



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise de Alguns Potenciais à luz da Teoria
Inflacionária do Universo**

Ilgen Ranniery Galdino Dias de Araújo

CAMPINA GRANDE
- Setembro 2018 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Análise de Alguns Potenciais à luz da Teoria
Inflacionária do Universo**

Ilgen Ranniery Galdino Dias de Araújo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

A663a Araújo, Ilten Ranniery Galdino Dias de.
Análise de alguns potenciais à luz da teoria inflacionária do universo /
Ilten Ranniery Galdino Dias de Araújo. – Campina Grande, 2018.
34 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina
Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito".
Referências.

1. Física Quântica. 2. Flutuações Quânticas. 3. Inflação.
4. Perturbações. I. Brito, Francisco de Assis. II. Título.

CDU 530.145(043)

ANÁLISE DE ALGUNS POTENCIAIS À LUZ DA TEORIA INFLACIONÁRIA DO UNIVERSO

ILLEN RANNIERY GALDINO DIAS DE ARAÚJO

Aprovado em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Orientador

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Examinador

Prof. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire
Examinador

If I have seen further it is by standing on the
shoulders of Giants

Isaac Newton

Agradecimentos

A Deus por ter me dado perseverança, paciência e sabedoria para a conclusão deste curso;

Ao meu orientador Francisco de Assis Brito, por ter me aceitado como orientando, por ter me proposto esse desafio ao qual me fez crescer mais, academicamente falando e por ter acreditado em meu potencial;

Aos meus pais: Israel Galdino de Araújo e Tânia Gomes Dias, por terem feito inúmeros sacrifícios para que eu e meu irmão tivéssemos condições para estudar;

A todos os meus amigos e colegas de curso que de alguma forma, cada um com seu modo específico, contribuíram para o meu amadurecimento na pesquisa;

A todos os professores da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande por contribuírem para a minha formação de mestre;

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFCG, pela oportunidade da realização do mestrado em Física;

À banca examinadora por terem aceitado e dividido comigo este momento tão importante e esperado: Dr. Marco Antônio Anacleto e Dra. Morgana Lígia de Farias Freire.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa.

Lista de Figuras

- 3.1 Representação da evolução das perturbações durante e depois da inflação. (a) raio de Hubble constante, amplitudes e onda diminuem e comprimento crescem. (b) raio de Hubble continua constante, comprimentos de onda crescem e amplitudes se congelam. (c) final da inflação; aqui o raio de Hubble cresce em taxa muito maior que os comprimentos de onda. Fonte: [5] 21
- 3.2 Gráfico de potencial do *inflaton*. Quando $V(\phi)$ domina o termo de energia cinética $\frac{\dot{\phi}^2}{2}$, ocorre aceleração. Quando a energia cinética se equipara ao potencial, temos o fim da inflação ϕ_{end} . Tem-se a conversão da densidade de energia do campo escalar em radiação, durante o período de reaquecimento. 24
- 4.1 As observações sobre os potenciais impulsionados na inflação slow-roll no plano (n_s, r) são limitadas para $N = 60$ e $K_0 = 0,05 Mpc^{-1}$. (Fonte: [22]). . 32

Lista de Abreviaturas e Siglas

RCF - *Radiação Cósmica de Fundo*

MCP - *Modelo Cosmológico Padrão*

FRW - *Friedmann-Robertson-Walker*

ASR - *Aproximação slow-roll*

PNGB - *pseudo-Nambu-Goldstone*

CL - *Contour Line (Linha de Contorno)*

Resumo

A teoria da inflação cósmica possui uma posição importante na Cosmologia Moderna e o desenvolvimento do cenário de um universo inflacionário revelou uma nova e promissora via para ligar à física clássica com observações. Após uma breve imersão na teoria cosmológica padrão, estudamos aspectos da teoria inflacionária e analisamos como um campo escalar (Inflaton) pode ser utilizado para expandir o Universo primordialmente, além de obter as formas dos índices espectrais que nos fornecem uma ligação entre a teoria e as observações experimentais.

Palavras-chave: Flutuações Quânticas; Inflação; Perturbações.

Abstract

The theory of cosmic inflation has an important place in Modern Cosmology, and the development of the scenario of an inflationary universe has revealed a promising new way of linking Fundamental Physics with observations. After a brief immersion in standard cosmological theory, we study aspects of inflationary theory and discover how a scalar field (Inflaton) can be used to expand the universe primarily, as well as to obtain the forms of spectral indices that provide us with a link between theory and experimental observations.

Keywords: Quantum fluctuations; Inflation; Perturbations.

Sumário

1	Introdução	1
	Introdução	2
2	Modelo Cosmológico Padrão: Cosmologia FRW e principais problemas	3
2.1	Isotropia e Homogeneidade	3
2.2	A RCF à luz do Big Bang	10
2.3	Problemas das condições iniciais do MCP	12
2.3.1	Planura	12
2.3.2	Horizonte	13
2.3.3	Monopolos magnéticos	14
3	Inflação Cósmica	15
3.1	Teoria Inflacionária	17
3.2	Solução dos problemas de planura e horizonte	18
3.2.1	Problema da planura	18
3.2.2	Problema do Horizonte	19
3.2.3	Origem das perturbações	20
3.3	Dinâmica Inflacionária	21
3.3.1	O inflaton	21
3.3.2	Condições de slow-roll	23
4	Modelos Inflacionários	28
4.1	Classificação dos modelos	28
4.2	Modelos de Campo Largo	29
4.3	Modelos de Campo Pequeno	29
4.4	Modelo Híbrido	30
5	Considerações Finais	33
	Referências Bibliográficas	34

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho aborda alguns aspectos clássicos da teoria inflacionária do universo. Para isto, fiz uma revisão que se estende desde o modelo cosmológico padrão à teoria inflacionária. Também foi feita uma análise de alguns potenciais clássicos, dos quais foram calculados os índices espectrais para observações gráficas. Nosso estudo analisa a cosmologia inflacionária, dando uma especial atenção à suas assinaturas observacionais associadas a perturbações de densidade de larga escala geradas a partir de flutuações quânticas.

O objetivo desta dissertação foi estudar o comportamento da expansão inflacionária do universo utilizando um campo escalar para determinar os índices espectrais que forneceram uma ligação entre a teoria e as observações experimentais disponíveis na literatura.

A dissertação foi organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 2 fizemos uma detalhada revisão sobre o modelo cosmológico padrão a partir de uma métrica que, de maneira geral, é isotrópica e homogênea e pode ser representada pelo tensor de Riemann. Abordamos a dinâmica de expansão do universo e como a relação de dependência com o seu conteúdo material estão explicitadas na teoria da relatividade geral de Einstein. Além disso, foram abordados alguns problemas de condições iniciais do modelo cosmológico padrão (MCP).

No Capítulo 3 foi apresentado como a expansão acelerada do universo é provocada pelo inflaton que é o percussor da inflação; atua como uma constante cosmológica

e se encontra inicialmente preso no mínimo potencial relativo. Posteriormente serão apresentadas soluções para os problemas de planura e horizonte identificados no MCP. Além disso, foi abordado o mecanismo de rolagem lenta, onde foi apresentado a evolução lenta de um campo através de um potencial suficientemente plano. Também definiremos o número de e-folds (N) que serviu de parâmetro para a determinação dos índices espectrais e poder avaliar a expansão do universo em determinada fase.

