



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Romário da Silva Santos

Soluções Cosmológicas Tipo Kink em Teorias
 $f(R, T)$ e $\Lambda(\phi)$

Campina Grande, Paraíba, Brasil

12 de novembro de 2019

Romário da Silva Santos

Soluções Cosmológicas Tipo Kink em Teorias $f(R, T)$ e $\Lambda(\phi)$

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. João Rafael Lúcio dos Santos

Campina Grande, Paraíba, Brasil

12 de novembro de 2019

S237e Santos, Romário da Silva.
Soluções cosmológicas tipo Kink em teorias $f(R, T)$ e $\Lambda(\Phi)$ /
Romário da Silva Santos. – Campina Grande, 2019.
75 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação: Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos".
Referências.

1. Cosmologia. 2. Defeitos Topológicos. 3. Expansão Acelerada.
4. Parâmetros Cosmológicos. 5. Campos Escalares. 6. Gravidades
Modificadas. I. Santos, João Rafael Lúcio dos. II. Título.

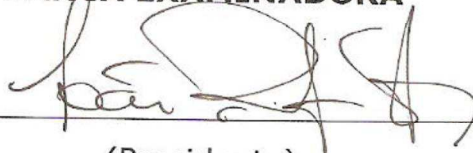
CDU 523.11(043)

ROMÁRIO DA SILVA SANTOS

SOLUÇÕES COSMOLÓGICAS TIPO KINK EM TEORIAS $f(R,T)$ e $\Lambda(\Phi)$

Dissertação aprovada em 30/07/2019

BANCA EXAMINADORA



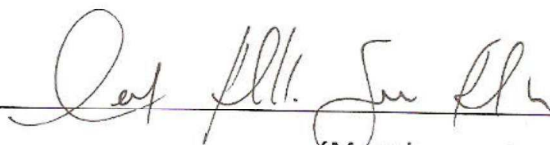
(Presidente)

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida
Departamento de Ciências Exatas – UFPB



(Membro externo)

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Departamento de Física – UEPB

À minha família

Agradecimentos

- A Deus, por permitir que este trabalho fosse concluído, por ser a esperança da minha caminhada em busca dos meus sonhos e por ser a alegria e a razão de cada um dos meus êxitos.
- Ao meu orientador, o Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos, pelo ensino, dedicação, paciência e esforço para que minha dissertação fosse bem sucedida. Sua qualidade profissional me auxiliou contundentemente na produção deste documento e me trouxe inspiração por tamanha competência e amor à física, algo que é contagiante e louvável.
- À minha esposa, Gabriella Alves Araújo, por todo apoio e carinho nos mais diversos momentos destes últimos anos e por seu incentivo à minha carreira e minha vida.
- Aos meus pais, Adenilson dos Santos e Marilene da Silva Santos, e aos meus irmãos, Ramon da Silva Santos, Ravel da Silva Santos e João Victor da Silva Santos, os quais me motivam e me inspiram, fazendo juntos, alicerces para cada uma das conquistas que alcancei e que ainda ei de lograr.
- A todos os professores da Unidade Acadêmica de Física - UAF, os quais contribuíram para a minha formação de maneira ímpar com seus conhecimentos e também ao "Seu Hélio", por toda a ajuda e disposição quando precisei.
- Aos meus colegas de curso, em especial Júlio, Ronaldo, Felipe, Carol, Joesley, Girlândia, Rafaela e Thays, por toda ajuda, amizade, discussões e pelos vários momentos divertidos que fizeram desta, uma jornada prazerosa e inesquecível.
- Ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, pela estrutura e oportunidade da realização desse mestrado.
- À CAPES, pelo suporte financeiro.

*“Se eu vi mais longe, foi por estar
sobre ombros de gigantes.”
(Isaac Newton)*

Resumo

O universo encontra-se atualmente em uma fase de expansão acelerada, fato que foi comprovado experimentalmente no final da década de 90 por dois grupos independentes de pesquisa. Os modelos cosmológicos envolvendo campos escalares, permitem a descrição desse regime de expansão acelerada no cosmos e se apresentam como uma alternativa promissora no estudo da era da inflação, período primordial de expansão do universo. O mecanismo responsável por esse fenômeno foi chamado de energia escura, o qual já recebeu diversas propostas teóricas para ser descrito, dentre as quais, podemos destacar os modelos cosmológicos do tipo quintessência, onde uma ação composta por um campo escalar é acoplada a ação de Einstein-Hilbert. Tal acoplamento, repercute tanto na equação de movimento relativa a densidade de lagrangiana do campo escalar, quanto nas equações de Friedmann, provenientes da minimização da ação com respeito à métrica. Este procedimento mostra claramente que esse campo escalar irá influenciar na determinação dos parâmetros cosmológicos. Nesta dissertação, esperamos compreender o processo de expansão do Universo acelerado utilizando as soluções das equações de Friedmann e alguns parâmetros cosmológicos relevantes, e para isso, apresentaremos uma metodologia capaz de construir novas famílias de potenciais compostas por um campo escalar e duas funções de gravidade modificada, sendo elas uma do tipo $f(R, T)$ e uma função $\Lambda(\phi)$ que varia ao longo do tempo. Sendo assim, construiremos um modelo analítico de vínculos entre estes modelos e estudaremos se os parâmetros cosmológicos derivados desta proposta são consistentes a partir de dois exemplos de modelos conhecidos, verificando se os resultados corroboram com a descrição de diferentes fases do universo.

Palavras-chave: Defeitos topológicos, expansão acelerada, parâmetros cosmológicos, campos escalares, gravidade $f(R, T)$, gravidade $\Lambda(\phi)$.

Abstract

The universe is currently in a phase of accelerated expansion, a fact that was proven experimentally in the late 90's by two independent research groups. The cosmological models involving scalar fields allow the description of this regime of accelerated expansion in the cosmos and present themselves as a promising alternative in the study of the era of inflation, the primordial period of expansion of the universe. The mechanism responsible for this phenomenon was called dark energy, which has already received several theoretical proposals to be described, among which we can highlight the cosmological models of the quintessence type, where an action composed by a scalar field is coupled to the action of Einstein -Hilbert. Such a coupling has repercussions on the relative motion equation of the Lagrangian density of the scalar field, as well as on the Friedmann equations, derived from the minimization of the action with respect to the metric. This procedure clearly shows that this scalar field will influence the determination of the cosmological parameters. In this dissertation we hope to understand the process of expansion of the accelerated universe using the solutions of the Friedmann equations and some relevant cosmological parameters, and for this, we will present a methodology capable of constructing new families of potentials composed by a scalar field and two functions of modified gravity, being one of type $f(R, T)$ and a function $\Lambda(\phi)$ that varies over time. Thus, we will construct an analytical model of links between these models and will study if the cosmological parameters derived from this proposal are consistent from two examples of known models, verifying if the results corroborate with the description of different phases of the universe.

Keywords: Topological defects, accelerated expansion, cosmological parameters, scalar fields, gravity $f(R, T)$, gravity $\Lambda(\phi)$.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico do potencial ϕ^4	29
Figura 2 – Solução analítica do tipo kink representada pela linha vermelha e do tipo anti-kink pela linha azul.	29
Figura 3 – Gráfico do potencial ϕ^4 invertido.	30
Figura 4 – Soluções do tipo lump: solução positiva - linha vermelha; solução negativa - linha azul.	30
Figura 5 – Gráfico de $\eta_0(x)$ para o Exemplo 1, caracterizando estabilidade da solução estática de um potencial do tipo ϕ^4	33
Figura 6 – Gráfico $\eta_0(x)$ para o Exemplo 2, que caracteriza a instabilidade da solução estática de um potencial do tipo ϕ^4 invertido.	34
Figura 7 – Evolução de $H(t)$ para o Exemplo 1 com presença apenas de $f(R, T)$ na linha azul e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ na linha vermelha.	60
Figura 8 – Gráfico que representa a evolução de $T(t)$ para o primeiro Exemplo de apenas $f(R, T)$ em azul e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ em vermelha.	61
Figura 9 – Gráfico da evolução de $\omega(t)$ para o Exemplo 1, com apenas $f(R, T)$ em preto, apenas $\Lambda(\phi)$ em azul e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ em vermelho.	62
Figura 10 – Gráfico Paramétrico para a evolução das funções T e f do Exemplo número 1 com apenas $f(R, T)$ mostrado na linha preta e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ na linha vermelha.	62
Figura 11 – Gráfico que representa a evolução de $H(t)$ para o modelo 2.	64
Figura 12 – Evolução de $T(t)$ para Exemplo 2 com presença apenas de $f(R, T)$ em vermelho e de $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ em azul.	65
Figura 13 – Gráfico que representa o comportamento de $\omega(t)$ para nosso segundo Exemplo com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ em azul e apenas $f(R, T)$ em vermelho.	65
Figura 14 – Gráfico Paramétrico para a evolução das funções T e f do Exemplo número 2 com apenas $f(R, T)$ mostrado na linha vermelha e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ na linha azul.	65

Lista de abreviaturas e siglas

UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
UAF	Unidade Acadêmica de Física
PPGF	Programa de Pós-Graduação em Física
BPS	Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfield
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
CDM	Cold Dark Matter
EoS	Equação de Estado

Lista de símbolos

Λ	Letra grega Lambda maiúscula
Φ	Letra grega Fi maiúscula
ω	Letra grega Omega minúscula
μ	Letra grega Mi minúscula
ν	Letra grega Ni minúscula
ρ	Letra grega Rô minúscula
ϵ	Letra grega Epsilon minúscula
∞	Símbolo do infinito
η	Letra grega Éta minúscula
δ	Letra grega Delta minúscula
θ	Letra grega Téta minúscula
Γ	Letra grega Gama maiúscula
σ	Letra grega Sigma minúscula
λ	Letra grega Lambda minúscula
∇	Símbolo Nabla
α	Letra grega Alfa minúscula
\square	Símbolo Box
β	Letra grega Beta minúscula
Θ	Letra grega Téta maiúscula
γ	Letra grega Gama minúscula
ψ	Letra grega Psi minúscula

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
2	DEFEITOS TOPOLÓGICOS	25
2.1	Teoria para um Campo Escalar Real	25
2.2	Método BPS	26
2.3	Carga Topológica	28
2.4	Solução do Tipo Kink	28
2.5	Soluções do Tipo Lump	29
2.6	Estabilidade Linear	31
3	UNIVERSO EM EXPANSÃO	35
3.1	Equação de Einstein	35
3.2	Modelo FLRW	37
3.3	Tensor Energia-Momento para um fluido perfeito	39
3.4	Formalismo de Primeira Ordem	42
4	EXTENSÕES DA GRAVITAÇÃO	45
4.1	Teorias de gravidade com $\Lambda(\phi)$	46
4.2	Teorias $f(R, T)$ de gravidade	48
5	APLICAÇÃO DE DEFEITOS EM GRAVIDADE $f(R, T)$ E $\Lambda(\phi)$	53
5.1	Formalismo de Primeira Ordem	55
5.2	Exemplos	58
5.2.1	Caso $n=1$ com $f(T) + \Lambda(\phi)$	58
5.2.2	Caso βW_ϕ^2 com $f(T) + \Lambda(\phi)$	62
6	CONCLUSÕES	67
	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICES	73
	APÊNDICE A – TENSOR DE RICCI	75

1 Introdução

No estudo do universo em suas altas escalas, a cosmologia padrão tem a teoria do Big-Bang em Relatividade Geral como uma descrição bem sucedida do universo observável. O estágio de radiação dominante ou o estágio de matéria dominante caracterizam o estado do universo para esse modelo, o que corresponde a uma expansão em que a segunda derivada do fator de escala é negativa. Entretanto, ocorreu uma necessidade de resolver problemas associados ao modelo padrão já que este somente não é suficiente para resolver alguns problemas cosmológicos como o problema do horizonte, a estrutura em larga escala e o problema dos monopólos, como exemplos. Para superar estes obstáculos, é preciso considerar que o universo primitivo passou por uma expansão exponencial em uma determinada época, um período conhecido como inflação.

Para os estudos em cosmologia, as observações experimentais são de extrema importância para o embasamento de modelos teóricos bem fundamentados, e esses experimentos têm vivido uma era de ouro nos anos recentes. Alguns exemplos de como esses dados alteraram nossa perspectiva de entender a dinâmica do universo são os dados sobre a expansão acelerada do universo, que desde o final dos anos 90 foram investigados por dois grupos experimentais independentes denominados *Supernova Cosmology Project* e *High Redshift Supernova Team* [1, 2] e as medidas experimentais recentes das ondas gravitacionais, comprovando as previsões de Einstein [3, 4, 5].

Os grupos *Supernova Cosmology Project* e *High Redshift Supernova Team* esperavam que o brilho de uma supernova do tipo Ia fosse maior do que seus desvios para o vermelho (*redshift*), sob a hipótese de uma expansão não acelerada do universo. Ao invés disso, eles observaram que o brilho dessas supernovas ia ficando cada vez menor, caracterizando uma expansão acelerada [1, 2]. Para explicar essa expansão, foi introduzido um mecanismo “estranho” no fluido do universo, denominado energia escura. “Energia” por ser uma componente que não se aglomera como a matéria e “escura” por não emitir radiação eletromagnética [6].

As observações experimentais mostram que ela corresponde a aproximadamente 70% do conteúdo de matéria do universo [7], algo que mudou drasticamente nossa visão do cosmos já que a gravidade, que é uma força de atração, deveria fazer com que a aceleração fosse desacelerada, conforme se acreditava durante muitas décadas [8, 9]. Desse modo, procurar entender a origem e as características da atual fase de aceleração observada no universo e mostrar uma resposta plausível para a natureza da energia escura, têm sido um dos maiores desafios da cosmologia teórica da atualidade [10, 11].

Existem hoje diversas propostas teóricas para tentar descrever a energia escura,

entre as quais, a de maior simplicidade seria a adição de uma constante cosmológica Λ às equações de Einstein para a relatividade geral, o que será discutido com um maior aparato neste trabalho. Outra descrição que podemos destacar para este fenômeno seria a dos modelos do tipo quintessência, na qual uma ação composta pela lagrangiana de um campo escalar é acoplada à ação de Einstein-Hilbert, induzindo a uma “quinta força” de longo alcance, dominando o processo de aceleração do Universo após um longo período de tempo [12, 13] e ainda no processo de inflação do cosmos [14]. Esse acoplamento, tem influência na equação de movimento relativa à densidade de lagrangiana do campo escalar e nas equações de Friedmann, provenientes da minimização da ação de Einstein-Hilbert [9, 15], o que irá influenciar na determinação de parâmetros cosmológicos como o parâmetro de Hubble, o fator de escala, o parâmetro de aceleração, a densidade, a pressão do universo e o chamado parâmetro da equação de estado [9, 15].

Os modelos provindos desse acoplamento são conhecidos como modelos de inflação e tipicamente envolvem um único campo escalar deslocado do mínimo de um potencial, criando uma energia do vácuo diferente de zero que domina a energia de estresse do universo. Quando usamos campos escalares reais, os potenciais gerados por eles serão não-lineares e se suas soluções forem estáticas, esses potenciais serão denominados de defeitos [16].

