



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

A VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ NA
COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA

por

Fábio Alves Gomes

Campina Grande

Agosto, 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Fábio Alves Gomes

A VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ NA
COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Prof.º Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Campina Grande

Agosto, 2013

Dedicatória

A D'us...

A Francisco de Assis Gomes e a Socorro Alves,

A Fabiana Alves

A João Alves [in memoriam]

A Priscylla Nóbrega

”Eu não tenho nenhum talento especial.

Sou apenas apaixonadamente curioso”.

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço a D'us, por tudo.

Agradeço a minha família, meus queridos pais Francisco Gomes e Socorro Alves e minha querida irmã Fabiana Alves pelo apoio e carinho em todos os momentos. Sem esse elenco, não haveria nada.

A minha querida noiva Priscylla Nóbrega, por ter me acompanhado e incentivado em mais essa etapa da minha vida.

Ao Prof. Eduardo Passos, pela competente orientação, paciência e amizade, durante o período que estive neste departamento.

Ao Prof. Francisco Brito, pelo fundamental apoio e valorosas discussões durante a elaboração desse trabalho.

A Prof^a. Geusa Marques, pela orientação durante a iniciação científica

A Prof^a.Dayse Martins, pela orientação e a confiança demonstradas no estágio REUNI.

Ao Prof. José Marcos (Zezito), pela orientação no estágio REUNI e pelas lições de vida, ética e sinceridade.

Ao amigo Rodrigo Lima, pela orientação em programas computacionais.

Aos Professores do Dept. de Física da UFCG, pela presteza em ajudar nos assuntos acadêmicos e não-acadêmicos, imprescindível durante a graduação e pós-graduação.

Aos funcionários, colegas e amigos deste departamento, em especial: André Freire, Aline Simões, Danilo César, Eugênio Maciel, Érico Vinicius, Pablo Vasconcelos e Su-

zana Araújo que sem dúvidas, contribuíram muito para realização deste trabalho.

A todos os que contribuíram de maneira direta ou indireta, mesmo que simplesmente torcendo para que eu concluísse este trabalho com êxito.

A CAPES/UFCG/CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, investigamos os impactos da quebra da invariância de Lorentz no cenário cosmológico. Neste sentido, mostramos a possibilidade de existir neutrinos superluminais altamente energéticos na presença de um campo constante que controla a violação da simetria Lorentz. Investigamos as métricas efetivas, uma no espaço com curvatura $k = 0$ via métrica de Friedmann-Robertson-Walker e a outra no espaço com curvatura $k \neq 0$ em coordenadas esféricas, analisando via um potencial constante o fator de escala e o parâmetro de desaceleração. Um comportamento similar, porém subluminal é também observado para os inflatons numa escala de baixas energias. Portanto, esse tipo de cenário cosmológico, pode abrigar a idéia de neutrinos superluminais e energia escura.

Palavras-chave: Quebra de Simetrias, Cosmologia Inflacionária, Relatividade Geral.

ABSTRACT

In this work, we investigate the impact of Lorentz invariance breaking in a cosmological scenario. In this sense, we show the possibility of superluminal neutrinos highly energetic in the presence of a constant field that controls the Lorentz symmetry violation. Investigate the effective metric in space with curvature $k = 0$ via metric Friedmann-Robertson-Walker and the other in space with curvature $k \neq 0$ in spherical coordinates, through analyzing a potential constant scaling factor and the deceleration parameter. A similar behavior, however, subluminal, is also observed from inflatons in the low energy regime. Therefore, this type of cosmological scenario can hold the idea of superluminal neutrinos and dark energy.

Keywords: Symmetry breaking, Inflationary Cosmology, General Relativity.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Aspectos da Relatividade Geral	4
2.1	Princípio da equivalência	4
2.2	Dinâmica da partícula	6
2.2.1	Relação entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$	7
2.3	Tensor energia-momento	8
3	Aspectos da Cosmologia	11
3.1	A métrica de Friedmann-Robertson-Walker	12
3.2	Equação de Friedmann	15
3.3	Densidade de energia no universo	17
3.4	Parâmetro de desaceleração	24
3.5	Modelos cosmológicos	24
3.6	Teoria de campo escalar em cosmologia	28
4	Cosmologia Inflacionária Violando a Simetria de Lorentz	32
4.1	O modelo	32
4.2	Impactos sobre o universo plano	34
4.3	Impactos sobre o universo curvo	38
5	Conclusão	53
A	Tensor de Curvatura	55
B	Propriedades dos tensores de Riemann	59
	Bibliografia	62

Capítulo 1

Introdução

A invariância de Lorentz é considerada como uma das simetrias mais fundamentais da física. Composta basicamente por dois tipos de transformações: rotações e boosts, esta simetria vem enfrentando testes cada vez mais precisos a medida que os anos passam. Contudo, nos últimos anos, questionam-se a exatidão da invariância de Lorentz em todas as escalas de energia. Neste sentido, é importante investigar a possibilidade da violação da invariância de Lorentz, e seus efeitos associados. Na verdade, observações de raios cósmicos de alta energia relatam efeitos tipo o evento GZK¹ que ainda precisam de uma maior confirmação[1, 2, 3]. Isto pode sugerir a violação da simetria de Lorentz[4, 5]. Do ponto de vista teórico, todas as teorias que abordam os aspectos da gravidade quântica, necessitam de uma modificação drástica na descrição do espaço-tempo ao nível da escala de Planck [6]. Algumas delas conduzem naturalmente a violação da simetria de Lorentz [7].

Os impactos da violação da simetria de Lorentz sobre a física podem ser bastante amplos. Na cosmologia, existem muitos assuntos que podem ser reconsiderados neste contexto. Por exemplo, o problema da matéria e da energia escura, a inflação do universo, a bariogênese, a radiação cósmica de fundo e assim por diante [8, 9, 10].

¹Efeito GZK foi teorizado pelos cientistas Greisen, Zatsepin e Kuzmin. Ele estabelece um limite superior para a energia de prótons que viajam no universo, devido á presença da radiação cósmica de fundo. Porém nos últimos anos experimentos como o AGASA observaram alguns raios acima do chamado "limite GZK".

Neste trabalho de dissertação, nos concentramos sobre alguns aspectos da violação de Lorentz no cenário inflacionário.

Normalmente, a violação da simetria de Lorentz está associada a referenciais privilegiados. No caso do modelo padrão da física das partículas elementares, existem fortes restrições com respeito a existência de sistemas privilegiados, uma vez que não possui determinada dinâmica para tal propriedade [11]. Contudo, não existe nenhuma razão contundente que descarte sistemas privilegiados na cosmologia, principalmente no ponto de vista de teorias efetivas.

Então, podemos ter sistemas de referenciais privilegiados semelhantes aos que são definidos pela radiação cósmica de fundo (CMB), possibilitando a construção de teorias gravitacionais efetivas, tal como a teoria de Einstein-Aether. Como bem sabemos, esta teoria, possui uma estrutura natural de se explorar a violação da simetria de Lorentz num contexto cosmológico, uma vez que os efeitos dominantes, são os gravitacionais. Assim, esta teoria possui um vetor constante que se acopla não-minimamente com o tensor métrico. Neste caso é assumido que a norma desse vetor adquire espontaneamente um valor esperado não nulo que define uma direção privilegiada que naturalmente viola a invariância de Lorentz. Isto foi primeiro investigado por Will e Nordtvedt nos anos 70's [12] e recentemente estudado em detalhes por Jacobson e Samuel [13], baseada nas propostas de Kostelecký e Samuel [14].

O objetivo principal desta dissertação, é o de desenvolver uma abordagem teórica da dinâmica dos campos dos neutrinos e dos inflatons, ambos num universo cosmológico. A principal razão disto, é a existência de um campo de fundo tipo-tempo que determina uma direção privilegiada, capaz de permear o espaço, responsável pela ação de neutrinos superluminais e da energia escura. Alguns estudos correlacionados, são frequentes na literatura [15].

A organização desta dissertação é a seguinte: no Cap.II, fazemos um breve levantamento sobre alguns aspectos da relatividade geral, tais como uma discussão

sobre o princípio da equivalência, da dinâmica de uma partícula num campo gravitacional, e do tensor energia-momento. No Cap.III, revisamos também os aspectos da cosmologia. Entre outros, destacamos o estudo da métrica de Friedmann-Robertson-Walker, da equação de Friedmann e da teoria de campos escalares na cosmologia. No Cap.IV, apresentamos nossas investigações sobre os impactos da quebra da invariância de Lorentz sobre a cosmologia inflacionário do Universo. Neste cenário, nossos resultados apontam algumas modificações na dinâmica de partículas como os neutrinos e na evolução da matéria escura. No Cap.V, emitimos nossas conclusões.

Ao longo dessa dissertação, foi adotado o sistema de unidades naturais: $c = \hbar = 1$.

Capítulo 2

Aspectos da Relatividade Geral

Neste capítulo, discutiremos que para o Universo, a interação gravitacional na Teoria da Relatividade Geral afirma que todos os corpos sofrem a ação de um campo gravitacional e respondem a sua aplicação da mesma forma, ou seja, com a mesma aceleração, de tal forma que as trajetórias descritas por uma partícula pode estar relacionadas com a curvatura do espaço-tempo, devido ao seu conteúdo de matéria e energia existente. O fato de uma fonte gravitacional curvar o espaço tempo é uma consequência direta do Princípio da Equivalência [16]

2.1 Princípio da equivalência

Os campos gravitacionais possuem a propriedade de que todos os corpos se movem da mesma forma na presença destes (se as condições iniciais forem as mesmas), independente da massa ou da carga. Em outras palavras a força gravitacional se distingue das demais, devido a uma característica peculiar que é a *universalidade*, ou seja, todos os corpos sem exceção sofrem a ação do campo gravitacional, e mais do que isso, todos os corpos "respondem" da mesma forma sob a ação da força gravitacional. Um exemplo é que todos os corpos sujeitos ao campo gravitacional da terra sofrem a mesma aceleração, independente de suas massas.

Considere a massa M da Terra, seu raio r e a massa gravitacional de uma

partícula de teste m_G . Logo, o módulo da força gravitacional entre M e m_G será dado por

$$F = \frac{GMm_G}{r^2}. \quad (2.1.1)$$

Porém, de acordo com a segunda lei de Newton, a partícula fica sujeita a uma aceleração dada por

$$F = m_I a, \quad (2.1.2)$$

onde F é o módulo da força que age na partícula e m_I é a massa inercial da partícula de teste que mede a resistência que os corpos oferecem á mudança do seu estado de movimento. Sendo m_G a medida da predisposição de um corpo ser atraído por outro, ou seja, m_G é uma fonte do campo gravitacional equivalente a uma carga gravitacional, logo da igualdade de (2.1.1) com (2.1.2) nos fornece

$$\frac{GMm_G}{r^2} = m_I a, \quad (2.1.3)$$

ou ainda,

$$a = \frac{m_G}{m_I} \frac{GM}{r^2} = \text{cte}. \quad (2.1.4)$$

Testes experimentais indicam que $m_G = m_I$ para todos os corpos, então todos caem com a mesma aceleração num campo gravitacional. Devido a esse fato podemos anular localmente os efeitos de um campo gravitacional com a escolha adequada de referenciais, pois todos os corpos estão sujeitos a uma mesma aceleração. Graças a essa propriedade dos campos gravitacionais podemos fazer uma analogia entre o movimento de corpos num campo gravitacional e o movimento de corpos num referencial não inercial. A propósito, sabemos que o movimento livre dos corpos num referencial inercial se processa retilínea e uniformemente por todo tempo. Então, se observamos o movimento livre desses corpos a partir de um referencial não inercial, certamente os veremos moverem-se todos da mesma forma. Disso, concluímos que as propriedades dos movimentos dos corpos num referencial não inercial são idênticas as dos movimentos dos corpos num campo gravitacional, e podemos dizer que num referencial não inercial é equivalente a um certo campo gravitacional. Este é o **princípio da equivalência**.

A partir do que foi exposto acima, escrevemos o princípio da covariância geral: uma equação é válida num dado campo gravitacional se for válida também na ausência deste. Em outras palavras, uma equação é válida num campo gravitacional se estiver de acordo com a relatividade restrita e preservar sua forma sob transformação geral de coordenadas.

2.2 Dinâmica da partícula

Considere uma partícula movendo-se livremente somente sob a influência do campo gravitacional em um sistema de coordenadas ξ^α que a acompanha. Portanto esse sistema é localmente inercial e de acordo com o princípio da equivalência nenhuma aceleração é observada, portanto [17]

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.2.5)$$

sendo $d\tau$ o intervalo entre dois eventos ocorrendo com a partícula (intervalo de tempo próprio da partícula), definido por

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.2.6)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico de Minkowski.

Consideremos agora um sistema de coordenadas arbitrário x^μ em repouso (ou seja, x^μ é não inercial), em um campo gravitacional [18, 19]. Podemos fazer uso da regra da cadeia para obter a dinâmica da partícula observada a partir do referencial x^μ

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (2.2.7)$$

que após o desenvolvimento da derivada temporal, chegaremos a

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.2.8)$$

Multiplicando por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, vamos obter [18],

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.2.9)$$

A equação (2.2.9) representa a equação da geodésica que está associada a trajetória de menor comprimento entre dois pontos num referencial arbitrário x^μ , onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é denominado de conexão afim e pode ser entendida como uma "correção" as equações devido á curvatura do espaço-tempo.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (2.2.10)$$

Uma vez que as derivadas de primeira ordem comutam da equação (2.2.10), segue que a conexão afim é simétrica com relação aos índices inferiores,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (2.2.11)$$

Num referencial localmente inercial, valem as leis da relatividade restrita e não podemos perceber um campo gravitacional a partir deste. Mas, quando passamos para um referencial em repouso no campo gravitacional, percebemos que a equação de movimento escrita a partir de (2.2.9) apresenta um termo adicional $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$, quando comparada á equação de movimento escrita a partir do sistema localmente inercial (2.2.5). Isso justamente indica a presença de um campo gravitacional. Portanto, podemos descrever um campo gravitacional a partir da curvatura do espaço-tempo.

O tempo próprio também pode ser expresso em termos do sistema de coordenadas x^μ , como segue:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \equiv -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2.12)$$

onde definimos o chamado *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (2.2.13)$$

suas componentes definem a geometria do espaço-tempo e, conseqüentemente, a dinâmica num campo gravitacional.