Por fim, no Capítulo 4, a partir das expressões que definem os índices espectrais, foi feita uma breve classificação dos modelos que foram escolhidos em termos do valor inicial do inflaton e análise de alguns potenciais que mais se destacam, para mostrar suas dependências dos resultados e restrições provenientes do formalismo das perturbações na densidade de energia que determina o surgimento de estruturas de larga escala no universo.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico Padrão: Cosmologia FRW e principais problemas

Tem sido muito comum a discussão, talvez até mais que em outras áreas da física, de que a cosmologia utiliza meios exorbitantes e hipotéticos, e isto acontece porque o seu objeto de investigação – o universo – tem dimensões muito superiores e não equivalentes em proporções a relação espaço/tempo dos instrumentos de medidas que temos a disposição. Dessa forma, um modelo cosmológico padrão está sujeito a uma hipótese e uma extensão teórica. Quanto a hipótese, é preciso admitir que em escalas mais elevadas o universo seja homogêneo e isotrópico. A extensão teórica consiste em atribuir a validade da teoria da relatividade não apenas para as escalas astrofísicas, mas considera-las para todo o universo cosmológico. É fundamental a união dessas duas considerações, pois torna possível a coerência entre o modelo padrão desejado e os dados observacionais.[5]

2.1 Isotropia e Homogeneidade

Uma observação meticulosa do céu permite perceber que as galáxias possuem distribuição isotrópica. Na distribuição angular de temperatura da radiação cósmica de fundo (RCF) essa isotropia torna-se ainda mais predominante, apresentando flutuações de uma parte em 10^5 [1, 2]. Sendo assim, pode-se imaginar o universo simétrico em torno da terra, porém, já se sabe que a terra não ocupa um lugar primordial no universo como mostra o princípio copernicano[5]. Disponibilizado por membros do Sloan Digital

Sky survey [3] o catálogo de galáxias apresenta uma distribuição de galáxias homogêneas para escalas acima de 300 milhões de anos luz. A isotropia observada deve ser também nas demais galáxias. Com isso, pode-se dizer que em um dado momento a geometria espacial do universo pode ser descrita por uma métrica que, de maneira geral, é isotrópica e homogênea. Esse grau de simetria pode ser representado pelo tensor de Riemann [4]

$$R_{ijkl} = K(g_{kj}g_{il} - g_{lj}g_{ik}), \quad (2.1)$$

onde g_{ij} é a métrica espacial e $K \in \{-1, 0, 1\}$ é a curvatura da seção espacial.

Se tomarmos como exemplo um observador que acelera em direção ao centro da galáxia, este verá uma distribuição de temperatura e matéria que pode ser considerada anisotrópica e irregular. Esses tipos de observadores são privilegiados pela expansão do universo que é visto como sendo isotrópico e homogêneo e recebem o nome de observadores comoveis[5]. Assim, é possível definir, a partir da métrica do universo, o elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.2)$$

onde a função real $a(t)$ é o fator de escala do universo e $dl^2 = (1 - Kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ é o elemento de linha dos observadores comoveis.

Tem-se então, dois sistemas de coordenadas para definir a expansão do universo. O primeiro representa um observador em queda livre, este é o sistema comóvel, e não altera sua posição comóvel x enquanto o universo se expande. Por outro lado, uma vez conhecida a lei de expansão do universo é possível determinar a posição física l em termos do fator de escala, ou seja,

$$l = a(t) x \quad (2.3)$$

Uma galáxia dá uma ideia do que seria um observador comóvel. Entretanto, sua posição comóvel é também uma função do tempo caso tenha uma velocidade própria e

independente da expansão do universo. Assim, se somarmos a velocidade individual do comóvel e a velocidade de expansão, obteremos a velocidade da galáxia

$$\begin{aligned} v &= H(t)l + a(t)\dot{x} \\ &= v_{exp} + v_{int} \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde H é a função Hubble, v_{exp} é a velocidade de expansão da galáxia e v_{int} é a velocidade do comóvel.

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \tag{2.5}$$

Ao ignorar a velocidade particular do comóvel e levar em consideração que a função Hubble pode ser constante, obtem-se facilmente a famosa Lei de Hubble que tem validade para objetos próximos ao observador, ou seja,

$$v = H_0 l. \tag{2.6}$$

No que se trata da expansão do universo, é possível ainda chegar a algumas conclusões genéricas ainda que não se conheça sua lei geral. Para isto, consideramos um fóton que se propague no espaço/tempo conforme a equação (2.2). Consideraremos também que fótons viajam em geodésicas nulas representadas por $ds^2 = 0 = d\Omega$, assim [5]:

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \pm \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} \tag{2.7}$$

onde a escolha do sinal é arbitrária e deve ser escolhido por conveniência conforme o sentido de propagação do fóton.

Já é conhecido que a distância comóvel independe do tempo. Sendo assim, se dois pulsos forem emitidos de maneira arbitrária em instantes t_0 e t (com $t_0 > t$), temos que [5]

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t}{a(t)} \quad (2.8)$$

Ainda pode-se reescrever a equação em termos do comprimento de onda e da frequência que são emitidos e observados, como

$$\lambda_{obs}(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)} \lambda_{em}, \quad \nu_{obs}(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} \nu_{em}. \quad (2.9)$$

isso mostra que as ondas eletromagnéticas sofrem impacto direto da expansão do universo, de modo que o comprimento e a frequência das ondas aumentam e diminuem com o fator de escala. Dentre outros fatores, tal impacto é de grande relevância por garantir a preservação do espectro planckiano da RCF no processo de expansão do universo [4].

Geralmente, o efeito Doppler e o parâmetro redshift z tornam possível uma interpretação dos resultados que envolvem a expansão do universo. O redshift pode ser definido como

$$1 + z \equiv \frac{a(t_0)}{a(t)} \quad (2.10)$$

conforme o comprimento de onda aumenta ou diminui se diz que a onda sofreu um redshift ou blueshift. Assim, da Equação (2.10) pode ser escrita como:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = v = H_0 l \quad (2.11)$$

tem-se então, a lei de Hubble. Dessa vez em termos do efeito Doppler, em que o parâmetro redshift pode ser usado como uma medida de tempo.

O tempo e o raio de Hubble também são grandezas de natureza cinemática fundamentais para o universo em expansão, e podem ser definidos respectivamente como

$$t_H \equiv H^{-1}, \quad R_H = cH^{-1}, \quad (2.12)$$

onde c é a velocidade da luz. Essas grandezas dão uma ideia dos valores predominantes nos modelos cosmológicos.

A forma pela qual o universo se expande está diretamente relacionada com a especificidade do seu conteúdo material, criando uma relação de dependência que está explicitada na teoria de relatividade geral de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

onde o conteúdo material ($T_{\mu\nu}$) e geométrico do universo ($R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$) estão relacionados. Vale salientar que, sobre o tensor energia-momento, a teoria da relatividade geral nada acrescenta quanto a sua forma física, porém, o princípio cosmológico tende a limitar sua forma geral, fazendo com que somente o tensor de um fluido perfeito seja compatível com as hipóteses de simetria. Assim, [5]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

onde u_{μ} é o quadrivetor de velocidade do fluido perfeito que no sistema de coordenadas comóvel vale $u_{\mu} = (1, 0, 0, 0)$.

Assim, para que seja satisfeita a ideia de um universo homogêneo, tanto a pressão quanto a densidade de energia devem ser função exclusiva do tempo.

Dessa forma, a Equação de Einstein (2.13) pode ser reescritas em termos da métrica da Equação (2.2) para o tensor de um fluido perfeito (2.14). As equações que resultarem desse processo são chamadas também de equações de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \quad (2.15)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (2.16)$$

essas equações são suplementadas pela equação de conservação do tensor $T_{\mu\nu}$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + 3p) = 0. \quad (2.17)$$

Ao observar o sistema de coordenadas da Equação (2.15) e (2.16) percebe-se que fica inviável achar a solução a menos que seja eliminada uma das variáveis a , p ou ρ e quanto a isto, as simetrias do espaço-tempo e as equações de Einstein são praticamente inúteis. Outrossim, pode-se assumir a existência de uma equação de estado entre a pressão do fluido e a densidade de energia uma vez que se estar lidando com um fluido perfeito como acontece com a maioria dos fluidos estudados em cosmologia. A equação de estado é

$$p = w(\rho) \rho. \quad (2.18)$$

Existem três fluidos que são contemplados pelo modelo padrão na mesma medida em que são considerados perfeitos, para os quais as seguintes equações de estado são previstas pela termodinâmica, ou seja [5]

$$w = \begin{cases} 0 & \text{matéria bariônica/escuro} \\ 1/3 & \text{radiação} \\ -1 & \text{constante cosmológica.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Geralmente, quando w for constante obtém-se rapidamente a solução da Equação (2.17):

$$d \ln \rho = -3(1+w) d \ln a \rightarrow \rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (2.20)$$

onde ρ_0 é a densidade atual de energia do fluido em questão. Para os casos particulares de radiação, matéria e constante cosmológica respectivamente tem-se

$$\rho(a) = \begin{cases} \rho_0^m a^{-3} & \text{se, } w = 0 \\ \rho_0^r a^{-4} & \text{se, } w = 1/3 \\ \rho_0^\Lambda = \text{const.} & \text{se, } w = -1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Nota-se que, no infinito passado ou futuro, a energia total do universo é sempre dominada pela densidade de energia da radiação para quaisquer que sejam os valores atuais das constantes de proporcionalidades ρ_0^m , ρ_0^r e ρ_0^Λ . Além disso, a função $\rho(a)$ é inversamente proporcional ao volume físico $V \sim a^3$. Como para a matéria o número de partículas se conserva, temos $n_p/V \sim a^{-3}$. O mesmo não funciona para a radiação, visto

que a frequência (e portanto a energia da onda) é inversamente proporcional ao fator de escala $\nu = E/h \sim a^{-1}$. Logo $E/V \sim a^{-4}$ [5].

