



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Éwerton Jéferson Barbosa Ferreira

**Movimento Browniano Quântico e
Não-comutatividade em um modelo análogo
com condensado de Bose-Einstein**

Campina Grande

2020

Éwerton Jéferson Barbosa Ferreira

**Movimento Browniano Quântico e Não-comutatividade
em um modelo análogo com condensado de
Bose-Einstein**

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Marcos Antônio Anacleto
Coorientador: Professor Dr. Carlos Heitor Gomes Bessa

Campina Grande

2020

F383m Ferreira, Éwerton Jéferson Barbosa.
Movimento Browniano quântico e não-comutatividade em um modelo análogo com condensado de Bose-Einstein / Éwerton Jéferson Barbosa Ferreira. – Campina Grande, 2020.
122 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.
"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto, Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Béssa".
Referências.

1. Física. 2. Movimento Browniano Quântico. 3. Flutuações Quânticas de Vácuo. 4. Condensado de Bose-Einstein. 5. Não-comutatividade. I. Anacleto, Marcos Antonio. II. Béssa, Carlos Heitor Gomes. II. Título.

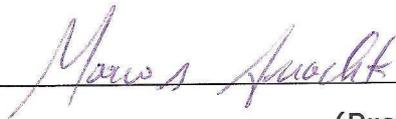
CDU 53(043)

ÉWERTON JÉFERSON BARBOSA FERREIRA

**MOVIMENTO BROWNIANO QUÂNTICO E NÃO-COMUTATIVIDADE EM UM
MODELO ANÁLOGO COM CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN**

Dissertação aprovada em 17/02/2020

BANCA EXAMINADORA



(Presidente)

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



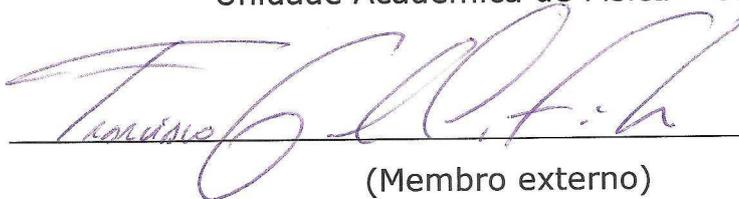
(Coorientador)

Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Bessa
Programa de Pós-graduação em Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa Filho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. Seguidamente, aos meus pais Edilene e Edmilson pelo empenho, dedicação na minha criação e educação, incentivos, ajuda, por tudo, os seus esforços me permitiram chegar a essa etapa importante da minha vida.

Gostaria de agradecer também ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto e coorientador Prof. Dr. Carlos Heitor Gomes Béssa pelas orientações, disponibilidade, paciência e pelo tempo dedicado por ambos para a elaboração deste trabalho.

Agradeço a todos os professores da Unidade Acadêmica de Física pelos conhecimentos transmitidos durante minha passagem pelo programa de pós-graduação em Física.

Também agradeço a todos os amigos que fiz durante o curso pelos constantes incentivos, ajudas, trocas de experiências e momentos de descontração.

Expresso também meus agradecimentos a todos os meus professores que contribuíram com minha formação ao longo dessa jornada acadêmica, pois a vitória não é só minha, e sim resultado do excelente trabalho de todos vocês.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro para o desenvolvimento do trabalho.

Resumo

As observações de Robert Brown (1828) sobre o movimento aleatório dos grãos de pólen marcaram o início do fenômeno hoje conhecido por Movimento Browniano, o qual refere-se ao deslocamento aleatório que uma partícula realiza em um meio fluido circundante. O movimento desordenado da partícula Browniana é reflexo das constantes colisões com as moléculas e átomos do meio. Existe também o movimento Browniano Quântico de uma partícula, onde o movimento estocástico é motivado pelas flutuações quânticas do campo de vácuo. No presente trabalho nós estudamos o movimento Browniano quântico de uma partícula em um condensado de Bose-Einstein em expansão conforme Friedmann-Robertson-Walker considerando correções não-comutativas. Os efeitos da não-comutatividade sobre a dispersão de velocidades foram investigados e mostraram diferentes tipos de influência, mas em todos os casos, apesar das diferenças, as correções não-comutativas apresentaram uma característica similar: aproximam-se de um valor constante no regime de tempo longo.

Palavras-chave: Movimento Browniano quântico. Flutuações quânticas de vácuo. Condensados de Bose-Einstein. Não-comutatividade.

Abstract

The Robert Brown (1828) observations about pollen grains random movement marked the beginning of the currently phenomenon called by Brownian Motion which to refer yourself random displacement a particle perform in a surrounding fluid medium. The disorderly movimento of the Brownian particle is consequences their constant collisions with the molecules or atoms of the medium. There is also the Quantum Brownian Motion of a particle where the stochastic movement is motivated by the quantum vacuum field fluctuations. In the present work we study the quantum Brownian motion of a particle in an conformal expanding Bose-Einstein condensate Friedmann-Robertson-Walker considering noncommutative corrections. The noncommutativity effects on velocity dispersion were investigated and showed different types of influence, but in all cases despite the differences noncommutative corrections had a similar characteristic: they approach a constant value in the long time regime.

Keywords: Quantum Brownian Motion. Quantum vacuum fluctuation. Bose-Einstein condensate. Noncommutativity.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema simplificado de um buraco negro acústico.	22
Figura 2 – Exemplos de aparatos experimentais de modelos análogos clássicos baseados em um fluxo de água.	23
Figura 3 – Esquema fenomenológico da condensação de Bose-Einstein.	29
Figura 4 – Esquema de um sistema MOT utilizado para aprisionar átomos na produção de CBE.	30
Figura 5 – Ilustração do movimento aleatório descrito por uma partícula browniana devido as frequentes colisões com as moléculas do meio fluido.	38
Figura 6 – Esquema ilustrativo para explanação dos mecanismos <i>sudden</i> e <i>smooth switching</i>	43
Figura 7 – Esquema ilustrativo para outra possível explanação dos mecanismos <i>sudden</i> e <i>smooth switching</i>	44
Figura 8 – Possíveis contornos para integral na variável k^0 da equação (3.23). . . .	47
Figura 9 – CBE simulando um universo em expansão.	49
Figura 10 – Ilustração de possíveis explicações para o efeito de f_{ext}^i sobre o sistema em estudo.	50
Figura 11 – Relação entre as distâncias própria e coordenada no espaço-tempo FRW.	53
Figura 12 – Fator de escala assintoticamente plano.	55
Figura 13 – Representação do sistema considerado para exemplificação da não-comutatividade dos momentos e coordenadas espaciais.	61
Figura 14 – Comportamento gráfico produzido pela contribuição não-comutativa na equação (5.56) em função de w	81
Figura 15 – Comportamento gráfico das contribuições não-comutativas para as soluções de $G(w)$ e $F(w)$ em função de w no limite de tempo longo. . . .	82
Figura 16 – Plote da contribuição não-comutativa presente na equação (5.79). . . .	89
Figura 17 – Plote da contribuição não-comutativa da equação (5.79) para baixas velocidades c_{sf}	89
Figura 18 – Ilustração para o Teorema 1.	105
Figura 19 – Região de convergência do Teorema 2.	106
Figura 20 – Representação do Teorema 3.	107
Figura 21 – Contorno escolhido para realização da integral (C.6).	112
Figura 22 – Contorno escolhido para realização da integral (C.8).	113
Figura 23 – Contorno escolhido para integral $I_{(i)}$	118
Figura 24 – Contorno escolhido para segunda integral de I_A	119

Lista de tabelas

Tabela 1 – Termos iniciais da dupla somatória na eq. (C.11).	114
Tabela 2 – Termos iniciais da dupla somatória da eq. (D.9).	121

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	MODELOS ANÁLOGOS DE GRAVIDADE	21
2.1	Análogo clássico: Fluido ideal	22
2.1.1	Motivação	22
2.1.2	Descrição matemática: Dinâmica dos fluidos	23
2.2	Análogo quântico: Condensado de Bose-Einstein	27
2.2.1	Motivação	27
2.2.2	Descrição matemática: Equação de Gross-Pitaevskii e representação hidrodinâmica	31
3	MOVIMENTO BROWNIANO E FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS DO CAMPO DE VÁCUO	37
3.1	Movimento Browniano Clássico via equação de Langevin	37
3.2	Movimento Browniano Quântico: Alguns comentários	41
3.3	Funções de Green e valor esperado no vácuo	45
3.4	Movimento Browniano Quântico de uma partícula em um CBE em expansão	48
3.4.1	Partículas livres	51
3.4.2	Partículas ligadas	54
4	ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO: BREVES CONSIDERAÇÕES	57
4.1	Lagrangiana para uma partícula em um campo magnético	58
4.2	O problema de Landau	61
4.3	Produto Moyal e algumas propriedades	64
5	MBQ DE UMA PARTÍCULA EM UM CBE EM EXPANSÃO: EFEITOS DE NÃO-COMUTATIVIDADE.	67
5.1	A Métrica de fundo (<i>background</i>)	67
5.2	Equação da força	70
5.3	Casos de estudo	74
5.3.1	Partículas livres	74
5.3.2	Partículas ligadas	83
5.3.3	Alguns comentários sobre as correções não-comutativas.	90
6	CONCLUSÕES	93

Referências	95
-----------------------	----

APÊNDICES **101**

	APÊNDICE A – INTEGRAÇÃO VIA MÉTODO DE RESÍDUOS	103
A.1	Motivação e definições iniciais	103
A.2	Método de Resíduos	105
A.3	Como encontrar resíduos	106
	APÊNDICE B – CORREÇÃO PARA A EQUAÇÃO DA FORÇA	109
	APÊNDICE C – DETALHES MATEMÁTICOS DAS SOLUÇÕES	
	DAS EQUAÇÕES (5.44) E (5.45).	111
	APÊNDICE D – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (5.68).	117

1 Introdução

Classicamente, é conhecido que o Movimento Browniano (MB) foi assim estabelecido após as observações do botânico Robert Brown relatadas em 1828, sobre o movimento ativo de pequenas partículas de pólen suspensas em água [1]. Sabe-se que a motivação do movimento randômico da partícula Browniana (suspensa) ocorre mediante a transmissão de momento devido as colisões com as moléculas e átomos do meio em direções distintas. Albert Einstein foi um dos primeiros a fornecer uma teoria para explicar esse fenômeno, baseado em um tratamento difusivo [2], porém posteriormente Langevin [3] propôs uma forma de descrição mais simples, que permite encontrar os mesmos resultados obtidos por Einstein [4]. Devido a simplicidade, o formalismo de Langevin será a abordagem matemática escolhida para descrição do MB nas próximas seções.

Enquanto que no caso clássico o movimento aleatório de uma partícula é provocado pelas colisões, uma partícula interagindo com um campo no estado de vácuo pode apresentar um Movimento Browniano Quântico (MBQ), cujo movimento aleatório será produzido pelas flutuações quânticas do campo de vácuo. Tais flutuações quânticas são características de um campo quântico [5]. Essas flutuações de fato ocorrem e na verdade o vácuo não é de todo vazio como geralmente se coloca. Um exemplo que evidencia a existência dessas flutuações é o efeito Casimir [6].

No contexto dos efeitos devido as flutuações quânticas do campo de vácuo, o tema Movimento Browniano Quântico tem motivado muitos trabalhos de pesquisa em diferentes âmbitos [5, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Boa parte dos trabalhos investigam o MBQ de uma partícula na presença de planos refletores devido as flutuações quânticas de vácuo do campo eletromagnético. Embora seja questionável o MBQ de uma partícula no vácuo de Minkowski, Gour e Sriramkumar [5] mostram que este pode existir. Semelhante ao caso clássico, as quantidades investigadas no MBQ são as dispersões de velocidades e posição das partículas Brownianas, que agora são originadas pelas flutuações quânticas do estado de vácuo do campo com o qual interagem.

Como já mencionado, muitos dos sistemas utilizados nas investigações sobre o MBQ de uma partícula constituem-se de um estado de vácuo na presença de um plano refletor. Contudo, existe a possibilidade de utilizar um modelo análogo de gravidade com Condensado de Bose-Einstein (CBE) em expansão como um sistema de estudo para investigação do MBQ devido às flutuações quânticas do campo de vácuo. Como será descrito, Seção 2.2, esses sistemas quânticos (CBE) são compostos por gases bosônicos resfriados a temperaturas próximas ao zero absoluto.