2.2.1 Relação entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

Nesse contexto o estudo de uma partícula em queda livre tem nos revelado que a grandeza (campo) que determina a força gravitacional é a conexão afim, da mesma

forma que o tempo próprio é determinado pelo tensor métrico. Vamos demonstrar que as derivadas do tensor métrico determinam o campo $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Inicialmente derivemos a expressão do tensor métrico (2.2.13) com respeito a x^λ

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.2.14)$$

que leva a

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \quad (2.2.15)$$

Somando em ambos os lados a mesma derivada do tensor métrico com $\mu \leftrightarrow \lambda$ e subtraindo a mesma derivada com $\nu \leftrightarrow \lambda$, teremos:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu}, \quad (2.2.16)$$

onde obtemos

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right), \quad (2.2.17)$$

que representa a conexão afim em termos do tensor métrico. Logo verificamos que implemento do Princípio da Equivalência nos conduz a uma dinâmica na qual o movimento da partícula é determinado pela geometria do espaço tempo, ou seja, o conceito de força pode ser substituído pela idéia de que a matéria e a energia curvam o espaço-tempo, e este determina quais são as geodésicas que devem ser seguidas pelas partículas de teste. Então, uma vez estabelecida a forma métrica, as funções $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$, são determinadas solucionando-se um conjunto de equações diferenciais conhecidas como equações de Einstein, que relacionam a geometria do espaço-tempo com o conteúdo da matéria e energia, fontes do campo gravitacional[17, 18, 20].

2.3 Tensor energia-momento

Em nossa busca de uma teoria relativística da gravitação a densidade de energia terá um papel importante[16, 18, 20, 21]. Para um sistema constituído de muitas

partículas, a distribuição de matéria, energia e momento é praticamente uma distribuição contínua. Toda informação relevante sobre o comportamento do fluxo de quadrimomento das partículas está contida no tensor de segunda ordem conhecido como tensor de energia-momento. Esse objeto possui 16 componentes e é um tensor que obedece às transformações de Lorentz e pode ser representado da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 u_\mu u_\nu, \quad (2.3.18)$$

onde ρ_0 é a densidade de massa apropriada. Observe que o tensor $T_{\mu\nu}$ é simétrico, ou seja, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. cujas componentes levam consigo um significado físico, como:

- T_{00} - Componente temporal
Densidade de energia;
- $T_{0k} = T_{k0}$ - Componente espaço-temporais
Densidade da k-ésima componente de momento;
- T_{kk} - Componentes espaciais (índices de mesmo valor)
Fluxo da k-ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal está na direção k. (Pressão);
- T_{Kj} - Componentes espaciais (índices de valores diferentes)
Fluxo da k-ésima componente de momento através da superfície cuja direção normal na direção k.

O tensor energia-momento de um sistema completo satisfaz a lei de conservação[17]

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.3.19)$$

ou ainda,

$$\partial_0(T^{0\nu}) + \partial_i(T^{i\nu}) = 0. \quad (2.3.20)$$

Com a interação gravitacional, tem-se[17]

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.3.21)$$

Em cosmologia, o tensor energia-momento de um fluido perfeito é representado por[17, 18]

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.3.22)$$

onde p e ρ são a pressão e a densidade de energia respectivamente e u^μ é a quadri-velocidade do fluido.

Capítulo 3

Aspectos da Cosmologia

Neste capítulo serão discutidos alguns aspectos básicos, observacionais e teóricos da cosmologia moderna, ênfase será dado ao material necessário para os capítulos seguintes. A princípio, discutiremos a Cosmologia Padrão onde será descrito um universo homogêneo e isotrópico através da utilização da métrica de Friedmann-Robertson-Walker, apontando algumas observações que dão suporte ao uso desta para o Universo observável, além disso iremos discutir a respeito das equações de Einstein para determinar as equações de Friedmann e a equação da conservação de energia para um fluido perfeito. De acordo com a equação de estado para um fluido perfeito, podemos obter a densidade de energia em função do fator de escala $a(t)$ na qual serão testados para regimes dominados pela matéria, radiação e energia de vácuo representada pela constante cosmológica Λ . Investigaremos também o fator de escala para os modelos cosmológicos dominados pela matéria, radiação e constante cosmológica além de analisarmos os gráficos do parâmetro de desaceleração nestes três períodos. Em seguida será introduzida a teoria de campo escalar em Cosmologia através do tensor energia-momento que se conserva para obtermos a densidade de energia e pressão e assim relacionarmos o campo escalar com as equações de Friedmann para obtermos a equação de movimento da partícula, através da aproximação *slow-roll* [21, 22, 23, 24].

3.1 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Como o universo apresenta-se homogêneo e isotrópico na distribuição de matéria, é de se esperar que o espaço-tempo também tenha essas mesmas características, ou seja, que o espaço-tempo seja homogêneo e isotrópico, tal condição chamado de princípio cosmológico que matematicamente sugere que exista uma coordenada temporal, chamado tempo cosmológico tal que suas hipersuperfícies sejam homogênea e isotrópico[25]. Logo a homogeneidade implica que a métrica é invariante por translação e a isotropia justifica que em torno de qualquer ponto a métrica é invariante por rotação. Portanto, teremos simetria esférica em torno de qualquer ponto.

As transformações de simetria da métrica são isometrias que são gerados pelos vetores de Killing, onde a derivada da métrica desse vetor nulo.

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.1.1)$$

Num espaço tridimensional homogêneo e isotrópico existem seis vetores de Killing linearmente independentes, três vetores de translação e três vetores de rotação que deixam o espaço com simetria maximal, portanto um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico possui simetria máxima, então o tensor de Riemann pode ser escrito da seguinte forma:

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad (3.1.2)$$

onde (k) representa a constante de curvatura. E ainda,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1.3)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo tridimensional. A relação (3.1.3) nos fornece a geometria do espaço-tempo tridimensional homogêneo e isotrópico. Num sistema de coordenadas co-móvel a métrica do espaço-tempo apresenta-se da seguinte forma

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t)dl^2, \quad (3.1.4)$$

onde $S^2(t)$ é uma função referente ao grau de afastamento e aproximação dos observadores co-móveis. Por outro lado, temos

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1.5)$$

que nos dá a geometria do espaço tridimensional homogêneo e isotrópico. Portanto escolhemos arbitrariamente um ponto como origem do sistema de coordenadas. Porém, pela isotropia a métrica deve ser esfericamente simétrica em torno deste ponto, portanto, para uma métrica tridimensional com simetria esférica existe um sistema de coordenadas no qual a métrica possui as seguintes componentes

$$dl^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (3.1.6)$$

onde a função desconhecida $\lambda(r)$ pode ser determinado usando o tensor de Riemann, Contraindo i com k na equação (3.1.2) vamos obter o tensor de Ricci dado por

$$R_{jl} = R_{jil}^i = K(g^{ii}g_{jl} - g^{ii}g_{jl}). \quad (3.1.7)$$

logo,

$$R_{jl} = 2kg_{jl}. \quad (3.1.8)$$

Calculando o tensor de Ricci para a métrica (3.1.6), vamos obter os seguintes valores

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r}, \quad (3.1.9)$$

$$R_{22} = 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda}, \quad (3.1.10)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2(\theta)R_{22}. \quad (3.1.11)$$

Portanto a métrica deve satisfazer a equação (3.1.8) e sendo assim temos para $j = 1$ e $l = 1$, obtemos a componente R_{11} da métrica dada por

$$R_{11} = 2kg_{11} \quad (3.1.12)$$

$$-\frac{d(e^{-\lambda})}{dr} = 2kr. \quad (3.1.13)$$

Integrando esta expressão acima, obtemos

$$e^{-\lambda} = -kr^2 + A, \quad (3.1.14)$$

onde (A) é uma constante de integração. Por outro, para $j = 2$ e $l = 2$, teremos a componente R_{22} da métrica dada por

$$R_{22} = 2kg_{22} \quad (3.1.15)$$

e,

$$1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} = 2kr^2, \quad (3.1.16)$$

que nos levará a determinar a constante de integração

$$A = 1. \quad (3.1.17)$$

Logo obtemos,

$$e^{\lambda} = \frac{1}{1 - kr^2}. \quad (3.1.18)$$

Portanto, a métrica de um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico tem a seguinte forma

$$dl^2 = \frac{1}{1 - kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (3.1.19)$$

que representa a distância espacial própria entre eventos simultâneos, onde k representa a constante de curvatura do espaço.

Para observadores que não se movem relativisticamente em relação às galáxias, a métrica do espaço-tempo deve obedecer à linha de Universo que é uma geodésica na métrica, logo a homogeneidade e a isotropia induz que a parte espacial do tensor métrico evolua por meio de uma função universal do tempo, de modo que tendo em vista o Princípio Cosmológico, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker que descreve o Universo homogêneo e isotrópico em expansão, é representada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (3.1.20)$$

aqui, $a(t)$ é o fator de escala que é utilizado para descrever a evolução de distâncias espaciais e (k) é a constante de curvatura do espaço que pode assumir os valores -1 , 0 e 1 de acordo com a curvatura do espaço a que esta submetida definindo, portanto, o tamanho das superfícies no espaço. Para $k = -1$ o espaço possui curvatura hiperbólica, e para $k = 1$ o espaço é do tipo esférico. Quando (k) assume o valor zero temos um espaço plano.

Para um $a(t)$ crescente o Universo está se expandindo, caso ele seja decrescente, ocorre uma contração. Logo para uma expansão do Universo, a distância real entre nós e os objetos observados são modificadas (em larga escala) de forma que estas alterações são medidas através do fator de escala, que re-escala a distância co-móvel entre os objetos com o tempo, descrevendo a expansão do espaço observado.

No Universo observado, a gravitação é uma força sempre atrativa. Nunca houve qualquer evidência firme de anti-gravitação em laboratório ou sistemas estelares/galácticos. Porém, isto não necessariamente foi sempre assim, e uma possível solução ao problema da origem da expansão é o de termos tido uma época onde, pelo menos de forma efetiva, a gravitação tenha sido repulsiva. De fato, as equações de Friedmann apresentadas a seguir, atribuem um papel importante à relação entre a pressão e a densidade de energia, já que o sinal da aceleração está determinado por ela. Abre-se assim a possibilidade de ter havido alguma época na qual $\ddot{a} > 0$, e como consequência a expansão do Universo ter sido acelerada. Este é o conceito básico da era inflacionária.

3.2 Equação de Friedmann

A obtenção das equações de Friedmann [26, 27] pode ser realizada através do uso da métrica de Friedmann-Robertson-Walker e o do tensor energia-momento de um fluido perfeito. Utilizando as equações de Einstein representadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (3.2.21)$$

Podemos verificar que para G_{00} vamos obter

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (3.2.22)$$

onde

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.2.23)$$

e,

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right], \quad (3.2.24)$$

logo substituindo na expressão (3.2.21), teremos

$$G_{00} = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2}, \quad (3.2.25)$$

sabemos que

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.2.26)$$

Portanto, para a componente G_{00} vamos obter $G_{00} = 8\pi GT_{00}$, mas como $T_{00} = \rho$, ficaremos com $G_{00} = 8\pi G\rho$ que ao ser igualada com (3.2.25) nos permite obter a primeira equação de Friedmann representada por

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.2.27)$$

que representa a taxa de variação de expansão do fator de escala $a(t)$, o qual podemos também representar por $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, chamado parâmetro de Hubble. Para a segunda equação de Friedmann, devemos de maneira análoga ao caso anterior encontrar o G_{11} na equação (3.2.21),

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11}, \quad (3.2.28)$$

onde

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (3.2.29)$$

e

$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (3.2.30)$$

E da métrica de Friedmann-Robertson-Walker temos que a componente $g_{11} = \left(\frac{a^2}{1-kr^2} \right)$, portanto obtemos

$$G_{11} = \frac{-2a\ddot{a}}{1-kr^2} - \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} - \frac{k}{1-kr^2}. \quad (3.2.31)$$

Porém de (3.2.26) a componente G_{11} possui a seguinte representação $G_{11} = 8\pi GT_{11}$, mas como $T_1^1 = p$, podemos rebaixar o índice para obtermos T_{11} ,

$$T_{11} = pg_{11}. \quad (3.2.32)$$

Portanto substituindo T_{11} em (3.2.26) obtemos a seguinte equação

$$G_{11} = 8\pi Gp \left(\frac{a^2}{1-kr^2} \right). \quad (3.2.33)$$

Agora para obtermos a segunda equação de Friedmann fazemos a comparação da expressão (3.2.31) com a equação (3.2.33) desta forma iremos ter

$$\frac{-2\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} = 8\pi Gp. \quad (3.2.34)$$

substituindo a primeira equação de Friedmann (3.2.27) na relação (3.2.34), vamos obter

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(3p + \rho). \quad (3.2.35)$$

Que representa a segunda equação de Friedmann e que indica a taxa de aceleração com que o Universo se expande em função da densidade de matéria e da pressão do fluido cósmico relacionadas com o fator de escala de expansão do Universo.[28, 17, 18]

3.3 Densidade de energia no universo

Em larga escala, identificamos três fontes principais de distribuição de energia e matéria na Natureza [20]. Primeiro, temos a matéria nos aglomerados, que constituem as Galáxias, Estrelas etc. A radiação cósmica que é representada pelas ondas eletromagnéticas e a constante cosmológica (Λ) acrescentada por Einstein. Nós

podemos escolher o modelo de um fluido perfeito para, através das equações de Einstein, determinar a relação entre densidade de matéria com o fator de escala para a energia dinâmica do Universo [17, 18]. Considerando um fluido, isotrópico que induz a uma métrica que também é isotrópica, logo, as duas regiões irão coincidir, e sendo assim, o fluido vai estar em movimento com coordenadas co-móveis, portanto a quadri-velocidade será dada por $U^\mu = (-1, 0, 0, 0)$, e o tensor energia-momentum dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.3.36)$$

que torna-se

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

com um índice elevado, este tensor assume a forma conveniente dada por

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (3.3.37)$$

observe que o traço é dado por

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + 3p. \quad (3.3.38)$$

Antes de conectar com a equação de Einstein é importante analisarmos que a componente zero da equação da conservação de energia é dada por

$$\nabla_\mu T^\mu_0 = 0 \quad (3.3.39)$$

$$\partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0 \quad (3.3.40)$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p), \quad (3.3.41)$$

que representa a equação da conservação da energia para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker para um fluido perfeito.

Para prosseguirmos, podemos escolher uma equação de estado, ou seja, a relação entre ρ e p . Muitas vezes, os fluidos perfeitos relevantes na Cosmologia obedecem à simples equação de estado dada por

$$p = \omega\rho, \quad (3.3.42)$$

onde ω é uma constante independente do tempo, portanto, substituindo-a em (3.3.41) vamos verificar que a equação da conservação da energia torna-se igual a

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega). \quad (3.3.43)$$

Integrando esta expressão e manipulando a equação (3.3.43), vamos obter que

$$\rho(t) = \rho_0 \left[\frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3(1+\omega)}, \quad (3.3.44)$$

o que representa a densidade de energia em função do fator de escala $a(t)$.