Pode-se reescrever a equação de Friedmann, ou seja, a Equação (2.15), levando em consideração os três fluidos simultaneamente $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$, isto, para um modelo realista do universo, tem-se que:

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - \frac{K}{a^2 H^2} \quad (2.22)$$

onde

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.23)$$

que representa a densidade crítica de energia e ao qual introduzida na equação de Friedmann junto com a densidade relativa de cada espécie, $\Omega_x \equiv \rho_x/\rho_{crit}$, onde $X = (m, r, \Lambda)$. É de fundamental importância também a comprovação de que a curvatura do universo tem fortes ligações com a densidade de energia total $\Omega_{total} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$. Daí

$$\frac{K}{a^2 H^2} = \Omega_{total} - 1 \quad (2.24)$$

o que nos permite enunciar [5]:

$$\Omega_{total} > 1 \longleftrightarrow K = 1 \text{ (Universo fechado);}$$

$$\Omega_{total} = 1 \longleftrightarrow K = 0 \text{ (Universo plano);}$$

e

$$\Omega_{total} < 1 \longleftrightarrow K = -1 \text{ (Universo aberto).}$$

Mais à frente apresentamos que o modelo inflacionário prevê um universo plano, corroborando o paradigma inflacionário.

Se considerarmos $k = 0$ facilmente resolve a equação de Friedmann para o caso geral de um fluido com equação de estado constante

$$a^{(1+3w)/2} da = \frac{8\pi}{3} \rho_0 dt \longrightarrow a(t) = a_0 t^{2/3(1+w)} \quad (2.26)$$

esta solução pode ser reduzida a

$$a(t) = \begin{cases} a_0^m t^{2/3} & \text{se, } w = 0 \\ a_0^r t^{1/2} & \text{se, } w = 1/3 \\ a_0^\Lambda e^{H_\Lambda t} & \text{se, } w = -1. \end{cases} \quad (2.27)$$

Isto apenas para os casos particulares de radiação, matéria e constante cosmológica. É conhecido também que $H_\Lambda \equiv \sqrt{8\pi G \rho_0^\Lambda / 3}$.

Percebe-se que $\ddot{a} < 0$ para matéria e radiação e $\ddot{a} > 0$ para o caso de uma constante cosmológica. Em seguida veremos que a modelagem do período inflacionário do universo está relacionada com a equação de estado negativa.

2.2 A RCF à luz do Big Bang

Toda essa descrição geométrica até aqui apresentada não abrange a totalidade de aspectos do MCP. A princípio, a maior parte do êxito da cosmologia moderna resulta nas descobertas sobre as consequências da evolução térmica do universo e tem como alguns de seus contribuintes Gamow, Herman, Bethe e Alpher [5]. O modelo quente do Big Bang está diretamente associado a existência de uma radiação cósmica com espectro planckiano além dos prenúncios da afluência de elementos leves. Estes fatores evidenciáveis são frutos de uma física bem conhecida e testada em baixas energias, sem portanto, capaz de elucidar de maneira sucinta um universo jovem 10^2 .

Este modelo do Big Bang quente tem fundamento em observações que evidenciam o universo em expansão, assim, supõe-se que uma singularidade inicial tenha sido primordial para a evolução do universo, inicialmente com temperatura e energia arbitrariamente grandes. Além da dinâmica do fator de escala que indica a singularidade do universo em $t = 0$, se o mesmo tiver em sua composição fluidos de características termodinâmicas

distintas, a sua evolução também passará por fases distintas. As densidades relativas de energia da matéria, radiação e energia escura, em termos de densidade crítica e do parâmetro do redshift (2.9) assumem a forma:

$$\Omega_m(z) = \Omega_0^m (1+z)^3, \quad \Omega_r(z) = \Omega_0^r (1+z)^4, \quad \Omega_\Lambda(z) = \Omega_0^\Lambda (1+z)^{3(1+w_\Lambda)}; \quad (2.28)$$

e a equação de estado assume um valor constante entre $-1 \leq w_\Lambda < -1/3$.

Além disso, o redshift define o período de transição matéria/energia escura. Este é o mais recente redshift na história da cosmologia e provavelmente aconteceu entre $0,3 \lesssim z_\Lambda \lesssim 1,3$ [5]

$$1 + z_\Lambda = \left(\frac{\Omega_0^m}{\Omega_0^\Lambda} \right)^{1/3w_\Lambda} \quad (2.29)$$

e depende do valor exato de w_Λ .

Esse período de transição ocorreu após o período de formação das galáxias. O valor preciso do redshift ainda é um problema não resolvido. É possível, por outro lado, conhecer bem a transição energia-matéria. O redshift de transição pode ser representado por

$$1 + z_{eq} = \frac{\Omega_0^m}{\Omega_0^r} \simeq 10^4, \quad (2.30)$$

onde assume-se para a contribuição atual da radiação o valor de 0,01% da energia total e para a matéria (escura e bariônica) o valor de 27% , e portanto, para $z > z_{eq}$ a energia de partículas relativísticas domina a energia do universo. Pode-se determinar a expressão que relaciona a temperatura e densidade de energia do universo como:

$$\rho_r(T) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \left(\frac{\pi^2}{30} \right) T^4 \quad (2.31)$$

sendo n o número de espécies de partículas relativísticas, $\alpha_i = 1, 7/8$ respectivamente para bósons e férmions e g_* representa o número de graus de liberdade efetivos (spin) de cada partícula [5]. Ainda mais relevante para esse caso é a dependência da radiação com a

temperatura. Assim, podemos concluir que $T \propto a^{-1}$, basta comparar se à lei da evolução, definida anteriormente na Equação (2.21) ou, à luz do redshift;

$$T(z) = T_0(1+z), \quad (2.32)$$

em que $T_0 = 2,75K$ é a temperatura da radiação cósmica de fundo medida hoje.

2.3 Problemas das condições iniciais do MCP

Uma das maiores dificuldades para a física contemporânea consiste na produção de uma teoria quântica da gravitação que torne possível uma extensão do modelo do Big Bang para além da escala Planck. No entanto, alguns problemas são apresentados pelo modelo atual do Big Bang mesmo nas escalas compatíveis com a física moderna. Tais problemas se restringem a particularidades das condições iniciais do universo adaptáveis as observações atuais.

2.3.1 Planura

O problema da planura é um problema essencialmente de condições iniciais e se detém a explicar o motivo pelo qual a densidade total de energia é igual a densidade crítica. É possível compreendê-lo reescrevendo a equação de Friedmann (2.15) da seguinte maneira:

$$(\Omega^{-1} - 1) \frac{8\pi G^2}{3} = -K \quad (2.33)$$

onde $\Omega = \rho/\rho_{crit}$. Como o parâmetro de curvatura é constante, tem-se que:

$$(\Omega^{-1} - 1)^2 |_{t=t_i} = (\Omega^{-1} - 1)^2 |_{t=t_f}. \quad (2.34)$$

O lado direito é avaliado em um instante posterior ao lado esquerdo ($t_i < t_f$). Caso a escolha desses instantes tenham sido estabelecidas como uma igualdade entre a matéria e a radiação, onde $\rho_{eq} \approx \rho_0^m a^{-3}$, e a era atual, tem-se que:

$$\frac{(\Omega_{eq}^{-1} - 1)}{(\Omega_0^{-1} - 1)} = a_{eq} = (1 + z_{eq})^{-1}, \quad (2.35)$$

considerando que $a_0 = 1$.