Neste trabalho, abordaremos modelos de campos escalares em (1+1) dimensões, e por esta razão, podemos denominar os defeitos como topológicos e não-topológicos, ou kinks e lumps, respectivamente [16], e como estamos falando de soluções não-lineares, podemos considerá-las como soluções solitárias e estáveis [17]. Esses defeitos surgem da transição de fase provinda de uma quebra espontânea de simetria e que ainda assim mantêm a estabilidade sob perturbações. Devemos enfatizar que os defeitos se diferem das ondas solitárias, ou sólitons hidrodinâmicos, estudados por Scott Russell (1808-1882) em seus experimentos realizados em 1834 [18]. Russell observou essas ondas solitárias quando um barco deixou de ser puxado subitamente, mas a massa de água deslocada mantinha-se em movimento e ao atingir o barco, criava uma elevação solitária. Essa elevação tinham forma circular e bem definida com o passar do tempo e se perpetuava sem perder a sua forma e a velocidade.

As soluções tipo defeitos possuem grande aplicabilidade em diversas áreas da física como a física de altas energias [19, 20]; cenários de mundos-brana [21]; diversos modelos cosmológicos [22, 23] e em física de matéria condensada [24].

Nesta dissertação, iremos abranger tópicos em teoria clássica de campos e também em cosmologia de quintessência com gravidades modificadas $f(R, T)$ e $\Lambda(\phi)$. Esse conteúdo será apresentado a partir do Capítulo 2, onde faremos um breve estudo acerca da teoria clássica de campos escalares reais em que descrevemos a variação da ação de uma densidade de lagrangiana composta por um campo escalar real, determinamos a equação

de Euler-Lagrange e introduzimos o chamado método BPS, para encontrar a energia deste modelo. Ainda nesse capítulo, estudaremos o conceito de carga topológica e também desenvolveremos cuidadosamente a metodologia da estabilidade de campos estáticos.

No Capítulo 3, vamos expor uma revisão sobre alguns conceitos necessários de cosmologia, obtendo o procedimento de minimização da ação clássica de Einstein-Hilbert acoplada à ação de uma lagrangiana composta por um campo escalar. Esse procedimento nos permitirá encontrar as equações de campo de Einstein e, conseqüentemente, determinarmos as equações de Friedmann para este caso, o que será necessário para o cálculo dos parâmetros cosmológicos pertinentes a este trabalho. Vamos ilustrar o procedimento de determinação da equação de movimento para o campo escalar acoplado e revisar o formalismo de primeira ordem proposto em [15], o qual nos permite a obtenção de modelos de quintessência analíticos.

No quarto capítulo, discutiremos duas teorias de gravidade modificada que tentam explicar a grande discrepância entre os resultados teóricos e observacionais para o cálculo da massa do universo através da cosmologia de quintessência. Sendo assim, abordaremos primeiro a teoria de gravidade $\Lambda(\phi)$, que já é amplamente divulgada no meio científico e apesar de ter algumas inconsistências pertinentes dos valores obtidos teoricamente com os valores observados experimentalmente, mostrou-se válida ao se assumir um modelo que considera que esta constante varia com o passar do tempo, algo que já foi abordado e trouxe resultados satisfatórios. Em seguida, vamos abordar a teoria de gravidade $f(R, T)$, que é baseada no modelo de T. Harko [25] e que tenta juntar matéria e energia em seus argumentos físicos na tentativa de explicar a expansão do universo.

Na tentativa de unir esses dois modelos de gravidade em uma ação clássica e observar os novos parâmetros cosmológicos oriundos desse procedimento, vamos adotar uma nova abordagem que será descrita no capítulo 5. Nela, vamos mostrar os passos matemáticos para demonstrar relações de vínculos entre esses modelos buscando uma nova roupagem de gravidade modificada e aplicar discussões físicas para fundamentar tal proposta. Para corroborar nossa discussão, mostraremos os resultados obtidos para dois exemplos de modelos de soluções conhecidos e compará-los com outras abordagens. Por fim, no Capítulo 6, apresentaremos nossas conclusões e perspectivas acerca dos frutos deste trabalho.

2 Defeitos Topológicos

Neste capítulo, será apresentada uma abordagem dos campos escalares reais para modelos de um único campo. Esses modelos que serão analisados neste trabalho, obedecem às equações diferenciais de primeira e de segunda ordem, ou seja, aqueles que possuem uma dimensão espacial e uma temporal, caracterizando (1+1) dimensões. Para isso, adotaremos teorias de campos relativísticas que se submetem à métrica de Minkowski e às convenções de unidades naturais, onde a velocidade da luz é $c = 1$. Faremos ainda um estudo das soluções que representam os defeitos não-triviais com energia mínima usando as soluções do tipo BPS (Bogomol'nyi, Prasad e Sommersfield) e trataremos do conceito de carga topológica, mostrando as implicações desta nas soluções do tipo defeito. Para concluir, abordaremos o conceito de estabilidade linear para modelos de um campo escalar.

2.1 Teoria para um Campo Escalar Real

Quando estamos trabalhando com teoria de campos é comum nos depararmos com o conceito de *defeito*. Os *defeitos* são soluções clássicas oriundas das equações de movimento para uma topologia não trivial. Este fenômeno acontece em modelos que resistem à quebra espontânea de simetria e nos auxiliam na análise de comportamento dos campos escalares em um regime assintótico, ou seja, no estado de vácuo [26].

Para entendermos como essa relação ocorre, vamos partir de uma densidade de lagrangiana para um campo escalar real como sendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde μ , no caso unidimensional, pode ser 0 ou 1 e $V(\phi)$ é o potencial do modelo que está sendo abordado. Esta densidade de lagrangeana está relacionada com uma ação clássica que assume a forma

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x. \quad (2.2)$$

Se tomarmos essa ação e utilizarmos o princípio variacional (ou princípio da mínima ação), podemos encontrar a equação de movimento para este campo. Este princípio afirma que a dinâmica do sistema entre os instantes de tempo t_1 e t_2 é tal que minimiza a ação. Então,

$$\delta S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x = 0. \quad (2.3)$$

Sendo assim, ao realizarmos este procedimento, chegamos a equação de movimento de Euler-Lagrange como sendo

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.4)$$

Considerando a métrica de Minkowsky em um espaço de (1+1) dimensões sendo $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$, chegamos a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.5)$$

ou ainda

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0, \quad (2.6)$$

onde $\ddot{\phi}$ e ϕ'' são as derivadas parciais de segunda ordem do campo com relação ao tempo e à posição, respectivamente, e V_ϕ é a derivada do potencial com respeito a este mesmo campo. Assumindo um campo estático, em que este é independente do tempo, ou seja, $\phi = \phi(x)$, podemos escrever a equação (2.6) como

$$-\phi'' + V_\phi = 0, \quad (2.7)$$

e conseqüentemente

$$\phi'' = V_\phi. \quad (2.8)$$

Se tomarmos esta equação e multiplicarmos ambos os lados por ϕ , vamos obter:

$$\phi' \phi'' = V_\phi \phi', \quad (2.9)$$

ou também

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\phi'^2}{2} \right) = \frac{dV}{dx}, \quad (2.10)$$

que integrada nos traz

$$\phi' = \pm \sqrt{2V + C}, \quad (2.11)$$

que é a equação diferencial de 1ª ordem. A constante C é provinda da integração e determinada pelas condições de contorno, porém, estamos interessados em soluções cuja derivada seja suave, bem definida e sua integração seja finita sobre toda a variação espacial, o que nos leva a impor que $C = 0$ para que nossa energia total seja finita [16]. Para provar isso, vamos obter esta última equação por um outro método.

2.2 Método BPS

Com objetivo de determinar a energia mínima não trivial, foi formulado o método BPS, desenvolvido por Bogomol'nyi (1976), Prasad e Sommerfield (1975) e obtido do cálculo da energia do sistema [27, 28]. A ideia central desse método se baseia nas interpretações físicas, abordando a energia associada à configuração estática de forma

simples, fechada e mínima, além de proporcionar a equação diferencial de primeira ordem para um determinado campo. Com base nisso, vamos escrever a densidade de energia para o caso de campos estáticos da seguinte forma:

$$\rho(x) = -\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi). \quad (2.12)$$

Ao integramos esta densidade sob toda a dimensão espacial, teremos os valores de E , que podemos definir como sendo a energia total por todo espaço e pode ser escrita da seguinte maneira,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right) dx. \quad (2.13)$$

Um método para resolver essa integral é completar um quadrado perfeito do integrando. Fazendo isto, teremos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}(\phi' \mp \sqrt{2V})^2 \pm \phi' \sqrt{2V} \right] dx, \quad (2.14)$$

e para minimizarmos esta energia, podemos considerar o vínculo

$$\phi' = \sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.15)$$

satisfazendo a equação (2.11) para o caso em que $C = 0$. A energia agora minimizada é denominada E_{BPS} e descrita como simplesmente

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi' \sqrt{2V(\phi)} dx. \quad (2.16)$$

Vamos redefinir esse potencial de outra forma, associando-o em termos de uma nova função contínua com valores assintóticos de $\phi(x)$ conectados aos pontos críticos da função $W(\phi)$, ou seja,

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 = \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (2.17)$$

onde W_ϕ é denominada função superpotencial. O motivo pelo qual denominamos esta função assim é justamente fazer uma analogia com a Mecânica Quântica de supersimetria [29]. Com essa redefinição, podemos descrever a Energia BPS da seguinte forma:

$$E_{BPS} = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} W_\phi \right) dx, \quad (2.18)$$

ou ainda reescrever como

$$E_{BPS} = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]|, \quad (2.19)$$

cujas equações são conhecidas também como limite de Bgomol'nyi. Dessa forma, ao obtermos a forma da função $W(\phi)$ e a evolução espacial do campo ($\phi = \phi(x)$), podemos construir a energia BPS. Assim, a equação diferencial de primeira ordem para ϕ fica com a forma:

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi), \quad (2.20)$$

descrevendo a evolução do campo escalar real trabalhado.

2.3 Carga Topológica

Os *defeitos* são uma região de transição entre diferentes fases de um sistema. Em outras palavras, podemos definir como sendo uma seção de um sistema onde ocorre uma mudança de propriedades e/ou características [30]. A carga topológica Q_T tem o propósito de caracterizar os defeitos entre topológicos e não-topológicos. Podemos determinar essa carga utilizando o conceito de densidade de corrente J_T^μ , que pode ser escrito da seguinte forma

$$J_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W, \quad (2.21)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita anti-simétrico, pela troca de $\mu \rightarrow \nu$. Cada índice desses pode variar de acordo com o número de dimensões, que em nosso caso, só podem variar em $\mu, \nu = 0, 1$, uma vez que estamos trabalhando com um modelo de (1+1) dimensões. As componentes desse pseudo-tensor em nosso estudo são $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$ e $\epsilon^{10} = \epsilon^{01} = 1$ e devido à antissimetria de $\epsilon^{\mu\nu}$, é visível que existe uma conservação de corrente topológica. De fato,

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.22)$$

Aliando isso com um paralelo das cargas e correntes de Noether [16], é possível escrever a carga topológica, para soluções estáticas, na forma:

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_{-\infty}^{+\infty} J^0 dx; \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} W dx; \\ &= W(\phi(+\infty)) - W(\phi(-\infty)). \end{aligned} \quad (2.23)$$

A carga dada pela equação (2.23) associa as soluções estáticas de duas formas distintas: soluções topológicas, com valor de carga diferente de zero e conhecidas como kinks, e as soluções não-topológicas, com cargas que resultam no valor igual a zero, conhecidas como lumps. A seguir, veremos como é o comportamento desses dois tipos de defeitos.

2.4 Solução do Tipo Kink

Uma carga topológica advinda de uma corrente topológica conservada, caracteriza um defeito do tipo kink, que tem como principal característica a estabilidade. Para exemplificar uma solução do tipo kink, vamos tomar o modelo ϕ^4 , que tem densidade de lagrangeana que pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi); \quad V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2. \quad (2.24)$$

A figura 1 mostra que o modelo ϕ^4 tem os valores de ± 1 para os mínimos do potencial, que são chamados de valores de vácuo do campo. A partir deste fato, vamos analisar as soluções não-triviais, ou seja, as quais não nos destinam a uma energia nula. Diante disso, podemos escrever a equação de primeira ordem deste modelo da seguinte forma

$$\phi' = W_\phi = (1 - \phi^2), \quad (2.25)$$

com solução analítica do tipo

$$\phi(x) = \tanh(x + A), \quad (2.26)$$

e que pode ser ilustrada através da figura 2.

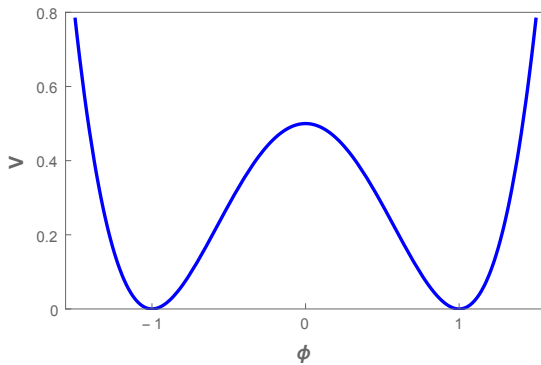


Figura 1 – Gráfico do potencial ϕ^4 .

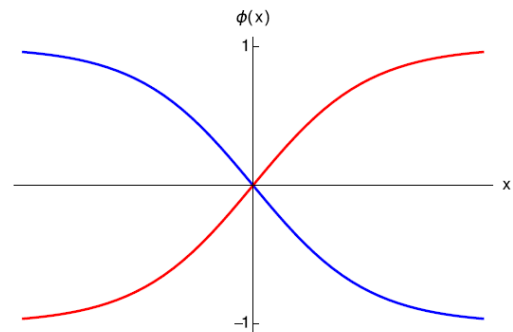


Figura 2 – Solução analítica do tipo kink representada pela linha vermelha e do tipo anti-kink pela linha azul.

Podemos ainda determinar a forma do superpotencial, que será descrita como sendo

$$\begin{aligned} W(\phi) &= \int d\phi W_\phi; \\ &= \int d\phi(1 - \phi^2); \\ &= \left(\phi - \frac{\phi^3}{3} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Analisando a figura 2, verificamos que as soluções demonstram limites assintóticos diferentes ligando os mínimos do potencial. Essas soluções são chamadas de kinks quando têm o sinal positivo e anti-kinks quando apresentam sinal negativo. Sempre que conectam os mínimos que fazem parte dele, temos um setor topológico.

2.5 Soluções do Tipo Lump

Ao contrário das soluções kinks, quando ocorrem soluções decorrentes da carga topológica de valor nulo, temos uma solução não-topológica, conhecida como defeito do

tipo lump, os quais se conectam a uma única configuração de um dado potencial e são conhecidas por apresentar instabilidade. O modelo ϕ^4 invertido nos mostra como deve ser as características desse tipo de fenômeno, através de seu potencial que é dado pela equação

$$V(\phi) = \frac{\phi^2(1 - \phi^2)}{2}, \quad (2.28)$$

que pode ser observada na figura 3. A equação diferencial de primeira ordem correspondente é descrita como

$$\phi' = W_\phi = -\phi(1 - \phi^2)^{1/2}, \quad (2.29)$$

com solução do tipo

$$\phi(x) = \text{sech}(x + B). \quad (2.30)$$

que tem como possível visualização de seu comportamento através da figura 4.

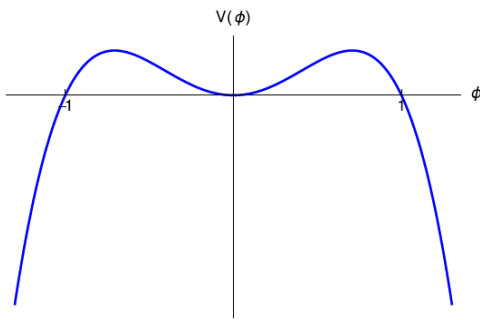


Figura 3 – Gráfico do potencial ϕ^4 invertido.

