja E um Espaço de Banach. O conjunto $B_{E'} = \{f \in E'; \ \ \|f\| \leq 1\}$ é compacto com respeito a topologia fraca estrela $\sigma(E', E)$.*

Demonstração: A prova pode ser vista em H. Brezis [4]. ■

Lema 5.9. *Sejam $\alpha(\cdot), \eta(\cdot) \in L^\infty(0,T)$, $\beta(\cdot) \in L^1(0,T)$, com $\alpha(t), \eta(t), \beta(t) \geq 0$ em quase todo ponto. Assuma que*

$$\eta(t) \leq \alpha(t) + \int_s^t \beta(\tau)\eta(\tau)d\tau \qquad (s \leq t \leq T). \tag{5.1}$$

Então,

$$\eta(t) \leq \alpha(t) + \frac{1}{B(t)}\int_s^t \alpha(\tau)\beta(\tau)B(\tau)d\tau \qquad (s \leq t \leq T), \tag{5.2}$$

onde $B(t) = exp\left(-\int_s^t \beta(\tau)d\tau\right)$.

Demonstração: Seja

$$N(t) = \int_s^t \beta(\tau)\eta(\tau)d\tau. \tag{5.3}$$

Derivando (5.3) e usando (5.1), tem-se

$$N'(t) = \beta(t)\eta(t) \leq \beta(t)[\alpha(t) + N(t)] = \alpha(t)\beta(t) + \beta(t)N(t).$$

Daí,

$$N'(t) - \beta(t)N(t) \leq \alpha(t)\beta(t). \tag{5.4}$$

Desde que $B(t) > 0$, multiplicando (5.4) por $B(t)$, obtemos

$$N'(t)B(t) - B(t)\beta(t)N(t) \leq B(t)\alpha(t)\beta(t). \tag{5.5}$$

Note que $B'(t) = -\beta(t)B(t)$, substituindo em (5.5) resulta

$$N'(t)B(t) + B'(t)N(t) \leq \alpha(t)\beta(t)B(t), \tag{5.6}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}[N(t)B(t)] \leq \alpha(t)\beta(t)B(t),$$

integrando de s a t, e multiplicando por $\frac{1}{B(t)}$, obtemos

$$N(t) \leq \frac{1}{B(t)} \int_s^t \alpha(\tau)\beta(\tau)B(\tau)d\tau,$$

como $\eta(t) - \alpha(t) \leq N(t)$, segue-se que

$$\eta(t) \leq \alpha(t) + \frac{1}{B(t)} \int_s^t \alpha(\tau)\beta(\tau)B(\tau)d\tau, \qquad (s \leq t \leq T).$$

■

Corolário 5.2 (Desigualdade de Gronwall). *Suponha que $\alpha(t) \equiv \alpha$ em (5.1), então*

$$\eta(t) \leq \alpha\, exp\left(\int_s^t \beta(\tau)d\tau\right) \qquad (s \leq t \leq T). \tag{5.7}$$

Demonstração: Sendo

$$B(t) = exp\left(-\int_s^t \beta(\tau)d\tau\right), \quad B'(t) = -\beta(t)B(t) \;\text{ e }\; B(s) = 1, \tag{5.8}$$

considerando $\alpha(t) \equiv \alpha$ em (5.2) e usando (5.8), vemos que

$$\eta(t) \leq \alpha - \frac{\alpha}{B(t)} \int_s^t -\beta(\tau)B(\tau)d\tau = \alpha - \frac{\alpha}{B(t)} \int_s^t B'(\tau)d\tau = \alpha - \frac{\alpha}{B(t)}[B(t) - B(s)], \tag{5.9}$$

ou seja,

$$\eta(t) \leq \alpha \frac{1}{B(t)} = \alpha\, exp\left(\int_s^t \beta(\tau)d\tau\right) \qquad (s \leq t \leq T).$$

Consequentemente, $\eta(t)$ é limitada. ■

Lema 5.10 (Lax-Milgram). *Seja H um Espaço de Banach e $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $\phi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \phi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \;\; e \;\; \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \phi, u \rangle = \min_{v \in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \phi, v \rangle\right\}.$$

Demonstração: A demonstração pode ser vista em H. Brezis [4] ou R. Edwards [12].