Se considerar um instante aleatório do passado, podemos usar o mesmo raciocínio, desde a era de pleno domínio até o fim do domínio da radiação, obtem-se que: [5]

$$\frac{(\Omega^{-1} - 1)}{(\Omega_{eq}^{-1} - 1)} = \left(\frac{a}{a_{eq}}\right)^2 = \left(\frac{T_{eq}}{T}\right)^2 \quad (2.36)$$

Ao comparar as Equações (2.35) e (2.36) e usarmos (2.32), encontraremos que:

$$\frac{(\Omega^{-1} - 1)}{(\Omega_0^{-1} - 1)} = (1 + z_{eq}) \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \quad (2.37)$$

Pode assumir, assim, $T = 10^{17}K$, que corresponde a escala de energia das interações eletrofracas. Já para um valor maior, tem-se que $T = 10^{32}K$, assumindo que a relatividade geral funciona bem até a escala de Planck. Para as duas situações $\Omega_0 = 1 \pm \epsilon$, com $\epsilon \lesssim 1$, evidenciando que a densidade total de energia possa ter sido no passado

$$\Omega = \begin{cases} 1 \pm 10^{-30} & \text{escala das interpretações eletro-fracas,} \\ 1 \pm 10^{-60} & \text{escala de Planck.} \end{cases} \quad (2.38)$$

E em se tratando do parâmetro de densidade de curvatura obtém-se que:

$$\Omega_K \equiv K/a^2 H^2. \quad (2.39)$$

O que mostra se atualmente $\Omega_k \approx 0$, logo, no passado $\Omega_K \sim 10^{-30}$, 10^{-60} , a menos que $K = 0$. Sendo assim, pode haver uma regulação bem rígida das condições iniciais do universo, afim de que fosse atualmente como se observa, uma vez que, não há razão lógica para esta escolha.

2.3.2 Horizonte

O problema do Horizonte procura entender a invariabilidade da temperatura da RCF em diversas regiões do céu. Para o MCP houve um período em que os fótons

separaram-se dos demais componentes e isto ocorreu em alto redshift ($z = 1100$). Neste período a temperatura do universo era estimativamente $3000K$ e sua idade era de aproximadamente 380.000 anos. Esta é a idade estimada para a detecção desses fótons primordiais.

Embora apresentando um elevado grau aparente de equilíbrio térmico e homogeneidade, o MCP não previa este feito, isso por causa das limitações colocadas pelo horizonte cosmológico. Este elevado grau de homogeneidade da radiação cósmica de fundo (uma parte em 10^5) é um problema sério do MCP. Na superfície de último espalhamento haviam regiões que eram, de maneira causal, desconectadas, uma vez que estavam fora do horizonte. Essas regiões emitiam os fótons que recebemos hoje. O horizonte vigente propicia uma observação isotrópica e uniforme da temperatura da RCF. O problema do horizonte procura entender como é possível obter as mesmas propriedades físicas a partir de processos físicos que ocorrem em regiões causalmente desconexas.

2.3.3 Monopolos magnéticos

As teorias de unificação postulam que posteriormente a era Planck, por meio da quebra espontânea de simetria, apareceram monopolos magnéticos, cuja massa é muito grande. Após o resfriamento do universo esses monopolos perderam interação se estabilizando. Entretanto, não é possível observar aquilo que poderia ser uma afluência de monopolos magnéticos. Entretanto, este modelo não foi abordado. O problema dos monopolos magnéticos foi apenas apresentado de maneira sucinta e não foi tratado neste trabalho, ou seja, apenas foi considerado as soluções dos problemas de planura e de horizonte.

Capítulo 3

Inflação Cósmica

Não se pode dizer que as situações apresentadas no capítulo anterior constituem um problema, isto porque não se conflitam com o princípio cosmológico, nem com a teoria da relatividade geral. Para falar a verdade, esses problemas podem ser apresentados como evidências claras das nossas hipóteses.

A explicação pela qual essas questões são importunas é que a cosmologia tem um objeto de estudo único e irreproduzível, devendo explicar, além do universo observável, suas condições iniciais “típicas”. Admitamos que é bastante questionável a escolha aleatória de um conjunto particular de condições iniciais, assim como a definição do que seja ou não provável e típico em um sistema de realização única. Além disso, para a cosmologia, a definição do que seja ou não “natural” dificilmente levam a manifestações que possam ser observadas. Sendo assim, a elaboração de uma teoria de condições iniciais, além de esclarecer as arbitrariedades, guia a construção de observáveis cosmológicos [5].

Em 1981, o cientista Alan H. Guth foi quem originalmente propôs uma teoria de condições iniciais que ficou conhecida como teoria da inflação [6]. Esta teoria se baseia em um modelo de ajuntamento das forças fundamentais. Para este modelo, um campo escalar denominado ínflaton, é o percussor da inflação. A expansão acelerada do universo é provocada pelo ínflaton que atua como uma constante cosmológica e se encontra inicialmente preso no mínimo potencial relativo, que quando atingido, por meio de um processo de tunelamento, cessa o período de inflação. Este cenário, que ficou conhecido como old-inflation não se consolidou, pois averiguou-se que não era possível que a inflação

ocorresse em todos os pontos do universo simultaneamente, mas em regiões específicas que, ou são completamente ausentes de matéria, ou com uma distribuição de matéria inhomogênea e anisotrópica [7].

Um outro modelo que também precisou ser descartado, ficou conhecido como new-inflaton, isto porque o equilíbrio termodinâmico com outros campos de matéria não era alcançado pelo inflaton em nenhum modelo efetivo, tornando inviável as transições de fases cosmológicas. No entanto, é ainda muito significativo nos modelos de inflação um período de rolagem lenta do inflaton, pois é aqui que as estruturas de grandes escalas originadas das perturbações de densidade são geradas [8].

No mesmo ano em que A. Guth publicou sua teoria, outros dois cientistas, V. Mukhanov e G. Chibisov mostravam que a origem microscópica de grandes estruturas do universo poderia ser explicada por meio da teoria quântica de perturbações do universo primordial. Isso mostra que, explicar a origem das estruturas do universo não foi um problema que estimulou a ideia de inflação, pelo menos no início [9]. Esta ideia estimulou a produção de vários trabalhos que mostravam sempre que para investigar a origem das estruturas de grande escala, o período inflacionário era de fundamental importância. Os trabalhos desenvolvidos atualmente sobre inflação têm essa característica como ponto central para análise [10, 11, 12].

Em síntese, a inflação traz o conceito de que houve um período minúsculo no universo primordial em que o universo expandiu exponencialmente, impelido por um campo escalar – o ínflaton - resolvendo o problema da planura, diluindo qualquer curvatura inicial do universo, e solucionando o problema do horizonte por meio da expansão brutal do mesmo, permitindo que regiões distantes tenham um contato causal. Os monopolos, por sua vez, durante o período de inflação, são separados por uma escala de comprimento dada pelo produto entre o tempo de Hubble (H_0) e a velocidade da luz (c). Assim, a densidade de monopolos fica dada pelo inverso do volume de Hubble, e por causa da inflação, são diluídos todos os monopolos criados no Universo primordial. [13]

3.1 Teoria Inflacionária

Como o universo sempre apresenta uma expansão desacelerada, daí surgem os problemas do MCP. No entanto, se aceitarmos que

$$\ddot{a} > 0 \tag{3.1}$$

representando a passagem do universo por uma fase acelerada. Esta condição mostra que o raio de Hubble $(aH)^{-1}$ decresce no período de inflação, pois \dot{a} ($= aH$) aumenta durante a inflação. Percebe-se ainda que, da parte temporal da equação de Einstein [23]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{k}{6}(\rho + 3p)$$

tem a condição

$$\rho + 3p < 0 \tag{3.2}$$

que infringe a condição de energia forte.

Estas duas condições acima citadas, podem ser implementadas naturalmente, desde que se considere que o universo atinja uma fase em que a energia de vácuo seja dominante, com $\omega_\Lambda = -1$.