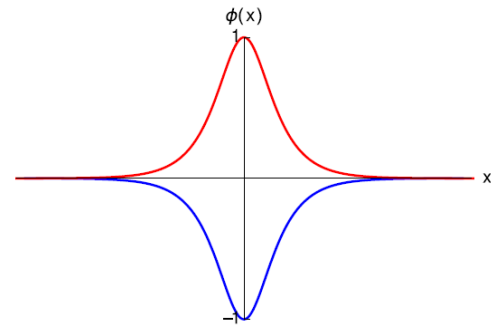


Figura 4 – Soluções do tipo lump: solução positiva - linha vermelha; solução negativa - linha azul.

A partir da integração da função $W(\phi)$, vamos encontrar

$$\begin{aligned} W(\phi) &= \int d\phi W_\phi; \\ &= \int d\phi [\phi(1 - \phi^2)^{1/2}]; \\ &= -\frac{1}{3}(1 - \phi^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pode-se constatar que tanto a carga topológica quanto a Energia BPS para este modelo são nulas. Pode se verificar também que o potencial $V(\phi)$ apresenta dois setores não-topológicos, conectando o mínimo local ($V = 0$, $\phi = \pm 1$) com os pontos $V = 0$ e $\phi = 0$. Este tipo de configuração de setores, em modelos formados por um campo escalar real, sempre caracteriza os defeitos lumps.

2.6 Estabilidade Linear

Como foi mostrado, os defeitos topológicos são estruturas estáveis, porém, o estudo da estabilidade linear mostra-nos se as soluções estudadas são estáveis ou instáveis sob pequenas perturbações [31]. Assim, vamos trabalhar com uma equação de movimento de um campo escalar do tipo

$$\phi(x, t) = \phi_S(x) + \eta(x, t), \quad (2.32)$$

onde $\eta(x, t)$ é uma pequena perturbação e $\phi_S(x)$ é a solução estática. Substituindo a equação(2.32) na equação de movimento (2.4), encontraremos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.33)$$

e considerando pequenas flutuações em torno da solução estática, teremos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_S} - \left. \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_S} = 0, \quad (2.34)$$

como os dois últimos termos formam justamente a equação de movimento para a solução estática, vamos obter simplesmente

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_S} = 0. \quad (2.35)$$

Podemos observar que η depende da forma do potencial e da solução estática ϕ_S , por isso, vamos tomar o seguinte *Ansatz* para a perturbação

$$\eta(x, t) = \sum_{\eta} \eta_n(x) \cos(\omega_n t), \quad (2.36)$$

o que transforma a equação de evolução de η para algo do tipo

$$-\frac{d^2 \eta_n}{dx^2} + U(x) \eta_n = \omega_n^2 \eta_n; \quad U(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_S}, \quad (2.37)$$

que é uma equação do tipo Schrodinger independente do tempo para a função $\eta_n(x)$ e autovalores ω_n^2 . De forma análoga ao que é utilizado em mecânica quântica, podemos reescrever a equação anterior em notação de operadores como sendo

$$\hat{H} \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n; \quad \hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\phi_S \phi_S}, \quad (2.38)$$

onde ω_n^2 são os auto-valores e $\eta_n(x)$ são os autovetores desses operadores. Podemos impor, sempre que possível, que se pode encontrar um autovalor mínimo para tal equação, que

denominaremos de ω_0 ou modo zero. Sendo assim, podemos representar a equação de autovalores em termos dos operadores a e a^+ , ou seja,

$$\hat{H} = aa^+ = \left(\frac{d}{dx} + W_{\phi_S \phi_S} \right) \left(-\frac{d}{dx} + W_{\phi_S \phi_S} \right). \quad (2.39)$$

Como a hamiltoniana \hat{H} é $\hat{H}\eta_n(x)$, a equação (2.39) pode ser escrita como

$$\hat{H}\eta_n(x) = \left(\frac{d}{dx} + W_{\phi_S \phi_S} \right) \left(-\frac{d}{dx} + W_{\phi_S \phi_S} \right) \eta_n(x), \quad (2.40)$$

que desenvolvida nos mostra que

$$\hat{H}\eta_n(x) = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + W_{\phi_S \phi_S}^2 + W_{\phi_S} W_{\phi_S \phi_S \phi_S} \right] \eta_n(x), \quad (2.41)$$

e pode ser reescrita em termos dos operadores a e a^+ para torna-se

$$\hat{H}\eta_n(x) = aa^+\eta_n = \omega_n^2 \eta_n. \quad (2.42)$$

Admitindo a existência de estados ligados para o modo zero, ou seja, para $\omega_0 = 0$, temos que

$$a\eta_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W_{\phi_S \phi_S} \right) \eta_0 = 0, \quad (2.43)$$

e que se for integrada nos trará

$$\eta_0(x) = Ae^{\int W_{\phi_S \phi_S} dx}. \quad (2.44)$$

Como A está sendo uma constante de integração e observando que

$$\frac{d \log(W_{\phi_S})}{dx} = \frac{1}{W_{\phi_S}} W_{\phi_S} W_{\phi_S \phi_S} = W_{\phi_S \phi_S}, \quad (2.45)$$

pode-se notar que

$$\eta_0 = AW_{\phi_S}. \quad (2.46)$$

É possível mostrar que soluções do tipo kink são estáveis por estabilidade linear, já que o menor autovalor encontrado é zero e que soluções do tipo lump são instáveis, uma vez que o menor autovalor encontrado é menor que zero [31].

Exemplo 1: Podemos exemplificar como este método é efetivado utilizando um potencial do tipo ϕ^4 , com $W_{\phi_S} = 1 - \phi_S^2$, e cuja solução analítica é apresentada por $\phi_S = \tanh(x)$. Sendo assim, teremos que

$$\eta_0 = 1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.47)$$

tendo que

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos(\omega_0 t), \quad (2.48)$$

onde

$$\eta(x) = \eta_0 \operatorname{sech}(x). \quad (2.49)$$

A solução perturbada será do tipo $\phi(x) = \tanh(x) + \eta_0 \operatorname{sech}(x)$, onde $\eta_0 \ll 1$. Através desta última equação, nos é revelado que η_0 corresponde ao modo-zero de oscilação, o que caracteriza a estabilidade da solução estática. Este comportamento pode ser visualizado no gráfico 5.

É possível verificar que se o estado η_0 for diferente do modo-zero de oscilação, ele será um estado excitado, abrindo espaço para a existência de um estado fundamental com auto-valor $\omega_n^2 < 0$, ou seja, $\omega_n \rightarrow i\omega_n$. A consequência deste tipo de estado é que

$$\eta(x, t) = \eta_0 \cos(i\omega_n t) = \eta_0 \left(\frac{e^{\omega_n t} + e^{-\omega_n t}}{2} \right). \quad (2.50)$$

Ao analisarmos esta solução, vemos que para um certo tempo t tendendo ao infinito, a perturbação $\eta(x, t)$ também tenderá ao infinito, o que leva a função para a desestabilização e implica que $\phi_S(x)$ é instável.

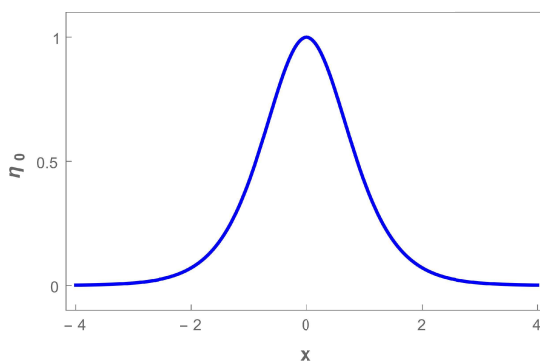


Figura 5 – Gráfico de $\eta_0(x)$ para o Exemplo 1, caracterizando estabilidade da solução estática de um potencial do tipo ϕ^4 .

Exemplo 2: Podemos ainda mostrar o comportamento do método da estabilidade para um potencial do tipo ϕ^4 invertido, onde $W_{\phi_S} = \phi \sqrt{1 - \phi_S^2}$, em que $\phi'_S = -W_{\phi_S}$ e a solução analítica desse potencial será $\phi_S = \operatorname{sech}(x)$, conseqüentemente

$$\eta_0 = W_{\phi_S} = \operatorname{sech}(x) \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(x)}, \quad (2.51)$$

correspondendo a um primeiro modo de oscilação, mostrando-nos que a solução $\phi_S(x)$ para este modelo é instável e com comportamento que pode ser visualizado no gráfico 6. Isso significa, que esta não é a auto-função do estado fundamental e que o modo zero estaria relacionado a um autovalor $\omega^2 < 0$, resultando na instabilidade do *lump* .

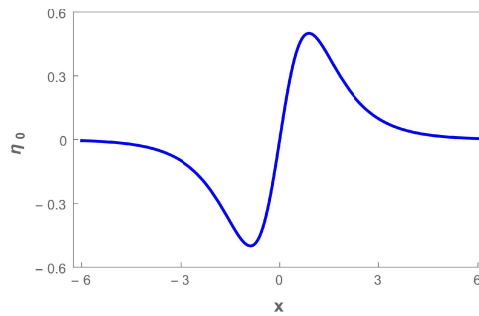


Figura 6 – Gráfico $\eta_0(x)$ para o Exemplo 2, que caracteriza a instabilidade da solução estática de um potencial do tipo ϕ^4 invertido.

3 Universo em expansão

Em 1922, Alexander Friedmann (1888-1925) escreveu um trabalho apresentando soluções matemáticas possíveis para as equações de campo da teoria relativística da gravitação, as quais demonstravam que o universo não era estático, mas que estava em um regime de expansão [32]. Estes cálculos caíram como um raio na comunidade científica, que acreditava em um universo estático em grandes escalas.

Neste capítulo, vamos abordar uma das maneiras de entender como esse fenômeno ocorre considerando modelos de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) descritos por campos escalares reais. Tal abordagem considera a energia escura como quintessência, e para isso, vamos introduzir as equações de campo de Einstein na busca de uma explicação para uma expansão acelerada. Assim, vamos começar deduzindo as equações de campo oriundas da ação de Einstein-Hilbert e em seguida discutir a métrica FLRW, a qual é apropriada para tal descrição e é aplicada as equações de campo de acordo com os princípios cosmológicos, permitindo-nos a chegar nas equações de Friedmann.

Em seguida, iremos abordar o tensor energia-momento, que será imprescindível em nosso trabalho, uma vez que estamos considerando campos escalares acoplados a gravitação e representamos o universo como um fluido perfeito. Podemos também relacionar as equações de Friedmann para chegarmos a equação de continuidade para o fluido perfeito e, por conseguinte, a equação de movimento. Por fim, apresentaremos o formalismo de primeira ordem como uma nova roupagem para a discussão feita neste capítulo e facilitador do entendimento na discussão da expansão acelerada do universo.

3.1 Equação de Einstein

Para melhor entendermos as discussões que serão feitas nas próximas seções, vamos obter as equações de campo da Relatividade Geral, as quais são derivadas a partir do princípio variacional. Faremos isso utilizando o método da minimização da ação de Einstein-Hilbert acoplada a uma densidade de lagrangeana de um campo escalar real, algo semelhante ao que fizemos no segundo capítulo deste trabalho. A equação desta ação é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right], \quad (3.1)$$

onde R é o escalar de Ricci, g é o determinante do tensor métrico e $\mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi)$ a lagrangeana que corresponde ao campo escalar. Se variarmos esta ação, teremos

$$\delta S = \int d^4x \left[\delta \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right) + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \right) \right]. \quad (3.2)$$

Desenvolvendo esses cálculos, nos deparamos em uma dada situação no qual devemos usar a seguinte identidade:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Para demonstrar esta relação, vamos considerar, para uma matriz qualquer

$$Tr(\log M) = \log(\det M). \quad (3.3)$$

Aplicando o princípio variacional, teremos

$$\delta Tr\left(\frac{1}{M}\delta M\right) = \frac{1}{\det M}\delta(\delta M). \quad (3.4)$$

Assumindo então, que $Tr(M) = M_{ii}$, vamos ter

$$\left(M^{-1}\delta M\right)_{ij} = \sum_k M_{ik}^{-1}\delta M_{kj}. \quad (3.5)$$

Com base nisso, reescrevendo a equação (3.4), obteremos

$$Tr(M^{-1}\delta M)_{ii} = \sum_k (M_{ik}^{-1})\delta M_{ki}. \quad (3.6)$$

Agora, definimos o seguinte vínculo

$$Tr(M^{-1}\delta M) = \sum_i \sum_k (M^{-1})_{ik}\delta M_{ki}. \quad (3.7)$$

Usando o fato que $M = g^{\mu\nu}$, $M^{-1} = g_{\mu\nu}$ e $\det(M) = g$, a equação (3.7) ficará da seguinte forma

$$\sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = g^{-1}\delta g; \quad \delta g = g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

permitindo que a variação de $\sqrt{-g}$ seja escrita da seguinte maneira

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}}. \quad (3.9)$$

Podemos então obter uma expressão relacionando as equações (3.8) e (3.9) de modo a ficar:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Com isso, é possível escrever a equação (3.2) como sendo

$$\delta S = \int d^4x \left[-\frac{\sqrt{-g}}{4} \left(-\frac{g_{\mu\nu}}{2}R + 2g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta \left(-\frac{R}{4} + \mathcal{L} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Se utilizarmos o escalar de Ricci como sendo: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, quando fizermos δR vamos obter

$$\frac{-1}{4}\sqrt{-g}\delta R = \frac{-1}{4}\sqrt{-g}[\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}], \quad (3.12)$$

e de modo semelhante para $\delta\mathcal{L}$, teremos

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

É possível mostrar que o termo $\delta R_{\mu\nu}$ da equação (3.12) será nulo sobre todo o espaço-tempo devido às condições de contorno. Diante disso, substituindo as equações (3.12) e (3.13) na equação (3.11), teremos:

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g} \left[\frac{-1}{4}(R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}R) + \frac{1}{2} \left(2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (3.14)$$

Isso está de acordo com a teoria da relatividade geral, a qual nos permite observar uma relação entre a matéria e a geometria do universo, e que pode ser devidamente equacionada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = KT^{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

que é a equação que foi apresentada por Einstein em 1916 [33]. O lado esquerdo da equação nos fornece informações sobre a geometria do espaço-tempo, enquanto o lado direito apresenta a relação da matéria com o tensor energia momento.

Através da aplicação do Limite Newtoniano nas equações da Teoria da Relatividade Geral, podemos definir a constante de proporcionalidade $K = \frac{8\pi G}{c^4}$. Como mencionando anteriormente, estamos considerando o sistema natural de unidades, o que nos permite dizer que $4\pi G = c = 1$. Logo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T^{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

Do princípio da mínima ação, vemos que a equação (3.14) pode ser igualmente resolvida com a equação (3.16), no permitindo chegar a relação

$$2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} = T^{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

que é a expressão do tensor Energia-Momento.

3.2 Modelo FLRW

As análises de Edwin Hubble (1889-1953) mostraram que o princípio cosmológico nos revela um universo homogêneo e isotrópico em larga escala. Essa teoria foi comprovada

através da descoberta da radiação cósmica de fundos, a partir dos experimentos Arno Penzias de Robert Wilson, em 1965 [33]. Sendo assim, a métrica adequada para esta descrição deve obedecer a um espaço-tempo em coordenadas esféricas corrigido pelo fator de escala. Podemos escrever então, o elemento de linha apropriada como sendo

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.18)$$

onde k corresponde ao parâmetro de curvatura do universo, que pode assumir valores de $k = 1$ para o caso do universo ser esférico, $k = 0$ caso seja plano e $k = -1$ considerando que seja hiperbólico. A variável $a(t)$ representa o fator de escala da parte espacial da geometria.