De acordo com Bessa *et al* [11], nesse panorama as flutuações do campo de vácuo

levam a uma dispersão de velocidade diferente de zero para as partículas do fluido em expansão, que simula um universo em expansão conforme tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW), cuja forma da expansão é controlada por um fator de escala dependente do tempo. No presente trabalho, utilizamos o mesmo sistema descrito acima, um CBE em expansão conforme tipo FRW. Porém, agora queremos considerar correções decorrentes de um espaço-tempo não-comutativo.

Sabemos pela Mecânica Quântica que $[x^i, x^j] = [p^i, p^j] = 0$ e $[x^i, p^j] = i\hbar\delta^{ij}$ são as relações de comutação entre o operador posição \hat{x} e momento \hat{p} em um espaço-tempo comutativo. No entanto, quando lidamos com um espaço-tempo não-comutativo as coordenadas seguem a relação geral $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, que representa a não-comutatividade do espaço-tempo, em que θ é uma matriz quadrada e antissimétrica com dimensão de comprimento ao quadrado [13].

Uma investigação no âmbito de condensado não-comutativo foi realizada por Brito e Lima [14], os autores investigaram quantidades termodinâmicas de um CBE considerando um espaço não-comutativo usando o formalismo da teoria quântica de campos. Nesse cenário, por exemplo, temperatura crítica, energia interna e calor específico foram obtidos e apresentaram correções devido a não-comutatividade. Apesar das modificações, no limite em que o parâmetro de não-comutatividade tende a zero ($\theta \rightarrow 0$) os resultados usuais do espaço comutativo são recuperados.

Considerando o exemplo acima citado, uma mistura entre CBE e não-comutatividade torna-se algo atrativo e motivante para se levar em conta no contexto do MBQ. Estudar os efeitos da não-comutatividade sobre o movimento Browniano de uma partícula em um CBE em expansão será o objetivo geral da investigação desenvolvida no presente trabalho. De fato, será mostrado que a consideração de um espaço não-comutativo produz resultados interessantes e efeitos significativos sobre a dispersão de velocidade das partículas Brownianas.

Quanto a organização, em termos gerais, o texto foi sistematizado de modo a descrever gradualmente cada um dos elementos que constituem a proposta de trabalho. Sendo assim, estruturado de forma a proporcionar na medida do possível um entendimento (teórico e/ou fenomenológico) de cada componente envolvido através de um texto contínuo no que se refere a apresentação das ideias. Por contínuo queremos dizer fornecer um material que também é acessível para iniciantes e interessados no tema, visto que poderá servir como fonte de consulta. Com essa perspectiva, a estrutura da revisão apresentada nos Capítulos 2, 3 e 4 busca fornecer uma descrição completa do sistema estudado sobre o qual será realizada a proposta de investigação do presente trabalho, que busca analisar os efeitos produzidos por correções não-comutativas sobre o MB das partículas no condensado em expansão.

Em relação a redação do presente trabalho, no Capítulo 2 é apresentada uma breve

revisão sobre os modelos análogos de gravidade, tanto em um nível clássico (fluxo de um fluido) como em um nível quântico (condensado de Bose-Einstein). Em ambos os níveis de descrição, clássico e quântico, a exposição divide-se em duas partes. Primeiro apresenta-se um texto com finalidade de motivação, contendo a ideia principal do objeto de estudo juntamente com alguns exemplos de pesquisas desenvolvidas. Na segunda parte é fornecida uma descrição básica do formalismo matemático que descreve o sistema em questão.

No Capítulo 3 apresentamos muitos dos resultados conhecidos na literatura que serão utilizados nas seções subsequentes. Iniciamos com a explanação do movimento Browniano clássico de uma partícula calculando sua dispersão quadrática média de velocidades e posição. Em seguida alguns dos elementos sobre o estudo do movimento Browniano quântico são apresentados. Além disso, deduzimos a função de dois pontos do campo escalar sem massa na ausência de placas através do formalismo das funções de Green uma vez que é um item importante nos cálculos do MBQ. Na sequência, uma revisão do MBQ de uma partícula em um condensado de Bose-Einstein em expansão tipo FRW é apresentada, cuja finalidade é auxiliar e tornar claro as discussões dos resultados obtidos no Capítulo 5.

Alguns dos fundamentos relacionados ao espaço-tempo não-comutativo são abordados no Capítulo 4, que é um dos ingredientes que caracteriza e define a nossa proposta de trabalho. O objetivo desse tópico é proporcionar rudimentos e familiaridade com a teoria não-comutativa. Para tanto discutiremos o problema de Landau, o qual mostra o surgimento natural da não-comutatividade mesmo no nível clássico. Em seguida algumas das propriedades algébricas necessárias para se trabalhar em um espaço plano considerando coordenadas de um espaço não-comutativo são apresentadas.

No Capítulo 5 inicia-se a ideia de estudo, que foi verificar quais são as modificações resultantes na dispersão de velocidades das partículas quando efeitos de não-comutatividade entre coordenadas espaciais são considerados. A admissão de tais efeitos produz resultados novos mostrando que para o caso de partículas livres existe um pequeno movimento browniano das partículas. Devido a não-comutatividade encontram-se também correções positivas e negativas para o caso de partículas ligadas. Apesar dos resultados obtidos através da não-comutatividade apresentarem comportamentos distintos, ex. positivos, negativos, constantes e dependentes do tempo, algumas similaridades são mantidas: rápidos comportamentos para curtos intervalos de tempo e valores constantes para um regime de tempo longo. Por fim, são feitas as conclusões do trabalho onde recapitulam-se os desenvolvimentos realizados, objetivos almejados diante da estrutura textual proposta, síntese dos principais resultados e perspectivas.

2 Modelos Análogos de gravidade

A teoria da Relatividade Geral de Einstein certamente foi uma de suas grandes e notáveis contribuições para ciência prevendo diferentes fenômenos, como por exemplo ondas gravitacionais, as quais foram detectadas pelo LIGO - Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. Além disso, uma das previsões teóricas da relatividade geral, formalmente uma das soluções mais simples das equações de Einstein, diz sobre a existência de objetos com massa suficientemente grande e concentrada em um ponto cuja atratividade é tão intensa que até mesmo a luz não consegue escapar. Esses objetos astrofísicos denominados buraco negro¹ são muito peculiares quanto as suas características que por sua vez os tornam de difícil acesso experimental (ou até mesmo impossível).

Devido ao seu intenso campo gravitacional não se pode obter informações sobre o buraco negro além de regiões denominadas horizonte de eventos, dito de uma forma mais simples, esse objeto é uma via de mão única onde sinais viajam de fora para dentro e não de forma contrária. Mesmo com a grande atratividade, a qual impediria qualquer sinal escapar, Stephen Hawking [16, 17] mostrou que na verdade uma radiação na vizinhança dos buracos negros poderia ser emitida em virtude da criação e aniquilação de partículas em volta do buraco negro, chamada de radiação Hawking.

Apesar da previsão teórica da radiação Hawking uma grande dificuldade em um nível astrofísico, se não impossível, é medir essa radiação devido a sua pequena magnitude. Contudo, os modelos análogos de gravidade, cujo extensivo estudo foi intensificado pelo trabalho de W. G. Unruh [18], constituem uma poderosa ferramenta de investigação (teórica e experimental) dos verdadeiros fenômenos e sistemas físicos os quais simulam, por exemplo a radiação Hawking, que é um dos principais objetos de estudos, superradiância e produção de partículas. Genericamente, um modelo análogo faz uma mímica entre as grandezas de um sistema difícil de testar experimentalmente e outro com reprodução acessível cujo comportamento de seus parâmetros possuem similaridades com seu análogo.

A seguir é apresentada uma breve descrição matemática dos modelos análogos constituídos por sistemas clássicos e quânticos, além de mencionarmos alguns trabalhos experimentais. Mais detalhes, como por exemplo conhecimento histórico, matemático e fenomenológico, podem ser encontrados nas referências [19] e [20], as quais fornecem uma grande quantidade de informações sobre o tema e que também utilizamos como fonte para construção desse tópico, além das referências citadas ao longo do texto.

¹ Destaca-se que está sendo utilizada uma descrição objetiva e moderna ao falar sobre os buracos negros, portanto pouco detalhista, mas ressalta-se que sua compreensão física não foi algo instantâneo e demorou algum tempo até ser estabelecida. Visto que excederia os limites desse trabalho contar esse episódio histórico, para detalhes recomenda-se [15].

2.1 Análogo clássico: Fluido ideal

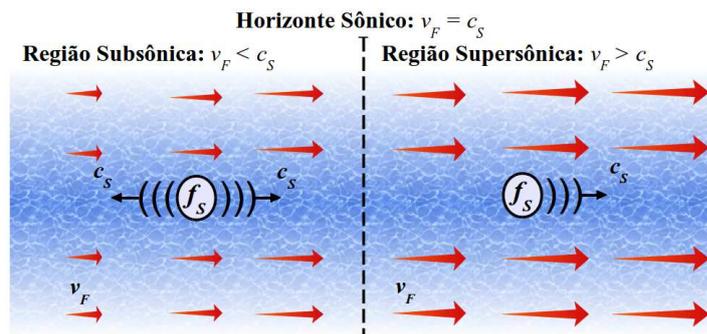
2.1.1 Motivação

Compreender a essência de um buraco negro acústico não é difícil uma vez que constitui-se basicamente de um sistema de ondas se propagando por um fluxo de fluido com velocidade crescente que por sua vez origina três regiões distintas: região subsônica, supersônica e horizonte sônico.

Vamos considerar o sistema elementar apresentado na Figura (1), onde um fluxo de fluido da esquerda para direita, com velocidade v_F , aumenta gradualmente a velocidade de sua correnteza. Um detector que se encontra na região supersônica, $v_F > c_S$, capta sinais, com velocidade do som c_S , proveniente das duas fontes sonoras f_S . Porém, um observador (detector) na região subsônica, $v_F < c_S$, não detecta sinais de uma fonte que se encontra na região supersônica, pois a velocidade dos sinais emitidos c_S é menor que a do fluxo v_F . Logo, sinais com velocidade c_S menores que a do fluxo v_F são “arrastados” no sentido do fluxo. Por outro lado se $v_F < c_S$ o sinal escapa, por exemplo um sinal emitido no lado esquerdo da linha tracejada é captado por detectores em ambos os lados.

Existe uma região limite em que $v_F = c_S$, essa região é denominada de horizonte sônico e estabelece que sinais emitidos próximos desse ponto tendem a ser arrastados pelo fluxo do fluido, ou seja, são capturados pelo buraco negro acústico. Então, semelhante ao caso astrofísico em que a luz não escapa da atração gravitacional do buraco negro, no buraco negro acústico o som não escapa do horizonte sônico que delimita a região interna (supersônica) da externa (subsônica).

Figura 1 – Esquema simplificado de um buraco negro acústico.

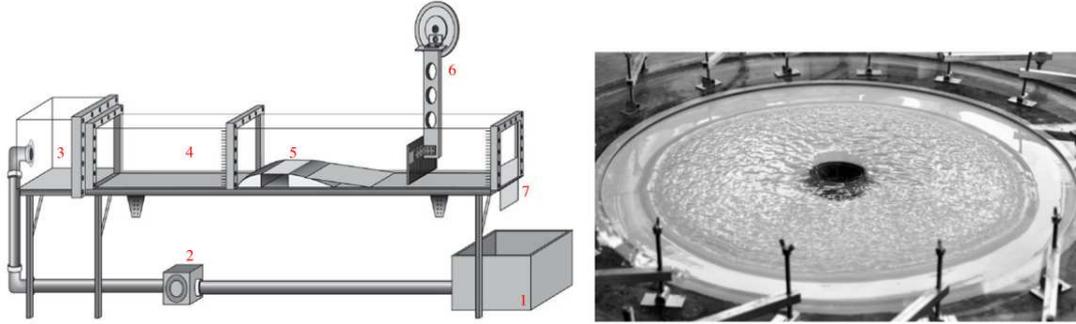


Legenda: Fontes emissoras de sons f_S encontram-se em um fluido com velocidade v_F crescente que dá origem a regiões distintas em relação a velocidade do fluxo, uma subsônica, $v_F < c_S$, horizonte de eventos, $v_F = c_S$ e supersônica, em que $v_F > c_S$. Fonte: produzido pelo autor, 2020.