■

Teorema 5.12. *Sejam E um Espaço de Banach, E' seu dual e (f_n) uma sucessão de E'. Se $f_n \longrightarrow f$ fraco estrela em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\| \leq C$ e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

Demonstração: Ver H. Brezis [4] ou R. Edwards [12]. ■

Teorema 5.13 (Banach-Steinhaus). *Sejam E, F Espaços de Banach e (T_n) uma sucessão de operadores lineares contínuos de E em F tais que, para cada $x \in E$, $T_n x$ converge quando $n \to \infty$ a um limite que denotamos por T_x. Então:*

(i) $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$;

(ii) $T \in \mathcal{L}(E, F)$;

(iii) $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Demonstração: Ver H. Brezis [4] ou R. Edwards [12]. ■

Teorema 5.14 (Representação de Riesz). *Sejam $1 < p < \infty$ e $\phi \in (L^p)'$. Existe um único $u \in L^q$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso, se verifica

$$\|u\|_{L^q} = \|\phi\|_{(L^p)'}.$$

Demonstração: Ver H. Brezis [4] ou H. Edwards [12]. ■

Teorema 5.15. *Sejam H um Espaço de Banach reflexivo, K um subconjunto convexo fechado de H e $\phi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

(i) *ϕ é convexa;*

(ii) *ϕ semi-contínua inferiormente;*

(iii) *Se K é ilimitado, então ϕ é coercivo, ou seja, $\lim\limits_{\|x\| \longrightarrow \infty} \phi(x) = \infty$.*

Então, ϕ atinge um mínimo em K, isto é, existe $x_0 \in K$ tal que $\phi(x_0) = \min\limits_{x \in K} \phi(x)$.

Demonstração: A prova pode ser encontrada em H. Brezis [4] ou R. Edwards [12]. ■

Observação 5.3. *Se ao invés de ser convexa, ϕ for estritamente convexa, semi-contínua inferiormente e coerciva, então ϕ atinge um* ***único ponto mínimo.***

Teorema 5.16. *Sejam X um Espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X. Existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge na topologia fraca.*

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Teorema 5.17. *Sejam X um Espaço de Banach separável e (f_n) uma sequência limitada em X'. Existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) que converge na $topologia fraca^*$.*

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Proposição 5.4. *Seja (f_n) uma sequência em X'. Então,*

(i) $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$ *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in X$;

(ii) *Se* $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$, *então* $\|f_n\|$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Teorema 5.18. *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k \in \mathbb{N},$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Teorema 5.19 (Teorema da Convergência Dominada). *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que satisfaz as condições:*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *quase sempre em* Ω;

(ii) *Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$, quase sempre em Ω.*

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$.

Demonstração: Ver H. Brezis [4]. ■

Teorema 5.20 (Desigualdade de Jensen). *Assuma que* $med(\Omega) < \infty$ *e seja* $J\colon \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ *uma função convexa,* $J \not\equiv \infty$. *Seja* $f \in L^1(\Omega)$ *tal que* $f(x) \in D(J)$, *quase sempre e,* $J(f) \in L^1(\Omega)$. *Então,*

$$J\left(\frac{1}{med(\Omega)}\int_\Omega f\right) \leq \frac{1}{med(\Omega)}\int_\Omega J(f).$$

Vale observar que quando a função J *é côncava, obtemos uma desigualdade no sentido oposto.*

Demonstração: Ver F. Boyer e P. Fabrie [3]. ■

No estudo das EDPs não lineares, pelo método de compacidade, geralmente temos que passar pelas seguintes etapas:

(i) Construir um problema aproximado e provar que para cada $n \in \mathbb{N}$ tal problema possui uma solução v_n;

(ii) Provar que a sequência $(v_n)_n$ possui uma subsequência que converge forte para uma função v;

(iii) Passar ao limite no problema aproximado, para a partir daí, observar que tal limite é solução do problema original.

Neste contexto, fazendo estimativas da energia associada ao problema aproximado, em situações comuns, geralmente conclui-se que:

- $(v_n)_n$ é limitada em certo espaço $L^p(0, T; X)$;
- $(v_n')_n$ é limitada em certo espaço $L^r(0, T; Y)$.