O modelo FLRW consiste na hipótese de que universo seja espacialmente isotrópico e homogêneo em cada instante de tempo. Então vamos obter as equações que retratam a dinâmica do universo aplicando a métrica FLRW nas equações de campo da gravitação. Com isso, aplicaremos a métrica dada pela equação (3.18) para vermos que as componentes covariantes do tensor métrico são dadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

e as contravariantes são dada por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - kr^2)/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/a^2r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Através das equações de campo de Einstein, podemos obter as equações dinâmicas para um Universo em expansão. Para isso, vamos determinar o tensor de Ricci, onde

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (3.19)$$

que constitui base para a definição do tensor de curvatura, ou tensor de Riemann, dado por

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (3.20)$$

As simetrias que estão associadas a esse tensor são dadas por

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}. \quad (3.21)$$

Podemos ainda definir o escalar de Ricci a partir do tensor de Riemann, contraindo os índices simétricos, mostrando que

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (3.22)$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \quad (3.23)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}; \quad (3.24)$$

$$R_{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2; \quad (3.25)$$

$$R_{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.26)$$

as quais podem ser observadas no Apêndice deste trabalho. Conseqüentemente, a forma explícita do escalar de Ricci na métrica é

$$R = -6 \left(\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k^2}{a^2} \right). \quad (3.27)$$

3.3 Tensor Energia-Momento para um fluido perfeito

Como serão abordadas algumas teorias de gravitação mais adiante neste trabalho, somos levados a discutir o acoplamento de campos escalares reais com alguns modelos cosmológicos. Assim, será de extrema importância falarmos sobre um fluido perfeito, pelo fato do princípio cosmológico revelar que o universo é homogêneo e isotrópico através da métrica FLRW, como já se foi discutido neste capítulo. A partir disso, nos é mostrado que existe um fluido que permeia todo o universo e é comprovado através da conservação do tensor energia-momento [17]. Podemos então escrever o tensor energia-momento para um fluido perfeito como sendo

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (3.28)$$

cujo o vetor quadri-velocidade do fluido é representado por u , p é a pressão e ρ corresponde a densidade de energia. Se considerarmos o referencial para uma partícula estacionária, vamos ter que $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, trazendo componentes não nulas dadas por

$$T_{00} = (\rho + p)u_0 u_0 - pg_{00}, \quad e \quad T_{ij} = -pg_{ij}, \quad (3.29)$$

que na forma de matriz assume a seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 p / (1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 p \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

e tem seu traço como sendo: $T = T^\mu_\mu = \rho - 3p$.

Para encontrar as equações de Friedmann das componentes (00) e (ii), iremos aplicar a métrica FLRW junto do tensor energia-momento nas equações de Einstein dadas por (3.16), chegando a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}; \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p), \quad (3.31)$$

em que o termo $\frac{\dot{a}}{a}$ é chamado de parâmetro de Hubble, representado por H , e que nos permite escrever

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.32)$$

que é a equação representativa da taxa de expansão do universo em função da pressão e da densidade. A equação de Friedmann não tem utilidade se não tivermos uma equação da evolução temporal da densidade ρ dos constituintes do Universo, com base nisso, pode-se relacionar as equações acima com a equação de continuidade para um fluido, trazendo

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.33)$$

Ao analisarmos [8], vemos que é possível escrever a *equação de estado* dado por ω , que seria um vínculo entre a densidade e a pressão. Esse parâmetro será importante nos estudos da evolução do universo, podendo ser escrito como

$$\omega = \frac{p}{\rho}. \quad (3.34)$$

Tomando a equação (2.1) para uma lagrangiana, vamos extrair a densidade e a pressão acima mencionadas. Então, partindo de

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (3.35)$$

podemos substituí-la na expressão

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (3.36)$$

com isso, verificamos que o tensor energia momento pode ser reescrito como sendo

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi)\right], \quad (3.37)$$

com formas explícitas de suas componentes como sendo

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 - \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)\right] = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.38)$$

e

$$T_{ii} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.39)$$

As equações (3.38) e (3.39) podem ser relacionadas com a equação (3.30) de modo a resultar:

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (3.40)$$

e

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (3.41)$$

Com isso, podemos substituir as equações (3.40) e (3.41) na expressão (3.34), trazendo

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (3.42)$$

Também é possível observar a densidade em consequência do campo escalar, fazendo que a equação (3.32), nos forneça

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right) - \frac{k}{a^2}. \quad (3.43)$$

Através do parâmetro de Hubble, têm-se que:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \quad (3.44)$$

e substituindo esta última expressão na equação (3.31), vamos ter

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{3}(\rho_\phi + 3p_\phi), \quad (3.45)$$

que nos permite obter diretamente a relação

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{3}(\rho + 3p). \quad (3.46)$$

Sabendo disso, ao substituímos a equação (3.38) em (3.45), vamos encontrar

$$\dot{H} = -\frac{1}{3}(\rho + 3p) - \frac{2}{3}\rho_\phi + \frac{k}{a^2} = -\rho_\phi - p_\phi + \frac{k}{a^2}, \quad (3.47)$$

ou que também pode ser escrita como sendo

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V - \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V + \frac{k}{a^2} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2}. \quad (3.48)$$

Retornando para ação dada pela equação (3.1), podemos reescrever-las na forma

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}; \quad \tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (3.49)$$

e aplicando o método da minimização da ação somente em relação ao campo, temos

$$\delta S = \int d^4x \delta \tilde{\mathcal{L}} = 0, \quad (3.50)$$

que nos faz obter a expressão

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (3.51)$$

Se usarmos uma lagrangiana \mathcal{L} na forma padrão,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.52)$$

a equação de movimento para o campo escalar é obtida na forma

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V_\phi = 0. \quad (3.53)$$

Assumindo um caso específico em que $\phi = \phi(t)$, encontraremos

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + V_\phi = \ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (3.54)$$

e sendo $H = \dot{a}/a$, vamos obter a equação de movimento para este campo escalar como sendo

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (3.55)$$

3.4 Formalismo de Primeira Ordem

A energia escura, ainda que seja uma das possibilidades de explicação da expansão acelerada, é uma icónita para um entendimento maior de nosso universo (este tema será melhor abordado no próximo capítulo). Entre as várias propostas para descrevê-la, podemos considerar o modelo de quintessência ou modelo ϕ - Cold Dark Matter (ϕ - CDM). Esse modelo consiste em utilizar as equações de movimento associados a dinâmica de um campo escalar acoplado, o que permite uma investigação e comparação com modelos cosmológicos distintos. Nos trabalhos [34, 15] podemos notar, de forma simplificada, soluções que diminuem a ordem das equações de diferenciais de movimento.

Na busca dessas soluções, vamos escrever as equações de Friedmann para uma geometria plana ($k = 0$), ou seja,

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right), \quad (3.56)$$

e

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (3.57)$$

Também reescreveremos o parâmetro de Hubble da seguinte maneira

$$H \equiv -W(\phi). \quad (3.58)$$

Com isso, podemos redefinir a equação (3.57) como sendo

$$\dot{H} = -W_\phi \dot{\phi} = -\dot{\phi}^2 \quad e \quad \dot{\phi} = W_\phi, \quad (3.59)$$

que deixa claro que $W_\phi = \frac{dW}{d\phi} = \dot{\phi}$. Agora, ao solucionarmos a equação (3.56), vamos ter nossos parâmetros em termos da função $W(\phi)$, ou seja,

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{3}{2} \left[H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{3} \right]; \\ &= \frac{3}{2} H^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{2}; \\ &= \frac{3}{2} W^2 - \frac{W_\phi^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Esses resultados obtidos devem ser consistentes com a equação de movimento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (3.61)$$

Sendo assim, observando as relações

$$\ddot{\phi} = W_{\phi\phi} \dot{\phi} = W_{\phi\phi} W_\phi, \quad (3.62)$$

e

$$H = -W; \quad \dot{\phi} = W_\phi, \quad (3.63)$$

veremos o potencial assumir a forma

$$V_\phi = 3WW_\phi - W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (3.64)$$

mostrando que o formalismo realmente é consistente com a equação de movimento do campo escalar. Para ajudar a análise de discussões futuras desta dissertação, vamos reescrever a *pressão*, a *densidade* e a *equação de estado* no formalismo de primeira ordem também. Logo,

$$\rho = \frac{3}{2} W^2, \quad (3.65)$$

$$p = W_\phi^2 - \frac{3}{2} W^2, \quad (3.66)$$

e

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V}. \quad (3.67)$$

Outro parâmetro significativo na discussão da energia escura é o parâmetro de aceleração \bar{q} , o qual é oposto ao parâmetro de desaceleração q e é dado por

$$\bar{q} \equiv \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \longrightarrow \bar{q} = 1 - \left(\frac{W_\phi}{W} \right)^2, \quad (3.68)$$

que se relaciona com a equação de estado como

$$\bar{q} = -\frac{1}{2}(1 + 3\omega), \quad (3.69)$$

no caso de um universo plano. A faixa de variação observacional de ω precisa estar dentro dos limites $-1 \leq \omega \leq 1$, o que nos trará uma outra faixa de $-2 \leq \bar{q} \leq 1$, onde $\bar{q} = 1$ corresponde ao limite de $\omega = -1$ e pode ser no máximo $1/3$. Estes dados mostram que o universo está sob uma fase dominada pela pressão negativa e é consistente com as recentes observações experimentais de expansão do cosmos.

4 Extensões da Gravitação

Várias propostas já foram feitas para tentar explicar a aceleração do cosmos. Como já vimos neste trabalho, a Cosmologia Moderna é descrita pela Relatividade Geral e pelo princípio cosmológico, que nos diz que o universo é homogêneo e isotrópico, mas este modelo não consegue explicar o atual regime acelerado. Uma provável explicação seria que a Teoria da Relatividade Geral deixa de valer em larga escala, fazendo com que a parte gravitacional da equação de Einstein seja modificada.

Em outras palavras, a Relatividade Geral está correta, mas para altos *redshifts* (o deslocamento que a luz tem para o vermelho), o universo passa a ser dominado por um fluido “estranho” com pressão negativa, denominado energia escura. A principal candidata para ser a energia escura é a chamada constante cosmológica $\Lambda(\phi)$, que possui uma equação de estado (EoS) constante, ou seja, ω . Esse modelo apresentou problemas teóricos em relação aos dados observacionais, mas recentemente recebeu novas propostas que consideram que este deve mudar com o passar do tempo, o que apresentou ótimos resultados quando comparados aos dados observacionais. Além disso, podemos também considerar, nesta abordagem, que algumas constantes fundamentais da cosmologia são dependentes do tempo, o que nos permite várias possibilidades em relação ao modelo cosmológico abordado. Outro fator importante desta teoria seria resolver o problema da coincidência cósmica, na qual a aceleração do universo tem que ser exatamente o valor de Λ , ou então os modelos de descrição cosmológica precisariam ser totalmente modificados.

A falta de uma proposta concreta levou a surgir outras teorias de gravidade modificada na cosmologia. Um outra possibilidade na descrição desse fato é baseada em pesquisas recentes elaboradas por T. Harko e colaboradores [25] que trazem as teorias de gravidade $f(R, T)$, as quais contemplam uma alternativa otimista à energia escura para a qual ela obedece uma função que depende de R , que representa o escalar de Ricci, e de T , que é o traço do tensor de energia-momento. Temos como vantagem ainda para esta proposta incluir as pequenas anisotropias que aparecem na radiação cósmica de fundo devido as flutuações quânticas por inflação.

Pensando nas discussões que realizaremos no próximo capítulo, vamos abordar os dois modelos de gravitação descritos anteriormente, procurando mostrar como eles podem explicar o problema da expansão acelerada do universo.

4.1 Teorias de gravidade com $\Lambda(\phi)$

Na tentativa de explicar a expansão acelerada do universo, podemos destacar a constante cosmológica Λ , assim chamada pois sua densidade de energia é constante no tempo e no espaço. De fato o modelo Λ CDM mostrou ser consistente com muitas observações, apesar de parecer simples. Geralmente é difícil explicar por que a escala de energia da constante cosmológica necessária para a aceleração cósmica, hoje, é muito pequena em relação ao previsto pela física de partículas, que é de cerca de 10^{121} vezes maior do que a densidade de energia observada.

Interpretamos Λ como a densidade de energia do vácuo, que atua nas equações de campo como um fluido perfeito, com uma equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ e podemos buscar a relação deste parâmetro com outras grandezas cosmológicas, fazendo o acoplamento de $\Lambda(\phi)$, em que a constante depende do comportamento de um campo escalar, com a ação clássica de Einstein-Hilbert. Sendo assim, temos

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{4} - \frac{\Lambda}{2} + \mathcal{L} \right), \quad (4.1)$$

ou ainda

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{2} - \Lambda + \mathcal{L} \right). \quad (4.2)$$

Ao realizarmos a minimização desta ação em relação a métrica, teremos

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(-\frac{R}{2} - \Lambda + \mathcal{L} \right) + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{R}{2} - \Lambda + \mathcal{L} \right) \right] = 0. \quad (4.3)$$

Procedimentos análogos já foram vistos neste trabalho, o que nos permite encontrar as equações de Einstein diretamente como sendo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{2} = \frac{8\pi G}{c^4} \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

como $8\pi G/c^4 = K$ e tendo que $4\pi G = c = 1$, vamos ter

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2\tilde{T}_{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

É possível obter dessas relações

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\Lambda g^{\mu\nu}}{2}, \quad (4.6)$$

e também

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \rho_\Lambda(t), \quad (4.7)$$

onde

$$\rho_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{2}. \quad (4.8)$$

Pode-se extrair ainda, a densidade e a pressão para esse modelo, que serão dadas por

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad e \quad p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (4.9)$$

Tomando, novamente, a ação da equação (4.2) e reescrevendo-a como sendo

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \tilde{\mathcal{L}}, \quad (4.10)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (4.11)$$

podemos minimizar esta ação em relação ao campo, da seguinte maneira

$$\delta S = \int d^4x \delta \tilde{\mathcal{L}} = 0, \quad (4.12)$$

o que nos traz a equação de movimento

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (4.13)$$

A forma explícita dessa equação para $\phi = \phi(t)$ é tal que

$$\ddot{\phi} + V_\phi + 3H\dot{\phi} = -\frac{\dot{\rho}_\Lambda}{\dot{\phi}}, \quad (4.14)$$

ou ainda

$$\ddot{\phi} + V_\phi + 3H\dot{\phi} = -\rho'_\Lambda, \quad (4.15)$$

onde

$$\frac{\dot{\rho}_\Lambda}{\dot{\phi}} = \rho'_\Lambda. \quad (4.16)$$

Seguindo o mesmo procedimento de [35], chegamos nas equações de Friedmann

$$\rho + \rho_\Lambda = \frac{3}{2} H^2, \quad (4.17)$$

e

$$p + \rho_\Lambda = -\dot{H} - \frac{3}{2} H^2. \quad (4.18)$$

Por fim, ao combinarmos as equações (4.9) com as equações (4.17) e (4.18), vamos chegar no potencial

$$V = \frac{1}{2} (3H^2 - \dot{\phi}^2) - \rho_\Lambda, \quad (4.19)$$

usando (4.9) e (4.17) a segunda equação de Friedmann, torna-se

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (4.20)$$

Na abordagem aqui apresentada, temos um modelo que aborda a função $\Lambda(\phi)$ variando com o tempo, ou seja, teremos um constante do tipo $\Lambda(t)$, sendo assim, precisamos introduzir uma constante de ajuste da variação desta constante. É possível utilizar esta constante já no formalismo de primeira ordem da mesma maneira que vemos em [36], a qual é dada por

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2}(c_0 + c_2 W_\phi^2 + c_4 W_\phi^4), \quad (4.21)$$

e que será utilizada na abordagem do próximo capítulo.