O trabalho de Unruh não demonstrou apenas uma mera curiosidade ou coincidência matemática, mas viabilizou novos caminhos a física teórica e experimental. Em suas palavras o mesmo diz que esses modelos fornecem subsídios para testar os efeitos desconhecidos da gravidade quântica na evaporação de buracos negros [18].

De fato, experimentos utilizando tanques com água em diferentes configurações de montagem são utilizados para verificar a radiação Hawking análoga (principal objeto de estudo), além de investigar outros efeitos simulados, Figura (2).

Figura 2 – Exemplos de aparatos experimentais de modelos análogos clássicos baseados em um fluxo de água.



Legenda: À esquerda, tanque de formato retangular com fluxo de água, retirado de [21, p. 170]. A numeração faz parte da descrição do aparato em sua fonte de origem. À direita, tanque de formato circular com fluxo de água radial e saltos hidráulicos, retirado de [22, p. 2].

A título de exemplo, na referência [23] é relatado a observação de radiação Hawking análoga através da verificação de conversão de ondas com frequências positivas em ondas de frequência negativa, onde utilizou-se um aparato experimental reproduzindo as características de um buraco branco acústico². Outro exemplo desse tipo de experimento pode ser encontrado em [24], na qual é investigada radiação Hawking análoga estimulada em buracos brancos. Podemos citar também [22], onde é apresentado um modelo análogo para estudar os mecanismos de instabilidade no núcleo das estrelas em colapso. Em adição cita-se [25] onde o fenômeno de superradiância é estudado utilizando um tanque com um vórtice de água.

2.1.2 Descrição matemática: Dinâmica dos fluidos

Matematicamente, no nível clássico as ideias que conduzem a uma métrica efetiva partem das relações fundamentais que estabelecem a dinâmica dos fluidos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = f, \quad (2.2)$$

respectivamente, equação da continuidade e equação de Euler [26, p. 351-356], com densidade de força

$$f = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

² Esse sistema possui comportamento inverso ao de um buraco negro. Enquanto no buraco negro nada escapa para fora de sua superfície no buraco branco nada entra.

O próximo passo refere-se a uma série de considerações sobre o fluido, admitindo-se que:

- não há viscosidade, assim está sendo considerado um fluido ideal visto que na ocasião o atrito entre as camadas de fluido não existe;
- o único tipo de força presente no fluido está relacionada a pressão, isso nos leva a escrever para densidade de força $f = -\nabla p$;
- não existe vorticidade, logo podemos escrever a velocidade do fluxo como $\mathbf{v} = -\nabla\phi$.

Agora, utilizando as considerações acima e a identidade vetorial

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + 2\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}),$$

da equação de Euler (2.2) obtém-se

$$-\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \right]. \quad (2.3)$$

Uma vez que consideramos o fluido sendo ideal (sem viscosidade) estamos negligenciando as possíveis trocas de calor entre as camadas de fluido, devido ao atrito e a mudança de temperatura em diferentes partes. Isso também implica dizer que não há dissipação de energia e a entropia das partículas se conserva durante o tempo ($ds/dt = 0$). Assim, através da relação básica da termodinâmica $dh = Tds + Vdp$ é possível ver que a entalpia específica é função apenas da pressão, $h = h(p)$ [27, p. 3-5]. Além disso, considerando que o fluido é barotrópico, isto é, que a densidade ρ só depende da pressão, temos [19]

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')}, \quad (2.4)$$

$$\nabla h = \frac{1}{\rho}\nabla p. \quad (2.5)$$

Fazendo uso das relações acima, da equação (2.3) encontra-se

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + h + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = 0, \quad (2.6)$$

que é a equação de Bernouli de um fluido ideal, irrotacional, barotrópico e sem viscosidade.

Admitindo pequenas perturbações nas grandezas em torno dos valores médios iniciais, equivalente a dizer que vamos linearizar as equações as quais estão vinculadas,

$$\rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1, \quad p = p_0 + \epsilon p_1, \quad (2.7)$$

$$v = v_0 + \epsilon v_1, \quad \phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1, \quad (2.8)$$

com $\epsilon \ll 1$.

Nas expressões anteriores as perturbações estão relacionadas ao som, que será definido em termos dessas pequenas flutuações nos parâmetros do fluido (ρ , p , v e ϕ) [19]. Aplicando essas perturbações nas equações (2.1), (2.6) e desprezando termos de segunda ordem, encontra-se

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (2.9)$$

e

$$\rho_1 = c_s^2 \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right), \quad (2.10)$$

onde foi utilizada a definição da velocidade local do som no fluido $c_s^2 = p_1/\rho_1$, além da aproximação

$$h = \int \frac{dp_0 + \epsilon dp_1}{\rho_0 + \epsilon \rho_1} \approx \int \frac{dp_0}{\rho_0} + \epsilon \int \frac{dp_1}{\rho_0} \approx h_0 + \epsilon \frac{p_1}{\rho_0},$$

que é decorrente da condição barotrópica levando em conta que $\epsilon \ll 1$.

Substituindo a equação (2.10) em (2.9) encontramos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left(c_s^2 \rho_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(c_s^{-2} \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) - \nabla \cdot \left(c_s^{-2} \rho_0 \mathbf{v}_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) \\ + \nabla \cdot \left[\rho_0 \nabla \phi_1 - c_s^{-2} \rho_0 \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A equação acima descreve a propagação do potencial escalar ϕ_1 e nos permite determinar o comportamento das perturbações acústicas no fluido. Unruh [18] percebeu que a estrutura desta relação era semelhante as equações para um campo escalar sem massa em uma geometria do espaço-tempo curvo.

Dada a definição do operador d'Lambertiano

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \right) = 0, \quad (2.12)$$

em que ϕ é um campo escalar sem massa e g o determinante da matriz $g_{\mu\nu}$.

Identificando o termo $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}$ como uma densidade matricial, visto que

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = \frac{\partial}{\partial t} (f^{00} \partial \phi_1) + \frac{\partial}{\partial t} (f^{0j} \nabla_j \phi_1) + \nabla_i (f^{i0} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}) + \nabla_i (f^{ij} \nabla_j \phi_1) = 0, \quad (2.13)$$

comparando com a equação (2.11), obtém-se

$$f^{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c_s^2} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & \cdot & \dots \\ -v_0^i & \vdots & c_s^2 \delta_{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Aplicando o determinante em ambos os lados da definição de densidade matricial $f^{\mu\nu}$ encontram-se, respectivamente, $g = -\rho_0^4/c_s^2$ e $\sqrt{-g} = \rho_0^2/c_s$. Logo,

$$g^{\mu\nu} = \frac{c_s}{\rho_0^2} f^{\mu\nu} = \frac{1}{c_s \rho_0} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & \cdot & \dots \\ -v_0^i & \vdots & c_s^2 \delta_{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

com os índices $i, j = 1, 2, 3$, e $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Fazendo uso da propriedade $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathbb{I}$, onde \mathbb{I} é a matriz identidade, temos

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \dots & \cdot & \dots \\ -v_0^i & \vdots & \delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

De posse da representação matricial de $g_{\mu\nu}$ o elemento de linha nessa geometria acústica será

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c_s} \left[-c_s^2 dt^2 + \delta_{ij} (dx^i - v_0^i dt)(dx^j - v_0^j dt) \right]. \quad (2.17)$$

Uma vez que o sistema físico em estudo são as perturbações do som em um fluido ideal, a informação contida na expressão (2.17) é que as perturbações acústicas no fluido experimentam uma geometria análoga a de um espaço-tempo curvo. Dito de outra forma, do ponto de vista de um observador no referencial das perturbações sonoras se propagando no fluido o espaço-tempo é aparentemente curvo, mas no referencial do laboratório o espaço-tempo é plano, ou seja, Minkowski.

A equação (2.17) nos fornece um eficiente ferramental matemático para estudar sistemas gravitacionais utilizando um sistema hidrodinâmico, que permite traçar correspondências entre grandezas do sistema real e do modelo análogo. De fato, com a aplicação de transformações de coordenadas adequadas pode-se estabelecer um sistema hidrodinâmico cuja métrica acústica possui semelhança a de um buraco negro de Schwarzschild. Podemos escrever a equação (2.17) na forma vetorial

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[-(c_s^2 - v_0^2) dt^2 - 2\mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{x} dt + dx^2 \right]. \quad (2.18)$$

Definindo uma nova coordenada para o tempo cuja forma é

$$dt = d\tau - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{x}}{(c_s^2 - v_0^2)}$$

e substituindo na equação (2.18),

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left\{ (c_s^2 - v_0^2) d\tau^2 + \delta_{ij} \left[1 + \frac{v_0^i v_0^j}{(c_s^2 - v_0^2)} \right] dx^i dx^j \right\}. \quad (2.19)$$

Adotando a representação no sistema de coordenadas esféricas e admitindo que a velocidade do fluido é radial, isto é, $v_0 = v_r \hat{r}$, da equação anterior temos

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left\{ - \left(1 - \frac{v_r^2}{c_s^2} \right) c_s^2 d\tau^2 + \left(1 - \frac{v_r^2}{c_s^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right\}, \quad (2.20)$$

onde o termo $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ é o elemento diferencial de ângulo sólido.

Nota-se que a equação anterior para ds^2 é semelhante a métrica gravitacional de um buraco negro estático dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.21)$$

onde M e r são a massa e o raio do corpo esférico e G a constante gravitacional.

Assim como no caso da solução de Schwarzschild (2.21) para um buraco negro em que existe uma divergência para o raio crítico $r = 2GM/c^2$, também existe uma situação semelhante para o modelo acústico, na ocasião um horizonte sônico quando $v_r = c_s$ na equação (2.20). Vale salientar que a correspondência estabelecida entre os limites das grandezas nos respectivos modelos são: para modelo gravitacional a velocidade da luz c é a máxima velocidade e para o modelo acústico o limite é velocidade do som c_s .

2.2 Análogo quântico: Condensado de Bose-Einstein

2.2.1 Motivação

Na natureza as partículas que constituem a matéria se dividem fundamentalmente em dois grupos: bósons e férmions. Enquanto que as partículas bosônicas possuem número de spin inteiro as fermiônicas têm spin semi-inteiro [28, p. 1]. Também, uma outra peculiaridade de tais partículas é que bósons podem ocupar simultaneamente um mesmo estado de energia do sistema, ou seja, pode-se ter estados com 2, 3, 4 ou mais bósons. No caso dos férmions é permitida a existência de uma única partícula em cada estado de energia, esse é o chamado princípio da exclusão de Pauli.

Para a Mecânica Quântica e Estatística essa distinção é substancialmente crucial, pois em um sistema quântico (nível de escala atômica ou subatômica) as partículas que o compõe possuem características distintas e podem apresentar comportamentos diferentes quando submetidas a certas condições físicas, por exemplo, baixas temperaturas.

Um gás quântico composto por bósons ou férmions obedece a tratamentos estatísticos diferentes. Em outras palavras, cada um desses grupos possuem uma forma de contagem própria. Matematicamente, isso está expresso na função de partição do sistema estatístico, que é um elemento essencial a partir do qual pode-se encontrar outras grandezas físicas, como o número de partículas (N), pressão (p), energia interna (U), etc.

No formalismo do ensemble grande canônico um gás quântico composto por férmions ou bósons obedece, respectivamente, as chamadas estatísticas de Fermi-Dirac ou Bose-Einstein [29, p. 190],

$$\ln \Xi(T, V, \mu)_{FD(+), BE(-)} = \pm \sum_j \left[1 \pm e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} \right], \quad (2.22)$$

$$\langle n_i \rangle_{FD(+), BE(-)} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1}. \quad (2.23)$$

Nas expressões acima o sinal positivo é usado para férmions, com subscrito *FD* referente a estatística de Fermi-Dirac, enquanto que o sinal negativo é usado para bósons e o subscrito *BE* refere-se a estatística de Bose-Einstein. Além disso, $\beta = 1/k_B T$, k_B constante de Boltzmann, T temperatura, μ é o potencial químico e ϵ_j a energia do orbital j .