Surge, então o questionamento: sob quais condições estas limitações nos permitem obter uma subsequência fortemente convergente? O Teorema de Aubin-Lions fornece uma resposta a esta pergunta. Se não vejamos:

Teorema 5.21 (Aubin-Lions). *Sejam* X, Y *e* Z *Espaços de Banach com* $X \overset{comp}{\hookrightarrow} Y \overset{cont}{\hookrightarrow} Z$, *sendo* X *e* Z *reflexivos. Sejam* $1 < p_0, p < \infty$ *e,* W *o espaço*

$$W := \left\{u \in L^{p_0}(0, T, X); u' \in L^p(0, T, Z)\right\}$$

munido da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T,X)} + \|u\|_{L^p(0,T,Z)}$. *Então,* W *é um Espaço de Banach, e a imersão* W *em* $L^{p_0}(0, T, Y)$ *é compacta.*

Demonstração: Ver J. L. Lions [10] ou R. Temam [36]. ■

Lema 5.11 (Lema de Lions). *Seja (u_n) uma sequência de funções mensuráveis, limitada em $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$ e converge para u quase sempre em Ω. Então*

(i) *$u_n \to u$ (forte) em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$;*

(ii) *$u_n \rightharpoonup u$ (fraco) em $L^q(\Omega)$.*

Demonstração: Ver J. L. Lions [10]. ■

Observação 5.4. *Uma consequência do Teorema de Aubin-lions é que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^{p_0}(0,T,X)$ tal que $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^p(0,T,Z)$, para algum $p \geq 1$. Então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em W, isto é, existe uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge forte em $L^{p_0}(0,T,Y)$. Uma situação frequente em que se utiliza este teorema é quando os espaços X, Y, Z são os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)$ para escolhas apropriadas de m, p, $(N = dim\mathbb{R}^N)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Por exemplo: se*

- *$(v_n)_n$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$;*
- *$(v_n')_n$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.*

Então $(v_n)_n$ possui uma subsequência que converge forte em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Onde, aqui usamos imersões entre Espaços de Bochner-Lebesgue, a reflexibilidade dos Espaços de Sobolev e aplicamos o Teorema de Rellich-Kondrachov, com $p = p_0 = 2$, $X = H_0^1(\Omega)$ e $Y = Z = L^2(\Omega)$. Por outro lado, se retirarmos a hipótese de reflexividade de X e Z o resultado do Teorema de Aubin-Lions permanece válido, isso é o que afirma o

Teorema 5.22 (Aubin-Lions-Simon). *Sejam $X \subset Y \subset Z$ espaços de Banach tais que a imersão de X em Y é compacta e a imersão de Y em Z é contínua. Sejam $1 \leq p, r \leq \infty$. Para $T > 0$ defina o espaço*

$$E_{p,r} := \left\{ u \in L^p\big(]0,T[;X\big);\ \ \frac{du}{dt} \in L^r\big(]0,T[;Z\big) \right\}$$

(i) *se $p < \infty$, então a imersão de $E_{p,r}$ em $L^p(]0,T[;Y)$ é compacta;*

(ii) *se $p = \infty$ e $1 < r$ então a imersão de $E_{p,r}$ em $C^0([0,T];Y)$ é compacta.*

Além disso, munido da norma $\|u\|_{E_{p,r}} = \|u\|_{L^p(0,T,X)} + \|u\|_{L^r(0,T,Z)}$, $E_{p,r}$ é um Espaço de Banach.

Demonstração: Ver F. Boyer e P. Fabrie [3]. ∎

Observação 5.5. *Vale mencionar que no teorema acima, Z pode ser substituído por qualquer Espaço Hausdorff localmente convexo. Ademais, existe ainda, uma versão deste último resultado onde a limitação da derivada é substituída pela equicontinuidade da sequência. Tal versão é dada pelo:*

Teorema 5.23 (Aubin-Lions). *Sejam $F \subset G \subset H$ Espaços de Banach e $(u_n)_n$ uma sequência limitada em $L^\infty(0,T;F)$ tais que:*

(i) *a imersão de F em G é compacta;*

(ii) *a imersão de G em H é contínua;*

(iii) *a coleção $\{u_n : [0,T] \longrightarrow H, \quad n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua.*

Então $(u_n)_n$ é pré-compacta em $C^0([0,T];F)$.

Demonstração: Ver M. C. Lopes, H. J. Nussenzveig e Zheng [13]. ∎

Considere a função f e $(\tau_h f)(t) = f(t+h)$, com $h > 0$. Se f é definida em $[0,T]$ então a translação $\tau_h f$ é definida em $[-h, T-h]$.