4.2 Teorias $f(R, T)$ de gravidade

Assumindo que em grandes escalas o modelo gravitacional de Einstein da relatividade geral deve se estendido, devemos ter um modelo mais geral atuando na maneira que o fluido descreve o campo gravitacional. Sendo assim, vamos buscar as equações de Einstein para um modelo em que a ação padrão de Einstein-Hilbert é substituída por uma função arbitrária $f(R, T)$ dependente do escalar de Ricci e do traço de tensor energia-momento. Para fazermos isso, tomaremos o procedimento conhecido como formalismo métrico, que considera a métrica e as conexões com os campos como sendo independentes. Tomaremos com a ação generalizada da teoria $f(R, T)$ para começar, a qual é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int f(R, T) \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.22)$$

onde \mathcal{L}_m representa a densidade lagrangiana da matéria e $\sqrt{-g} d^4x$ é o elemento invariante do quadri-volume. Variando a ação (4.22) com respeito a métrica, obtemos

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{16\pi} \int & \left[f_R(R, T) \delta R + f_T(R, T) \frac{\delta T}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R, T) \delta g^{\mu\nu} + 16\pi \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Considerando as seguintes variações

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{-1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.24)$$

e

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda), \quad (4.25)$$

onde ∇_λ é a derivada covariante com respeito a simetria de conexão de Γ associada com a métrica g e assumindo também que

$$f_R(R, T) = \frac{\partial f(R, T)}{\partial R}, \quad e \quad f_T(R, T) = \frac{\partial f(R, T)}{\partial T}. \quad (4.26)$$

A variação dos símbolos de Christoffel é tal que

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\nabla_\mu\delta g_{\nu\alpha} + \nabla_\nu\delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu}), \quad (4.27)$$

e variando o escalar de Ricci, vamos obter

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

Dessa forma, a equação (4.23) torna-se

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{16\pi} \int \left[f_R(R, T)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + f_R(R, T)g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu} - f_R(R, T)\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + f_T(R, T)\frac{\delta(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta})}{g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R, T)\delta g^{\mu\nu} + 16\pi\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g}d^4x. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Além disso, verificamos que a variação de $T_{\alpha\beta}$ em relação ao tensor métrico possui a forma

$$\frac{\delta(g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

onde

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta}\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.31)$$

No processo de integração, a equação (4.30) produzirá, a partir do segundo e terceiro termos, equações de campo para gravidade $f(R, T)$, tais como

$$\begin{aligned} f_R(R, T)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R, T)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f_R(R, T) = \\ 8\pi T_{\mu\nu} - f_T(R, T)T_{\mu\nu} - f_T(R, T)\Theta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

É possível observar que se implicarmos que $f(R, T) \equiv f(R)$, obtemos as equações de campo para a gravidade $f(R)$. Podemos ver ainda que o formalismo métrico gera equações de campo que para serem resolvidas necessitam de várias condições iniciais, algo não obtido facilmente. Essa diferença tem implicação direta no traço do tensor energia-momento, que relacionado com o escalar de Ricci e usado na contração da equação (4.32) vai nos trazer

$$f_R(R, T)R + 3\square f_R(R, T) - 2f(R, T) = 8\pi T - f_T(R, T)T - f_T(R, T)\Theta, \quad (4.33)$$

onde $\Theta = \Theta^\mu$. Manipulando as equações (4.32) e (4.33), podemos eliminar o termo $\square f_R(R, T)$, resultando nas equações de campo gravitacionais

$$f_R(R, T) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{6} f(R, T) g_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T g_{\mu\nu} \right) - f_T(R, T) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T g_{\mu\nu} \right) - f_T(R, T) \left(\Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \Theta g_{\mu\nu} \right) + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R(R, T). \quad (4.34)$$

Como já vimos, podemos escrever as equações de campo de Einstein na forma

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 2T_{\mu\nu}. \quad (4.35)$$

Analisando [37], vemos que existem algumas relações puramente geométricas associadas as essas equações de campo. São elas

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad e \quad (\square \nabla_\nu - \nabla_\nu \square) F = R_{\mu\nu} \nabla^\mu F, \quad (4.36)$$

as quais nos permitem reescrever a equação (4.33) da seguinte forma

$$\nabla^\mu \left[f_R(R, T) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R, T) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) f_R(R, T) \right] \equiv 0, \quad (4.37)$$

e para o traço do tensor energia-momento

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{f_T(R, T)}{8\pi - f_T(R, T)} [(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}) \nabla^\mu \ln f_T(R, T) + \nabla^\mu \Theta_{\mu\nu}]. \quad (4.38)$$

Para calcular o tensor $\Theta_{\mu\nu}$, vamos variar o tensor energia-momento. Então,

$$\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_m + g_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}, \quad (4.39)$$

ou também

$$\frac{\delta T_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_m + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu} \partial g^{\alpha\beta}}. \quad (4.40)$$

Pela condição imposta

$$g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad (4.41)$$

da qual podemos obter

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = -g_{\alpha\sigma} g_{\beta\gamma} \delta_{\mu\nu}^{\sigma\gamma}, \quad (4.42)$$

em que $\delta_{\mu\nu}^{\sigma\gamma}$ é o símbolo de Kronecker generalizado e dado por

$$\delta_{\mu\nu}^{\sigma\gamma} = \frac{\delta g^{\sigma\gamma}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.43)$$

Sendo assim, $\Theta_{\mu\nu}$ pode ser encontrado como

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m - 2g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}\partial g^{\alpha\beta}}. \quad (4.44)$$

Uma vez mais, assumimos que o tensor energia momento dessa teoria representa um fluido perfeito, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (4.45)$$

Sendo a lagrangiana de matéria, $\mathcal{L}_m = -p$, e a quadri-velocidade satisfaz as condições $u_\mu u^\mu = 1$ e $u^\mu \nabla_\nu u_\mu = 0$, podemos usar a equação (4.44) para chegar a

$$\Theta_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu} - pg_{\mu\nu}, \quad (4.46)$$

que é a expressão da variação do tensor energia-momento para um fluido perfeito. As soluções cosmológicas $f(R, T)$ tendem a recuperar o modelo padrão de cosmologia se sua forma funcional for linear em R . Precisamente, porque quando $t \gg 1$, a radiação com equação de estado, $p = \rho/3$, domina a dinâmica do universo e o traço do tensor energia-momento desaparece para um fluido perfeito. Portanto, nenhuma contribuição nova viria desta teoria de gravitação na era da radiação.

5 Aplicação de Defeitos em gravidade

$f(R, T)$ e $\Lambda(\phi)$

Neste capítulo, iremos abordar um novo método que consiste na construção de uma ação que contenha o termo de gravidade $f(R, T)$ e o termo de gravidade $\Lambda(\phi)$ em um único modelo. Nosso intuito é tentar observar se existem relações de interação ao usarmos estes dois modelos gravitacionais juntos, se elas podem nos ajudar na descrição de alguns problemas cosmológicos e se podemos encontrar métodos consistentes de interação entre esses modelos. Sendo assim, partiremos da ação modificada

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(f(R, T) - \frac{\Lambda}{2} + \mathcal{L} \right). \quad (5.1)$$

Vamos usar, por conveniência,

$$f(R, T) = f(R) + f(T) = -\frac{R}{4} + f(T), \quad (5.2)$$

que é uma proposta já conhecida de $f(R, T)$ e que recai na ação clássica de Einstein-Hilbert acrescida de dois termos extras, ou seja,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{4} + f(T) - \frac{\Lambda}{2} + \mathcal{L} \right). \quad (5.3)$$

Aplicando o método da mínima ação, teremos

$$\delta S = \int d^4x \left[\delta \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{4} + f(T) - \frac{\Lambda}{2} + \mathcal{L} \right) + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{R}{4} + f(T) - \frac{\Lambda}{2} + \mathcal{L} \right) \right] = 0. \quad (5.4)$$

Como já vimos, $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, o que vai trazer

$$\delta S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{R}{4} + f(T) - \frac{\Lambda}{2} + \mathcal{L} \right) + \sqrt{-g} \left(-\frac{\delta R}{4} + \delta f(T) - \frac{\delta \Lambda}{2} + \delta \mathcal{L} \right) \right], \quad (5.5)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{R}{4} g_{\mu\nu} + f(T) g_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{2} g_{\mu\nu} + \mathcal{L} g_{\mu\nu} \right) - \right. \\ \left. - \frac{R_{\mu\nu}}{4} - \frac{\partial \Lambda}{2 \partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial f(T)}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Manipulando a ordem destes fatores, teremos

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} & \left[\frac{-1}{4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + 2f(T)g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{2\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}g_{\mu\nu} - \frac{\partial\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} + 2\frac{\partial f(T)}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Como essa variação deve se anular de forma generalizada, determinamos que

$$-\frac{1}{4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + 2f(T)g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right) = -\frac{1}{2} \left(2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}g_{\mu\nu} - \frac{\partial\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} + 2\frac{\partial f(T)}{\partial g^{\mu\nu}} \right), \quad (5.8)$$

ou ainda

$$\frac{1}{4} \left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right) + \frac{f(T)g_{\mu\nu}}{2} = \frac{1}{2} \left(T^{\mu\nu} - \frac{\partial\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} + 2\frac{\partial f(T)}{\partial g^{\mu\nu}} \right), \quad (5.9)$$

onde

$$T^{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}g_{\mu\nu}. \quad (5.10)$$

Os resultados anteriores nos permitem obter

$$G_{\mu\nu} = 2T^{\mu\nu} - 2\frac{\partial\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} + 4\frac{\partial f(T)}{\partial g^{\mu\nu}} - 2f(T)g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (5.11)$$

e como $\Lambda = \Lambda(\phi)$, o termo da derivada do Λ em relação a $g^{\mu\nu}$ será nulo, então

$$G_{\mu\nu} = 2T^{\mu\nu} - 2f(T)g_{\mu\nu} - 4f'(T)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 2\rho_\Lambda g^{\mu\nu}, \quad (5.12)$$

onde ρ_Λ é dado pela equação (4.21). Para calcularmos os parâmetros cosmológicos, adotaremos novamente um campo estático. Calculando G_{00} e G_{11} a partir da equação (5.12), chegaremos nas equações de Friedmann:

$$\frac{3}{2}H^2 = \left(\frac{1}{2} - 2f'(T) \right) \dot{\phi}^2 - f(T) + \tilde{V}, \quad (5.13)$$

e também

$$\dot{H} + \frac{3}{2}H^2 = - \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + f(T) \right] + \tilde{V}, \quad (5.14)$$

onde

$$\tilde{V} = V + \rho_\Lambda. \quad (5.15)$$

Ao combinarmos a equação (5.13) com a equação (5.14), observaremos um vínculo entre elas, o qual pode ser escrito como

$$\dot{H} = -(1 - 2f'(T^\phi))\dot{\phi}^2, \quad (5.16)$$

e nos fornece também, uma forma explícita para o potencial deste modelo abordado como sendo

$$V = \frac{3}{2}H^2 + f(T) - \left(\frac{1}{2} - 2f'(T)\right)\dot{\phi}^2 - \rho_\Lambda. \quad (5.17)$$

Ainda é possível obter a equação de movimento para o campo deste modelo, uma vez que ela é consistente e é descrita por

$$[1 - 2f'(T)](\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) - 2\dot{f}'(T)\dot{\phi} + [1 - 4f'(T)]\tilde{V}_\phi = 0. \quad (5.18)$$

5.1 Formalismo de Primeira Ordem

Para conseguirmos soluções lineares para nossa discussão, vamos aplicar o formalismo de primeira ordem para este modelo, e para isso, precisamos considerar

$$H = h(\phi), \quad (5.19)$$

e conseqüentemente

$$\dot{H} = h_\phi \dot{\phi}. \quad (5.20)$$

Substituindo as equações (5.19) e (5.20) nas equações (5.13) e (5.14), determinamos o vínculo

$$h_\phi = (1 - 2f'(T))W_\phi, \quad (5.21)$$

que por sua vez, pode ser reescrito como

$$-2f'(T)W_\phi = h_\phi - W_\phi, \quad (5.22)$$

Permita-nos definir que o campo escalar satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem, ou seja, vamos impor que

$$\dot{\phi} = -W_\phi, \quad (5.23)$$

a partir da qual podemos obter

$$\ddot{\phi} = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (5.24)$$

Os ingredientes acima nos permitem escrever a equação (5.14) como sendo

$$\frac{3}{2}h^2 = \left(\frac{1}{2} - 2f'(T)\right)W_\phi^2 - f(T) + \tilde{V}. \quad (5.25)$$

Isolando $f'(T)$ em (5.21) e substituindo em (5.25), encontramos a seguinte relação

$$f(T) = W_\phi h_\phi - \frac{W_\phi^2}{2} - \frac{3}{2}h^2 + V, \quad (5.26)$$

e derivando a equação anterior em respeito a ϕ , determinamos

$$f_\phi(T) = \tilde{V}_\phi + h_{\phi\phi}W_\phi + h_\phi W_{\phi\phi} - 3hh_\phi - W_\phi W_{\phi\phi} + \rho_{\Lambda\phi}. \quad (5.27)$$

Agora, vamos tomar o fato que

$$T = T(\phi), \quad (5.28)$$

implicando nas relações

$$f' = \frac{df}{dT}, \quad f_\phi = \frac{df}{d\phi}, \quad T_\phi = \frac{dT}{d\phi}. \quad (5.29)$$

Partindo dessas relações, podemos escrever então que

$$f' = \frac{\frac{df}{d\phi}}{\frac{dT}{d\phi}}, \quad (5.30)$$

ou também

$$f' = \frac{f_\phi}{T_\phi}. \quad (5.31)$$

Sabendo disso, podemos ver que

$$\begin{aligned} h_\phi &= (1 - 2f')W_\phi, \\ &= \left(1 - 2\frac{f_\phi}{T_\phi}\right)W_\phi, \end{aligned} \quad (5.32)$$

que nos traz

$$-2\frac{f_\phi}{T_\phi}W_\phi = h_\phi - W_\phi. \quad (5.33)$$

Isolando f_ϕ nesta última equação, obtemos

$$f_\phi = \frac{T_\phi}{2} \left(1 - \frac{h_\phi}{W_\phi}\right). \quad (5.34)$$