Para esta fase, tem-se que:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{k}{3}\rho,$$

tornando-se

$$H^2 \simeq \frac{k}{3}\rho_\Lambda \simeq cte, \tag{3.3}$$

onde o raio de Hubble nesse período, apresenta distâncias constantes. Esta equação mostra em sua solução o crescimento exponencial do fator de escala no tempo, ou seja:

$$a \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \tag{3.4}$$

Com isso, as distâncias físicas – comóveis – também tende a crescer exponencialmente e a planura do universo acaba acontecendo, forçada pelo parâmetro de densidade de matéria.

É importante perceber que o universo tende a se tornar um vasto vazio com baixas temperaturas, pois a inflação continuará indefinidamente, caso o parâmetro de Hubble não evolua no tempo. Porém, isto se conflita com as observações atuais. Assim, a inflação deve terminar e a energia de vácuo convertida em energia térmica para o universo. Assim, o aumento da entropia do universo, resultante do decaimento da energia de vácuo dá início à era dominada pela radiação. [23]

3.2 Solução dos problemas de planura e horizonte

Pode-se solucionar os problemas que apresentamos no capítulo anterior se considerarmos que o universo passou por uma fase onde o fator de escala $a(t)$ cresce exponencialmente com o tempo.

3.2.1 Problema da planura

Consideraremos que durante o período de inflação do universo, em que $H \approx cte$, o fator de escala $a(t)$ cresceu com o fator e^N , em seguida, houve uma fase de radiação. Logo após, um período de equivalência entre radiação e matéria, que foi substituída por uma era de dominação da matéria, e por fim, um período dominado pela energia de vácuo.

Para $|k|/a_i^2 H_i^2 = 0$, onde i = início da inflação, e o fim da inflação $|k|/a_I^2 H_I^2$, com I marcando o fim da inflação, deveria ser da ordem de e^{-2N} , logo [23]

$$\frac{|k|}{a_I^2 H_I^2} = e^{-2N} \frac{|k|}{a_i^2 H_i^2} \approx e^{-2N}. \quad (3.5)$$

Atualmente, como ($a_0 = 1$), tem-se:

$$|\Omega_{k_0}| = \frac{|k|}{H_0^2} = \frac{|k|}{a_I^2 H_I^2} \left(\frac{a_I H_I}{H_0} \right)^2 = e^{-2N} \left(\frac{a_I H_I}{H_0} \right)^2 < 1. \quad (3.6)$$

logo, o problema da planura seria resolvido, se durante a inflação, a expansão tivesse um limite

$$e^N > \frac{a_I H_I}{H_0}. \quad (3.7)$$

3.2.2 Problema do Horizonte

No período do último espalhamento t_L , a distância física do horizonte de partículas é dado por

$$d_H(t_H) = a(t_H) \int_{t_i}^{t_L} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.8)$$

onde t_i é o início da era da inflação.

O fator de escala, por sua vez, durante a inflação é

$$a(t) = a_i e^{H_i(t-t_i)}, \quad (3.9)$$

Porém, como $a_I = a_i e^{H_I(t_I-t_i)}$ e $H_I = H_i \rightarrow cte$, logo

$$a(t) = a_I e^{-H_I(t_L-t)} \quad (3.10)$$

Assim, a Equação (3.8) torna-se

$$d_H(t_L) = a(t_L) \int_{t_i}^{t_L} dt \frac{1}{a_I} e^{H_I(t_I-t)} = \frac{a(t_L)}{a_I H_I} (e^{H(t_L-t_i)} - 1). \quad (3.11)$$

Veja que $e^N \gg 1$ para que o problema do horizonte seja resolvido, assim, despreza-se o termo -1 da expressão acima. Para conter o elevado grau de isotropia da CMB em largas escalas, é necessário que

$$d_H(t_L) > d_A(t_L), \quad (3.12)$$

onde

$$d_A = r_L a(t_L) \simeq \frac{a(t_L)}{a_0 H_0}$$

representa a distância angular da superfície de último espalhamento [14]

A isotropia da CBM tem como condição

$$e^N > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}. \quad (3.13)$$

Se assumir o fim da inflação na escala GUT ¹ de unificação das forças fundamentais pode se estimar

$$N \gtrsim 60 \quad e - folds$$

3.2.3 Origem das perturbações

Não se pode deixar de mencionar a importância da inflação para explicar a origem das grandes estruturas, além de suas propriedades estatísticas. É importante salientar que em um universo que se expande exponencialmente o comprimento de onda das perturbações aumentará na mesma proporção do fator de escala, ao passo que o raio de Hubble continuará constante. [5] Assim, a amplitude das perturbações que nascem dentro do horizonte tende a diminuir até o momento em que há equivalência entre seus comprimentos de onda e o raio de Hubble (Figura 3.1).

Daí em diante, seus comprimentos de onda crescem de forma exponencial à medida que as flutuações permanecem com amplitudes constantes. Essas perturbações continuam evoluindo normalmente, mesmo com o fim da inflação, reentrando o horizonte de partículas, onde $\lambda \sim H^{-1}$, ou seja, a mesma amplitude inicial. Além disso, a escalado horizonte será efetivamente a mesma, $k = aH$, ocasionada pela constância do raio de Hubble. Assim, as perturbações que saem do horizonte, fazem isto sempre na mesma escala. Por fim, é possível quantizar as perturbações cosmológicas, aplicando métodos usuais da teoria de campos, mas, desde que a inflação ocorra num período posterior ao

¹Grand Unification Theory

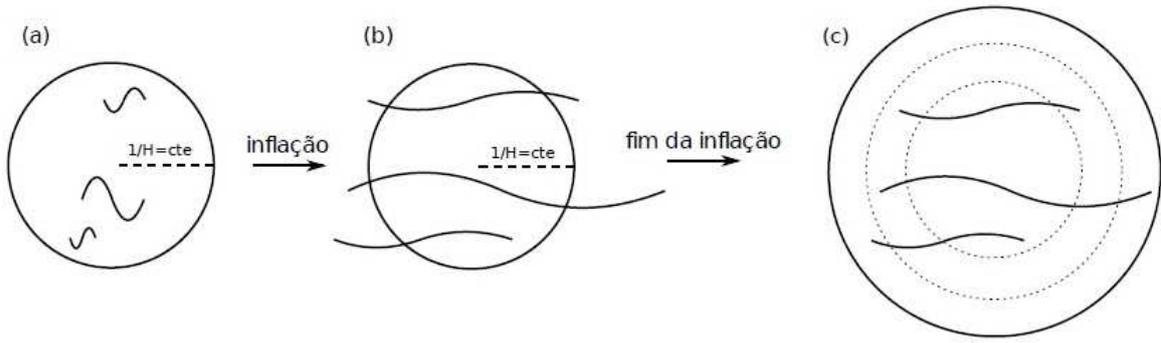


Figura 3.1: Representação da evolução das perturbações durante e depois da inflação. (a) raio de Hubble constante, amplitudes e onda diminuem e comprimento crescem. (b) raio de Hubble continua constante, comprimentos de onda crescem e amplitudes se congelam. (c) final da inflação; aqui o raio de Hubble cresce em taxa muito maior que os comprimentos de onda. Fonte: [5]

tempo de Planck. Se, para este período, as perturbações forem pequenas, devem obedecer uma distribuição gaussiana de probabilidades, conforme prevê a teoria de campos.

3.3 Dinâmica Inflacionária

No período inflacionário o universo expandia-se com uma aceleração que era ocasionada por um potencial quase-constante de um campo escalar. Este campo ficou conhecido como *inflaton*. Com uma duração de aproximadamente 70 tempos de Hubble H^{-1} (*e-folds*) esse mecanismo de rolagem lenta do campo (*slow-roll*) resolve os problemas de condições iniciais do MCP. Com isso, a inflação acabaria por dar vez à cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker.