Os dois exemplos mais populares de fluido cosmológico são conhecidos como a matéria e a radiação [21] que de acordo com a equação de estado, (3.6.87) o parâmetro ω depende das condições de energia de tal forma que para $\omega = 0$ teremos um período dominado pela matéria conhecida como poeira ou pó na qual a matéria não-relativística, possui essencialmente pressão zero [17]. Neste exemplo incluem-se estrelas e galáxias normais, na qual a pressão é desprezível em comparação com a densidade de energia. Portanto para $\omega = 0$ a densidade de energia na matéria será dada por

$$\rho_M(t) \sim a^{-3}. \quad (3.3.45)$$

A densidade de radiação pode ser utilizada para descrever qualquer radiação eletromagnética real, ou partículas massivas que se deslocam a velocidades relativamente suficientemente perto da velocidade da luz e que eles se tornem indistinguíveis dos fótons. Sendo um gás isotrópico de partículas relativísticas um fluido perfeito, existe um tensor energia-momento dado pela expressão (3.3.36). Também sabemos que o tensor $T_{\mu\nu}$ para o eletromagnetismo pode ser expresso em termos da intensidade

de campo como[17],

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}, \quad (3.3.46)$$

onde o traço deste tensor é dado por

$$T_{\mu}^{\mu} = F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = 0. \quad (3.3.47)$$

Mas isso também deve igual a(3.3.38), então a equação de estado de um gás de fótons para a radiação será

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R, \quad (3.3.48)$$

onde $\omega = \frac{1}{3}$ representa a constante para a radiação.

Um Universo em que a maioria da densidade de energia está na forma de radiação é conhecido como um Universo dominado pela radiação[29]. Logo a densidade de energia da radiação expressa pela equação (3.3.45) cai de acordo com a seguinte relação

$$\rho_R(t) \sim a^{-4}. \quad (3.3.49)$$

Assim, a densidade de energia da radiação cai ligeiramente mais rápido do que a densidade de energia na matéria, isto porque a densidade do número de fótons diminui na mesma forma que a densidade do número de partículas não-relativística. Acreditamos que, hoje, a densidade de energia da radiação é muito menor que a da matéria, com $\frac{\rho_M}{\rho_R} \sim 10^3$. No entanto, no passado o Universo era muito menor, e a densidade de energia da radiação teria dominado em tempos primordiais.

Uma característica da Relatividade Geral, é que a fonte de energia para o campo gravitacional é o tensor energia-momento[26]. Na física não gravitacional, a mudança na energia a partir de um estado para outro é que é mensurável. Por exemplo, o movimento de uma partícula com a energia potencial $V(x)$ é precisamente o mesmo que com uma energia potencial $V(x) + V_0$, com V_0 assumindo qualquer constante. Na gravitação, porém, o valor real das questões energéticas é considerado, e não apenas as diferenças entre os estados. Esse comportamento abre a possibilidade da energia do

vácuo: uma densidade de energia do espaço vazio. Uma característica que poderíamos observar, é que no vácuo não há uma direção preferencial, portanto ainda será possível ter uma densidade de energia diferente de zero se o tensor energia-momento está associada à invariância de Lorentz com coordenadas inerciais locais. Essa invariância de Lorentz nos leva ao tensor energia-momento correspondente, que deve ser proporcional à métrica, logo podemos descrever o termo cosmológico $\Lambda g_{\mu\nu}$ como um fluido perfeito e escrever a seguinte relação

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}\eta_{\mu\nu}. \quad (3.3.50)$$

Desde que $\eta_{\mu\nu}$ seja invariante por transformadas de Lorentz podemos generalizar com coordenadas localmente inerciais arbitrárias que

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}. \quad (3.3.51)$$

Comparando com a equação de um fluido perfeito, o tensor energia-momento dado pela equação (3.3.36) equivale à expressão acima generalizada, a menos de um sinal contrário na densidade de energia para pressão isotrópica que nos faz obter

$$p_{vac} = -\rho_{vac}, \quad (3.3.52)$$

se dividirmos o tensor energia-momento em uma parte da matéria $T_{\mu\nu}^M$ e uma parte de vácuo $T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$ a equação de Einstein fica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^M - \rho_{vac}g_{\mu\nu}). \quad (3.3.53)$$

Logo após a descoberta da Relatividade Geral, Einstein tentou encontrar um modelo estático cosmológico, uma vez que era o que as observações astronômicas da época indicavam. O resultado foi o Universo Estático de Einstein. Para que esta cosmologia estática resolvesse a equação de campo como uma fonte de matéria ordinária, foi necessário acrescentar um novo termo chamado de constante cosmológica¹ Λ , que

¹Termo adicionado pelo próprio Einstein às suas equações de campo de forma a permitir que o universo fosse estático. Recentemente esta constante tem sido interpretada como um termo de densidade de vácuo que possivelmente poderia explicar a aceleração do universo.

entra como uma densidade de energia de vácuo expressa por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}), \quad (3.3.54)$$

onde o valor dessa densidade é

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.3.55)$$

Portanto, para a constante cosmológica como distribuição de energia-matéria a equação de estado (3.3.52) nos leva a um parâmetro $\omega = -1$, em que a densidade de energia de vácuo é dada por

$$\rho_{\Lambda}(t) = \rho_0. \quad (3.3.56)$$

E ainda, podemos considerar três fases distintas para a evolução do Universo, sendo uma primeira época dominada pela radiação, seguida de um período dominado pela matéria e finalmente o período dominado pela constante cosmológica[18]. Usando a constante de integração da equação de Friedmann, podemos fixar o valor atual do fator de escala $a_0 = 1$ para simplificar. Neste caso teremos três fontes para a evolução do Universo.

$$\rho = \rho_M + \rho_R + \rho_{\Lambda}, \quad (3.3.57)$$

onde,

$$\rho_M = \frac{\rho_0}{a^3} \quad (3.3.58)$$

$$\rho_R = \frac{\rho_0}{a^4} \quad (3.3.59)$$

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.3.60)$$

substituindo as três densidades citadas acima na equação de Friedmann (3.2.27) teremos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{R_0}}{a^4} + \frac{\rho_{M_0}}{a^3} \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.3.61)$$

Definindo um potencial efetivo como sendo dado por

$$V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{R_0}}{a^4} + \frac{\rho_{M_0}}{a^3} \right) + \frac{k}{a^2}. \quad (3.3.62)$$

a equação (3.3.61) assume a seguinte forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} - V_{eff}(a). \quad (3.3.63)$$

Como $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ é positivo, podemos fazer uma analogia com a equação de movimento de uma partícula submetida a um potencial V_{eff} expressa por

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V_{eff}(x). \quad (3.3.64)$$

Portanto, a condição necessária para o fator de escala ser positivo implica que $V_{eff}(x) \leq \frac{\Lambda}{3}$. Para V_{eff} crítico igual a $\frac{\Lambda}{3}$ teremos que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 0. \quad (3.3.65)$$

Desta forma, derivando a equação (3.3.63) de Friedmann teremos

$$\ddot{a} = \left[\frac{\Lambda}{3} - V_{eff}(a)\right]a - \frac{1}{2}\left[\frac{d(V_{eff})}{da}\right]a^2. \quad (3.3.66)$$

Para $k = 0$, temos que o potencial efetivo $V_{eff}(a)$ terá um predomínio do período da matéria sobre a radiação, portanto

$$V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_{R_0}}{a^4} + \frac{\rho_{M_0}}{a^3}\right). \quad (3.3.67)$$

Para $k = 1$, teremos que o potencial efetivo $V_{eff}(a)$ terá um predomínio do período da constante cosmológica sobre a matéria, e a radiação, portanto

$$V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_{R_0}}{a^4} + \frac{\rho_{M_0}}{a^3}\right) + \frac{1}{a^2}. \quad (3.3.68)$$

Para $k = -1$, teremos que o potencial efetivo $V_{eff}(a)$ terá um predomínio do período da radiação sobre a constante cosmológica e da matéria, logo

$$V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_{R_0}}{a^4} + \frac{\rho_{M_0}}{a^3}\right) - \frac{1}{a^2}. \quad (3.3.69)$$

3.4 Parâmetro de desaceleração

Uma forma alternativa de descrever o estado de expansão do Universo, consiste em utilizar o parâmetro de desaceleração[30, 31] definido por

$$q = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) - 1 = - \frac{\frac{\ddot{a}}{a}}{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2}. \quad (3.4.70)$$

Portanto podemos determinar o fator de escala $a(t)$ variando no tempo para alguns modelos cosmológicos e aplicarmos os resultados, obtendo o valor do parâmetro de desaceleração (q) que é um indicador da taxa de expansão do Universo e que mede a taxa de variação da taxa de expansão do Universo. Se $q < 0$, a expansão do Universo é acelerada, porém se $q > 0$ indica uma fase de desaceleração.

3.5 Modelos cosmológicos

Considerando o modelo cosmológico de Einstein-de-Sitter, teremos que $\Lambda = 0$, ρ_{R_0} e $k = 0$ o que caracteriza o Universo dominado pela matéria. Portanto através da equação de Friedmann podemos encontrar o fator de escala para o período da matéria[30]. Partindo de (3.3.61), teremos

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{M0}}{3}} \sqrt{a^{-3}}, \quad (3.5.71)$$

fazendo $\alpha = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{M0}}{3}}$ ficamos,

$$\frac{\dot{a}}{a} = \alpha a^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.5.72)$$

sendo $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ e integrando, obtemos

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} \alpha \right)^{\frac{2}{3}} (t)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.5.73)$$

que corresponde ao valor aproximado do fator de escala para o período da matéria, no qual ele cresce com o passar do tempo indefinidamente como mostra a figura. Como podemos observar, através de cálculos efetuados, o parâmetro neste caso resulta em

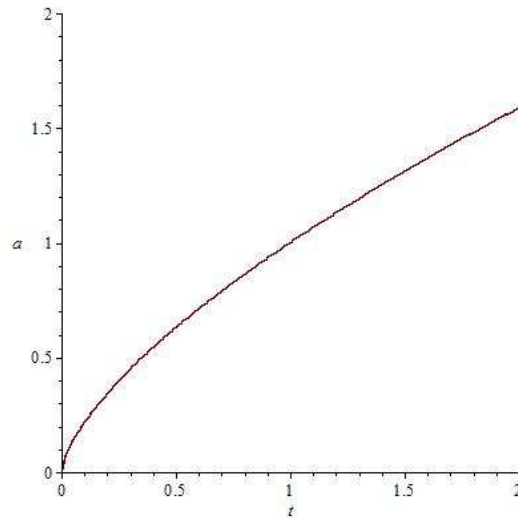


Figura 3.1: Evolução do fator de escala em função do tempo para o universo dominado pela matéria.

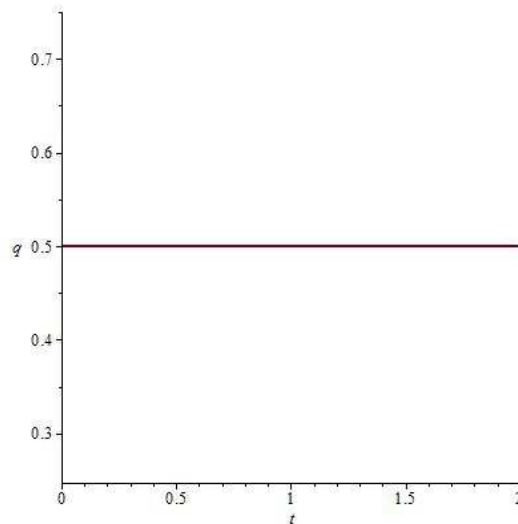


Figura 3.2: Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela matéria.

$q = \frac{1}{2}$ o que indica um período de desaceleração constante com o passar do tempo conforme indica a figura

Para o Universo dominado pela radiação verificamos que sendo $\Lambda = 0; \rho_{M0}$ e $k = 0$, portanto, partindo de (3.3.61) obteremos o fator de escala para o Universo da seguinte forma

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{M0}}{3}}\sqrt{a^{-2}}, \quad (3.5.74)$$

fazendo $\alpha = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{R0}}{3}}$ ficamos

$$\frac{\dot{a}}{a} = \alpha a^{-2}, \quad (3.5.75)$$

sendo $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ e integrando, temos

$$a(t) = (2\alpha t)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5.76)$$

que corresponde ao valor aproximado do fator de escala para o período da radiação, no qual ele cresce com o passar do tempo indefinidamente como mostra a figura. Como

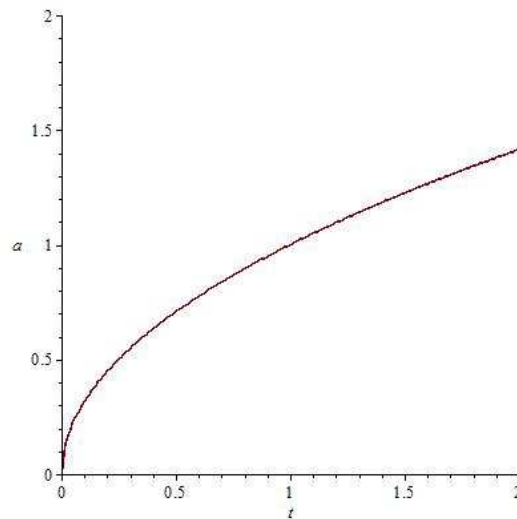


Figura 3.3: Evolução do fator de escala em função do tempo para o universo diminuído pela radiação.

podemos observar, através de cálculos efetuados, o parâmetro neste caso resulta em $q = 1$, o que indica um período de desaceleração constante com o passar do tempo conforme mostra a figura.

Para o Universo dominado pela constante cosmológica, que corresponde ao modelo de de Sitter temos que $\Lambda > 0, \rho_{R0} = 0, \rho_{M0} = 0$ e $k = 0$, onde partindo da equação 3.3.61, obtemos

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (3.5.77)$$

sendo $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ e integrando, temos

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (3.5.78)$$

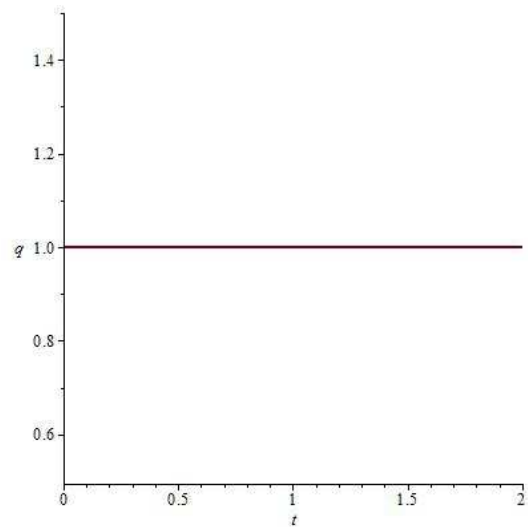


Figura 3.4: Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela radiação.