Além disso, o traço do tensor energia momento é tal que

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \rho - 3p, \quad (5.35)$$

que em termos do campo escalar é dado por

$$T = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \tilde{V} - 3\frac{\dot{\phi}^2}{2} + 3\tilde{V}, \quad (5.36)$$

ou ainda

$$T = -\dot{\phi}^2 + 4\tilde{V}, \quad (5.37)$$

Ao substituírmos o vínculo (5.23) em (5.37), determinamos

$$T = -W_\phi^2 + 4\tilde{V}_\phi, \quad (5.38)$$

cujas derivadas em relação ao campo implica em

$$T_\phi = -2W_\phi W_{\phi\phi} + 4\tilde{V}_\phi. \quad (5.39)$$

Isso nos permite escrever a equação (5.31) como sendo

$$f' = \frac{f_\phi}{-2W_\phi W_{\phi\phi} + 4\tilde{V}_\phi}, \quad (5.40)$$

e substituindo isto na equação (5.22), nos leva a seguinte relação

$$\frac{-2f_\phi}{-2W_\phi W_{\phi\phi} + 4\tilde{V}_\phi} = \frac{h_\phi}{W_\phi} - 1, \quad (5.41)$$

a qual pode ser reescrita como

$$f_\phi(T) = \left(\frac{h_\phi}{W_\phi} - 1 \right) (W_\phi W_{\phi\phi} - 2\tilde{V}_\phi). \quad (5.42)$$

Igualando as equações (5.42) e (5.27), obtemos

$$\tilde{V}_\phi + h_{\phi\phi}W_\phi + h_\phi W_{\phi\phi} - 3hh_\phi - W_\phi W_{\phi\phi} = \left(\frac{h_\phi}{W_\phi} - 1 \right) (W_\phi W_{\phi\phi} - 2\tilde{V}_\phi), \quad (5.43)$$

que manipulada nos permite obter

$$\tilde{V}_\phi = [-h_{\phi\phi}W_\phi - h_\phi W_{\phi\phi} + 3hh_\phi + h_\phi W_{\phi\phi}] \left(\frac{W_\phi}{2h_\phi - W_\phi} \right), \quad (5.44)$$

ou ainda

$$\tilde{V}_\phi = \frac{W_\phi(3hh_\phi - W_\phi h_{\phi\phi})}{2h_\phi - W_\phi}. \quad (5.45)$$

Substituindo este resultado na equação (5.41), determinamos que

$$f_\phi = \frac{(h_\phi - W_\phi)(h_\phi W_{\phi\phi} - \frac{1}{2}W_{\phi\phi}W_\phi - 3hh_\phi + W_\phi h_{\phi\phi})}{(h_\phi - \frac{W_\phi}{2})}, \quad (5.46)$$

e como

$$T_\phi = -2W_\phi W_{\phi\phi} + 4\tilde{V}_\phi, \quad (5.47)$$

ficamos com a relação

$$T_\phi = -2W_\phi W_{\phi\phi} + \frac{4W_\phi(3hh_\phi - W_\phi W_{\phi\phi})}{2h_\phi - W_\phi}. \quad (5.48)$$

Este método descrito nos permite trazer relações para modelos de quintessência baseadas na junção das teorias de gravidades de $\Lambda(\phi)$ variando ao passar do tempo e com $f(R, T)$. Isto pode ser de grande proveito na busca de viabilizar o entendimento da relação entre matéria e energia na descrição do atual regime de expansão acelerada do universo e na obtenção de parâmetros cosmológicos para diversos modelos na cosmologia com campos escalares, uma vez que, temos formas analíticas de \tilde{V}_ϕ , T_ϕ e f_ϕ , que são fundamentais para o êxito de essa metodologia. Esses parâmetros podem ser obtidos, pelo fato que podemos impor $\dot{\phi} = -W_\phi$, que como vimos, satisfazem as equações de Friedmann e a equação de movimento. A dificuldade dessa abordagem é obter os vínculos \tilde{V} , f e T de forma analítica depois do processo de integração. Procurando visualizar a eficiência dos vínculos obtidos nesta metodologia, vamos abordar dois exemplos para modelos já conhecidos e analisar seus parâmetros cosmológicos.

5.2 Exemplos

5.2.1 Caso $n=1$ com $f(T) + \Lambda(\phi)$

Para começarmos, tomaremos um modelo abordado em [38], cuja a equação diferencial de primeira ordem é

$$W_\phi = b_1 \left(-\phi + \frac{\phi^3}{3} \right) + \frac{b_2}{(1 - 2\alpha)}. \quad (5.49)$$

Consideremos também, a seguinte forma para $h(\phi)$

$$h(\phi) = [(1 - 2\alpha)W_\phi]^n, \quad (5.50)$$

onde adotaremos $n = 1$. Esse exemplo é uma combinação de superpotenciais que serve para os dois modelos de gravidade discutidos neste trabalho. Ao tomarmos $n = 1$ e $\Lambda = 0$, teremos um modelo $f(R, T)$ e se usarmos, novamente, $n = 1$ mas com $\alpha = 0$, recairemos na gravidade do tipo $\Lambda(\phi)$. Sendo assim, aplicando estes elementos na equação (5.45), vamos obter

$$V_\phi = b_1(-1 + \phi^2) \left(\frac{(-1 + 2\alpha)(3b_2 + b_1\phi(-5 + \phi^2 - 2\alpha(-3 + \phi^2)))}{-1 + 4\alpha} + \left(\frac{b_2}{1 - 2\alpha} + \frac{1}{3}b_1\phi(-3 + \phi^2) \right) \left(-c_2 - 2c_4 \left(\frac{b_2}{1 - 2\alpha} + \frac{1}{3}b_1\phi(-3 + \phi^2) \right)^2 \right) \right), \quad (5.51)$$

e que integrada vai nos trazer o potencial deste modelo para nossa metodologia como

sendo

$$\begin{aligned}
V = & \frac{-3b_2^2 + b_1^2(1 - 2\alpha)}{-2 + 8\alpha} - (b_1\phi(-108b_2^3c_4(-1 + 4\alpha)(-3 + \phi^2) + 54b_1b_2^2c_4(1 - 6\alpha + 8\alpha^2) \\
& \phi(-3 + \phi^2)^2 - 6b_2(1 - 2\alpha)^2(-3 + \phi^2)(27 + 108\alpha^2 + 9c_2(-1 + 4\alpha) - 2b_1^2c_4\phi^2(-3 + \phi^2)^2 + \\
& + 4\alpha(-27 + 2b_1^2c_4\phi^2(-3 + \phi^2)^2)) + b_1(-1 + 2\alpha)^3\phi(-81b_1^2c_4\phi^2 + 108\alpha^2(-3 + \phi^2)^2 + \\
& + 9c_2(-1 + 4\alpha)(-3 + \phi^2)^2 - 81(-5 + 16\alpha + 3\phi^2) + 2\alpha\phi^2(405 - 54\phi^2 + 2b_1^2c_4(-3 + \phi^2)^4) + \\
& + \phi^4(27 - b_1^2c_4(-6 + \phi^2)(18 - 6\phi^2 + \phi^4)))) / (162(-1 + 2\alpha)^3(-1 + 4\alpha)). \quad (5.52)
\end{aligned}$$

O processo de integração realizado acima nos fornece uma constante desconhecida, que é fundamental para o êxito dos cálculos cosmológicos. Ela serve como um ajuste fino, que traz resultados mais categóricos nas comparações dos resultados obtidos com os dados observacionais. Para achá-la, devemos comparar este nosso potencial com um outro já conhecido, como por exemplo, o da gravidade $f(R, T)$ visto em [38]. Fazendo a subtração de nosso potencial pelo o que tomamos como base, vemos que um termo deve sobrar, e como este termo não pode contribuir em nosso resultado devido as condições de contorno, igualamos ele a zero para determinamos o vínculo

$$\psi = \frac{3b_2^2 + b_1^2(-1 + 2\alpha)}{-2 + 8\alpha}. \quad (5.53)$$

Ao conhecermos os valores de W_ϕ , $h(\phi)$, V_ϕ e agora de ψ , podemos aplicá-los na equação (5.46), chegando a

$$f_\phi = \frac{-1}{-1 + 4\alpha} 4b_1\alpha(-1 + \phi^2)(b_2(3 - 6\alpha) - 2b_1(3 + 2\alpha(-5 + 3\alpha))\phi + b_1(1 - 2\alpha)^2\phi^3), \quad (5.54)$$

e que se for integrada também, trará a forma da função $f(T)$ na forma

$$\begin{aligned}
f = & \frac{1}{-3 + 12\alpha} \left(-18b_2^2 + 12b_1b_2\alpha(-1 + 2\alpha)\phi(-3 + \phi^2) + b_1^2(9 - 8\alpha^3\phi^2(-3 + \phi^2)^2 + \right. \\
& \left. + 8\alpha^2\phi^2(15 - 9\phi^2 + \phi^4) - \alpha(24 + 36\phi^2 - 21\phi^4 + 2\phi^6)) \right). \quad (5.55)
\end{aligned}$$

Como vimos, o formalismo de primeira ordem revela a relação $h(\phi) = H$. Com base nisso, neste nosso modelo, em que

$$\phi = \tanh(b_1 t + b_3), \quad (5.56)$$

que é correlacionada com o defeito

$$\dot{\phi} = W_\phi = (1 - \phi^2)b_1 \quad (5.57)$$

e nos permite obter o parâmetro de Hubble com forma funcional

$$H = b_2 - \frac{1}{3}b_1(-1 + 2\alpha) \tanh(b_3 + b_1 t)(-3 + \tanh(b_3 + b_1 t)^2), \quad (5.58)$$

e pode ser representado graficamente na gráfico 7. Podemos observar que o comportamento do parâmetro de aceleração obtido por esta metodologia obedece o modelo padrão da cosmologia, em que deve ter existido um regime de de expansão acelerada muito grande no universo e que depois diminuiu com o tempo, passando a se manter constante atualmente, regime que foi comprovado experimentalmente. A mescla de modelos nos mostra que deve haver influência tanto de energia de massa quanto do traço do tensor energia-momento.

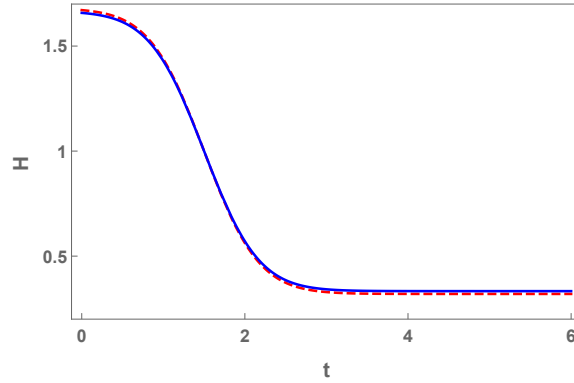


Figura 7 – Evolução de $H(t)$ para o Exemplo 1 com presença apenas de $f(R, T)$ na linha azul e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ na linha vermelha.

Também podemos calcular o tensor energia-momento para este modelo. Para isso, devemos manipular a equação (5.31) de tal forma que nos forneça

$$T_\phi = 4b_1(-1 + \phi^2) \left(-b_1 + \phi \frac{(-1 + 2\alpha)(3b_2 + b_1\phi(-5 + \phi^2 - 2\alpha(-3 + \phi^2)))}{-1 + 4\alpha} + \left(\frac{b_2}{1 - 2\alpha} + \frac{b_1\phi}{3}(-3 + \phi^2) \right) \left(-c_2 - 2c_4 \left(\frac{b_2}{1 - 2\alpha} + \frac{b_1\phi}{3}(-3 + \phi^2) \right)^2 \right) \right), \quad (5.59)$$

e que a partir da integração vai nos trazer o traço do tensor energia-momento escrito como

$$T = -b_1\phi(-216b_2^3c_4(-1 + 4\alpha)(-3 + \phi^2) + 108b_1b_2^2c_4(1 - 6\alpha + 8\alpha^2)\phi(-3 + \phi^2)^2 - 12b_2(1 - 2\alpha)^2(-3 + \phi^2)(27 + 108\alpha^2 + 9c_2(-1 + 4\alpha) - 2b_1^2c_4\phi^2(-3 + \phi^2)^2 + 4\alpha(-27 + 2b_1^2c_4\phi^2(-3 + \phi^2)^2)) + b_1(-1 + 2\alpha)^3\phi(-81(-12 + 40\alpha + 7\phi^2) + 2(-81b_1^2c_4\phi^2 + 108\alpha^2(-3 + \phi^2)^2 + 9c_2(-1 + 4\alpha)(-3 + \phi^2)^2 + 4\alpha\phi^2(-27(-9 + \phi^2) + b_1^2c_4(-3 + \phi^2)^4) + \phi^4(27 - b_1^2c_4(-6 + \phi^2)(18 - 6\phi^2 + \phi^4)))) / (81(-1 + 2\alpha)^3(-1 + 4\alpha)), \quad (5.60)$$

podendo ser representada graficamente na figura 8. Neste gráfico, podemos ver que T deve desaparecer, uma vez que após um período assumindo seus valores máximos, o traço

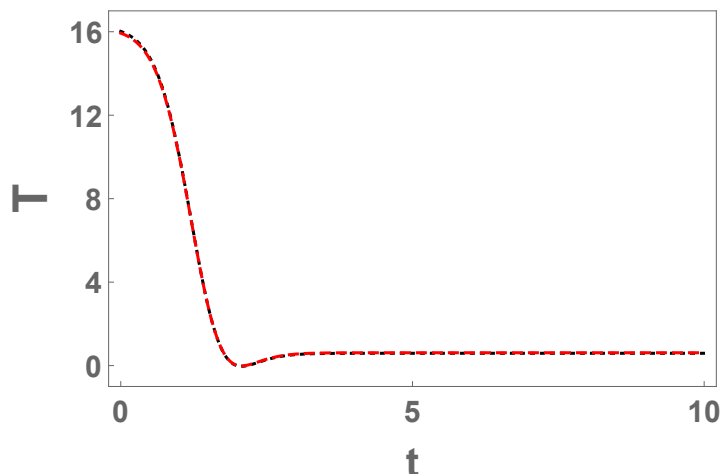


Figura 8 – Gráfico que representa a evolução de $T(t)$ para o primeiro Exemplo de apenas $f(R, T)$ em azul e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ em vermelha.

do tensor energia-momento $T \rightarrow 0$. Essa propriedade reforça o bom comportamento de nossas soluções, mais precisamente nos estágios primordiais da evolução do universo.

De fato, as parcelas mostram que depois da era da radiação, T aumenta seus valores. Ainda assim, esses valores são pequenos, devido à baixa densidade do universo nestas fases, especialmente quando comparado com os valores de ρ na inflação. Notavelmente, T permanece constante para altos valores de tempo, que na cosmologia padrão, é o regime em que a constante cosmológica $\Lambda(\phi)$ domina a dinâmica do universo.

Podemos ainda calcular o comportamento da equação de estado ω , cuja forma funcional não será escrita explicitamente (devido sua alta complexidade) mas pode ser analisada através da representação da figura 9. É notável o fato de que os modelos são bem comportados no estágio dominado pela radiação, onde existe a relação de $\omega = 1/3$ e $T = 0$ depois retorna para -1, que como já vimos, corresponde a um regime de expansão com pressão negativa. Também vemos que esta metodologia é capaz de descrever a transição suave entre as eras inflacionária e dominada pela radiação e, em seguida, prever o estágio dominado pela matéria onde $\omega = 0$ e aceleração cósmica que o universo está passando.

Visando observar a relação das funções de f e T obtidas, podemos construir um gráfico paramétrico entre essas duas funções com a influência apenas da gravidade $f(R, T)$ e com a junção desse modelo com $\Lambda(\phi)$, que pode ser observada na figura 10. Nela, vemos que o resultado são duas retas sobrepostas entre si, o que nos mostra que os modelos são proporcionais e apresentam relação entre si.

A fim de demonstrar a eficácia desta nova metodologia, vamos procurar por cenários analíticos mais complexos dos que os dos modelos anteriormente analisados. Para tanto, consideremos um modelo tipo sine-Gordon, cuja equação diferencial de primeira ordem é do tipo βW_ϕ^2 com $f(T) + \Lambda(\phi)$.