Das partículas do tipo bósons decorre um fenômeno muito peculiar chamado condensação de Bose-Einstein. Historicamente, surgiu como teoria no mesmo período em que nascia uma nova área da física chamada de Mecânica Quântica (com a teoria de Planck para explicar a radiação do corpo negro)³.

Embasado na ideia de Satyendranath Bose (1924), que explicara de maneira puramente estatística a lei de Planck comparando os fótons da cavidade do corpo negro com um gás de partículas idênticas e indistinguíveis, Einstein propôs tratamento análogo para um gás ideal de partículas massivas e com número conservado. Essas ideias foram expressas em três artigos dos quais Einstein fez a predição teórica do fenômeno físico denominado Condensado de Bose-Einstein [32, p. 9].

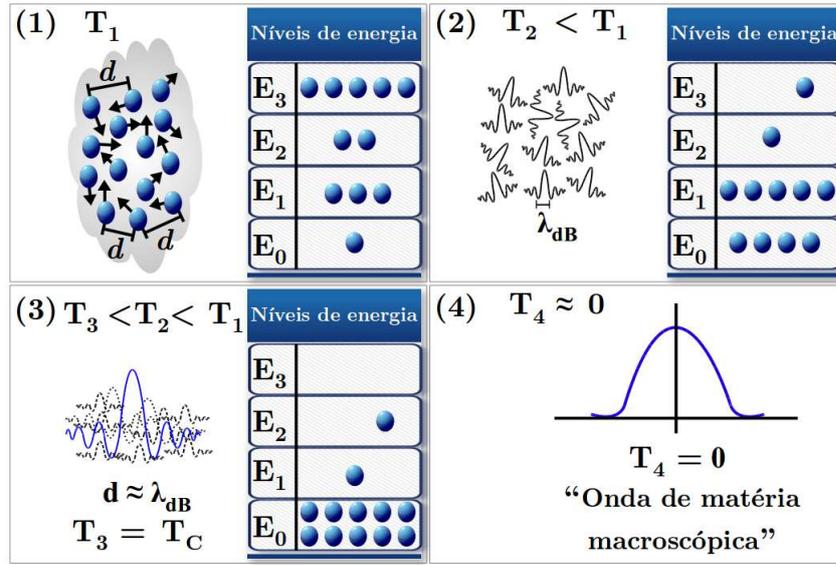
Se resfriarmos um gás atômico composto por partículas do tipo bósons a um extremo de baixas temperaturas vamos atingir uma nova fase da matéria que é a condensação de Bose-Einstein (CBE). Esse fenômeno exemplifica a manifestação macroscópica dos efeitos quânticos da matéria [33].

Na Figura (3) é exposto um esquema do fenômeno da CBE. Um gás trata-se de um sistema de muitas partículas que por sua vez encontram-se distribuídas nos seus respectivos níveis de energia. Claro que possivelmente algumas possam estar em níveis energéticos semelhantes, o que em uma linguagem mais formal significa dizer que podem existir alguns estados degenerados no sistema. Evidentemente tudo isso também ocorre de uma maneira bem mais direta e contínua, além de envolver obviamente um número de partículas muito maior. Contudo, por questões didáticas dividiu-se o processo em quatro estágios.

O estágio (1) representa o gás no seu estado natural, onde as partícula estão nos seus devidos níveis de energia, por exemplo, com E_3 , E_2 , e E_1 representando níveis excitados e E_0 o nível fundamental.

³ Para uma contextualização do assunto ver a sequência de artigos [30] e [31] os quais expõem e discutem alguns dos trabalhos originais proporcionando uma panorama histórico sobre a condensação de Bose-Einstein.

Figura 3 – Esquema fenomenológico da condensação de Bose-Einstein.



Legenda: A numeração superior nos respectivos quadros refere-se a uma divisão por estágios, ou etapas, para explicar o processo da CBE. Fonte: produzido pelo autor, 2020.

Após baixar a temperatura, estágio (2), a distância média (d) entre as partículas começa a diminuir em virtude do resfriamento, que tende a minimizar seus movimentos desordenados e aproximá-las. Isso também faz com que as partículas ocupem níveis de energia cada vez mais baixos.

Nesse extremo de baixas temperaturas o comportamento ondulatório das partículas gradualmente começa a surgir de modo que agora uma visão clássica já não é mais correta para descrever esse sistema. Quando atingimos o limite de uma temperatura crítica T_c , em que o comprimento de onda das partículas (comprimento de onda de de Broglie λ_{dB}) é comparável a distância média de separação d , acontece uma superposição das ondas – estágio (3) [32, p. 4]. O comprimento de onda é dado pela expressão

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}},$$

onde \hbar é a constante de Planck.

Nesse valor de temperatura T_c o número de ocupação das partículas no estado fundamental de energia do sistema cresce consideravelmente e tende para um número macroscópico. Este é o fenômeno chamado Condensação de Bose-Einstein [32, p. 4]. Vale ressaltar, uma vez que um gás é um tipo de fluido pode-se dizer que o condensado de Bose-Einstein é um fluido (ou gás) quântico. Por se tratar de bósons a expressão que determina o número médio de partículas ocupando um estado i de energia ϵ_i é dado pela estatística de Bose-Einstein, eq. (2.23),

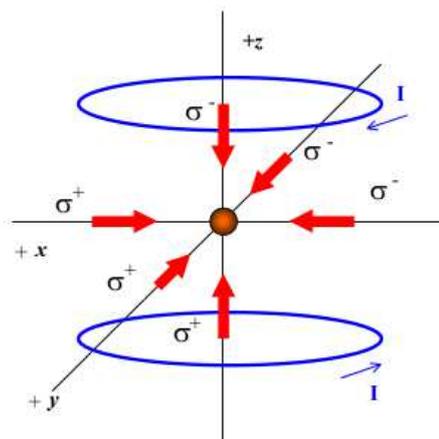
$$\langle n_i \rangle_{BE(-)} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}.$$

O estágio (4) da Figura (3) representa a situação em que teríamos um condensado ideal (puro), mas para isso seria necessário atingir a temperatura de zero absoluto. Embora não seja possível atingir verdadeiramente o zero absoluto é possível produzir temperaturas extremamente baixas da ordem de nano Kelvin (10^{-9}), logo essas temperaturas são praticamente zero.

Em virtude da faixa de valores de temperatura necessária para a CBE ser extremamente baixa a produção de um gás com esse comportamento não é algo simples e requer tanto tecnologia avançada nos processos de resfriamento como técnicas refinadas de aprisionamento dos átomos. Assim, devido a tais exigências a confirmação experimental da CBE demorou um tempo desde sua previsão teórica, em 1924, até 1995 quando diferentes grupos de pesquisa atingiram as exigências técnicas para produzir a CBE.⁴

Grosso modo, para produzir um gás quântico inicialmente os átomos são aprisionados em um dispositivo chamado de armadilha magneto-óptica⁵(MOT). Genericamente, esse dispositivo, ilustrado na Figura (4), constitui-se de um par de bobinas com correntes opostas que geram um gradiente de campo magnético mais um conjunto de três lasers contra propagantes. O arranjo tendem a empurrar os átomos confinando-os no centro da armadilha, além de reduzir sua energia cinética mediante a transferência de momento (contrária) por meio dos fótons do feixe laser. Seguidamente, em outro momento do processo faz-se o resfriamento evaporativo, que consiste basicamente em retirar os átomos mais energéticos da amostra de modo que os átomos restantes se retermalizam e atingem a temperatura necessária para ocorrer a CBE⁶ [32].

Figura 4 – Esquema de um sistema MOT utilizado para aprisionar átomos na produção de CBE.



Legenda: Na imagem, I representa a corrente das bobinas em configuração anti-Helmholtz e σ a polarização dos feixes incidentes sobre a nuvem atômica. Fonte: retirado de [32, p. 31].

⁴ Para mais detalhes ver [33] bem como as referências citadas.

⁵ Do inglês Magneto-Optical Trap (MOT).

⁶ Uma vez que descrever todos os detalhes técnicos e experimentais para obtenção de CBE tomaria muito tempo e espaço do presente trabalho, transcendendo seus limites e objetivos, para mais detalhes sobre o tema recomendam-se as referências [32] e [33].

Embora a produção de CBE em laboratórios tenha se tornado algo mais comum tal sistema não deve ser confundido como um processo que tornou-se simples de produzir ou muito menos esgotado. Diante da sua interdisciplinariedade, que é uma das razões pelas quais torna-se preferível quando comparado a outros sistemas, os condensados ainda constituem um elemento motivador para estudos. Além disso, suas características distintas já constituem pontos positivos, por exemplo, de acordo com Jain *et al* [34], em se tratando da produção de partículas, um dos motivos pelos quais CBE são atraentes para realização de modelos análogos de gravidade é que seu regime de baixas temperaturas minimiza as possíveis influências de natureza térmicas sobre os resultados.

Os condensados têm sido aplicados em muitos contextos, por uma questão de coerência primeiramente cita-se [35], onde utilizando um condensado composto por átomos de rubídio (^{87}Rb) foi observada radiação Hawking análoga e seu emaranhamento através de correlações entre as partículas das regiões internas e externas do horizonte, ou seja, a correlação entre as partículas aprisionadas e emitidas pelo buraco negro acústico. Apontamos aqui uma das potencialidades desses análogos que é o fato de termos acesso aos dois lados do sistema físico, regiões interna e externa.

Já em [36] um CBE composto por átomos de sódio (^{23}Na) em forma de anel é utilizado para modelar a expansão cosmológica do universo e estudar efeitos análogos, como por exemplo, o redshift dos fônons no condensado simulando o redshift dos fótons no caso cosmológico. Podemos citar ainda a utilização de CBE como detectores de ondas gravitacionais [37], onde tais ondas, por causarem distorções no espaço-tempo, produziriam uma excitação de fônons no condensado. Além disso, existem trabalhos estudando a construção de portas lógicas utilizando o acoplamento de dois CBE [38].

2.2.2 Descrição matemática: Equação de Gross-Pitaevskii e representação hidrodinâmica

Na Mecânica Quântica sistemas de muitos corpos são descritos pelos denominados operadores de campos ou simplesmente campos, os quais são decorrentes da segunda quantização. Dada as características do CBE descritas anteriormente como a ocupação macroscópica do estado fundamental, na ocasião bósons, esse sistema pode ser representado por uma hamiltoniana de muitos corpos

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (2.24)$$

onde H_0 é o hamiltoniano de partícula única e H_I de interação entre as partículas [34], dados respectivamente por

$$\hat{H}_0 = \int dx \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{x}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.25)$$

$$\hat{H}_I = \int \int dx dx' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t) U(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\Psi}(\mathbf{x}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t). \quad (2.26)$$

Nas relações anteriores $V_{ext}(\mathbf{x})$ é um potencial externo responsável por confinar as partículas bosônicas e $U(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ é um potencial de dois corpos que representa a interação mútua entre os átomos desprezando possíveis interações entre vizinhos [39]. Considerando apenas a interação de um átomo com o seu par, o potencial $U(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ será dado por [34]

$$U(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{U}{2}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.27)$$

$$U = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (2.28)$$

em que U é uma constante de acoplamento relacionada ao comprimento de espalhamento atômico a .

Os objetos $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ e $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ são, nessa ordem, os operadores de campo aniquilação e criação de bósons, os quais obedecem as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Psi}(\mathbf{x}', t)] &= [\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Em Mecânica Quântica a equação do movimento de Heisenberg nos permite obter a evolução temporal de operadores através da expressão

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = [\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t), \hat{H}], \quad (2.30)$$

onde $\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t)$ é um observável e \hat{H} é o operador hamiltoniano da teoria. Logo, considerando o hamiltoniano do sistema dado pela equação (2.24), a relação de Heisenberg citada acima e as regras de comutação (2.29), temos

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}_0] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{Ext}(\mathbf{x}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.31)$$

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}_I] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = U |\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)|^2 \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t). \quad (2.32)$$

Diante dos resultados dessas relações de comutação, para a evolução temporal do campo bosônico do condensado $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ encontra-se

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{x}) + U |\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t). \quad (2.33)$$

No regime de baixas temperaturas, onde ocorre a ocupação macroscópica do estado fundamental, pode-se admitir uma decomposição de campo tal que

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) + \delta\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.34)$$

onde $\psi(\mathbf{x}, t)$, parte macroscópica (clássica), representa uma aproximação de campo médio, com $\psi(\mathbf{x}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \rangle$, e $\delta\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ uma parcela devido a flutuações quânticas e térmicas cujo valor médio é nulo, $\langle \delta\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ [34].