Portanto o fator de escala para a constante cosmológica obedece a uma expansão exponencial conforme indica a figura. Como podemos observar, através de cálculos

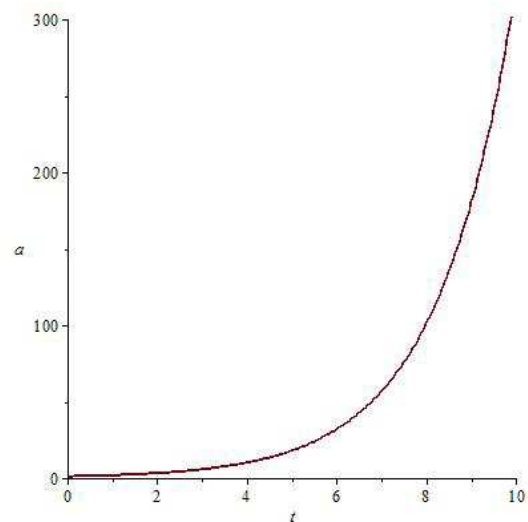


Figura 3.5: Evolução do fator de escala em função do tempo para o modelo de de Sitter.

efetuados, o parâmetro de desaceleração neste caso resulta em $q = -1$, o que indica um período de aceleração constante com o passar do tempo conforme a figura

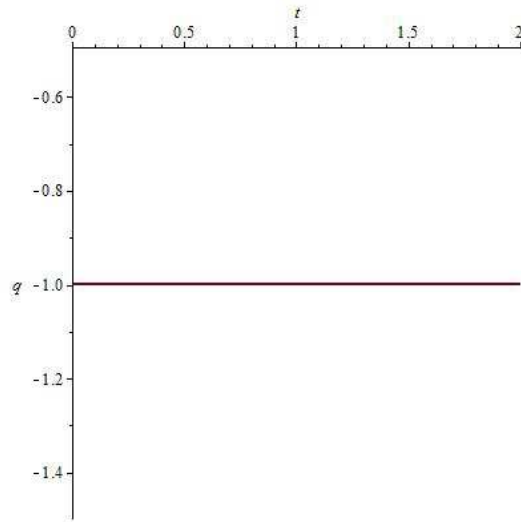


Figura 3.6: Parâmetro de desaceleração para o modelo de de Sitter.

3.6 Teoria de campo escalar em cosmologia

Para incluirmos campos escalares nas equações de Friedmann, devemos utilizar o tensor energia-momento[32] definido por

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_{\mu} \phi} \partial_{\nu} \phi + \delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L}. \quad (3.6.79)$$

que se conserva, pois utilizando as equações de movimento podemos verificar explicitamente que este tensor energia-momentum possui essa característica, ou seja

$$\partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (3.6.80)$$

Se substituirmos a equação de um campo escalar real em (3.6.79), encontraremos o tensor de energia-momentum para o campo escalar dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi + g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.6.81)$$

onde a lagrangeana para um campo escalar ϕ é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - V(\phi), \quad (3.6.82)$$

aplicando (3.6.82) em (3.6.81) vamos encontrar

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - g_{\mu\nu} V(\phi), \quad (3.6.83)$$

fazendo $\mu = 0$ e $\nu = 0$ vamos obter

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.6.84)$$

mas sabendo que o tensor de energia-momento possui componente $T_{00} = \rho$, logo comparando com a expressão (3.6.84) vamos obter a densidade de energia que é dada por:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.6.85)$$

com índices dados por $\mu = 1$ e $\nu = 1$, o tensor de energia-momento para o campo escalar é dado por

$$T_{11} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - V(\phi). \quad (3.6.86)$$

Mas como o tensor de energia-momento possui a componente $T_{11} = p$, logo comparando com a expressão (3.6.85) vamos obter a pressão dada por:

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.6.87)$$

Voltando as equação de Friedmann para efetuar as substituições da densidade de energia ρ , obteremos as seguintes expressões em função do campo escalar

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (3.6.88)$$

Para a segunda equação de friedmann, obtemos

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{-8\pi G}{3} \left[\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (3.6.89)$$

Na equação da conservação de energia para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker como fluido perfeito, representada pela equação(3.3.41), substituindo os valores de densidade e pressão obteremos a seguinte equação

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.6.90)$$

Representando $\frac{\dot{a}}{a}$ como sendo a taxa relativa de crescimento do Universo, ou seja, taxa de expansão indicada como sendo o parâmetro de Hubble², simbolizado por H, logo

²Esta taxa de expansão foi introduzida por Hubble para reproduzir o fato observacional de que as galáxias próximas se afastam com velocidade crescente com as distâncias que nos separam delas ($V = H_0 d$). Acredita-se atualmente que o valor desta constante seja da ordem de $(65 - 72) Km.s^{-1}.Mpc^{-1}$.

a equação(3.6.90) fica,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.6.91)$$

Vemos que o parâmetro de Hubble atua como um termo de atrito[33]. O campo tende a diminuir o potencial, mas quando H é muito grande o movimento vai sendo amortecido. Portanto, um campo escalar com um potencial suficientemente pequeno vai diminuindo muito lentamente, levando a uma energia cinética muito menor que a energia potencial $V(\phi)$. Portanto o tensor de energia-momentum é então,

$$T_{\mu\nu} \approx -V(\phi)g_{\mu\nu}, \quad (3.6.92)$$

onde $\phi \approx \text{constante}$. Comparando com o tensor de energia-momento de vácuo dado pela equação (3.3.51), vemos que o potencial de campo escalar é quem imita a energia do vácuo. Como um exemplo simples, podemos citar o potencial quadrático[17, 18], $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$. Então (3.6.91) descreve um oscilador harmônico amortecido e mais de um amortecimento irá ocorrer se $H > m$. Da equação (3.6.91) do movimento da partícula podemos analisar a evolução temporal do campo escalar, pois de acordo com o princípio cosmológico, o Universo é homogêneo e isotrópico, portanto varia somente como função do tempo, ou seja, $\phi = \phi(t)$. Logo a equação de Fredmann (3.2.27) torna-se

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.6.93)$$

Na equação acima, se $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ teremos que $\rho = V(\phi_0)$ e $p = -V(\phi_0)$, então podemos obter um regime de aceleração positiva quando a pressão for negativa, onde $p = -\rho$ e percebemos que de acordo com a equação da pressão de um fluido perfeito (3.6.87) e da densidade de energia (3.6.85) esta condição é satisfeita desde que o termo cinético permaneça subdominante, sendo desprezível com relação ao termo potencial. Com esta condição, o potencial escalar torna-se máximo, e como a expansão é acelerada, o potencial deve variar lentamente nesse período. Logo teremos que $V \approx \text{constante}$, ou $\frac{\partial V}{\partial \phi} = \xi$, onde ξ é um valor muito pequeno. Essa aproximação

é conhecida como aproximação de slow-roll (rolamento lento), caracterizando uma expansão acelerada. No regime slow-roll, $\dot{\rho} \approx \text{constante}$ e $\ddot{\rho} = 0$ de tal forma que a equação do movimento (3.6.90) pode ser escrita como

$$3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (3.6.94)$$

e pela consideração de que $V \approx \text{constante}$, a equação de Friedmann fica

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}V_0, \quad (3.6.95)$$

que integrando e manipulando matematicamente, vamos obter

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}}t}. \quad (3.6.96)$$

Portanto concluímos que independente da forma do potencial, a aproximação slow-roll[34] sempre fornecerá uma solução exponencial de tal forma que $p = -\rho = -V$ semelhante ao que ocorre no modelo para o Universo dominado pela constante cosmológica, que corresponde ao modelo de de Sitter. Neste período o *ínflaton*³ evoluirá do estado de falso vácuo para o estado de vácuo verdadeiro quando $\frac{\partial V}{\partial \phi}$ não for pequeno, o que corresponde ao término do regime inflacionário em que o potencial chega ao seu mínimo e o termo cinético não é mais desprezível e, de acordo com a equação (3.6.91), o ínflaton sofre oscilações amortecidas e perde energia, a qual reaquece o Universo.

³Campo escalar responsável pela inflação e que é submetido a um potencial $V(\phi)$.

Capítulo 4

Cosmologia Inflacionária Violando a Simetria de Lorentz

Neste capítulo, apresentamos o nosso modelo que a viola naturalmente a invariância de Lorentz e discutimos os seus impactos sobre o cenário inflacionário. Assim, a violação da simetria, é controlada por um tensor $k_{\mu\nu}$, escrito em função de um campo escalar φ , que funciona como um campo de fundo, isto é, sem dinâmica. Tal modelo, foi contruído a luz de novos termos que modificam o setor do campo de Higgs do modelo padrão propostos por Colladay e Kosteleký [35]. Neste sentido, estudamos os impactos dessa teoria sobre o Univeso plano e sobre o Universo curvo.

4.1 O modelo

Neste ponto, escrevemos uma teoria de campos num espaço curvo de $(d+1)$ dimensões que descreve campos de um inflaton e de um fermion acoplados a outros campos escalares que desempenham o papel de controlar a violação da simetria de Lorentz. A densidade de Lagragena é escrita como,

$$e^{-1}\mathcal{L} = \frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu} + \xi_1 k_{\mu\nu}^1(\varphi)\right)\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - i\left(g_{\mu\nu} + \xi_2 k_{\mu\nu}^2(\varphi)\right)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \mathcal{V}(\varphi, r) - V(\phi), \quad (4.1.1)$$

onde $e = \sqrt{-g}$ e $\kappa^2 = 8\pi G$. As quantidades $V(\phi)$ e $\mathcal{V}(\varphi, r)$ são o inflaton e o potencial de fundo respectivamente. Note que o potencial $\mathcal{V}(\varphi, r)$ que possui dependência explícita da coordenada radial (r), é dada por[36]

$$\mathcal{V}(\varphi, r) = \frac{W_\varphi^2}{2r^{2d-2}}, \quad (4.1.2)$$

onde $W(\varphi)$ é o superpotencial, cujo sua primeira derivada é definida como segue

$$W_\varphi = \varphi^{\frac{a-1}{a}} - \varphi^{\frac{a+1}{a}}, \quad (4.1.3)$$

com $a = 1, 3, 5, \dots$. Uma vez que estamos assumindo que o campo escalar φ seja um campo de fundo constante, desprezamos os acoplamentos para outros campos em sua equação de movimento. A solução geral é dada por[36]

$$\varphi(r) = \tanh^a \left[\frac{1}{a(d-2)r^{d-2}} \right]. \quad (4.1.4)$$

Na presente discussão atual, devemos nos limitar aos seguintes casos: $a = 1$ e $d = 3$. Neste sentido, consideramos um tensor tipo-tempo dado como $\kappa_{\mu\nu}^i (i = 1, 2)$ tal que $\kappa_{00}^i \neq 0$, isto é

$$k_{\mu\nu}^i(\varphi) = \begin{pmatrix} -\beta_i(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_1(\varphi) = \varphi(r) - 1, \quad \beta_2(r) = \varphi(r). \quad (4.1.5)$$

Note que tais tensores acoplam os campos de inflaton e de férmions ao campo escalar de fundo que controlam a violação de lorentz como diferentes constantes de acoplamento: $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 > 0$, respectivamente, veja figuras (4.1) e (4.2). Os inflatons, se acoplam com o campo de fundo mais fortemente do que os neutrinos.

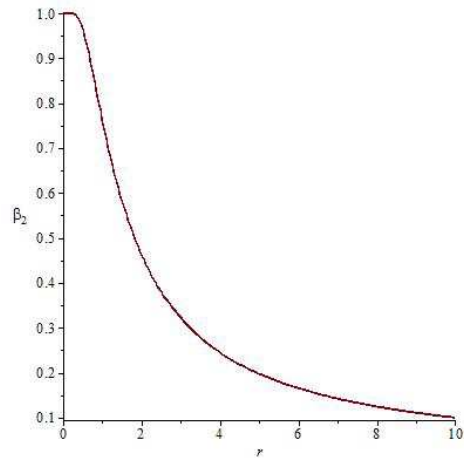


Figura 4.1: Acoplamento para campo de inflação com o campo de fundo que controla a violação de Lorentz $\beta_1(\varphi(r)) = \beta_2(\varphi(r)) - 1 < 0$ para $\xi_1 > 0$

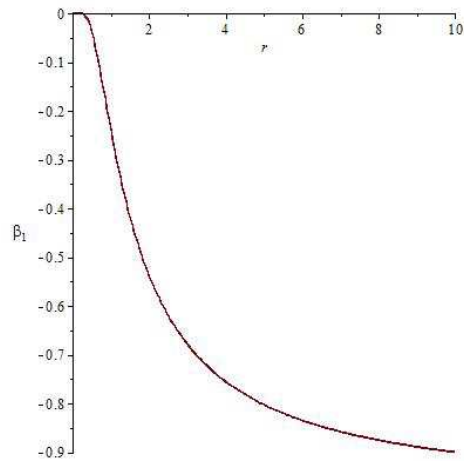


Figura 4.2: Acoplamento para campo de neutrinos com o campo de fundo que controla a violação de Lorentz $\beta(\varphi(r)) > 0$ para $\xi_2 > 0$

4.2 Impactos sobre o universo plano

Vamos investigar os impactos cosmológicos deste modelo. A nossa métrica de fundo será a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) em um Universo plano, dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.2.6)$$

por outro lado, a *métrica efetiva* devido a presença do campo de fundo é do tipo[37]

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(g_{\mu\nu} + \xi_i k_{\mu\nu}(\varphi)\right)dx^\mu dx^\nu, \quad (4.2.7)$$

ou ainda,

$$d\tilde{s}^2 = -\left(1 + \xi_i \beta(\varphi)\right)c^2 dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad i = 1, 2, \quad (4.2.8)$$

A velocidade efetiva para os inflatons e os neutrinos devido ao campo de fundo são dadas por[38]

$$v_i = \sqrt{1 + \xi_i \beta_i(r^*)}c, \quad i = 1, 2, \quad (4.2.9)$$

onde $\beta_i(r) = 0$ para fótons. Observe que o campo inflaton é subluminal mas atinge velocidade da luz em distâncias muito pequenas. Os neutrinos comportam-se de maneira oposta, isto é, eles se tornam superluminal em distâncias curtas, mas tornam-se subluminal a distâncias muito grande, veja figuras 4.1 e 4.2. A escala r^* corresponde a distância (ou energia $E \sim \frac{1}{r^*}$) testados pelo inflaton ou neutrinos.