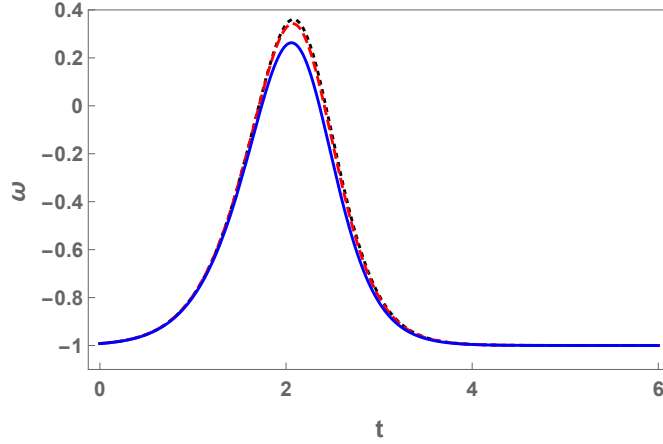


Figura 9 – Gráfico da evolução de $\omega(t)$ para o Exemplo 1, com apenas $f(R, T)$ em preto, apenas $\Lambda(\phi)$ em azul e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ em vermelho.

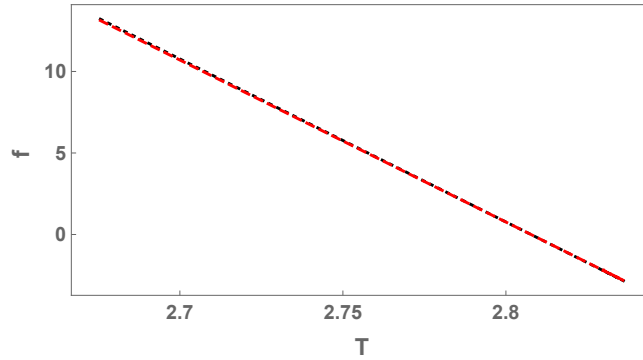


Figura 10 – Gráfico Paramétrico para a evolução das funções T e f do Exemplo número 1 com apenas $f(R, T)$ mostrado na linha preta e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ na linha vermelha.

5.2.2 Caso βW_ϕ^2 com $f(T) + \Lambda(\phi)$

Esse modelo tem sua função superpotencial dada por

$$W_\phi = b_1 \sin(\phi), \quad (5.61)$$

e nos permite propor agora a seguinte forma para $h(\phi)$

$$h(\phi) = ((1 - 2\alpha)W_\phi + \beta W_\phi^2 + b_2). \quad (5.62)$$

Seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior, tomaremos estes parâmetros na equação (5.45) a fim de obtermos

$$V_\phi = b_1 \cos(\phi)(b_2(3 - 6\alpha) - 2b_1^2\beta \cos(\phi)^2 + b_1 \sin(\phi)(c_2(-1 + 4\alpha) + 2(2 + \alpha(-7 + 6\alpha) + 3b_2\beta) + b_1 \sin(\phi)((11 - 4c_2 - 18\alpha)\beta - 2b_1 \sin(\phi)(c_4 - 4c_4\alpha - 3\beta^2 + 4b_1c_4\beta \sin(\phi)))))) / (1 - 4\alpha + 4b_1\beta \sin(\phi)), \quad (5.63)$$

e depois da integração nos apresentará o potencial na forma

$$\begin{aligned}
V = & \frac{-3b_2^2 + b_1^2(1 - 2\alpha)}{-2 + 8\alpha} + \frac{1}{128}b_1(4b_1(-23 + 8c_2 + 8b_1^2c_4 + 24\alpha)\cos(2\phi) - 8b_1^3c_4\cos(4\phi)) + \\
& + \frac{1}{b_1\beta^2}(-9 + 32\alpha + 16\alpha^2 + 48b_2\beta - 64b_1^2\beta^2)\log(1 - 4\alpha + 4b_1\beta\sin(\phi)) + \\
& + \frac{4(9 + 4\alpha + 48b_2\beta + 12b_1^2\beta^2)\sin(\phi)}{\beta} - 16b_1^2\beta\sin(3\phi). \tag{5.64}
\end{aligned}$$

Tendo W_ϕ , $h(\phi)$, V_ϕ e ρ_Λ , podemos usar a equação (5.46) para acharmos

$$\begin{aligned}
f_\phi = & (-2b_1\cos(\phi)(-\alpha + b_1\beta\sin(\phi))(b_2(6 - 12\alpha) + b_1^2(11 - 18\alpha)\beta + 3b_1^2(-5 + 6\alpha)\beta\cos(2\phi) + \\
& b_1(9 + 8\alpha(-4 + 3\alpha) + 12b_2\beta + 9b_1^2\beta^2)\sin(\phi) - 3b_1^3\beta^2\sin(3\phi)) / (1 - 4\alpha + 4b_1\beta\sin(\phi)), \tag{5.65}
\end{aligned}$$

e depois do procedimento de integração, chegaremos na função $f(T)$ descrita por

$$\begin{aligned}
f = & -b_1^2 + \frac{-6b_2^2 + b_1^2(2 - 4\alpha)}{-1 + 4\alpha} - \frac{1}{128}b_1 \left(-4b_1(9 - 104\alpha + 96\alpha^2 + 48b_2\beta + 24b_1^2\beta^2)\cos(2\phi) + \right. \\
& + 24b_1^3\beta^2\cos(4\phi) + \frac{1}{b_1\beta^2}(9 - 32\alpha - 16\alpha^2 - 48b_2\beta + 64b_1^2\beta^2)\log(1 - 4\alpha + 4b_1\beta\sin(\phi)) - \\
& \left. - \frac{4(9 - 48b_2\beta - 44b_1^2\beta^2 + 4\alpha(1 + 48b_2\beta + 36b_1^2\beta^2))\sin(\phi)}{\beta} + 48b_1^2(-3 + 4\alpha)\beta\sin(3\phi) \right). \tag{5.66}
\end{aligned}$$

A solução analítica relativa ao superpotencial presente na equação (5.61) é dada por

$$\phi = 2 \arctan \left(\tanh \left(\frac{1}{2}(b_3 - b_1 t) \right) \right), \tag{5.67}$$

com isso, o defeito anterior nos permite escrever o parâmetro de Hubble como sendo

$$\begin{aligned}
H = & b_2 + b_1 \sin \left(2 \arctan \left(\tanh \left(\frac{1}{2}(b_3 - b_1 t) \right) \right) \right) \\
& \left(1 - 2\alpha + b_1\beta \sin \left(2 \arctan \left(\tanh \left(\frac{1}{2}(b_3 - b_1 t) \right) \right) \right) \right), \tag{5.68}
\end{aligned}$$

e cuja forma funcional pode ser apreciada na Figura 11. Novamente, observamos que o comportamento do parâmetro de Hubble apresenta altos valores para a expansão do universo em um período inicial e depois de uma diminuição manteve-se constante, o que é constatado experimentalmente e que solidifica a eficácia de nosso método.

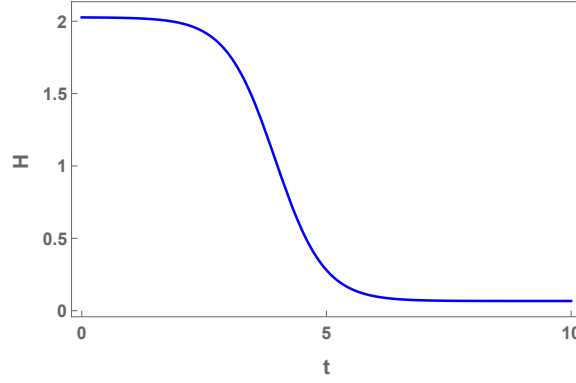


Figura 11 – Gráfico que representa a evolução de $H(t)$ para o modelo 2.

Vamos dar sequência nos testes de nossa metodologia achando a relação f' e usando esta na equação (5.31), encontrando

$$T_\phi = (2b_1 \cos(\phi)(6b_2(1 - 2\alpha) - 4b_1^2\beta \cos(\phi)^2 + b_1 \sin(\phi)(9 + 8\alpha(-4 + 3\alpha) + c_2(-2 + 8\alpha) + 12b_2 - \beta - 2b_1 \sin(\phi)((-13 + 4c_2 + 18\alpha)\beta + 2b_1 \sin(\phi)(c_4 - 4c_4\alpha - 3\beta^2 + 4b_1c_4\beta \sin(\phi)))))) / (1 - 4\alpha + 4b_1\beta \sin(\phi)), \quad (5.69)$$

conseqüentemente, após a integração, obteremos o traço do tensor energia-momento como sendo

$$T = -b_1^2 + \frac{-6b_2^2 + b_1^2(2 - 4\alpha)}{-1 + 4\alpha} + \frac{1}{32}b_1(4b_1(-27 + 8c_2 + 8b_1^2c_4 + 24\alpha) \cos(2\phi) - 8b_1^3c_4 \cos(4\phi) + \frac{1}{b_1\beta^2}(-9 + 32\alpha + 16\alpha^2 + 48b_2\beta - 64b_1^2\beta^2) \log(1 - 4\alpha + 4b_1\beta \sin(\phi)) + \frac{4(9 + 4\alpha + 48b_2\beta + 12b_1^2\beta^2) \sin(\phi)}{\beta} - 16b_1^2\beta \sin(3\phi)). \quad (5.70)$$

Unindo este resultado a um outro $T(\phi)$ de um modelo que não tenha contribuição da constante cosmológica (como o que foi abordado em [36]), observamos que a constante obtida na equação 5.53 nos permite um ajuste fino da forma funcional do traço do tensor energia momento em relação com resultados de outras abordagens, como visto na Figura 12. Com todos estes parâmetros já definidos, podemos encontrar também a equação de estado ω para este exemplo, que como já vimos, é a relação entre a densidade ρ e a pressão p e que são obtidos para o campo escalar trabalhado. Como o valor para ω é muito extenso, vamos suprimir sua expressão mas mostraremos que seu comportamento é regido da maneira descrita pela figura 13.

Assim como no primeiro exemplo, o método apresentado neste trabalho mostra modelos com influência de βW_ϕ mostra uma equação de estado bem comportada no estágio dominado pela radiação, onde existe a relação de $\omega = 1/3$ e $T = 0$. Comparando com outras metodologias, temos resultados similares na descrição do comportamento

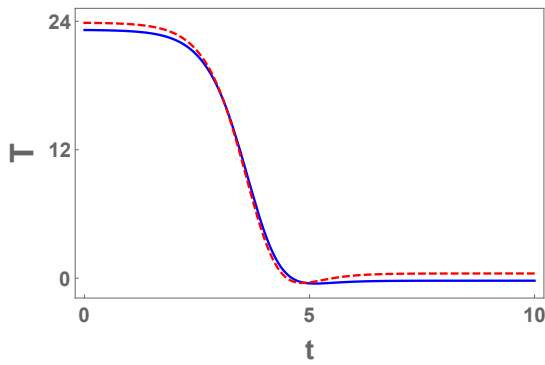


Figura 12 – Evolução de $T(t)$ para Exemplo 2 com presença apenas de $f(R, T)$ em vermelho e de $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ em azul.

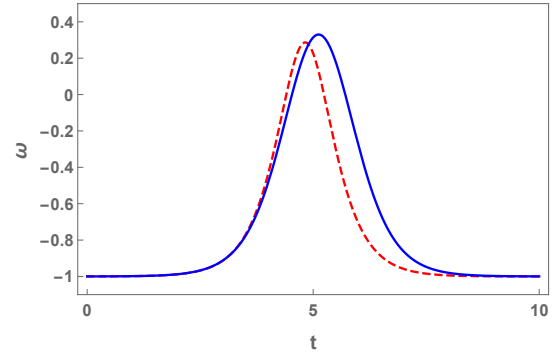


Figura 13 – Gráfico que representa o comportamento de $\omega(t)$ para nosso segundo Exemplo com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ em azul e apenas $f(R, T)$ em vermelho.

deste parâmetro através do tempo, conseguindo mostrar os regimes na era inflacionária, dominada pela radiação e dominada pela matéria, onde $\omega = 0$, estado atual observado no universo.

Por fim, inferindo um gráfico paramétrico para observar a relação entre as funções f e T deste modelo, podemos notar que suas ligações são construídas pela relação da figura 14.

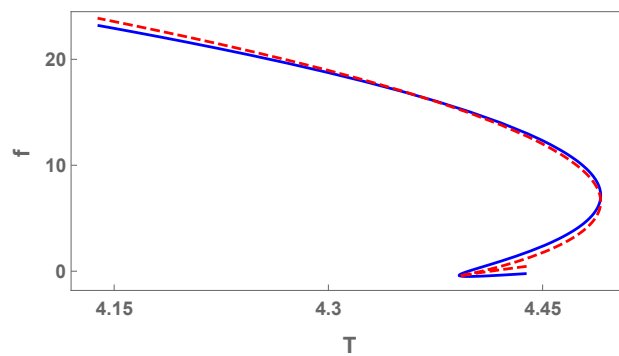


Figura 14 – Gráfico Paramétrico para a evolução das funções T e f do Exemplo número 2 com apenas $f(R, T)$ mostrado na linha vermelha e com $f(R, T) + \Lambda(\phi)$ na linha azul.

Ao compararmos a figura 10 com 14, vemos uma grande discrepância entre estes gráficos, fato que ocorre uma vez que para este segundo modelo não é possível ver dependência algébrica entre as funções. Isso pode estar ligado com a correção de ajuste fino proporcionado pela constante ψ , que é necessária na correção para modelos com termos βW_ϕ^2 mas não tem influência significativa nos modelos com $n = 1$. Mesmo assim, nota-se resultados contundentes na abordagem dessa metodologia, quando comparados

com resultados já obtidos em descrições cosmológicas, e que podem servir para mais discussões físicas futuramente. Não conseguimos ajustes finos em relação a [38], mas ganhamos modelos complexos em relação este artigo.

6 Conclusões

Nesta dissertação, estudamos alguns modelos de gravidade modificada aplicados com defeitos topológicos. No capítulo 2, mostramos uma revisão acerca dos defeitos em teorias de campos escalares em (1+1) dimensões. Discutimos ainda, os conceitos fundamentais sobre estas estruturas, bem como o método BPS e a importância das condições de contorno na formação de defeitos, sejam eles topológicos (kinks) ou não-topológicos (lumps), caracterizados assim graças ao conceito de carga topológica. Finalizamos este capítulo com uma abordagem acerca das condições de estabilidade dos defeitos para campos escalares estáticos, discutindo sobre os critérios que caracterizam suas estabilidades.

No capítulo 3, apresentamos uma breve discussão sobre os fundamentos básicos da cosmologia padrão, incluindo as soluções para as equações de Einstein no formalismo FLRW e a obtenção das equações de Friedmann para uma ação clássica. Ainda mostramos que é possível estabelecer um formalismo de primeira ordem em cosmologia com campos escalares, representando a energia escura que permeia o Universo com uma pressão negativa. No quarto capítulo abordamos duas teorias de gravidade modificada que buscam explicar o atual regime de expansão acelerada do universo. Primeiro mostramos o modelo de gravidade $\Lambda(\phi)$, que é o candidato mais simples para a energia escura, responsável por essa expansão segundo a teoria de quintessência. Em seguida, discutimos a gravidade $f(R, T)$, que admite que a partir de grandes escalas a teoria da relatividade deve ser estendida e o Universo passa a ser governado por um regime de uma função arbitrária que depende do escalar de Ricci e do tensor energia-momento.