Teorema 5.24. *Sejam B um Espaço de Banach e $F \subset L^p(0,T;B)$. F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$, para $1 \leq p < \infty$, (ou em $C^0(0,T;B)$, para $p = \infty$) se e somente se,*

(i) $\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt; f \in F\right\}$ *é relativamente compacto em B* $\quad \forall\ 0 < t_1 < t_2 < T$;

(ii) $\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \longrightarrow 0,$ *quando $h \to 0$, uniformemente para $f \in F$.*

Demonstração: Ver J. Simon [35]. ∎

Teorema 5.25. *Sejam B um Espaço de Banach e F um conjunto limitado em $L^p(0,T;B)$ $(1 < p \leq \infty)$. F é um conjunto relativamente compacto em $L^q(0,T;B)$, $\forall\ q < p$ se, e somente se, $\forall\ 0 < t_1 < t_2 < T$ valem:*

(i) $\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt; f \in F\right\}$ *é relativamente compacto em B;*

(ii) $\|\tau_h f - f\|_{L^1(t_1,t_2;B)} \longrightarrow 0,$ *quando $h \to 0$, uniformemente para $f \in F$.*

Demonstração: Ver J. Simon [35]. ∎

Teorema 5.26. *Sejam X e B Espaços de Banach, com $X \subset B$, (imersão compacta) e seja $F \subset L^p(0,T;B)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ tal que:*

(i) *F é limitado em $L^1_{loc}(0,T;X)$;*

(ii) *$\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \longrightarrow 0$, quando $h \to 0$ uniformemente, para $f \in F$.*

Então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$, (e em $C^0(0,T;B)$ se $p = \infty$).

Demonstração: Ver J. Simon [35]. ∎

Teorema 5.27. *Sejam $X \subset B \subset Y$ Espaços de Banach, com $X \subset B$, (imersão compacta). Se $(1 \leq p \leq \infty)$ e*

(i) *F é limitado em $L^p(0,T;X)$*

(ii) *$\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \longrightarrow 0$, quando $h \to 0$ uniformemente, para $f \in F$.*

Então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$, (e em $C^0(0,T;B)$ se $p = \infty$).

Demonstração: Ver J. Simon [35]. ∎

Corolário 5.3. *Sejam $X \subset B \subset Y$ Espaços de Banach, com $X \subset B$, (imersão compacta).*

(i) *Se F é limitado em $L^p(0,T;X)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial t} := \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t}; f \in F\right\}$ é limitado em $L^1(0,T;Y)$, com $(1 \leq p < \infty)$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$.*

(ii) *Se F é limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ é limitado em $L^r(0,T;Y)$, com $r > 1$, então F é relativamente compacto em $C^0(0,T;B)$.*

Demonstração: Ver J. Simon [35]. ∎

Lema 5.12. *Seja F um subconjunto de $C^0(0,T;B)$. F é relativamente compacto se, e somente se,*

(i) *$F(t) := \{f(t); f \in F\}$ é relativamente compacto em B $\quad \forall\ 0 < t < T$;*

(ii) *F é uniformemente equicontínuo, isto é, $\forall \varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que*

$$\|f(t_2) - f(t_1)\|_B \leq \varepsilon \quad \forall\ f \in F, \ \ \forall\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \ \ \textit{sempre que} \quad |t_2 - t_1| \leq \eta.$$

Demonstração: Ver J. Simon [35]. ■

Lema 5.13. *Seja* $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente pequeno. Seja* w *solução de* $w_{tt} = \Delta w$*, ou mais geralmente, solução de uma equação hiperbólica arbitrária de segunda ordem com coeficientes suaves e dependentes do espaço. Então*

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 d\Sigma_1 \leq C_{T_\varepsilon} \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)^2 + w_t^2 \right] d\Sigma_1 + \|w\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\rho}(Q_T)} \right\}, \tag{5.10}$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ *denota a derivada co-normal e* $\rho > 0$ *é também arbitrariamente pequeno.*

Demonstração: Ver I. Lasiecka e R. Triggiani [21]. ■

Referências Bibliográficas

[1] BALAKRISHNAN, A. V. *Applied Functional Analysis*. New York: Springer Verlag, 1981.

[2] BARBU, V. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banch Spaces*. Bucaresti: Editura Academiei Bucuresti România, 1976.

[3] BOYER, F. and FABRIE, P. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Aquations and Related Models*. New York: Springer, 2013.

[4] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2011.

[5] BREZIS, H. *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert* New York: American Elservier Publishing Company - INC. 1973.

[6] BREZIS, H. and CAZENAVE, T. *Nonlinear Evolution Equations*. Rio: IM-UFRJ, 1994.