Neste ponto, assumimos regimes onde só a inflação seja o efeito dominante. Assim as equações de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}$, leva a equação de Friedmann $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi$, cuja densidade do inflaton: ρ_ϕ é governada pelo campo de inflaton com o tensor energia-momento dado na forma,

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi \quad (4.2.10)$$

com

$$T_\nu^\mu = \text{diag}\left(-\rho_\phi, p_\phi, p_\phi, p_\phi\right). \quad (4.2.11)$$

Agora, estamos interessados em configurações de inflatons homogêneas $\phi \equiv \phi(t)$. Neste caso, podemos escrever a densidade de energia ρ_ϕ e a de pressão $p_i = p_\phi (i = 1, 2, 3)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{1}{2}\left(1 - \xi_1 \beta_1\right)\dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p_\phi &= \frac{1}{2}\left(1 + \xi_1 \beta_1\right)\dot{\phi}^2 - V(\phi). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

A equação de estado para o campo de inflaton pode ser facilmente encontrado e é dado por

$$\omega \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \xi_1\beta_1)\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}(1 - \xi_1\beta_1)\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (4.2.13)$$

observe que quando a parte potencial domina encontra-se usualmente $\omega \simeq -1$ e um regime inflacionário ocorre, onde se pode restringir $\xi_1\beta_1$ através do cálculo do número de e-dobras. Por outro lado, quando a parte cinética domina sobre a parte potencial escalar encontramos a equação interessante de estado [37].

$$\omega \simeq \frac{1 + \xi_1\beta_1}{1 - \xi_1\beta_1}. \quad (4.2.14)$$

Que concorda com o regime de radiação $\omega \rightarrow \frac{1}{3}$ com $\xi_1\beta_1 \rightarrow -\frac{1}{2}$. Além disso, outros regimes interessantes também aparecem para $\xi_1\beta_1 \rightarrow -1$, que corresponde a poeira ($\omega = 0$) e para $\xi_1\beta_1 < -2$ que corresponde a matéria escura ($\omega < -\frac{1}{3}$). Veja figura.

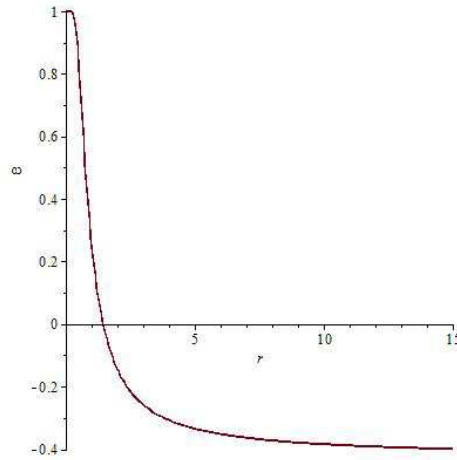


Figura 4.3: Gráfico da equação de estado como uma função de $\beta_1(r)$. Após a inflação, existe a possibilidade de radiação, poeira e matéria escura para $\xi_1\beta_1 < 0$. Neste enredo, assumimos $\xi_1 = 2.5$.

A equação modificada de movimento para o campo de inflação é do tipo

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \left(\frac{1}{1 + \xi_1\beta_1}\right)\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (4.2.15)$$

Considerando que a equação modificada de Friedmann fique:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} (1 - \xi_1 \beta_1) \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (4.2.16)$$

nota-se a presença do campo de fundo de violação de Lorentz $\beta_1 \equiv \beta_1(r)$ ambas equações irão conduzir novos efeitos, como veremos a seguir. Na equação (4.2.15) podemos encontrar um regime *slow-roll*, isto é, quando o termo de atrito $3H\dot{\phi}$ domina sobre o termo de aceleração $\ddot{\phi}$. Isto também é acompanhada pela condição $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ em (4.2.16). Assim, encontramos agora os seguintes equações

$$3H\dot{\phi} + \left(\frac{1}{1 + \xi_1 \beta_1} \right) \frac{\partial V}{\partial \phi} \simeq 0 \quad (4.2.17)$$

$$H \equiv \left(\frac{d \ln a}{dt} \right) \simeq \sqrt{\frac{8\pi G}{3} V(\phi)}. \quad (4.2.18)$$

Vamos agora considerar o potencial de inflação mais simples, o potencial quadrático

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (4.2.19)$$

para a condição de slow-roll a equação (4.2.16) pode ser simplificada

$$H = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m \phi, \quad (4.2.20)$$

a equação (4.2.17) e (4.2.18) conduz á

$$\dot{\phi} = - \frac{m}{\sqrt{12\pi G}(1 + \xi_1 \beta_1)}, \quad (4.2.21)$$

que é[45]

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{m}{\sqrt{12\pi G}(1 + \xi_1 \beta_1)} t. \quad (4.2.22)$$

Finalmente, usando (4.2.20) obtemos o fator de escala

$$a(t) = a_0 \exp \left[\sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m \phi_0 t - \frac{m^2}{6(1 + \xi_1 \beta_1)} t^2 \right], \quad (4.2.23)$$

isto descreve uma fase inflacionária do universo por tempo suficientemente pequeno.

Agora, para entender o efeito de violação de Lorentz num campo de fundo em um universo inflacionário, fazemos uso do número de e-dobras definido como

$$N_e = \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (4.2.24)$$

que fazendo uso de (4.2.17), encontramos

$$N_e = \int_{t_i}^{t_f} H dt = -\frac{8\pi G}{1 + \xi_1 \beta_1} \int_{t_i}^{t_f} \frac{V}{V_\phi} \frac{d\phi}{dt} dt = -\frac{8\pi G}{1 + \xi_1 \beta_1} \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \frac{V}{V_\phi} d\phi. \quad (4.2.25)$$

Para o potencial de inflação definida em (4.2.19) o número modificado de e-dobras

$$N_e = -\frac{8\pi G}{1 + \xi_1 \beta_1} \int_{\phi(t_i)}^{\phi(t_f)} \phi d\phi = \frac{2\pi G}{1 + \xi_1 \beta_1} \left(\phi(t_i)^2 - \phi(t_f)^2 \right), \quad (4.2.26)$$

nós assumimos $\phi(t_f) \approx 0$, obtendo

$$N_e = \frac{2\pi G}{1 + \xi_1 \beta_1} \phi(t_i)^2 \quad (4.2.27)$$

que implica,

$$\xi_1 \beta_1 = \frac{2\pi G \phi(t_i)^2}{N_e} - 1. \quad (4.2.28)$$

Para $N_e \simeq 60$, $\phi(t_i)^2 \simeq 4m_{pl}^2$ e $G \simeq \frac{1}{m_{pl}^2}$ encontramos para (4.2.28),

$$\beta_1 \simeq \left(\frac{8\pi}{60} - 1 \right) \xi_1^{-1} \simeq -\frac{0.5811}{\xi_1}, \quad \xi_1 > 0 \quad (4.2.29)$$

4.3 Impactos sobre o universo curvo

Vamos agora investigar impactos cosmológicos deste modelo no universo curvo, a nossa métrica de fundo continuará sendo a métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}(\theta)^2 d(\phi)^2 \right]. \quad (4.3.30)$$

A *métrica efetiva* devido a presença do campo de fundo será do tipo [37]

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(g_{\mu\nu} + \xi_i k_{\mu\nu}(\varphi) \right) dx^\mu dx^\nu, \quad (4.3.31)$$

ou ainda,

$$d\tilde{s}^2 = -\left(1 + \xi_i \beta(\varphi) \right) c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}(\theta)^2 d(\phi)^2 \right]. \quad (4.3.32)$$

Assumimos regimes onde só a inflação é a espécie dominante. Assim as equações de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 T_{\mu\nu}$, leva a equação de Friedmann $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi$ cuja

densidade de inflação ρ_ϕ é governada pelo campo de inflação com tensor energia-momento do tipo,

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi, \quad (4.3.33)$$

$$T_\nu^\mu = \text{diag}\left(-\rho_\phi, p_\phi, p_\phi, p_\phi\right). \quad (4.3.34)$$

Percebemos que a densidade de energia ρ_ϕ e a pressão $p_i = p_\phi (i = 1, 2, 3)$ permaneceu inalterado

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\left(1 - \xi_1\beta_1\right)\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.3.35)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\left(1 + \xi_1\beta_1\right)\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.3.36)$$

Obviamente a equação de estado para o campo de inflaton pode ser facilmente obtido

$$\omega \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \xi_1\beta_1\right)\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\left(1 - \xi_1\beta_1\right)\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (4.3.37)$$

onde as conclusões a respeito dessa equação de estado já foram discutidas na seção anterior

A equação modificada de movimento para o campo de inflação é dada como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \left(\frac{1}{1 + \xi_1\beta_1}\right)\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (4.3.38)$$

Considerando que a equação modificada de Fridemann para esse caso agora sofram modificações do tipo:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}(1 - \xi_1\beta_1)\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right] - \frac{k}{a^2}\left(1 - \xi_1\beta_1\right), \quad (4.3.39)$$

note que para esse modelo temos a presença do campo de fundo de violação de Lorentz $\beta_1 = \beta_1(r)$ e um termo referente a topologia do espaço, ambas equações irão conduzir novos efeitos, como veremos a seguir. Na equação (4.3.38) podemos encontrar um regime *slow-roll*, isto é, quando o termo de atrito $3H\dot{\phi}$ domina sobre o termo de aceleração $\ddot{\phi}$. Isto também é acompanhada pela condição $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Assim, encontramos agora os seguintes equações

$$3H\dot{\phi} + \left(\frac{1}{1 + \xi_1\beta_1}\right)\frac{\partial V}{\partial\phi} \simeq 0, \quad (4.3.40)$$

$$H \equiv \left(\frac{d \ln a}{dt} \right) \simeq \sqrt{\frac{8\pi G}{3} V(\phi)}. \quad (4.3.41)$$

Vamos agora considerar como potencial de inflação por simplicidade, um potencial constante

$$V(\phi) = \Lambda, \quad (4.3.42)$$

para a condição de slow-roll a equação (4.3.39) pode ser simplificada

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \Lambda - \frac{k}{a^2} (1 - \xi_1 \beta_1)}, \quad (4.3.43)$$

a equação (4.3.40) conduz á

$$\dot{\phi} = \frac{1}{3\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \Lambda - \frac{k}{a^2} (1 - \xi_1 \beta_1)}}, \quad (4.3.44)$$

que é

$$\phi = \frac{1}{3\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \Lambda - \frac{k}{a^2} (1 - \xi_1 \beta_1)}} t. \quad (4.3.45)$$

Finalmente, usando (4.3.43), obtemos o fator de escala

$$a(t) = \frac{1}{2} \frac{B e^{-(t-t_0)\sqrt{A}} + e^{(t-t_0)\sqrt{A}}}{\sqrt{A}}, \quad (4.3.46)$$

onde $A = \frac{8\pi G}{3} \Lambda$ e $B = k(1 - \xi_1 \beta_1)$.

Podemos agora baseados no resultado (4.3.46) analisar o fator de escala para os seguintes tipos de curvatura:

1.) Para $k = -1 \rightarrow B = -(1 - \xi_1 \beta_1)$ e $\Lambda < 0 \rightarrow A < 0$, temos

$$a(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(t-t_0)\sqrt{|A|}} - (1 - \xi_1 \beta_1) e^{-i(t-t_0)\sqrt{|A|}}}{\sqrt{|A|}} \right], \quad (4.3.47)$$

- para $\xi_1 \beta_1 = -\frac{1}{2}$, teremos segundo (4.3.37) um regime dominado pela radiação, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.4) a seguir.

Analisando o parâmetro de desaceleração através de (3.4.70) para o regime de radiação, obtemos a figura (4.5)

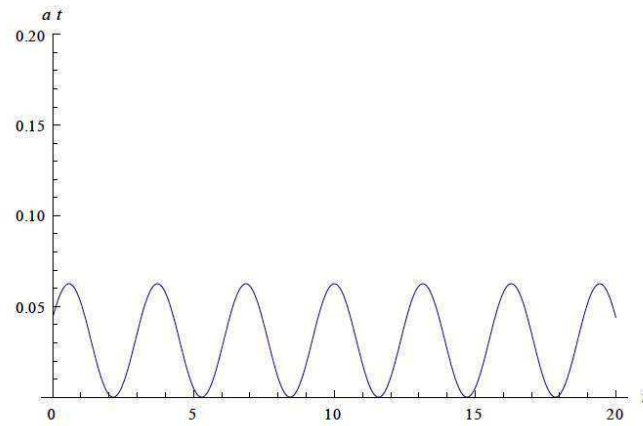


Figura 4.4: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela radiação o fator de escala apresenta comportamento oscilatório, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

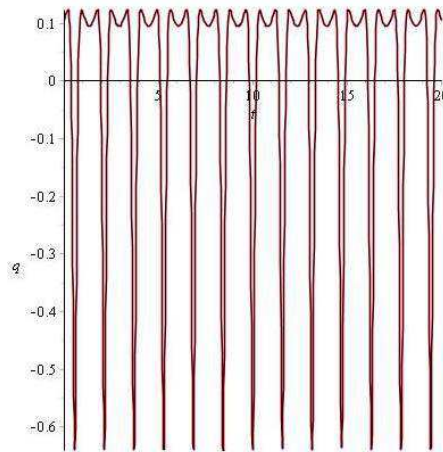


Figura 4.5: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela radiação percebe-se curtos intervalos de aceleração e desaceleração, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

- para $\xi_1\beta_1 = -1$, teremos segundo (4.3.37) um regime dominado pela poeira, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.6) a seguir.

Analisando o parâmetro de desaceleração através de (3.4.70) para o regime de poeira, obtemos a figura (4.7)

- para $\xi_1\beta_1 = -3$, teremos um regime dominado pela matéria escura, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.8) a seguir.