Levando em conta a decomposição (2.34), a média da equação (2.33) nos conduz ao seguinte resultado

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{x}) + U|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.35)$$

que é conhecida como a Equação de Gross–Pitaevskii. Geralmente denomina-se $\psi(\mathbf{x}, t)$ de função de onda do condensado, porque nessa abordagem a dinâmica do sistema é descrita em termos do campo médio $\psi(\mathbf{x}, t)$.

A métrica análoga (ou efetiva) é obtida utilizando a denominada representação de Madelung para o campo médio $\psi(\mathbf{x}, t)$, dada por [34]

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{n(\mathbf{x}, t)} e^{i\theta(\mathbf{x}, t)}, \quad (2.36)$$

onde $n(\mathbf{x}, t)$ é uma densidade e $\theta(\mathbf{x}, t)$ uma fase.

Substituindo a equação (2.36) em (2.35) e efetuando as derivadas obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2\sqrt{n}} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) - \sqrt{n} \hbar \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = & - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 \sqrt{n}) + \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{n} (\nabla \theta)^2 + V_{ext} \sqrt{n} \\ & + n^{\frac{3}{2}} U - \frac{i\hbar^2}{2m} \left[2(\nabla \theta) \cdot (\nabla \sqrt{n}) + \sqrt{n} \nabla^2 \theta \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

que ao fazer a correspondência entre os coeficientes das partes real e imaginária de ambos os lados da igualdade fornece

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0, \quad (2.38)$$

$$\hbar \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + V + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \theta)^2 = 0, \quad (2.39)$$

com

$$V = V_{ext} + nU - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\nabla^2 \sqrt{n})}{\sqrt{n}}. \quad (2.40)$$

Nota-se que as equações (2.38) e (2.39) são similares a equação de continuidade (2.1) e equação de Euler (2.2) da dinâmica dos fluidos, onde definiu-se a velocidade $\mathbf{v} = \hbar \nabla \theta / m$ e o último termo da eq. (2.40) é uma contribuição de pressão de natureza quântica.

Os procedimentos matemáticos que conduzem a uma equação da métrica acústica para o condensado são similares aos realizados no caso de fluidos clássicos. Inicialmente redefinem-se as grandezas com a presença de pequenas perturbações quânticas em torno de um valor médio. Assim,

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \hat{n}_1, \quad \hat{n}_1 \ll n_0, \\ \theta &= \theta_0 + \hat{\theta}_1, \quad \hat{\theta}_1 \ll \theta_0, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \hat{v}_1, \quad \hat{v}_1 \ll v_0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Utilizando as relações (2.41) em (2.38) e (2.39), obtemos

$$\frac{\partial \hat{n}_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \hat{v}_1 + \hat{n}_1 \mathbf{v}_0) = 0, \quad (2.42)$$

$$\hbar \left(\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} \right) + V_1 + \frac{\hbar^2}{m} (\nabla \theta_0) \cdot (\nabla \hat{\theta}_1) = 0. \quad (2.43)$$

Admitindo que o potencial segue uma decomposição similar, das equações (2.40) e (2.41) podemos escrever

$$V = V_0 + V_1 = V_{ext} + (n_0 + \hat{n}_1)U - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\nabla^2 \sqrt{n_0 + \hat{n}_1})}{\sqrt{n_0 + \hat{n}_1}}, \quad (2.44)$$

que após algum trabalho algébrico de expansões no último termo identifica-se

$$V_0 = V_{ext} + n_0 U - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\nabla^2 \sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}} \right), \quad (2.45)$$

$$V_1 = \hat{n}_1 U - \frac{\hbar^2}{4m\sqrt{n_0}} \nabla^2 \left(\frac{\hat{n}_1}{\sqrt{n_0}} \right) + \frac{\hbar^2 n_0^{-3/2} \hat{n}_1}{4} \nabla^2 \sqrt{n_0}. \quad (2.46)$$

Definindo o operador

$$D_2 \hat{n}_1 := \frac{1}{2\sqrt{n_0}} \nabla^2 \left(\frac{\hat{n}_1}{\sqrt{n_0}} \right) - \frac{1}{2} n_0^{-3/2} \hat{n}_1 (\nabla^2 \sqrt{n_0}) \quad (2.47)$$

e substituindo a expressão para V_1 na equação (2.43), obtemos

$$\hbar \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \theta_0) \cdot (\nabla \hat{\theta}_1) - \frac{\hbar^2}{2m} D_2 \hat{n}_1 + \hat{n}_1 U = 0, \quad (2.48)$$

a partir da qual pode-se isolar o termo \hat{n}_1 ,

$$\hat{n}_1 = - \left[U - \frac{\hbar^2}{2m} D_2 \right]^{-1} \left[\hbar \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{m} (\nabla \theta_0) \cdot (\nabla \hat{\theta}_1) \right]. \quad (2.49)$$

Substituindo (2.49) em (2.42) e utilizando o fato de que

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta_0$$

e

$$\hat{v}_1 = \frac{\hbar}{m} \nabla \hat{\theta}_1,$$

obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[U - \frac{\hbar^2}{2m} D_2 \right]^{-1} \left[\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} (\nabla \theta_0) \cdot (\nabla \hat{\theta}_1) \right] \right\} \\ & + \nabla \cdot \left\{ \frac{n_0}{m} \nabla \hat{\theta}_1 - \left[U - \frac{\hbar^2}{2m} D_2 \right]^{-1} \left[\frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} (\nabla \theta_0) \cdot (\nabla \hat{\theta}_1) \right] \frac{\nabla \theta_0}{m} \right\} = 0. \quad (2.50) \end{aligned}$$

A equação (2.50) descreve a propagação das perturbações $\hat{\theta}_1$ em torno de θ_0 , que também pode ser escrita de forma compacta pela expressão

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \hat{\theta}_1) = 0, \quad (2.51)$$

cujos objetos $f^{\mu\nu}$ compõem uma matriz quadrada 4×4 com os seguintes elementos:

$$\begin{aligned} f^{00} &= - \left[U - \frac{\hbar^2}{2m} D_2 \right]^{-1}, \\ f^{0j} &= - \left[U - \frac{\hbar^2}{2m} D_2 \right]^{-1} \mathbf{v}_0^j, \\ f^{i0} &= - \mathbf{v}_0^i \left[U - \frac{\hbar^2}{2m} D_2 \right]^{-1}, \\ f^{ij} &= \frac{n_0}{m} \delta^{ij} - \mathbf{v}_0^i \left[U - \frac{\hbar^2}{2m} D_2 \right]^{-1} \mathbf{v}_0^j. \end{aligned}$$

O fato de $f^{\mu\nu}$ ser uma matriz de operadores (D_2) nos impede de relacioná-lo com a geometria Lorentziana, que pode ser atribuída ao operador d'Lambertiano [39]. Entretanto, adotando o caso de limite hidrodinâmico em que $D_2 \rightarrow 0$, obtemos na forma matricial

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{U} \begin{pmatrix} -1 & -\mathbf{v}_0^j \\ -\mathbf{v}_0^i & \frac{n_0}{m} \delta^{ij} U - \mathbf{v}_0^i \mathbf{v}_0^j \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Esse limite para o operador D_2 , também conhecido por aproximação acústica, é fundamental, pois agora as componentes $f^{\mu\nu}$ se transformam em escalares e pode-se associar $\hat{\theta}_1$ a um campo escalar quântico sem massa em uma geometria de espaço-tempo curvo dado pela equação do operador d'Alambertiano (2.12) [19], a saber,

$$\square \hat{\theta}_1 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \hat{\theta}_1) = 0. \quad (2.53)$$

Observando as equações (2.51), (2.52), (2.53), definindo $c_s^2 = U n_0 / m$ como a velocidade do som e utilizando propriedades de determinantes matriciais é possível mostrar que

$$f^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} = \frac{U}{c_s^3} f^{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Diante disso,

$$g^{\mu\nu} = \frac{U}{c_s^3} \begin{pmatrix} -1 & -\mathbf{v}_0^j \\ -\mathbf{v}_0^i & \frac{n_0}{m} \delta^{ij} U - \mathbf{v}_0^i \mathbf{v}_0^j \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Para encontrar o elemento de linha deve-se obter o tensor métrico na forma covariante $g_{\mu\nu}$, pois por definição sabe-se que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Utilizando a propriedade $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \mathbb{I}$, onde \mathbb{I} representa a matriz identidade, é uma questão de álgebra encontrar

$$g_{\mu\nu} = \frac{n_0}{mc_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - \mathbf{v}_0^2) & -\delta_{kj}\mathbf{v}_0^k \\ -\mathbf{v}_0^i\delta_{ki} & \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

e conseqüentemente

$$ds^2 = \frac{n_0}{mc_s} \left[-c_s^2 dt^2 + \delta_{ij} (dx^i - \mathbf{v}_0^i dt) (dx^j - \mathbf{v}_0^j dt) \right], \quad (2.57)$$

onde n_0 , m e c_s são, respectivamente, densidade, massa dos átomos e a velocidade do som no condensado.

Dada a estrutura obtida para ds^2 percebe-se que, semelhante ao caso clássico, uma transformação de coordenadas adequada na métrica efetiva, equação (2.57), mostra que as perturbações na fase da função de onda do condensado constituem um modelo análogo para simular sistemas gravitacionais e seus efeitos.

3 Movimento Browniano e Flutuações quânticas do campo de vácuo

O movimento aleatório de pequenas partículas em suspensão em um líquido foi relatado por Robert Brown em 1828, notando que as partículas de grãos de pólen de diversos tipos de plantas (e outras substâncias) quando imersas em água apresentavam um movimento ativo variando suas posições no fluido de modo totalmente desordenado [1].

Esse fenômeno, hoje conhecido por Movimento Browniano (MB), foi primeiro abordado teoricamente por A. Einstein, que propôs uma explicação consistente, seguido pelo trabalho de Smoluchowski e outros estudiosos. A contribuição do trabalho de Einstein junto as posteriores observações experimentais de Jean Perrin foram de grande importância para o pensamento físico da época, pois ajudou a fortalecer (ainda mais) a visão atomista da matéria, que embora apresentasse dados e evidência para sua validação ainda era considerada por alguns cientistas como algo puramente matemático e que não correspondia a real natureza dos sistemas físicos [40].

Existem quatro possíveis descrições matemáticas para esse fenômeno (MB), ainda que diferentes, todas são equivalentes entre si e fornecem os mesmos resultados, são elas: (i) o formalismo de Einstein, quem primeiro forneceu a descrição do MB, através do tratamento difusivo; (ii) equação de Langevin baseada em uma força flutuante (ou estocástica); (iii) equação de Fokker-Planck, que se baseia na evolução temporal da distribuição de probabilidade do sistema e (iv) o método de M. Kac, baseado no problema de caminho aleatório [2].¹ A seguir utilizaremos a descrição do MB via equação de Langevin pela praticidade, coerência e semelhança com expressões que surgirão posteriormente facilitando a compreensão e explanação do presente trabalho.

3.1 Movimento Browniano Clássico via equação de Langevin

A abordagem de Langevin é comum entre os textos de Física Estatística no estudo do MB (porém, como mencionado, não é a única) e assim como as demais citadas permite encontrar de forma fácil e direta os mesmos resultados obtidos por Einstein para o valor do deslocamento quadrático médio da posição, $\langle x^2 \rangle$, e a variância da velocidade, $\langle v^2 \rangle$, para a partícula browniana².

Dado que o movimento browniano das pequenas partículas em suspensão é con-

¹ Para detalhes matemáticos sobre as quatro teorias ver a referência [2].