3.3.1 O inflaton

Para entender o inflaton deve considerar ϕ como sendo um campo escalar homogêneo, e que a acelerada expansão do universo pode ser ocasionada por sua energia potencial. Sabe-se que um campo escalar e potencial $V(\phi)$ tem uma lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi). \quad (3.14)$$

Logo, o campo escalar e gravitacional são descritos pela ação como:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2k} R + \mathcal{L}_\phi \right), \quad (3.15)$$

onde

$$k = \frac{8\pi}{m_{Pl}^2}$$

E a energia de Planck $m_{Pl} = 1.2211 \cdot 10^{19} GeV$ se relaciona com G por meio de

$$m_{Pl} = \left(\frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2}$$

onde (c) é a velocidade da luz e (\hbar) a constante de Planck. Consideraremos que $\hbar = c = 1$.

Por meio da Equação (3.15) é possível encontrar o tensor momento-energia do campo escalar

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\phi &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se $(k = 0)$ na métrica FRW, o campo escalar tem densidade de energia ρ_ϕ e pressão p_ϕ dados por:

$$\rho_\phi = -T_0^{0(\phi)} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad e \quad p_\phi = \frac{1}{3} T_i^{i(\phi)} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.17)$$

É possível, ainda, determinar o parâmetro ω_ϕ da equação de estado para ϕ como:

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (3.18)$$

onde $\dot{\phi}^2$ é o termo cinético e $V(\phi)$ o potencial do campo escalar [23].

O campo escalar apenas tem $p \simeq -\rho$ como equação de estado se $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Assim, durante o período de rolagem lenta (slowroll), tem-se $V(\phi)$, quando a curva do potencial sofre lentas variações ocasionadas pelo campo.

Da ação representada na Equação (3.15) pode-se retirar as equações de campo como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{m_{Pl}^2} \left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - g_{\mu\nu}V(\phi) \right), \quad (3.19)$$

Para o universo FRW – plano – tem-se que a primeira equação de Friedmann então, torna-se

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{8\pi}{m_{Pl}^2} \left(\partial_0\phi\partial_0\phi - \frac{1}{2}g_{00}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - g_{00}V(\phi) \right)$$

$$3H^2 = \frac{8\pi}{m_{Pl}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (3.20)$$

que, usando $\rho_\phi \simeq V(\phi)$, tem como solução

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}\rho_\phi \rightarrow a(t) \sim a_i \exp \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\frac{8\pi V(\phi)}{3m_{Pl}^2}} dt, \quad (3.21)$$

A equação de conservação de energia

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

e ganha a forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (3.22)$$

onde $V'(\phi)$ é a derivada do potencial em relação a ϕ . O segundo termo é proporcional ao fator de Hubble, ou seja, a expansão afeta diretamente a dinâmica do campo escalar. Além disso, por ser proporcional a velocidade, funciona como um termo de fricção ou amortecimento, aumentando o tempo que o campo escalar leva para atingir o mínimo potencial (Figura 3.2).

3.3.2 Condições de slow-roll

Tanto a pressão quanto a densidade de energia do fluido representados na Equação (3.17), e no período de inflação, são controlados por campos escalares. A condição para

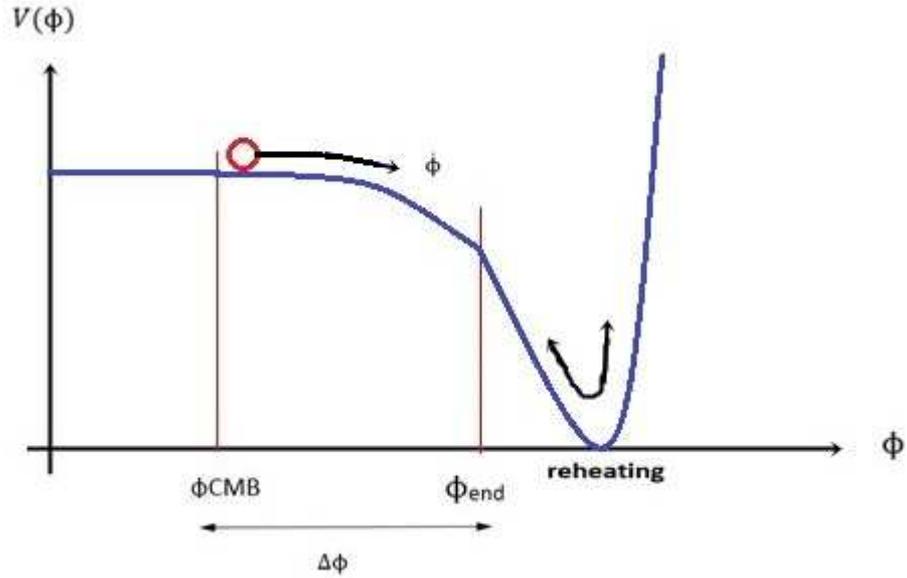


Figura 3.2: Gráfico de potencial do *inflaton*. Quando $V(\phi)$ domina o termo de energia cinética $\frac{\dot{\phi}^2}{2}$, ocorre aceleração. Quando a energia cinética se equipara ao potencial, temos o fim da inflação ϕ_{end} . Tem-se a conversão da densidade de energia do campo escalar em radiação, durante o período de reaquecimento.

inflação $p < -\rho/3$ fica satisfeita se os campos não variarem muito rápido. No entanto, existem exceções que precisam de apenas alguns e-folds de inflação, como *locked inflation* e *fast-roll inflation* [15]. No nosso caso, vamos considerar que apenas um campo ϕ varia, conhecido como *single-field inflaton*.

Diferenciando a Equação (3.20) que é obtida por meio da primeira equação de Friedmann, e usando a Equação (3.22) encontra-se:

$$\frac{m_{Pl}^2}{4\pi} \dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (3.23)$$

Durante um tempo de expansão $1/H$, a alteração de $\left| \dot{H}/H \right| (1/H)$ em H deve ser muito menor que 1, para que haja uma aceleração quase exponencial, ou seja,

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} \ll 1. \quad (3.24)$$

Assim, para que a condição acima seja satisfeita, exige-se que $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$. Consequentemente $p = -\rho$ e com isso

$$H \simeq \sqrt{\frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} V(\phi)}. \quad (3.25)$$

Durante o tempo de expansão $1/H$, é exigido também que a alteração de $|\ddot{\phi}/\dot{\phi}| (1/H)$ para $\dot{\phi}$ seja muito menor que 1, logo

$$|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}|. \quad (3.26)$$

como consequência desprezamos $\ddot{\phi}$ na Equação (3.22), e com isso

$$\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H} = -\frac{m_{Pl}V'(\phi)}{\sqrt{24\pi V(\phi)}} \quad (3.27)$$

Usando as Equações (3.23), (3.25) e (3.27), obtemos

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} = \frac{m_{Pl}^2 V'(\phi)^2}{16\pi V(\phi)^2}. \quad (3.28)$$

portanto, se

$$\left| \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll \frac{\sqrt{16\pi}}{m_{Pl}} \quad (3.29)$$

a expansão quase exponencial do universo durará muitos e-folds.

Para que seja satisfeita a desigualdade $\dot{\phi} \ll V(\phi)$, a condição sobre o potencial dado pela equação (3.27) deve ser

$$\left| \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll \frac{\sqrt{24\pi}}{m_{Pl}}, \quad (3.30)$$

Ainda da Equação (3.27), temos que:

$$\ddot{\phi} = -\frac{V''(\phi)\phi}{3H} + \frac{V'(\phi)\dot{H}}{3H^2} = \frac{V''(\phi)V'(\phi)}{9H^2} - \frac{m_{Pl}^2 V'(\phi)^3}{48\pi V(\phi)^2} \quad (3.31)$$

onde o último termo do lado direito é muito menor que $|V'(\phi)|$, garantido por (3.29).

Logo, para que $\ddot{\phi} \ll |V'(\phi)|$, implica que $|V''(\phi)| \ll 9H^2$, assim

$$\left| \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll \frac{24\pi}{m_{Pl}^2}. \quad (3.32)$$

Tanto a Equação (3.29) como a Equação (3.32) são condições de planura no potencial fundamentais que asseguram a rolagem lenta de ϕ e $\dot{\phi}$ [23].