Nosso objetivo neste trabalho era mostrar um novo método que juntasse estas duas teorias de gravitação em um único modelo, o qual foi introduzido no capítulo 5. Para isso, partimos de uma ação que tivesse componentes de ambas as teorias e a partir disso, encontrar as equações de Einstein e Friedmann. Ao escrevermos o formalismo de primeira ordem, nos deparamos com uma manipulação de termos que nos trouxe vínculos para a função f , para o potencial V e para o tensor energia-momento T . Deste modo, encontramos um modelo analítico de extensão de gravitação que trouxe resultados satisfatórios e que estão de acordo com as observações recentes.

Ambos os exemplos abordados nesta dissertação se mostraram bem comportados no estágio dominado pela radiação, onde existe a relação de $\omega = 1/3$ e $T = 0$, que depois retorna para -1 a partir de nossa metodologia. A análise da transição suave entre as eras inflacionária e dominada pela radiação, seguidas por um estágio dominado pela matéria, corroboram que este método abordado descreve de maneira analítica a aceleração cósmica que o universo está passando e que pode ser comprovada experimentalmente.

Também obtivemos valores que mostram o comportamento do parâmetro de aceleração obtido por esta metodologia obedecendo o modelo padrão da cosmologia, em que deve ter existido um regime de expansão acelerada no universo e que diminuiu com o tempo, se mantendo constante atualmente. É possível inferir que deve haver influência tanto de massa, provinda de uma densidade de energia resultante da variação da constante Λ ao passar do tempo, quanto da energia, influenciada pelo traço do tensor energia-momento.

No processo de abordagem deste método, nos deparamos com um constante que surge do processo de integração dos termos de V , T e f . A princípio, ela não aparentava ter nenhuma importância para os cálculos, mas que se mostrou fundamental no êxito dos parâmetros cosmológicos obtidos neste trabalho. Essa constante serve como um ajuste fino nos modelos de $f(R, T)$ e $\Lambda(t)$ com $n = 1$ e um fator de correção nos resultados obtidos desta metodologia para os modelos com termos de δW_ϕ .

Na tentativa de observar as relações que as teorias de gravidades modificadas teriam entre elas, construímos gráficos paramétricos para as funções f e T nos dois exemplos desta obra. Ao compararmos a figura 10 com a 14, vemos um comportamento linear para o primeiro modelo e um relação “estranha” no segundo caso, o que não nos permite ver dependência algebricamente entre as funções. Esse fato pode estar ligado com a correção de ajuste fino proporcionado pela constante ρ_0 , que é necessária na correção para modelos com termos βW_ϕ^2 mas não tem influência significativa nos modelos com $n = 1$ ou ainda de contribuições relativas a métrica abordada neste trabalho, algo que pode ser investigado mais adiante.

Como perspectivas e aplicações da metodologia aqui apresentada, destacamos cenários com acoplamento de vários campos [34] e com quebra de simetria [30]. Assim, acreditamos que há uma vasta aplicabilidade de nossos procedimentos, as quais esperamos abordar e relatar em um futuro próximo.

Referências

- 1 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998. Citado na página [21](#).
- 2 PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999. Citado na página [21](#).
- 3 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página [21](#).
- 4 ABBOTT, B. P. et al. Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 24, p. 241103, 2016. Citado na página [21](#).
- 5 ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, APS, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017. Citado na página [21](#).
- 6 FILHO, K. d. S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. *Astronomia e astrofísica. São Paulo: Livraria da Física*, 2004. Citado na página [21](#).
- 7 ADE, P. A. et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 594, p. A13, 2016. Citado na página [21](#).
- 8 MORAES, P.; SANTOS, J. Two scalar field cosmology from coupled one-field models. *Physical Review D*, APS, v. 89, n. 8, p. 083516, 2014. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [40](#).
- 9 KINNEY, W. H. Hamilton-jacobi approach to non-slow-roll inflation. *Physical Review D*, APS, v. 56, n. 4, p. 2002, 1997. Citado 2 vezes nas páginas [21](#) e [22](#).
- 10 CARROLL, S. M. Quintessence and the rest of the world: suppressing long-range interactions. *Physical Review Letters*, APS, v. 81, n. 15, p. 3067, 1998. Citado na página [21](#).
- 11 ELIZALDE, E. *Cosmology: Techniques and observations. arXiv preprint gr-qc/0409076*, 2004. Citado na página [21](#).
- 12 BAZEIA, D.; LOSANO, L.; PAVAN, A. B. Deformation procedure for scalar fields in cosmology. *arXiv preprint astro-ph/0611021*, 2006. Citado na página [22](#).
- 13 PEEBLES, P. J. E. *Principles of physical cosmology*. [S.l.]: Princeton University Press, 1993. Citado na página [22](#).
- 14 LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 108, n. 6, p. 389–393, 1982. Citado na página [22](#).

- 15 BAZEIA, D. et al. First-order formalism and dark energy. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 633, n. 4-5, p. 415–419, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 42.
- 16 SANTOS, J. R. L. d. et al. Tópicos em defeitos deformados e o movimento browniano. Universidade Federal da Paraíba, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 22, 26 e 28.
- 17 CUSTODIO, M. et al. Uma abordagem sobre a teoria do campo escalar real. Universidade Federal de Campina Grande, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 39.
- 18 RUSSELL, J. S. Report on waves. In: *14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*. [S.l.: s.n.], 1844. v. 311, n. 390, p. 1844. Citado na página 22.
- 19 TOHARIA, M.; TRODDEN, M. Metastable kinks in the orbifold. *Physical review letters*, APS, v. 100, n. 4, p. 041602, 2008. Citado na página 22.
- 20 DUTTA, S.; STEER, D.; VACHASPATI, T. Creating kinks from particles. *Physical review letters*, APS, v. 101, n. 12, p. 121601, 2008. Citado na página 22.
- 21 RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, APS, v. 83, n. 23, p. 4690, 1999. Citado na página 22.
- 22 ARMENDARIZ-PICON, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V.-i. k-inflation. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 458, n. 2-3, p. 209–218, 1999. Citado na página 22.
- 23 SCHERRER, R. J. Purely kinetic k essence as unified dark matter. *Physical review letters*, APS, v. 93, n. 1, p. 011301, 2004. Citado na página 22.
- 24 WALGRAFE, D. Spation-temporal pattern formation. *Springer-Berlag*, NY, 1997. Citado na página 22.
- 25 HARKO, T. et al. $f(r, t)$ gravity. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 2, p. 024020, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 45.
- 26 OLIVEIRA, S. V. d. et al. Uma abordagem sobre a teoria do campo escalar real. Universidade Federal da Paraíba, 2009. Citado na página 25.
- 27 BOGOMOL'NYI, E. The stability of classical solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)*, LD Landau Theoretical Physics Institute, USSR Academy of Sciences, Moscow, v. 24, n. 4, 1976. Citado na página 26.
- 28 PRASAD, M.; SOMMERFIELD, C. M. Exact classical solution for the't hooft monopole and the julia-zee dyon. *Physical Review Letters*, APS, v. 35, n. 12, p. 760, 1975. Citado na página 26.
- 29 WESS, J.; BAGGER, J. *Supersymmetry and supergravity*. [S.l.]: Princeton university press, 1992. Citado na página 27.
- 30 SOUZA, M. et al. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol.*, v. 6, n. 1, p. 47, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 68.
- 31 BAZEIA, D. *Campos Escalares em Ação*. Tese (Doutorado) — Tese de doutorado, UFPB, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

- 32 D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. Citado na página 35.
- 33 PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, v. 142, p. 419–421, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- 34 BAZEIA, D.; LOSANO, L.; SANTOS, J. Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 25-27, p. 1615–1620, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 68.
- 35 LIMA, J. A. S. d.; BASILAKOS, S.; SOLÀ, J. Expansion history with decaying vacuum: a complete cosmological scenario. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, The Royal Astronomical Society, v. 431, n. 1, p. 923–929, 2013. Citado na página 47.
- 36 SANTOS, J.; MORAES, P. Cosmological features of a quintessence-running vacuum model. *arXiv preprint arXiv:1806.07493*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 64.
- 37 KOIVISTO, T. A note on covariant conservation of energy–momentum in modified gravities. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 23, n. 12, p. 4289, 2006. Citado na página 50.
- 38 MORAES, P.; SANTOS, J. A complete cosmological scenario from $f(r, t)$ gravity theory. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 76, n. 2, p. 60, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 58, 59 e 66.
- 39 DAS, A. *Lectures on gravitation*. [S.l.]: World scientific, 2011. Citado na página 75.

Apêndices

APÊNDICE A – Tensor de Ricci

Como vimos, os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}), \quad (\text{A.1})$$

e que podem ser reescritos de outra forma como sendo

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\nu\rho;\mu} + g_{\rho\mu;\nu} - g_{\mu\nu;\rho}). \quad (\text{A.2})$$

Podemos constatar que os símbolos de Christoffel não nulos serão dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}[g_{01;1} + g_{10;1} - g_{11;0}] = \frac{1}{2}\left[-\frac{d}{dt}\frac{-a^2}{(1-kr^2)}\right] = \frac{a(t)}{1-kr^2}\dot{a}; \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}[g_{02;2} + g_{20;2} - g_{22;0}] = \frac{1}{2}\left[-\frac{d}{dt} - a^2r^2\right] = r^2a(t)\dot{a}; \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}[g_{03;3} + g_{30;3} - g_{33;0}] = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}a^2r^2\sin^2\theta\right] = \sin^2\theta r^2a(t)\dot{a}; \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{11}[g_{10;1} + g_{11;0} - g_{01;1}] = \frac{1}{2}\frac{-a^2}{(1-kr^2)}\left[\frac{d}{dt}\frac{-a^2}{1-kr^2}\right] = \frac{\dot{a}}{a(t)}; \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}[g_{11;1} + g_{11;1} - g_{11;1}] = \frac{-1}{2}\frac{1-kr^2}{a^2}\left[\frac{d}{dr}\frac{-a^2}{(1-kr^2)}\right] = \frac{kr}{(1-kr^2)}; \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}[g_{12;2} + g_{21;2} - g_{22;1}] = \frac{-1}{2}\frac{(1-kr^2)}{a^2}\left[\frac{d}{dr}(a^2r^2)\right] = -r(1-kr^2); \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}[g_{13;3} + g_{31;3} - g_{33;1}] = \frac{1}{2}\frac{(1-kr^2)}{a^2}\left[\frac{d}{dr}(-a^2r^2\sin^2\theta)\right] = -r\sin^2\theta(1-kr^2); \\ \Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}[g_{20;2} + g_{22;0} - g_{02;2}] = \frac{1}{2}\frac{-1}{a^2r^2}\left[\frac{d}{dt}(-a^2r^2)\right] = \frac{\dot{a}}{a(t)}; \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}[g_{21;2} + g_{22;1} - g_{12;2}] = \frac{-1}{2}(-a^2r^2)\left[\frac{d}{dr}a^2r^2\right] = \frac{1}{r}; \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}[g_{23;3} + g_{32;3} - g_{33;2}] = \frac{1}{2}\frac{-1}{a^2r^2}\left[\frac{d}{d\theta}a^2r^2\sin^2\theta\right] = -\sin\theta\cos\theta; \\ \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33}[g_{30;3} + g_{33;0} - g_{03;3}] = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{d}{dt}a^2r^2\sin^2\theta\right] = \frac{\dot{a}}{a}; \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33}[g_{31;3} + g_{33;1} - g_{13;3}] = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{d}{dr}a^2r^2\sin^2\theta\right] = \frac{1}{r}; \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}g^{33}[g_{32;3} + g_{33;2} - g_{23;3}] = \frac{1}{2}\frac{-1}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{d}{d\theta}a^2\sin^2\theta r^2\right] = \cot\theta. \end{aligned}$$

Conforme podemos observar em [39], o tensor de Ricci pode ser escrito da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}, \quad (\text{A.3})$$

já que precisamos calcular os tensores de Ricci para cada coordenada da métrica FLRW, então tomaremos inicialmente para a componente temporal R_{00}

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{00}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{01}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^2 \Gamma_{02}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^3 \Gamma_{03}^\alpha; \\
&= -\frac{d}{dt} [\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3] - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3; \\
&= -\frac{d}{dt} [\dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1} + \dot{a}a^{-1}] - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}; \\
&= \frac{-3}{a^2}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) - \frac{3\dot{a}^2}{a^2}; \\
&= \frac{-3\ddot{a}}{a}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Para a componente R_{11} , teremos

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha - \partial_1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^0 \Gamma_{10}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^2 \Gamma_{12}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^3 \Gamma_{13}^\alpha; \\
&= \partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \\
&\quad - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3; \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{a\dot{a}}{(1-kr^2)} \right] - \frac{d}{dr} \frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \frac{1}{r} + \frac{kr}{1-kr^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] - \frac{2\dot{a}}{a} \left[\frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \right] - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}; \\
&= \frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{2k}{1-kr^2} - \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}; \\
&= \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Para o R_{22} , obteremos

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^0 \Gamma_{20}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^1 \Gamma_{21}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^2 \Gamma_{22}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^3 \Gamma_{23}^\alpha; \\
&= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{21}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \\
&\quad + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3; \\
&= \frac{d}{dt} (r^2 a \dot{a}) + \frac{d}{dr} [-r(1-kr^2)] - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{d}{d\theta} (\cot \theta) + a \dot{a} r^2 \left(\frac{2\dot{a}}{a} \right) - r(1-kr^2) \\
&\quad \left[\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{1}{r} \right] - \frac{\dot{a}}{a} r^2 a \dot{a} - \cot^2 \theta + \frac{\dot{a}}{a} a \dot{a} r^2 + \frac{1}{r} [r(1-kr^2)]; \\
&= r^2 (a\ddot{a} + \dot{a}^2) - 1 + 3kr^2 + \operatorname{cosec}^2 \theta + 2\dot{a}r^2 - kr^2 - 1 + kr^2 - \dot{a}^2 r^2 - \cot^2 \theta + \dot{a}^2 r^2 + 1 - kr^2; \\
&= r^2 (a\ddot{a} + 2k + 2\dot{a}^2).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

E por fim, para R_{33} :

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2\alpha}^\alpha + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{3\alpha}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^0 \Gamma_{30}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^1 \Gamma_{31}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^2 \Gamma_{32}^\alpha - \Gamma_{3\alpha}^3 \Gamma_{33}^\alpha; \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2 + \\
&\quad + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1; \\
&= \frac{d}{dr} (a\dot{a} \sin^2 \theta r^2) + \frac{d}{dr} [-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] + \frac{d}{d\theta} (-\sin \theta \cos \theta) + \frac{2\dot{a}}{a} (\sin^2 \theta r^2 a\dot{a}) - \\
&\quad - \sin^2 \theta r (1 + kr^2) \left[\frac{kr}{1 - kr^2} + \frac{1}{r} \right] - (-\sin \theta \cos \theta \cot \theta) - \sin^2 \theta r^2 a\dot{a} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{r} r \sin^2 \theta (1 - kr^2); \\
&= r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2 \theta (1 - 3kr^2) - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\dot{a}r^2 \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta - \\
&\quad - \sin^2 \theta (1 - kr^2) - \sin^2 \theta r^2 \dot{a}^2 + \sin^2 \theta (1 - kr^2) + \cos^2 \theta; \\
&= \sin^2 \theta r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \sin^2 \theta + 3kr^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta; \\
&= \sin^2 \theta r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \tag{A.7}
\end{aligned}$$