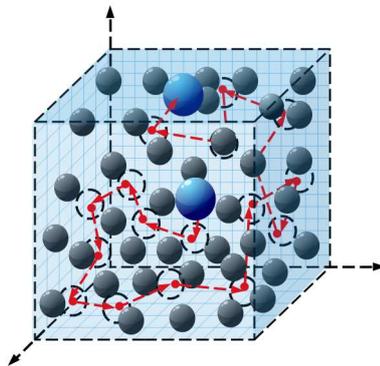
² É comum encontrar nos textos o uso dessa terminologia para referir-se a partícula que executa o movimento aleatório ou browniano.

sequência das permanentes colisões com as moléculas constituintes do fluido, Figura (5), no formalismo de Langevin o movimento de uma partícula browniana de massa m em suspensão pode ser descrito pela equação

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} - \alpha\vec{v} + \vec{F}_a(t), \quad (3.1)$$

onde \vec{v} é a velocidade da partícula e \vec{F}_{ext} é uma força devido a interações de agentes externos, como por exemplo, campo gravitacional ou eletromagnético. A força $\vec{F}_a(t)$ é uma força ligeiramente flutuante responsável pelo movimento randômico da partícula browniana, que é originado pelas suas intermináveis colisões com as moléculas do meio. O termo $-\alpha v$ representa a ação de uma força viscosa do meio fluido sobre a partícula browniana, cujo coeficiente α é uma constante de atrito viscoso [29, p. 398]. É importante destacar o caráter vetorial da equação anterior indicando que está escrita em 3 dimensões, porém por simplicidade adotaremos um tratamento unidimensional, visto que assim é feito na maioria dos trabalhos por apresentar simplicidade e não oferecer dificuldade na generalização para o caso tridimensional.

Figura 5 – Ilustração do movimento aleatório descrito por uma partícula browniana devido as frequentes colisões com as moléculas do meio fluido.



Fonte: produzido pelo autor, 2020.

Negligenciando o termo estocástico, \vec{F}_a , em essência a equação de Langevin é semelhante a uma equação newtoniana para o movimento de um corpo sobre a ação de uma força externa, F_{ext} , que provoca o movimento, considerando também a força resistiva $-\alpha v$ devido as interações com o meio que atua sobre o corpo.

Como mencionado anteriormente, utilizando o formalismo de Langevin podemos encontrar quantidades de interesse físico sobre partícula browniana que podem ser medidas em laboratório. Na ausência de agentes externos sobre a partícula browniana, $\vec{F}_{ext} = 0$, a equação (3.1) pode ser escrita na forma [29, p. 399]

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma\vec{v} + A(t), \quad (3.2)$$

onde foram definidas as quantidades $\gamma := \alpha/m$ e $A(t) := \vec{F}_a(t)/m$.

Observa-se que a expressão anterior é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem na variável v do tipo

$$\frac{dv}{dt} + \mathcal{P}v = \mathcal{Q}, \quad (3.3)$$

onde \mathcal{P} e \mathcal{Q} são funções de t , cuja solução geral é dada por [41, p. 401]

$$v = De^{-\mathcal{I}} + e^{-\mathcal{I}} \int \mathcal{Q}e^{\mathcal{I}} dt, \quad (3.4)$$

D é uma constante qualquer e

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{P} dt. \quad (3.5)$$

Utilizando a equação (3.4) e fazendo a correspondência entre as respectivas quantidades definidas acima, tal que $\mathcal{P} \equiv \gamma$ e $\mathcal{Q} \equiv A(t)$, a partir da equação (3.2) obtém-se a solução formal para velocidade da partícula [29, p. 399]

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t A(t') e^{\gamma t'} dt', \quad (3.6)$$

cujo valor esperado é

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t}, \quad (3.7)$$

visto que a força estocástica $A(t)$ segue as propriedades [2]

$$\begin{aligned} (i) \quad & \langle A(t) \rangle = 0, \\ (ii) \quad & \langle A(t)A(t') \rangle = C\delta(t - t'), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde C é uma constante a determinar.

A relação (i) nos diz que em média a força flutuante responsável pelo movimento estocástico é nula. Portanto, uma aproximação média da equação de movimento para partícula é dada pela média da equação (3.1), que é a segunda lei de Newton para o movimento de uma partícula sujeita a uma força de atrito. Já a propriedade (ii) nos diz que as forças estocásticas $A(t)$, em um tempo t , e $A(t')$, em um tempo posterior t' , não estão correlacionadas durante o intervalo de tempo $t - t'$ [42].

Lembrando que a dispersão de velocidades pode ser obtida através do valor médio do desvio quadrático, isto é,

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \left\langle \left(v(t) - \langle v(t) \rangle \right)^2 \right\rangle. \quad (3.9)$$

Logo, utilizando as equações (3.6) e (3.7) obtém-se

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = e^{-2\gamma t} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle A(t')A(t'') \rangle e^{\gamma(t'+t'')}, \quad (3.10)$$

que de acordo com as condições de $A(t)$ dispostas na eq. (3.8) fornece

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{C}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}). \quad (3.11)$$

A constante C pode ser determinada através da validade do teorema de equipartição da energia, garantindo que

$$\frac{1}{2}m\langle(\Delta v)^2\rangle = \frac{1}{2}k_B T,$$

logo encontramos para a constante

$$C = \frac{2\gamma k_B T}{m}.$$

Para obter o deslocamento quadrático médio partimos da relação de Langevin (3.2) multiplicando-a por x em ambos os lados,

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma x \frac{dx}{dt} + x A(t), \quad (3.12)$$

onde explicitamos $v \equiv dx/dt$. Observando que [43, p. 465]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2(x^2)}{dt^2} &= x \frac{dv}{dt} + v^2, \\ \frac{d(x^2)}{dt} &= 2xv, \end{aligned}$$

tomando a média sobre a equação (3.12), podemos escrever

$$\frac{d^2\langle x^2 \rangle}{dt^2} + \gamma \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2\langle v^2 \rangle, \quad (3.13)$$

com $\langle xA(t) \rangle = 0$.

De acordo com o teorema da equipartição identifica-se que $m\langle v^2 \rangle = k_B T$, logo a expressão acima pode ser escrita na forma

$$\frac{dz}{dt} + \gamma z = \frac{2k_B T}{m}, \quad (3.14)$$

onde foi definida a variável $z := d\langle x^2 \rangle/dt$.

A estrutura da eq. (3.14) é idêntica a de uma equação diferencial linear de primeira ordem, eq. (3.3), cuja solução geral é dada pela expressão (3.4). Portanto, encontramos

$$z = z_0 e^{-\gamma t} + \frac{2k_B T}{\gamma m} (1 - e^{-\gamma t}), \quad (3.15)$$

onde z_0 é uma constante qualquer. No regime de tempo longo

$$z \rightarrow \frac{2k_B T}{\gamma m}.$$

Voltando a variável inicial obtém-se

$$\langle x^2 \rangle - \langle x_0^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\gamma m} t. \quad (3.16)$$

Relembrando que $\gamma = \alpha/m$, se as partículas brownianas são consideradas como pequenas esferas de raio a a força de fricção $-\alpha v$ a que elas estão sujeitas é a força de Stokes e o coeficientes $\alpha = 6\pi\eta a$, onde η é o coeficiente de viscosidade do fluido [3].

Diante disso,

$$\langle x^2 \rangle - \langle x_0^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi\eta a N_A} t, \quad (3.17)$$

utilizando-se também que $k_B = R/N_A$, onde R é a constante universal dos gases e N_A o número de Avogadro [2]. Esse resultado foi obtido por Langevin (1908) [3] para o desvio quadrático médio da partícula browniana baseado em seu formalismo de equação diferencial (estocástica) que permitia de forma prática encontrar os resultados já conhecidos.

3.2 Movimento Browniano Quântico: Alguns comentários

O conceito de espaço vazio na Física é muito diferente do sentido popular atribuído para essa expressão, que geralmente é adotada como sinônimo de uma região que não contém absolutamente nada [6]. Em Física é bem conhecido que o espaço vazio na verdade apresenta algo mais que o nada: as flutuações quânticas do campo de vácuo. Tais flutuações dão origem a fenômenos físicos populares na literatura como efeito Casimir e Movimento Browniano quântico.³

Foi estudado anteriormente que o movimento estocástico de uma partícula em um meio fluido com temperatura de equilíbrio T , movimento Browniano clássico, é causado pelas constantes colisões com os demais constituintes do meio (moléculas e átomos). Por outro lado, o assim chamado movimento Browniano quântico de uma partícula tem origem devido as flutuações quânticas de um campo no estado de vácuo, que mesmo no regime de temperatura $T = 0$ ainda estão presentes [5]. Em geral, o que fazemos é associar uma partícula pontual (clássica) a um campo [11], por exemplo, escalar ϕ ou elétrico \vec{E} , que posteriormente considera-se ser decomposto em termos de uma parcela clássica não flutuante e outra flutuante de natureza quântica (ou térmica). Então, pode-se dizer que a atenção é transferida para o campo, ou seja, a partícula passa a ser descrita em termos do campo com o qual ela interage e a dinâmica desse campo se traduz na dinâmica da própria partícula.

Em certo sentido, as partículas brownianas atuam como sondas das flutuações quânticas do estado de vácuo de um campo, visto que os efeitos sentidos por elas, visualizados através das dispersões de velocidades (não nula), são devido as flutuações quânticas de vácuo do campo com o qual interagem [8]. É importante comentar a possibilidade

³ Por questões de objetividade apresenta-se neste tópico uma breve revisão de alguns trabalhos sobre o movimento browniano de partículas devido a influência das flutuações quânticas dos campos no estado de vácuo, comentando aspectos mais fenomenológicos. Desde já, indica-se que mais detalhes técnicos podem ser encontrados nas próprias fontes citadas.

de estudar os efeitos das flutuações quânticas também sobre espelhos refletores (planos), como mostrado em [5], onde é estudado tanto o caso de uma carga escalar como o de um espelho imperfeito interagindo com um campo escalar sem massa no estado de vácuo.

Geralmente estuda-se o movimento Browniano quântico de uma partícula na presença de planos refletores limitando as regiões do campo no estado de vácuo. Nesse tipo de sistema uma consideração muito comum é tratar as partículas brownianas como objetos pontuais, que corresponde a adotar uma descrição clássica apenas para as partículas que interagem com o campo quântico flutuante em estudo. Além disso, em se tratando de campos eletromagnéticos, adota-se também um regime de baixas velocidades, assim nesse limite as contribuições das flutuações quânticas de vácuo do campo elétrico são dominantes. Por exemplo, Yu e Ford [7] estudaram o movimento browniano de uma partícula teste, com massa m e carga q , devido as flutuações do campo eletromagnético na presença de um plano perfeitamente refletor em um limite não-relativístico.

Eliminando a contribuição divergente e inconclusiva do vácuo de Minkowski, através de um processo de renormalização, Yu e Ford calcularam a dispersão de velocidades da partícula, a qual apresentou-se ser anisotrópica. Foi encontrada uma dispersão de velocidades negativa quando paralela ao plano e que se anula no regime de tempo (t) longo: $\langle(\Delta v_{\parallel})^2\rangle \approx -A/t^2$, onde A é uma constante. Para direção perpendicular ao plano um resultado positivo e constante no regime de tempo longo foi obtido, a saber, $\langle(\Delta v_{\perp})^2\rangle \approx +B/z^2$, onde B é uma constante e z a distância da partícula ao plano. Segundo os autores, no caso da dispersão negativa uma possível interpretação é devido a própria incerteza relacionada a natureza quântica da partícula que foi negligenciada. Por outro lado, a dispersão perpendicular constante no limite de tempo longo foi justificada como um mecanismo de conservação da energia junto ao fato da idealização da interação instantânea entre a partícula browniana e as flutuações quânticas do campo eletromagnético.