É possível ainda, definir os parâmetros de slow-roll em termos do potencial. Para isto, se usa $\dot{\phi} \ll V(\phi)$ e $|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}|$, e assim resulta em:

$$\epsilon_V = \frac{m_{Pl}^2 V'(\phi)^2}{16\pi V(\phi)^2}. \quad (3.33)$$

e

$$\eta_V = \frac{m_{Pl}^2 V''(\phi)}{8\pi V(\phi)}. \quad (3.34)$$

ambos são conhecidos por parâmetros de slow-roll do potencial, o que os distingue dos parâmetros de slow-roll de Hubble, e na aproximação, ambos se relacionam por:

$$\epsilon_V \simeq \epsilon_H, \quad \eta_V \simeq \epsilon_H + \eta_H. \quad (3.35)$$

Agora, ao definir os parâmetros de slow-roll, pode-se investigar sua importância para um cenário inflacionário. Assim, tanto para o fator de escala, como para o campo escalar, é possível que obtenhamos soluções analíticas. Partindo da Equação (3.25), se pode resolvê-la em termos do fator de escala, como

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \simeq \frac{1}{m_{Pl}} \sqrt{\frac{8\pi}{3} V(\phi)} \quad (3.36)$$

e

$$a(t) \propto \exp \left\{ \frac{1}{m_{Pl}} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \int [V(t)]^{1/2} dt \right\}. \quad (3.37)$$

Para escrever H em termos de $V(\phi)$, afim de averiguar se há ocorrência de inflação por meio de um número suficiente de e-folds permitido pelo potencial, basta resolver a Equação (3.27) e usar a Equação (3.25), obtendo que:

$$dt \simeq -3H \frac{d\phi}{V'(\phi)} \quad (3.38)$$

e

$$t(\phi) \propto -\frac{2}{m_{Pl}} \sqrt{6\pi} \int \frac{V(\phi)^{1/2}}{V'(\phi)} d\phi \quad (3.39)$$

O número de e-folds entre t_i e t_f pode ser mostrado integrando o tempo conforme $dN = d \ln a$, assim

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \simeq -\frac{8\pi}{m_{Pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi, \quad (3.40)$$

onde ϕ_f é o campo no fim do período inflacionário e poder ser encontrado por meio da condição $\epsilon(\phi) = 1$.

Capítulo 4

Modelos Inflacionários

Uma vez que a aproximação slow-roll (ASR) e o número de e-foldings já foram apresentados no capítulo anterior, a partir daqui, exploraremos alguns dos potenciais inflacionários que mais se destacam: Inflação caótica [16], híbrida [21, 18] e natural [19, 20]. Inicialmente veremos a classificação dos diversos cenários inflacionários que existem, e em seguida estabeleceremos evidências que relacionam a física de partículas com algum desses potenciais. É importante ressaltar que, a elaboração de uma teoria de partículas que esteja de acordo com esse cenário é uma das grandes áreas de interesse no contexto inflacionário. Além disso, estes modelos são dependentes dos resultados e restrições provenientes do formalismo das perturbações na densidade de energia que determina o surgimento de estruturas de larga escala no universo.

4.1 Classificação dos modelos

Das diversas maneiras de classificar os potenciais inflacionários vamos escolher em termos do valor inicial do *inflaton*. Os potenciais do tipo I, conhecidos como modelos de *large – field* (grandes campos) caracterizam-se por apresentar um valor inicial do *inflaton* maior que M_{pl} ; são fundamentais na cosmologia por gerarem ondas gravitacionais detectáveis. Os modelos do tipo II, conhecidos como modelos *small – field* (pequenos campos) apresentam um valor inicial para o *inflaton* menor que a massa de Planck. Além desses, apresentaremos também o modelo conhecido por modelos híbridos, que se utilizam de mais de um campo escalar no período de inflação.

4.2 Modelos de Campo Largo

Esse tipo de modelo normalmente é representado por um potencial monomial. Em 1983 Linde [21] introduziu um modelo que ficou conhecido como a inflação caótica, que é um exemplo de um modelo de campos grandes

$$V = \lambda_n \frac{\phi^n}{n}, \quad (4.1)$$

onde λ_n e n são constantes positivas.

Neste caso, os parâmetros de slow-roll se reduzem a

$$\epsilon_V = n^2 \frac{M_{Pl}^2}{2\phi^2}; \quad e \quad \eta_V = n(n-1) \frac{M_{Pl}^2}{\phi^2}; \quad (4.2)$$

Partindo da Equação (3.40), tem-se

$$\phi^2(N) \approx 2n \left(N + \frac{n}{4} \right) M_{Pl}^2, \quad (4.3)$$

Neste ponto, partindo da condição $\epsilon(\phi_f) = 1$, obteremos $\phi_f = \frac{nM_{Pl}}{\sqrt{2}}$. Os índices espectrais em termos do número de e-folds, são

$$n_s = 1 - \frac{2(n+2)}{4N+n}; \quad e \quad r = \frac{8n}{n+2} (1 - n_s) \quad (4.4)$$

Para o potencial quadrático ($n = 2$), temos $n_s = 0,967$ e $r = 0.132$ para $N = 60$, se encontrando dentro do limite de 95% de CL limitado pelos dados Planck + WP + BAO + high- ℓ [22].

4.3 Modelos de Campo Pequeno

Os potenciais que originam evoluções de pequenos campos surgem geralmente da quebra espontânea de simetria, onde o campo rola de um equilíbrio instável para um vácuo deslocado. O modelo de inflação natural é um bom exemplo desse tipo de potencial, onde o papel do ínflaton é desempenhado pelo Bóson Pseudo-Nambu-Goldstone (PNGB). Este potencial é expresso por:

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right], \quad (4.5)$$

onde Λ e f estão associados a altura e largura do potencial, respectivamente.

O número de e-folds pode ser estimado como:

$$N \approx \delta_f^{-1} \ln \frac{2\epsilon_V + \delta_f}{(2 + \delta_f)\epsilon_V} \quad (4.6)$$

onde $\delta_f = M_{Pl}^2/f^2$. Invertendo essa relação, obtém-se que:

$$\epsilon_V = \frac{\delta_f}{e^{N\delta_f}(2 + \delta_f) - 2}. \quad (4.7)$$

A relação entre o parâmetro η_V e ϵ_V se estabelece da seguinte maneira

$$\eta_V = \epsilon_V - \frac{\delta_f}{2} \quad (4.8)$$

Com o auxílio da Equação (4.7) pode-se determinar os índices espectrais, uma vez que forem definidos os valores de N e f

$$n_s = 1 - 4\epsilon_V - \delta_f; \quad e \quad r = 16\epsilon_V \quad (4.9)$$

Na Figura (4.1), plotamos os valores teóricos de n_s e r para $N = 60$ como uma função de f . Para diminuir f , tanto n_s como r ficam menores. A partir da análise conjunta do Planck + WP + BAO + high- ℓ , a escala de quebra de simetria f é restrita a

$$5.1M_{Pl} < f < 7.9M_{Pl} \quad (68\%CL). \quad (4.10)$$

enquanto $f > 4.6M_{Pl}$ a 95%CL.

4.4 Modelo Híbrido

A inflação híbrida envolve dois campos escalares: o inflaton ϕ e outro campo de quebra de simetria χ . Durante a inflação o campo χ está próximo de 0, em que o potencial é aproximadamente dado por

$$V(\phi) \simeq \Lambda^4 + U(\phi), \quad (4.11)$$

onde Λ é uma constante, e $U(\phi)$ depende de ϕ . A inflação termina devido a uma transição em cascata impulsionada pelo crescimento de χ . O modelo híbrido original de Linde [21] corresponde a $U(\phi) = m^2\phi^2/2$.

Desde que a razão $r_U \equiv U(\phi)/\Lambda^4$ seja muito menor que 1, temos que

$$n_s \simeq 1 + \frac{2m^2 M_{Pl}^2}{\Lambda^4}, \quad r \simeq 8(n_s - 1)r_U. \quad (4.12)$$

Portanto, o espectro de energia escalar é azulado ($n_s > 1$). Sob a condição $r_U < 0,1$, a relação tensor-escalar é limitada por $r < 0,8(n_s - 1)$ (que é mostrado como uma curva sólida na Figura (4.1) para $n_s > 1$). O modelo híbrido com $U(\phi) = m^2\phi^2/2$ está muito longe dos 95% CL.