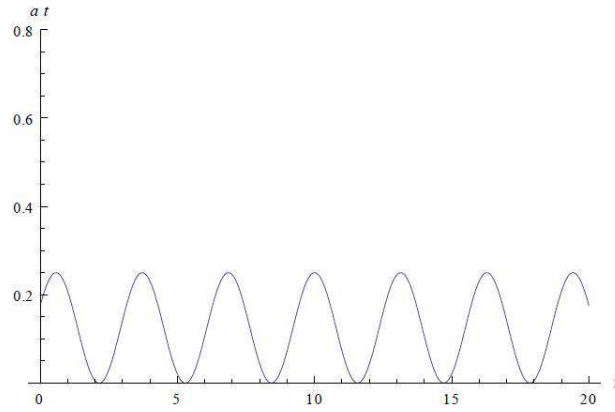


Figura 4.6: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela poeira o fator de escala apresenta comportamento oscilatório, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$

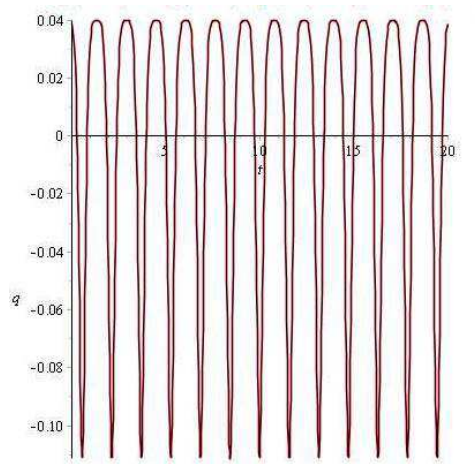


Figura 4.7: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela poeira percebe-se curtos intervalos de aceleração e desaceleração, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$

Analisando o parâmetro de desaceleração através de (3.4.70) para o regime de matéria escura, obtemos a figura (4.9)

2) Para $k = -1 \rightarrow B = -(1 - \xi_1 \beta_1)$ e $\Lambda = 0 \rightarrow A = 0$, então

$$a(t)_{\lim A \rightarrow 0} \rightarrow \infty \quad (4.3.48)$$

3) Para $k = -1 \rightarrow B = -(1 - \xi_1 \beta_1)$ e $\Lambda > 0 \rightarrow A > 0$, então

$$a(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(t-t_0)\sqrt{A}} - (1 - \xi_1 \beta_1) e^{-(t-t_0)\sqrt{A}}}{\sqrt{A}} \right]. \quad (4.3.49)$$

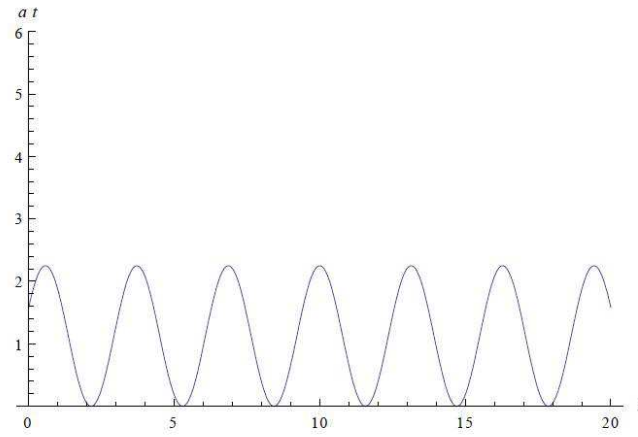


Figura 4.8: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela matéria escura o fator de escala apresenta comportamento oscilatório, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$

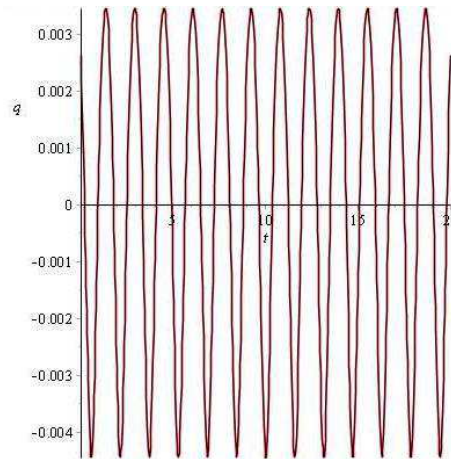


Figura 4.9: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela matéria escura percebe-se curtos intervalos de aceleração e desaceleração, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$

- para $\xi_1\beta_1 = -\frac{1}{2}$, teremos segundo (4.3.37) um regime dominado pela radiação, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.10).

Analisando o parâmetro de desaceleração através de (3.4.70) para o regime de radiação, obtemos a figura (4.11).

- para $\xi_1\beta_1 = -1$, teremos um regime dominado pela poeira, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.12).

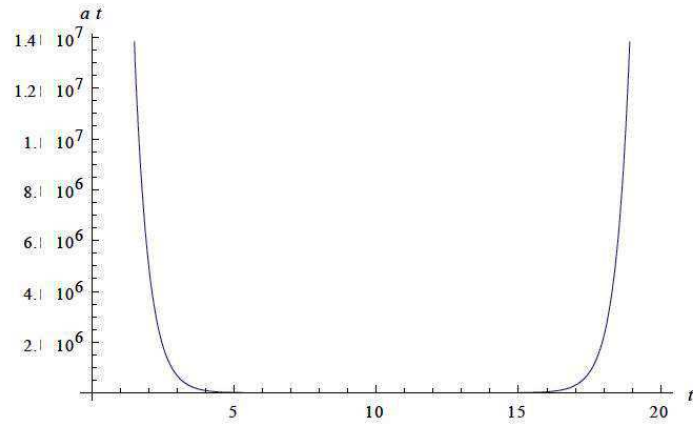


Figura 4.10: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela radiação o fator de escala apresenta comportamento crescente, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

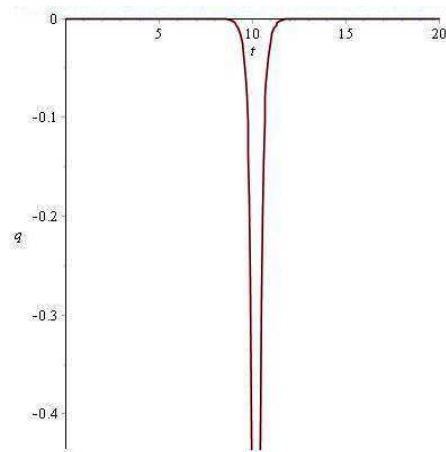


Figura 4.11: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela radiação percebe-se fase acelerada do universo, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

Analisando o parâmetro de desaceleração através de (3.4.70) para o regime de poeira, obtemos a figura (4.13).

- para $\xi_1 \beta_1 = -3$, teremos um regime dominado pela matéria escura, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.14).

Analisando o parâmetro de desaceleração para o regime de matéria escura, obtemos a figura (4.15).

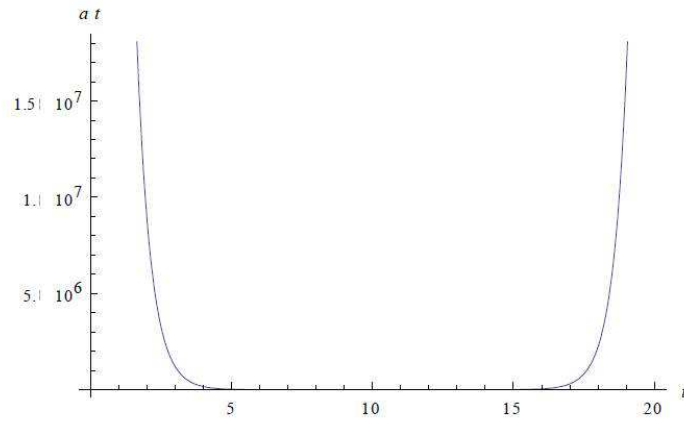


Figura 4.12: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela poeira o fator de escala apresenta comportamento crescente, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

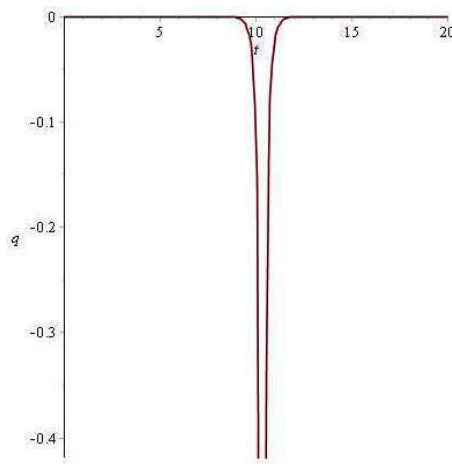


Figura 4.13: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela poeira percebe-se fase acelerada do universo, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

4) Para $k = 1 \rightarrow B = (1 - \xi_1 \beta_1)$ e $\Lambda < 0 \rightarrow A < 0$, temos

$$a(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i(t-t_0)\sqrt{|A|}} + (1 - \xi_1 \beta_1) e^{-i(t-t_0)\sqrt{|A|}}}{\sqrt{|A|}} \right]. \quad (4.3.50)$$

- para $\xi_1 \beta_1 = -\frac{1}{2}$, teremos um regime dominado pela radiação, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.16).

Analisando parâmetro de desaceleração para o regime de radiação, obteremos a figura (4.17).

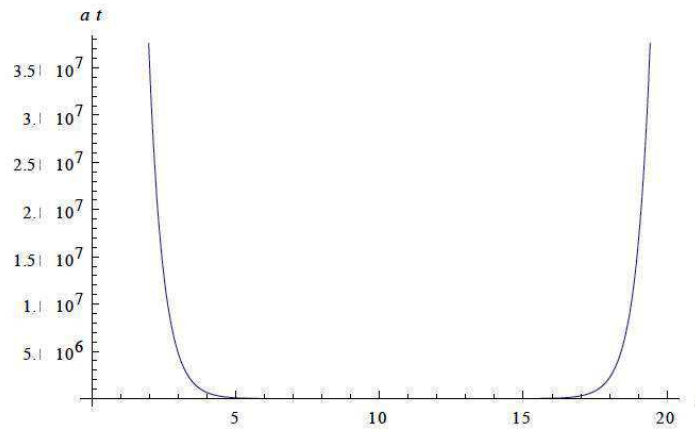


Figura 4.14: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela matéria escura o fator de escala apresenta comportamento crescente, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

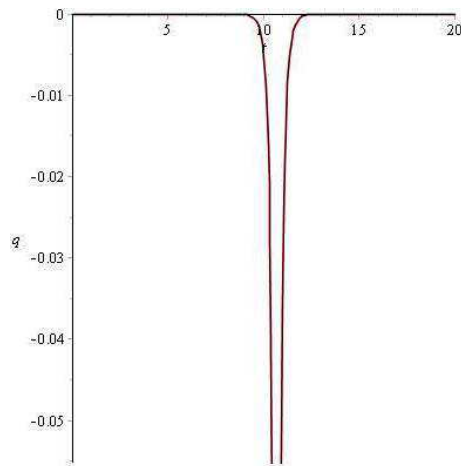


Figura 4.15: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela matéria escura percebe-se fase acelerada do universo, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

- Para $\xi_1 \beta_1 = -1$, teremos um regime dominado pela poeira, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.18).

Analisando parâmetro de desaceleração para o regime de poeira, obteremos a figura (4.19).

- para $\xi_1 \beta_1 = -3$, teremos um regime dominado pela matéria escura, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.20).

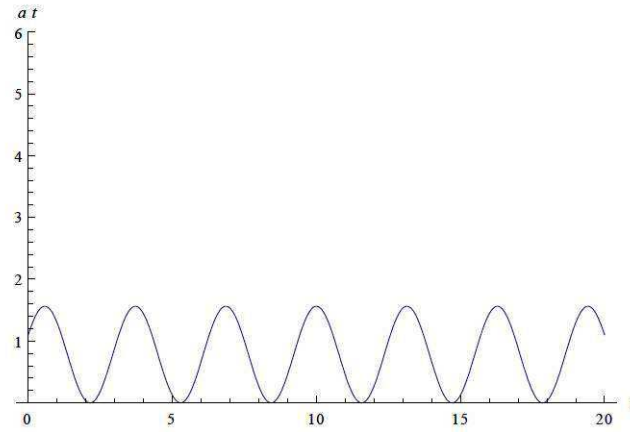


Figura 4.16: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela radiação o fator de escala apresenta comportamento oscilatório, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

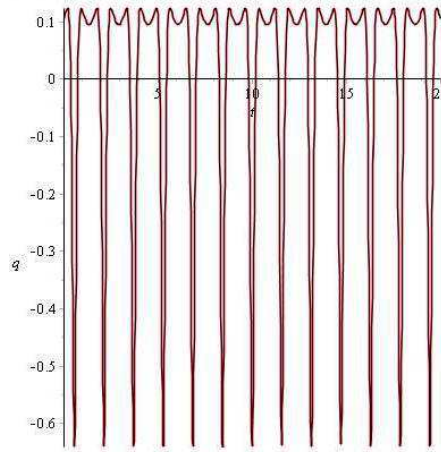


Figura 4.17: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela radiação percebe-se curtos intervalos de aceleração e desaceleração do universo, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

Analisando o parâmetro de desaceleração para o regime de matéria escura, obteremos a figura (4.21).

5) Para $k = 1 \rightarrow B = (1 - \xi_1 \beta_1)$ e $\Lambda = 0 \rightarrow A = 0$, então

$$a(t)_{\lim A \rightarrow 0} \rightarrow \infty \quad (4.3.51)$$

6) Para $k = 1 \rightarrow B = (1 - \xi_1 \beta_1)$ e $\Lambda > 0 \rightarrow A > 0$, então

$$a(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(t-t_0)\sqrt{A}} + (1 - \xi_1 \beta_1) e^{-(t-t_0)\sqrt{A}}}{\sqrt{A}} \right]. \quad (4.3.52)$$

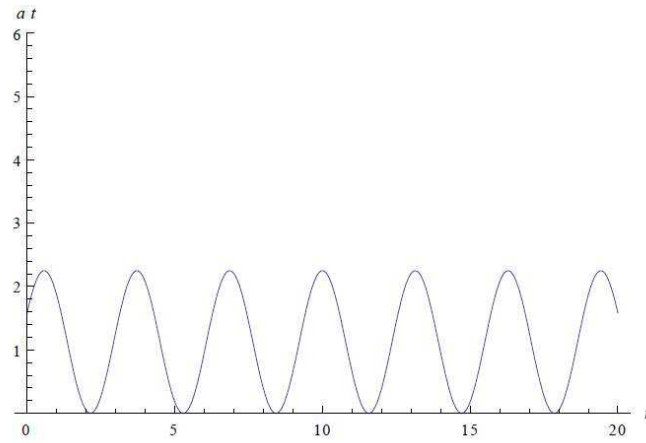


Figura 4.18: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela poeira o fator de escala apresenta comportamento oscilatório, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

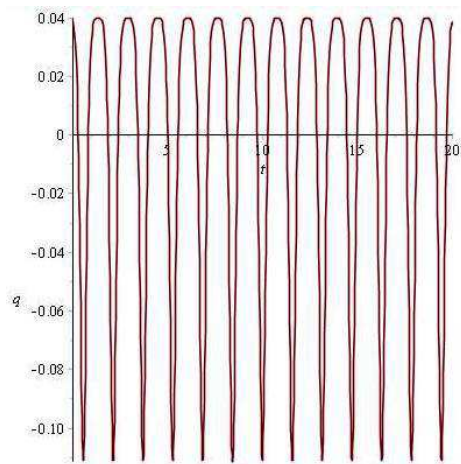


Figura 4.19: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela poeira percebe-se curtos intervalos de aceleração e desaceleração, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

- para $\xi_1\beta_1 = -\frac{1}{2}$, teremos um regime dominado pela radiação, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.22).