A consideração de planos refletores produz efeitos sobre as flutuações de vácuo que são sondadas pela dispersão de velocidade das partículas brownianas mediante a interação com as flutuações do campo de vácuo na presença do(s) plano(s). O mecanismo que descreve a forma como ocorre e é sentida a interação entre a partícula e o campo de vácuo com e sem a presença de placas é um detalhe significativo no estudo das flutuações quânticas [8, 44]. Tais mecanismos são caracterizados em dois tipos “*sudden switching*”, onde a transição acontece de forma abrupta, e “*smooth switching*”, caso em que a transição sucede de forma suave.⁴

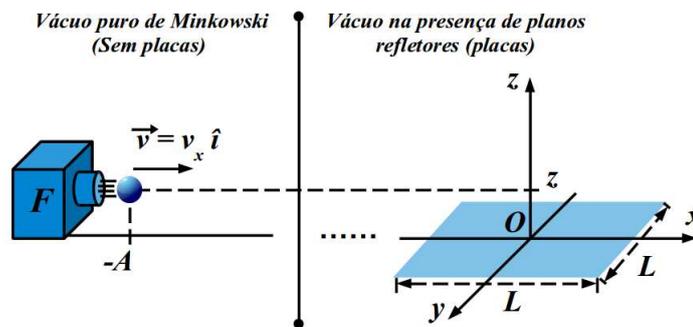
Afim de compreender a essência fenomenológica desses mecanismos vamos recorrer ao exemplo fornecido por Seriu e Wu [8]. Imagine que uma partícula carregada é lançada

⁴ A tradução literal para estas expressões são transição súbita (*sudden switching*) e transição suave (*smooth switching*). Contudo, por questões de conveniência e visto que é comum na literatura essa terminologia vamos adotar a nomenclatura escrita na língua inglesa.

com velocidade $\vec{v} = v_x \hat{i}$ de um ponto $P(-A, 0, z)$, por exemplo, utilizando uma fonte F que se encontra em um estado de vácuo de Minkowski (sem placas). A partícula é atirada em direção a outro estado de vácuo contendo uma placa quadrada de lado L ($L \ll A$, $L \gg z$) situada no plano x - y , cuja origem O dos eixos do sistema está em seu centro – como mostrado na Figura (6).

Com base nessa situação pode-se entender os mecanismos de switching de duas formas. De acordo com Seriu e Wu é possível interpretar a função de *smooth switching* como a descrição matemática do processo de lançamento da partícula pela fonte F de um estado de vácuo para o outro. No caso *sudden switching* não existirá um processo de lançamento para partícula, logo considera-se apenas que a mesma já está com uma velocidade \vec{v} em direção ao outro estado de vácuo.

Figura 6 – Esquema ilustrativo para explanação dos mecanismos *sudden* e *smooth switching*.



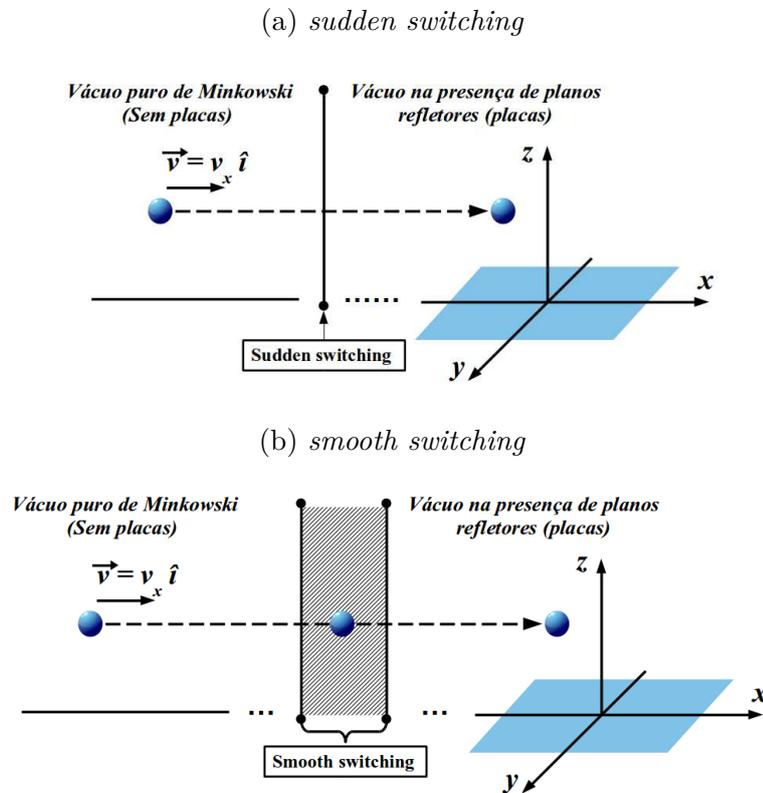
Fonte: produzido pelo autor com base na descrição da referência [8], 2020.

De certo modo, sobre essa linha de pensamento, uma analogia que pode ajudar a entender os processo de *smooth switching* e *sudden switching* é o de um jogador de futebol ao chutar uma bola. No momento em que o jogador chuta a bola, que é a influência transmitida, esta permanece um pequeno intervalo de tempo junto ao pé do jogador, o qual é o tempo que a bola leva para sentir e reagir conforme esse estímulo. O uso da expressão “reagir conforme” refere-se a forma que a bola vai responder ao estímulo do chute, que pode imprimir sobre a mesma efeitos distintos. A forma por sua vez significa o tipo de processo que leva em conta o tempo de contato. Então, o que foi discutido são argumentos levando em conta um processo de *smooth switching*, no nosso exemplo equivale a considerar como a bola começa a reagir mediante ao chute. No caso de *sudden switching* esses detalhes são descartados no sentido de serem considerados como instantâneos, ou seja, a reação da bola por influência do chute é repentino.

De acordo com Seriu e Wu ainda seria possível interpretar as funções *sudden switching* e *smooth switching* como a descrição matemática da sensibilidade da partícula na mudança de um estado de vácuo puro (ou de Minkowski) para outro na presença de planos refletoras (vácuo tipo Casimir) [8]. Considerando novamente uma situação similar a que foi

discutida anteriormente de uma partícula lançada de um estado de vácuo puro para outro contendo um plano refletor. No caso *sudden switching* a partícula sente abruptamente a mudança de um estado de vácuo para o outro. Representa-se o *sudden switching* na Figura (7) (a) por uma linha de espessura extremamente fina para dizer que a sensibilidade da partícula à mudança entre uma região e outra é sentida instantaneamente. Se uma função *smooth switching* é admitida, Figura (7) (b), considera-se que na passagem entre os vácuos haverá, em certo momento, uma região onde a partícula começa a sentir gradualmente os efeitos da mudança.

Figura 7 – Esquema ilustrativo para outra possível explanação dos mecanismos *sudden* e *smooth switching*.



Fonte: produzido pelo autor com base na descrição da referência [8], 2020.

A inserção dos mecanismos de *switching* comentados anteriores são elementos considerados no cálculo de flutuações a fim de tratar tais sistemas de um ponto de vista físico mais realista. Nesse sentido, como aponta Seriu e Wu [9], outro elemento a ser considerado é a própria natureza quântica da partícula browniana, pois as investigações citadas anteriormente adotaram um tratamento em que a partícula era um objeto clássico bem localizado. Entretanto, nesse domínio de escala torna-se relevante a natureza quântica da partícula, como indica o princípio da incerteza de Heisenberg, logo a característica pontual da partícula é uma idealização e para uma descrição coerente com a realidade física esta deve ser alterada.

Em princípio também é possível estudar o movimento browniano de uma partícula utilizando-se um modelo análogo de gravidade. Esse será o sistema utilizado em nossas futuras investigações sobre o movimento browniano quântico e será descrito em mais detalhes posteriormente. O intuito desse tópico foi descrever alguns possíveis cenários e detalhes no estudo do movimento browniano quântico, focando principalmente em aspectos fenomenológicos. No que segue vamos obter a função de dois pontos que será um resultado útil em nosso cálculos.

3.3 Funções de Green e valor esperado no vácuo

No cálculo das flutuações um elemento de fundamental importância são as funções de correlação que surgem no interior das equações integrais para determinação do valor médio da dispersão de velocidades. Estas funções de correlação por sua vez podem ser identificadas como funções de Green. Assim, no contexto do movimento browniano devido as flutuações quânticas do campo de vácuo, as funções de correlação que surgem são as funções de correlação dos campos quantizados flutuantes no estado de vácuo ⁵.

Sabe-se que o valor médio do produto de campos livres no estado de vácuo corresponde a funções de Green [45, p. 20]. Em seguida vamos encontrar a função de dois pontos para um campo escalar sem massa uma vez que esse resultado será útil em nossos cálculos.

Dada uma equação diferencial da forma

$$\hat{\mathcal{O}}f(x) = J(x), \quad (3.18)$$

onde $\hat{\mathcal{O}}$ é um operador diferencial atuando sobre a função $f(x)$, por exemplo, Laplaciano (∇^2) ou d'Alembertiano (\square) e $J(x)$ um termo de fonte. A solução dessa equação pode ser obtida via função de Green, que segue a definição

$$\hat{\mathcal{O}}G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (3.19)$$

Assim, para equação Klein-Gordon, a qual descreve o movimento de um campo escalar com massa m , a solução via função de Green deve obedecer a relação

$$(\square + m^2)G(x, x') = -\delta^{(4)}(x - x'). \quad (3.20)$$

Utilizando a equação (3.20) e a transformada de Fourier das funções $G(x, x')$ e $\delta^{(4)}(x - x')$,

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik\Delta x} \tilde{G}(k), \\ \delta^{(4)}(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik\Delta x}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

⁵ Para composição desta seção nos baseamos nas referências [45, p. 20] e [46, p. 132]

encontramos⁶

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \left(-\frac{(k^0)^2}{c_0^2} + |\vec{k}|^2 + m^2 \right) e^{-ik\Delta x} \tilde{G}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik\Delta x}, \quad (3.22)$$

onde $k\Delta x = \vec{k} \cdot \vec{r} - k^0 \Delta t$, com $\Delta t = t - t'$ e $\vec{r}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$.

Para que a igualdade anterior seja satisfeita devemos ter

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{\frac{(k^0)^2}{c_0^2} - w^2},$$

com $w^2 = |\vec{k}|^2 + m^2$.

Portanto,

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4 c_0} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \int dk^0 \frac{e^{-ik^0 \Delta t}}{\frac{(k^0)^2}{c_0^2} - w^2}, \quad (3.23)$$

que é a representação integral das funções de Green.

A integral em k^0 na equação (3.23) possui polos em $k^0 = \pm c_0 w$. Os diferentes contornos adotados para sua solução definem quantidades conhecidas em termos do produto de campos livres no estado de vácuo. Realizando a integral em k^0 na equação (3.23) considerando os contornos C1 e C2, Figura (8), pode-se encontrar as chamadas funções de Wightman de frequência positiva e negativa, respectivamente, definidas por

$$G^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{w} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - ic_0 w \Delta t} \quad (3.24)$$

$$G^-(x, x') = \langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{w} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} + ic_0 w \Delta t}. \quad (3.25)$$

Outras quantidades de particular importância que podem ser construídas utilizando as funções de Wightman, eq. (3.24) e (3.25), são as relações de comutação e anticomutação do operador campo escalar [45, p. 20-21],

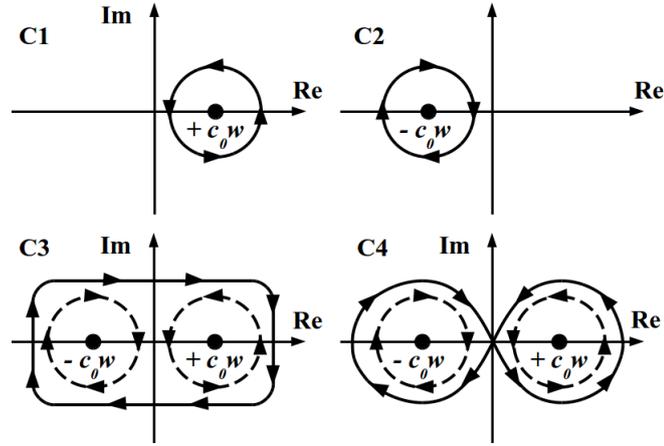
$$iG(x, x') = \langle 0 | [\phi(x), \phi(x')] | 0 \rangle = G^+(x, x') - G^-(x, x'), \quad (3.26)$$

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{\phi(x), \phi(x')\} | 0 \rangle = G^+(x, x') + G^-(x, x'), \quad (3.27)$$

nessa ordem, denominadas por função de Pauli-Jordan (ou Schwinger), contorno C3 da Fig. (8), e função elementar de Hadamard, contorno C4 da Fig. (8).

Por questões de objetividade e utilidade no presente trabalho vamos calcular a função de Wightman de frequência positiva, pois esta corresponderá a função de dois pontos utilizada nas próximas seções.

⁶ Usualmente $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$, visto que utiliza-se $c = 1$. Contudo, por questões de consistência mantemos a constante c_0 no operador, agora com um subíndice zero, devido ao *background* análogo em que vamos trabalhar. Isso não produz nenhuma perda de generalidade, pois no caso em que $c_0 = c = 1$ os resultados já conhecidos são recuperados.