Na Figura (4.1) as curvas teóricas são plotadas para $0 < c < 0,1$ e $N = 60$. O modelo está fora da região (95%CL), restringido pelos dados Planck + WP + BAO + high- ℓ devido ao grande índice espectral escalar.

Percebe-se que plotamos os limites de 68% e 95% CL no plano (n_s, r) restringido pela análise conjunta de dados Planck, WP, BAO, high- ℓ data (curvas sólidas espessas) e Planck, WP, BAO data (curvas pontilhadas grossas). Com os dados high- ℓ , o índice espectral escalar desloca-se para valores menores e a relação tensor/escalar fica um pouco menor.

As curvas espessa e pontilhada correspondem aos limites de 68% CL (dentro) e 95% CL (externo) derivados da análise conjunta de dados Planck + WP + BAO + high- ℓ e de Planck + WP + BAO, respectivamente [22].

Apresentamos as previsões teóricas para os modelos:

I - Inflação caótica com o potencial $V(\phi) = \lambda_n \phi^n/n$ para n geral (curva sólida fina) e para $n = 4, 2, 1, 2/3$ (indicado por círculos pretos).

II - Inflação natural com o potencial $V(\phi) = \Lambda^4[1 + \cos(\phi/f)]$ para f geral.

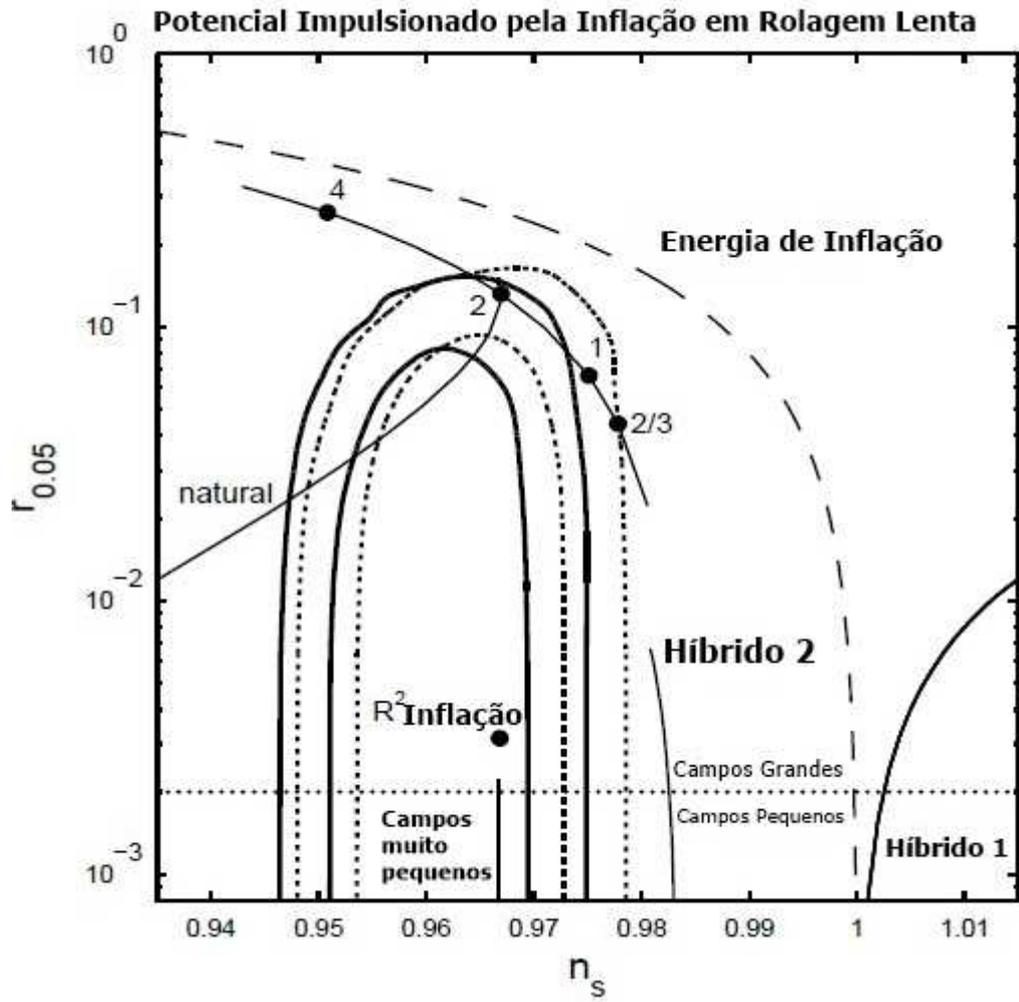


Figura 4.1: As observações sobre os potenciais impulsionados na inflação slow-roll no plano (n_s, r) são limitadas para $N = 60$ e $K_0 = 0,05 Mpc^{-1}$. (Fonte: [22]).

III – Inflação Híbrida com os potenciais $V(\phi) = \Lambda_4 + m^2\phi^2/2$ (Híbrido1) e $V(\phi) = \Lambda^4[1 + c \ln(\phi/\mu)]$ (Híbrido2).

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho foi representado através do parâmetro slow-roll a expressão que permite calcular o número de e-folds. Feito isto, classificamos alguns modelos inflacionários que podem ser considerados clássicos e em seguida calculamos os índices espectrais para alguns potenciais escalares. Analisamos graficamente o procedimento e o comportamento destes potenciais sob a perspectiva de um modelo capaz de reger, com coerência e a luz da teoria inflacionária, a expansão do universo.

Referências Bibliográficas

- [1] WMPA, G. Hinshaw et al., (2008), 0803.0732.
- [2] WMPA, E. Komatsu et al., (2008), 0803.0547.
- [3] J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey, and T. R. Seshadri, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **364**, 361 (2005), astro-ph/0504315.
- [4] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1972).
- [5] PEREIRA, Thiago dos Santos. **Teoria inflacionária em universos anisotrópicos**. 2008. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. doi:10.11606/T.43.2008.tde-02032009-151808. Acesso em: 2018-08-26.
- [6] A. H. Guth, *Phys. Rev.* **D23**, 347 (1981)
- [7] S. W. Hawking, I. G. Moss, and J. M. Stewart, *Phys. Rev.* **D26**, 2681 (1982).
- [8] A. Linde, *Lect. Notes Phys.* **738**, 1 (2008), arXiv:0705.0164 [hep-th]
- [9] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, *JETP Lett.* **33**, 532 (1981).
- [10] S. W. Hawking, *Phys. Lett.* **B115**, 295 (1982).
- [11] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett.* **B117**, 175 (1982).
- [12] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, *Phys. Rev.* **D28**, 679 (1983).

- [13] ROCHA, Julio Cesar Marques. **Aspectos da Teoria da Inflação com um Campo Taquiônico**. 2017. Dissertação (Mestrado em Física) - Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande - PB, 2017.
- [14] S. Weinberg, **Cosmology**. Oxford Univ. Press, 2008.
- [15] D. H. Lyth and A. R. Liddle, **The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure**. Cambridge University Press, 2009.
- [16] A. Linde, (1983) Phys. Lett., **B129**, 177.
- [17] A. Linde, (1994) Phys. Rev., **D49** (2), 748.
- [18] Copeland, E. J. Liddle, A. R. Lyth, D. H. Stewart, E. D., Wands, D. (1994) Phys. Rev., **D49**, 6410.
- [19] Freese, K., Frieman, J. A., Olinto, A. V. (1990) Phys. Rev. Lett., **65**, 3233.
- [20] Adams, F., Bond, J. R., Freese, K., Frieman, J., Olinto, A. (1993) Phys. Rev., **D47**, 426. hep-ph/9207245.
- [21] A. Linde, "Chaotic Inflation," *Physics Letters B*, vol. 129, no. 3, pp. 177-181, 1983.
- [22] S. Tsujikawa, "Distinguishing between inflationary models from cosmic microwave background," *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, vol. 2014, no. 6, p. 06B104, 2014.
- [23] ANDRADE, T. M., **Modelos cosmológicos inflacionários tipo Starobinsky**. 2016. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo.
- [24] RODRIGUES, Daniel de Paula Farias. **Aspectos clássicos da cosmologia inflacionária**. 2011. 81 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011.