Analisando o parâmetro de desaceleração para o regime de radiação, obteremos a figura (4.23).

- para $\xi_1\beta_1 = -1$, teremos um regime dominado pela poeira, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (4.24).

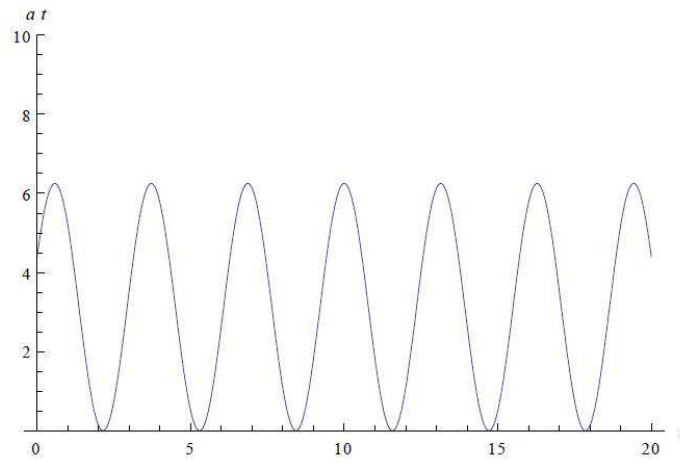


Figura 4.20: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela matéria escura o fator de escala apresenta comportamento oscilatório, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

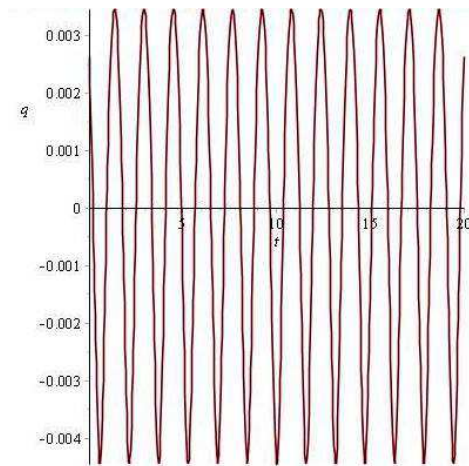


Figura 4.21: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela matéria escura percebe-se curtos intervalos de aceleração e desaceleração, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

Analisando o parâmetro de desaceleração para o regime de poeira, obteremos a figura (4.25).

- para $\xi_1 \beta_1 = -3$, teremos um regime dominado pela matéria escura, assim o fator de escala para esse período é representado na figura (??).

Analisando o parâmetro de desaceleração para o regime de matéria escura, obteremos a figura (??)

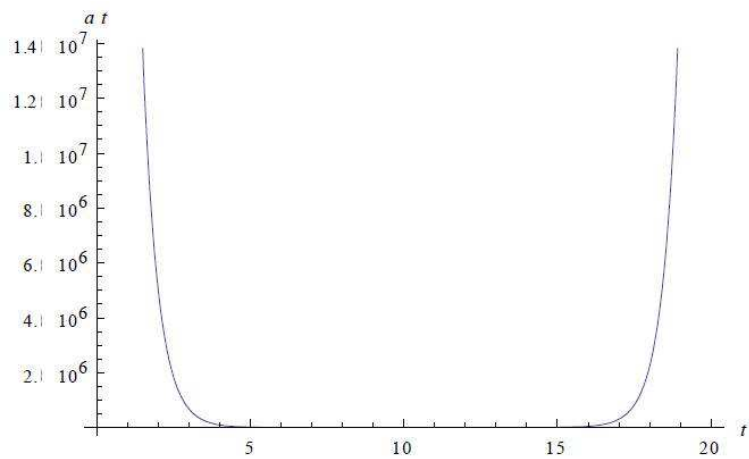


Figura 4.22: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela radiação o fator de escala apresenta fase crescente, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

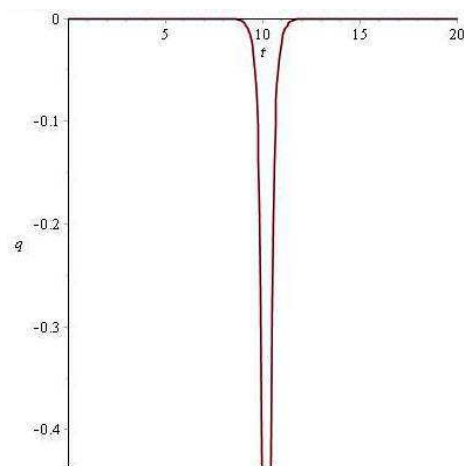


Figura 4.23: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela radiação percebe-se fase acelerada do universo, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

Entendendo o efeito de violação de Lorentz num campo de fundo em um universo inflacionário, fazemos uso do número de e-dobras definido como

$$N_e = \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (4.3.53)$$

que fazendo uso de (4.3.39) para o regime de slow-roll

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \Lambda - \frac{\kappa}{a^2} (1 - \xi_1 \beta_1), \quad (4.3.54)$$

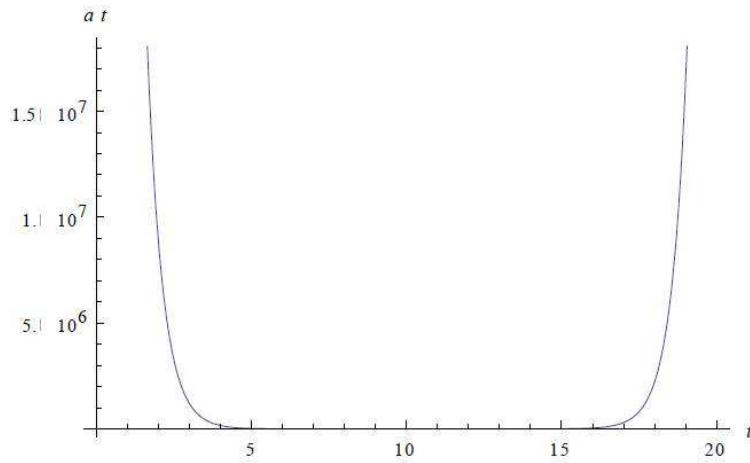


Figura 4.24: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela poeira o fator de escala apresenta fase crescente, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

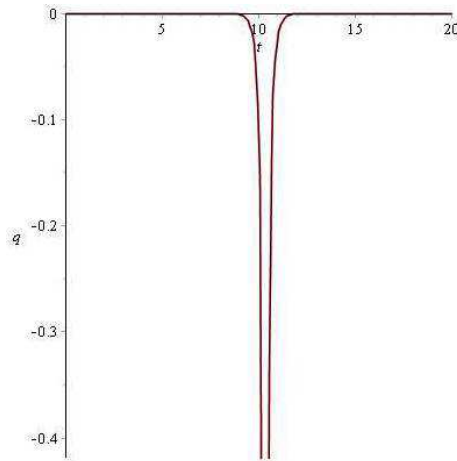


Figura 4.25: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela poeira percebe-se fase acelerada do universo, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

e do fator de escala $a(t)$ para $t < t_0$ e $A \rightarrow \infty$

$$a(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{B e^{|t-t_0|\sqrt{A}}}{\sqrt{A}} \right]. \quad (4.3.55)$$

Integrando esta expressão, obtemos

$$N e = \sqrt{A} \Delta t_{infl} + \frac{1}{B} \left[e^{-2|t_f-t_0|\sqrt{A}} - e^{-2|t_i-t_0|\sqrt{A}} \right]. \quad (4.3.56)$$

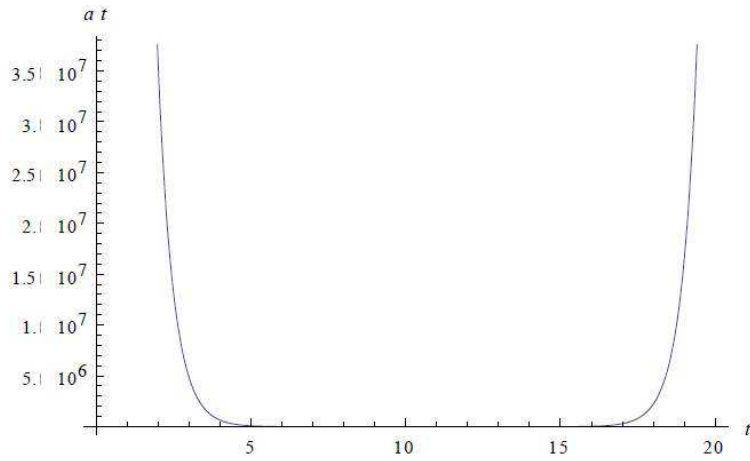


Figura 4.26: Evolução do fator de escala em função do tempo. Para o universo dominado pela matéria escura o fator de escala apresenta fase crescente, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

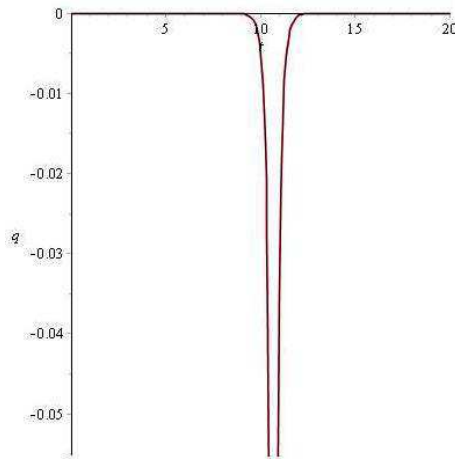


Figura 4.27: Evolução do parâmetro de desaceleração em função do tempo. Para o universo dominado pela matéria escura percebe-se fase acelerada do universo, assumimos $A = 1$ e $t_0 = 10$.

e, considerando $t_0 = t_f$ encontramos

$$\xi_1 \beta_1 = \left[\frac{Ne - \sqrt{A} \Delta t_{infl}}{1 - e^{2\Delta t_{infl} \sqrt{A}}} \right]^{-1} - 1. \quad (4.3.57)$$

Para $N_e \simeq 60$, $G \simeq \frac{1}{m_{pl}^2}$, $\Lambda \simeq m_{pl}^4$ e $t_{pl} \simeq \frac{1}{m_{pl}}$

$$\xi_1 \beta_1 = \left[\frac{Ne - \sqrt{\frac{8\pi}{3}}}{1 - e^{2\sqrt{\frac{8\pi}{3}}}} \right]^{-1} - 1. \quad (4.3.58)$$

Encontramos para (4.3.57),

$$\beta_1 \simeq \frac{6,7012}{\xi_1}, \xi_1 > 0. \quad (4.3.59)$$

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho de dissertação, examinamos alguns impactos realizado pela quebra da simetria de Lorentz sobre a cosmologia inflacionária do Universo. Antes disso, discutimos os principais pontos da relatividade geral e da cosmologia usual.

Em resumo, construímos um modelo em $(d+1)$ dimensões capaz de descrever a dinâmica de um campo de inflaton e de um campo de fermion sobre a ação de um campo constante que controla a violação da simetria de Lorentz da teoria. Através dessa teoria, contruímos duas métricas efetivas, uma no espaço com curvatura $k = 0$ via métrica Friedmann-Robertson-Walker e outra no espaço com curvatura $k \neq 0$ em coordenadas esféricas. Ambas as métricas efetivas, foram parametrizadas por um campo constante tipo-tempo capaz de modificar a dinâmica das partículas.

No caso do estudo da curvatura plana ($k = 0$), verificamos que a violação da simetria de Lorentz pode ser responsável por partículas que viajam com uma velocidade acima da velocidade da luz (superluminaridade). No presente caso, identificamos que tal característica está associada aos neutrinos altamente energéticos (escala de comprimento muito pequena) e a energia escura em baixas energias (escala de comprimento muito grande). Usamos aqui um potencial tipo quadrático nos campos.

Por outro lado ao estudarmos o espaço com curvatura ($k \neq 0$), usamos por simplicidade um potencial constante e investigamos a topologia para ($k = 1$) e ($k = -1$). Para o espaço com curvatura ($k = -1$) analisamos o fator de escala para duas situações:

Primeiro para o potencial constante negativo ($\Lambda < 0 \rightarrow A < 0$) que apresentou um fator de escala oscilatório na evolução temporal, onde foi possível observar também através de cálculos o parâmetro de desaceleração que revelou um comportamento oscilatório, demonstrando curtos intervalos de aceleração e desaceleração do universo baseado nos três regimes dominantes do universo: radiação, poeira e matéria escura. Em seguida analisamos para um potencial positivo ($\Lambda > 0 \rightarrow A > 0$) que por sua vez apresentou um fator de escala crescente na evolução temporal, revelando um parâmetro de desaceleração com comportamento acelerado para os três períodos dominantes do universo.

Para o espaço com curvatura ($k = 1$) fizemos uma análise semelhante ao caso anterior, considerando primeiro o potencial constante negativo ($\Lambda < 0 \rightarrow A < 0$), que também apresentou um fator de escala oscilatório na evolução temporal, onde foi possível observar o parâmetro de desaceleração que revelou um comportamento oscilatório demonstrando curtos intervalos de aceleração e desaceleração do universo, também nos três regimes dominantes. Posteriormente analisamos para o potencial constante positivo ($\Lambda > 0 \rightarrow A > 0$), obtivemos um fator de escala crescente na evolução temporal, revelando um parâmetro de desaceleração acelerado para os três períodos dominantes.

Uma extensão imediata desse trabalho, seria associar as mesmas métricas efetivas ($k = 0$ e $k \neq 0$) a outros potenciais, conhecidos na literatura, tais como, aplicação da tangente hiperbólica.