[7] CAVALCANTE, M. Moreira. e CAVALCANTE, Valeria N. Domingos. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Maringá: Eduem, 2009.

[8] CAVALCANTE, Marcelo M. CAVALCANTE Valéria N. Domingos. LASIECKA, Irena. *Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction*. J. Differential Equations. Ed. 236. 2007. p.407-459.

[9] CHEN, G. *Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain*. J. Math. Pure Appl. Ed. 58. 1979. p. 248-274.

[10] DAUTRY, R. and LIONS. *Functional and Variable methods*. Berlin: Springer, 2000.

[11] DINCULEANU, R. *Vector Measures* New York: Pergamon Press, 1967.

[12] EDWARDS, R. E. *Functional analysis, Theory and Aplication*. EUA: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[13] FILHO, M. C. L. LOPES H. J. Nussenzveig. and ZHENG, Y. *Weak solutions for the equations of incompressible and inviscid fluid dynamics*. 1999.

[14] GOMES, A. M. *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 1985.

[15] HEBEY, E. *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999.

[16] KORMONIK, V. and ZUAZUA, E. *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*. J. Math. Pure Appl. Ed. 69. 1990. p. 33-54.

[17] KORMONIK, V. *Exact Controllability and Stabilization, The muitiplier Method*. Jonh Willey and Sons and Masson. 1994.

[18] LASIECKA, Irena. and TARARU, D. *Uniform Boundary Stabilization og Semilinear Wave Equations With Nonlinear Boundary Damping*. Diferential Integral Equation. v. 6. number 3, May 1993, p. 507-533.

[19] LASIECKA, Irena. and TRIGGIANI, Roberto. *Control Theory For Partial Diferential Equations: Continuos and Approximation Theories* I Abstract Parabolic Systems. New York: Cambridge Universit Press, 1999.

[20] LASIECKA, Irena. and TRIGGIANI, Roberto. *Control Theory For Partial Diferential Equations: Continuos and Approximation Theories* II Abstract Hyperboliclike Systems Over a Finite Time Horizon. New York: Cambridge Universit Press, 1999.

[21] LASIECKA, Irena. and TRIGGIANI, Roberto. *Uniform stabilization of the wave Equation with Dirichlet feedback control without geometric conditions*. Applied Mathematics and Optimization. Ed.25, 1992, p. 189-224.

[22] LIONS, J. L. and MAGENES. *Problèms aux Limites Non Homogènes et Applications*. Vol. 1. Paris: Dunod, 1968.

[23] LIU, Z. and ZHENG, S. *Semigroups associated with Dissipative System*. New York: Chapaman & Hall - CRC, 1999.

[24] MARIELI, M. *Controlabilidade exata na fronteira da equação da onda semilinear*. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Matemática. Maringá: UEM, 2006.

[25] MEDEIROS, L. A. *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais.* Parte I. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2006.

[26] MEDEIROS, L. A. MIRANDA, Milla M. LOUREDO, A. T. *Introduction exact control theory: Method Hum.* Campina Grande: EDUEPB, 2013.

[27] MELO, Romero Alves *A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais* . Dissertação de Mestrado Acadêmico em Matemática. C. Grande PB: PGMAT, 2006.

[28] MEDEIROS L. A. and MIRANDA M. M. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogêneos).* 5ª edição. Rio de Janeiro: Editora IM-UFRJ, 2006.

[29] MIRANDA, M. M. *Traço para o dual dos espaços de Sobolev,* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 1990. p. 131-157.

[30] MIRANDA M. M. *Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos.* vol. 28. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1994.

[31] MIRANDA, M. M. and MEDEIROS L. A. *Hidden regularity for semilinear hyperbolic partial differential equations.* Ann. Fac, Sci. Toulouse. Ed. 9. 1988. p. 103-120.

[32] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Diferential Equations.* New York: Springer-Verlag, 1983.

[33] RUDIN, Walter. *Real and Complex Analysis.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1987, p.164-166.

[34] RUIZ, A. *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential.* J. Math Pures Appl. Ed.71, 1992, p. 455-467.

[35] SIMON, J. *Compact acts in the space* $L^p(0,T;B)$. Annali di Mat. Pura et Applicate, vol. IV CXLVI, 1989, p. 65-96.

[36] TEMAM, R. *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis.* Stud. Math. Appl. vol. 2. New York: Oxford, 1977.