Apêndice A

Tensor de Curvatura

O transporte paralelo de um vetor em torno de um circuito fechado em um espaço curvo levará a uma transformação do vetor. Considere dois campos vetoriais \bar{v} e \bar{w} tais que $[\bar{v}, \bar{w}] = 0$. Com as curvas integrais de \bar{v} e \bar{w} construímos um paralelogramo infinitesimal conforme indica a figura Fig. (A.1)

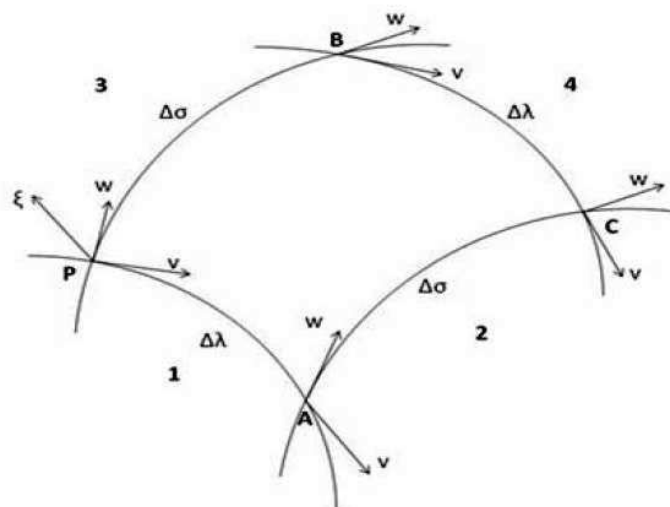


Figura A.1: Transporte paralelo de um vetor ao longo de um paralelogramo infinitesimal.

Para transportarmos um terceiro vetor $\bar{\xi}$ ao longo deste paralelogramo devemos efetuar o transporte de $\bar{\xi}_p$ até o ponto A ao longo do lado 1. Logo o vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva obedece à equação

$$\frac{d\xi^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \left(\frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d\xi^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \left(\frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\xi_A^{*\mu} - \xi_p^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda \quad (\text{A.3})$$

$$\xi_A^{*\mu} = \xi_p^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda \quad (\text{A.4})$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha$ é calculado no ponto p.

Agora efetuando o segundo transporte de ξ_A^* do ponto A até o ponto C ao longo do lado 2 na curva vamos obter

$$\xi_c^{*\mu} = \xi_A^{*\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(A) \xi^{*\alpha} \bar{w}_A^\beta d\sigma, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X_A) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_p + \bar{v}d\lambda), \quad (\text{A.6})$$

note que: $x_A^\mu = x_p^\mu + v^\mu d\lambda$ portanto teremos que

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X_A) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X_p) + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} v^\gamma d\lambda, \quad (\text{A.7})$$

onde $\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma}$ é calculado no ponto p.

Logo ao longo do caminho $1 \rightarrow 2$ vamos ter

$$\begin{aligned} \xi_c^{*\mu} &= (\xi_p^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda) - \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(X_p) + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} v^\gamma d\lambda \right) \times \\ & (\xi_p^\alpha - \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta v^\rho d\lambda) \left(w_p^\beta(X_p) + \frac{\partial w_p^\beta}{\partial x^\kappa} v^\kappa d\lambda \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Agora vamos efetuar o transporte de $\bar{\xi}_p$ de P até B pelo lado 3. Com isso vamos obter

$$\xi_B^* = \xi_P^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \bar{w}^\beta d\omega. \quad (\text{A.9})$$

Transportando o vetor ξ_B^* de B até C ao longo do lado 4 vamos ter

$$\xi_c^* = \xi_p^{*\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^{*\alpha} v^\beta d\lambda, \quad (\text{A.10})$$

mas sabemos que $x_B^\mu = x_p^\mu + \omega_p^\mu d\sigma$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu x_B = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu (x_p + \bar{w} d\sigma) \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu (x_B) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu (x_p) + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} w^\gamma d\sigma, \quad (\text{A.12})$$

sabemos que

$$v^\beta (x_p) = v^\beta (x_p + \omega_p d\sigma) \quad (\text{A.13})$$

$$v^\beta (x_p) = v^\beta (x_p) + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\kappa} w^\kappa d\sigma. \quad (\text{A.14})$$

Logo ao longo do caminho $3 \rightarrow 4$ vamos ter

$$\begin{aligned} \xi_c^{*\mu} &= (\xi_p^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha w^\beta d\sigma) - \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu (X_p) + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} w^\gamma d\sigma \right) \times \\ & (\xi_p^\alpha - \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta w^\rho d\sigma) \left(v_p^\beta (X_p) + \frac{\partial v_p^\beta}{\partial x^\kappa} w^\kappa d\sigma \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Vamos comparar $\xi_{c(1,2)}$ com $\xi_{c(3,4)}$ fazendo a variação. Portanto vamos ter

$$\delta\xi^\mu = \xi_{c(1,2)}^* - \xi_{c(3,4)}^*. \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \delta\xi^\mu &= \left[\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\alpha v^\beta w^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\alpha w^\beta v^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta v^\rho w^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta w^\rho v^\beta + \right. \\ & \left. \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\kappa} w^\kappa - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{\partial w^\beta}{\partial x^\kappa} v^\kappa \right) \right] d\lambda d\sigma, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

sendo o colchete de Lie igual a zero e que é dado por:

$$\left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\kappa} w^\kappa - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{\partial w^\beta}{\partial x^\kappa} v^\kappa \right) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Portanto vamos ficar com a seguinte equação

$$\delta\xi^\mu = [\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu + \Gamma_{\rho\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \Gamma_{\eta\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta] \xi^\alpha v^\beta w^\gamma d\lambda d\sigma. \quad (\text{A.19})$$

Apêndice B

Propriedades dos tensores de Riemann

O tensor de Riemann, com quatro índices, possui n^4 componentes independentes em um espaço n -dimensional. Porém, de acordo com algumas propriedades fundamentais, podemos observar que o número de componentes independentes se reduz a $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ componentes. Para 4 dimensões obtemos 20 componentes independentes. As propriedades fundamentais do tensor de curvatura são:

1º) O tensor $R_{\mu\alpha\gamma\beta}$ é anti-simétrico com relação à troca de índices do primeiro par de índices;

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}. \quad (\text{B.1})$$

2º) O tensor $R_{\mu\alpha\gamma\beta}$ é anti-simétrico com relação à troca de índices do segundo par de índices;

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}. \quad (\text{B.2})$$

3º) O tensor $R_{\mu\alpha\gamma\beta}$ é invariante com relação à troca do primeiro par índices com o segundo;

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (\text{B.3})$$

Pode-se verificar também que a soma de permutações cíclicas dos últimos três índices desaparece, logo podemos ter

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.4})$$

usando (B.1), (B.2), (B.3) podemos mostrar que (B.4) é equivalente a:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \quad (\text{B.5})$$

O tensor de Riemann também satisfaz á seguinte identidade

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Onde a derivada covariante ∇_λ executa a função da derivada parcial, mas de uma forma independente das coordenadas obedecendo à propriedade de linearidade e a regra de Leibniz. Logo ela pode ser escrita como uma derivada parcial mais alguma transformação linear que serve como conexão para se ter um resultado covariante e que se apresenta em forma de um conjunto de matrizes conhecidas como os coeficientes da conexão. Portanto, para um vetor teremos que

$$\nabla_\lambda V^\nu = \partial_\lambda V^\nu + \Gamma_{\lambda\rho}^\nu V^\rho. \quad (\text{B.7})$$

Logo esta é a expressão para a derivada covariante de um vetor em termos da derivada parcial, que nos permite determinar as propriedades de transformação da conexão $\Gamma_{\lambda\rho}^\nu$.

Outro tensor fundamental é conhecido como tensor de Ricci, sendo o único tensor de segunda ordem que pode ser construído a partir da contração do tensor de Riemann, e que, por ser associado com os símbolos de Cristoffel é automaticamente simétrico,

ou seja, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$, como consequência das simetrias do tensor de Riemann. Portanto teremos

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\mu} R_{\sigma\mu\lambda\nu}. \quad (\text{B.8})$$

O traço do tensor de Ricci é o escalar de Ricci (ou escalar de curvatura) que é obtido através da contração do tensor de Ricci dado por

$$R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (\text{B.9})$$

cuja interpretação está associada à curvatura Gaussiana do espaço-tempo no ponto considerado. A partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, podemos montar um tensor simétrico de segunda ordem com derivada covariante nula, que é conhecido como tensor de Einstein e representado por $G_{\mu\nu}$ definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.10})$$

O tensor de Einstein é simétrico, devido à simetria do tensor de Ricci e a métrica, e é fundamental na Relatividade Geral. Verifica-se também que este tensor satisfaz as chamadas identidades contraídas de Bianchi onde

$$\nabla^{\mu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (\text{B.11})$$

Que desempenha um papel importante em Relatividade Geral, pois estão associadas a uma lei de conservação.

Bibliografia

- [1] GREISEN, *Phys.Lett.* **16**, 148 (1996).
- [2] G. T.ZATSEPIN and V. A. KUZMIN, *JETP Lett.* **4**, 78. (1966).
- [3] M. TAKEDA et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1163 (1998) [*arXiv:astro-ph/9807193*].
- [4] H. SATO, *arXiv:astro-ph/0005218*.
- [5] S. R. COLEMAN and S. L. GLASHOW, *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999) [*arXiv:hep-ph/9812418*].
- [6] G. AMELINO-CAMELIA, J. R. ELLIS, N. E. MAVROMATOS, D. V. NANOPOULOS and S. SARKAR, *Nature* **393**, 763 (1998) [*arXiv:astro-ph/9712103*].
- [7] V. A. KOSTELECKY and S. SAMUEL, *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [8] J. D. BEKENSTEIN, *Phys. Rev. D* **70**, 083509 (2004) [ERRATUM-IBID. D **71**,069901 (2005)]; [*arXiv:astro-ph/0403694*].
- [9] S. M. CARROLL and J. SHU, *arXiv:hep-ph/0510081*.
- [10] S. M. CARROLL and E. A. LIM, *Phys. Rev. D* **70**, 123525 (2004) [*arXiv:hep-th/0407149*].
- [11] D.MATTINGLY, LIVING *Rev. Rel.* **8**, **5** (2005) [*arXiv:gr-qc/ 0502097*].
- [12] K. Nordtvedt and C. M. Will, *Astrophys. J.* **177**, 775 (1972).

- [13] T. Jacobson and D. Mattingly, *Phys. Rev. D* **64**, 024028 (2001); D. Mattingly and T. Jacobson, arXiv:gr-qc/ 0112012; T. Jacobson, Proc. Sci. QG-PH 2007 020 [arXiv:0801.1547].
- [14] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. D* **40**, 1886 (1989).
- [15] M. -L. YAN, N. -C. XIAO and W. HUANG, arXiv:1111.4532 [*hep-ph*].
- [16] M. O. RIBAS. *Modelos Cosmológicos Acelerados com Campos Fermiônicos, tese de Doutorado*, **32**, UFPA, 2008.
- [17] S. CARROL. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity. Addison-Wesley*, 2004. *California*.
- [18] R. D'INVERNO. *Introducing Einstein Relativity. Oxford University Press*.
- [19] R. C. SOUZA. *Modelos Cosmológicos pela Simetria de Noether, dissertação de mestrado*, **7**, UFPR, 2009.
- [20] COLLINS, P. D. B., MARTIN, A. D., SQUIRES, E. J. *Particle Physics and Cosmology, Wiley*, 1989.
- [21] H. C. OHANIAN *Gravitation and Spacetime. W. W. Norton Company*, 1976.
- [22] R. M. WALD, *General Relativity. The University of Chicago Press, Chicago*. 1984.
- [23] B. A. SCHUTZ, *First Course in General Relativity. Cambridge University Press, Cambridge*. 1985.
- [24] W. RINDLER. *Relativity: Special, General and Cosmological. Oxford University Press*, 2001.
- [25] A. PAPAPETROU. *Lectures on General Relativity. D. Reidel Publishing Company*, 1974.
- [26] S. DODELSON. *Modern Cosmology. AP*, 2003.

- [27] J. E. HORVATH [et al], LUGONES, G. Jr., S.S. TEIXEIRA, R., ALLEN, M.P. *Cosmologia Física. Editora Livraria da Física.*
- [28] S. R. E. *Introdução à Cosmologia. Edusp, 2004.*
- [29] J.N. ISLAM. *Introduction to Mathematical Cosmology. Cambridge University Press, 1992.*
- [30] M. CARMELI. *Group Theory and General Relativity. Mc Graw-Hill, 1977.*
- [31] B. F. SCHUTZ. *Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1980.*
- [32] KAKU, M. *Quantum Field Theory A modern introduction. Oxford University Press.*
- [33] S. HARWING, ISRAEL, W. *Three hundred years of gravitation. Cambridge.*
- [34] M. BERRY. *Principles of Cosmology and Gravitation. CUP, 1976.*
- [35] D. Colladay and V.A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997); *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [36] D. BAZEIA, J. MENEZES and R. MENEZES, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 241601 (2003) [*arXiv:hep-th/ 0305234*].
- [37] C. A. G. ALMEIDA, M. A. ANACLETO, F. A. BRITO and E. PASSOS [*arXiv:1112.0300v1 [hep-th]*].
- [38] S. S. GUBSER, *Phys. Lett. B* **705**, 279 (2001) [*arXiv:1109.5687 [hep-th]*].
- [39] L. N. ANDRADE. *Introdução à Computação Algébrica com o Maple. Sociedade Brasileira de Matemática.*
- [40] T. J. RAINE, THOMAS, E. G. *Introduction to the Science of Cosmology. IOP Publishing Ltd, 2001.*

- [41] A. V. OLINTO *et. al* *Natural Inflaton with Pseudo Nambu-Goldstone Bosos*. Volume 65, Number **26**, p. 3233, *Physical Review Letters*,
- [42] C.W.MISNER, THORNE, K.S., WHEELER, J.A. *Gravitation*. W. H. Freeman and company São Francisco, 1970.
- [43] S. WEINBERG. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley Sons, New York, 1972.
- [44] M. C. B. OLIVEIRA *Inflação Cósmica e Teorias Escalar-Tensoriais da Gravitação*, dissertação de mestrado, **20**, UFRJ,2010.
- [45] A. M. V. TORÍBIO. *Análise de Modelos Cosmológicos de Unificação da Matéria e Energia Escuras no Universo*, tese de Doutorado, **33**, UFRJ, 2007.
- [46] V. F. MUKHANOV. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005. Cambridge
- [47] B. ONEILL *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, 1983. University Press, 1987.
- [48] A. H. GUTH, *Phys. Rev D* **23**, 347 (1981)