Figura 8 – Possíveis contornos para integral na variável k^0 da equação (3.23).

Fonte: produzido pelo autor, 2020.

Admitindo o caso do campo escalar sem massa, $w^2 = (\vec{k})^2 + m^2 \rightarrow w = k$, a partir da equação (3.24) temos

$$G^+(x, x') = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - ic_0 w \Delta t}. \quad (3.28)$$

Aplicando uma transformação de coordenadas do tipo esféricas, tal que $d^3 \vec{k} \rightarrow k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi$ e observando que $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \theta$, obtém-se

$$\begin{aligned} G^+(x, x') &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty k \sin \theta dk d\theta d\varphi e^{ikr \cos \theta - ic_0 w \Delta t} \\ G^+(x, x') &= \frac{-i}{2r(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \left[e^{-ik(c_0 \Delta t - r)} - e^{-ik(c_0 \Delta t + r)} \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

O resultado da segunda passagem é obtido notando que a integral em φ contribui com um fator de 2π enquanto que a integral na variável θ é facilmente computada pelo método da substituição de variáveis.

Embora as integrais da eq. (3.29) sejam divergentes, é simples contornar esse problema utilizando-se um artifício matemático baseado na reescrita de $G^+(x, x')$ na forma

$$G^+(x, x') = \frac{-i}{2r(2\pi)^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dk \left[e^{-ik(c_0 \Delta t - r - i\epsilon)} - e^{-ik(c_0 \Delta t + r - i\epsilon)} \right], \quad (3.30)$$

com $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$. Em essência, esse artifício pode ser entendido como uma mudança de variável em que $c_0 \Delta t \rightarrow c_0 \Delta t - i\epsilon$ e ao final fazer o limite $\epsilon \rightarrow 0$ na expressão resultante.

Dessa forma, obtém-se

$$\begin{aligned} G^+(x, x') &= \frac{-i}{2r(2\pi)^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{ie^{-ik(c_0 \Delta t - r - i\epsilon)}}{(c_0 \Delta t - r - i\epsilon)} - \frac{ie^{-ik(c_0 \Delta t + r - i\epsilon)}}{(c_0 \Delta t + r - i\epsilon)} \right] \Big|_0^\infty \right\} \\ G^+(x, x') &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{[-c_0^2 \Delta t^2 + r^2]}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A equação (3.31) é a função de dois pontos para o operador campo escalar sem massa $\phi(x)$ no estado de vácuo sem a presença de planos refletores, $G^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle$.

É importante mencionar que está implícito no desenvolvimento desse tópico a consideração de um regime de temperatura zero. Além disso, a expressão para a função de dois pontos $G^+(x, x')$ obtida aqui corresponde a contribuição apenas do vácuo de Minkowski, isto é, espaço plano sem a presença de planos refletores. Quando planos são considerados, conseqüentemente, condições de contorno devem ser levadas em consideração na quantização do campo, por exemplo, condições de Dirichlet e Neumann, porque na ocasião suas regiões de propagação estão limitadas. Em termos práticos, a mudança que acontece será o surgimento de um termo extra na equação (3.31) devido ao limite (plano) introduzido.⁷

3.4 Movimento Browniano Quântico de uma partícula em um CBE em expansão

Aqui vamos revisar o caso do Movimento Browniano Quântico executado por uma partícula em um CBE expandindo sobre uma geometria de espaço-tempo análogo do tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [11], logo mais detalhes podem ser encontrados na própria fonte bem como nas referências lá citadas.

Como elemento motivador e introdutório é importante mencionar que CBE como um sistema análogo modelando um universo em expansão já constitui uma proposta experimentalmente realizável. De fato, recentemente um CBE em forma de anel modelando um universo em expansão foi proposto [36] – Figura (9). Portanto, em princípio, a revisão que se segue não deve ser vista como algo puramente teórico e distante de uma possível investigação experimental.

Anteriormente foi visto que a partir da equação de Gross-Pitaevskii, que descreve a dinâmica do condensado, é possível encontrar a relação de uma métrica efetiva para o parâmetro de fase θ . Adotando $\mathbf{v} = 0$ e uma velocidade do som variável, $c_s = c_s(t)$, das equações (2.56) e (2.57) podemos escrever

$$d\bar{s}^2 = \Omega_0^2 \left[-b^{\frac{1}{2}}(t) c_0^2 d\bar{t}^2 + b^{-\frac{1}{2}}(t) \delta^{ij} dx^i dx^j \right], \quad (3.32)$$

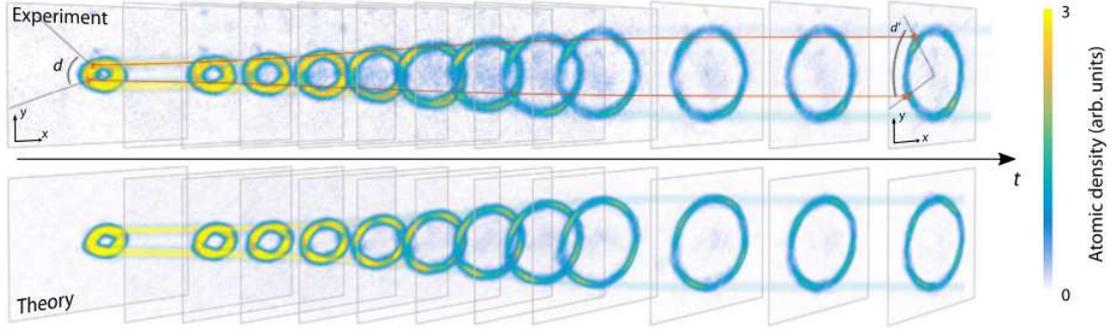
com $\Omega_0^2 = \rho_0/c_0$, $\rho = n_0/m$ e a definição do parâmetro

$$b(t) = \left(\frac{c_s(t)}{c_0} \right)^2,$$

tal que $b(t_0) = 1$ e $c_s(t_0) = c_s(t=0) = c_0$. Quanto a notação utilizada, a barra sobre as quantidades foi adicionada por questões de simplificação .

⁷ O(s) plano(s) estabelece(m) uma região limitada.

Figura 9 – CBE simulando um universo em expansão.



Legenda: Comparação dos resultados teóricos (theory) e experimentais (experiment) para a expansão da densidade atômica (Atomic density) em unidades arbitrárias (arb. units.); d e d' são, respectivamente, distâncias inicial e final após a expansão. Fonte: retirado de [36, p. 2].

Utilizando a redefinição $ds^2 = \Omega_0^{-2} d\bar{s}^2$ e aplicando uma mudança para uma nova coordenada temporal $dt = b^{\frac{1}{4}}(t) d\bar{t}$, temos

$$ds^2 = -c_0^2 dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (3.33)$$

que é uma métrica espacialmente plana similar ao universo FRW com fator de escala definido por

$$a(\eta)^2 = b(\eta)^{-1} = \left(\frac{c_0}{c_s(t)} \right)^2. \quad (3.34)$$

A equação (3.33) pode ser reescrita sobre a transformação conforme $dt = a(\eta)d\eta$,

$$ds^2 = a^2(\eta)[c_0^2 d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (3.35)$$

Nota-se que a estrutura da equação (3.35) é similar a de uma métrica correspondente ao espaço-tempo de FRW, que descreve um universo conformemente plano, isotrópico e homogêneo com fator de escala $a(\eta)$.

O movimento de uma partícula de massa m e carga q acoplada a um campo escalar sem massa ϕ em um espaço-tempo plano ou conformemente plano é descrito pela equação

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = qg^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi, \quad (3.36)$$

onde

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \quad (3.37)$$

é a derivada covariante do quadri vetor velocidade u^μ e

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\theta\mu} (g_{\theta\alpha,\beta} + g_{\theta\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\theta}) \quad (3.38)$$

são os símbolos de Christoffel.

Para uma direção particular i uma partícula (átomo) do condensado está sujeita a ação de uma força

$$f^i = m \frac{Du^i}{d\tau}, \quad (3.39)$$

com

$$f^\mu = qg^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi. \quad (3.40)$$

A origem da força f^i , a princípio, pode ser tanto clássica como quântica. Admitindo a decomposição $f^i \rightarrow f_{ext}^i + f_q^i$, onde f_{ext}^i é um termo de força clássica não flutuante e f_q^i corresponde a um termo quântico flutuante. Assim, utilizando as relações (3.33), (3.37) e (3.38) encontra-se

$$\frac{1}{m} (f_{ext}^i + f_q^i) = \frac{du^i}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}u^i. \quad (3.41)$$

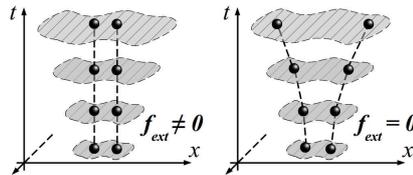
Uma outra consideração feita na equação acima é que as partículas se movem lentamente em relação ao sistema das coordenadas de (3.35), implicando que o tempo próprio da partícula τ é aproximadamente igual ao tempo coordenado t [10], isto é,

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \Delta t \approx \Delta\tau, \quad (3.42)$$

além de que $u^\mu = (u^0, u^i) = (c_0, u^i)$.

Decorrente do resultado apresentado na equação (3.41) seguem dois casos de estudo mediante a consideração de dois valores distintos para f_{ext}^i . Como será constatado com base nos resultados para dispersão de velocidades, de acordo com Bessa *et al.* [11], o significado físico de $f_{ext}^i \neq 0$, especificamente $f_{ext}^i = 2m\frac{\dot{a}}{a}u^i$, é que as partículas estão ligadas por uma força externa que anula localmente os efeitos da expansão. Enquanto que $f_{ext}^i = 0$ significa que as partículas estão livres e como consequência dessa condição sentem os efeitos de expansão do sistema seguindo a geodésica. Uma representação idealizada para os efeitos de f_{ext}^i sobre o sistema são mostrados na Figura (10).

Figura 10 – Ilustração de possíveis explicações para o efeito de f_{ext}^i sobre o sistema em estudo.



Legenda: A mancha sombreada representa o condensado em expansão e as pequenas esferas duas partículas (átomos) no CBE. Fonte: produzido pelo autor, 2020.

3.4.1 Partículas livres

De início vamos estudar o caso de partículas livres, quando $f_{ext}^i = 0$. Utilizando a regra do produto para derivadas podemos escrever a equação (3.41) como

$$\frac{1}{m} f_q^i = \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} (a^2 u^i), \quad (3.43)$$

a qual integrando e pressupondo que a partícula está em repouso no instante de tempo inicial t_0 , ou seja, $u^i(t_0) = 0$, resulta em

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [a^2(t) u^i(t, r)] dt &= \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t_f} a^2(t) f_q^i(t, r) dt \\ u^i(t_f, r) &= \frac{1}{ma^2(t_f)} \int_{t_0}^{t_f} a^2(t) f_q^i(t, r) dt. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Daqui em diante vamos suprimir o subíndice q para tornar as equações mais simples, porém devemos ter em mente que a força em questão é f_q^i . O termo $a(t_f)$ é o fator de escala avaliado em um tempo final da expansão e no que segue, por questões de simplicidade, vamos usar também a notação compacta $a(t_f) \equiv a_f$.

A expressão para a dispersão quadrática de velocidades no estado de vácuo é definida por [47, p. 24]

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \langle 0 | (\Delta v)^2 | 0 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle v \rangle^2, \quad (3.45)$$

onde identificam-se as quantidades $\langle v^2 \rangle \equiv \langle 0 | v^2 | 0 \rangle$ e $\langle v \rangle \equiv \langle 0 | v | 0 \rangle$. Para simplificar a notação vamos utilizar a correspondência de representação $\langle \dots \rangle \equiv \langle 0 | \dots | 0 \rangle$, ou seja, os símbolos “ $\langle \rangle$ ” significam valores esperados das respectivas grandezas no estado de vácuo.

Assim, utilizando as equações (3.44) e (3.45) encontra-se

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u^i)^2 \rangle &= \frac{1}{m^2 a_f^4} \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) \langle f^i(t_1, r_1) f^i(t_2, r_2) \rangle_{FRW} \\ \langle (\Delta u^i)^2 \rangle &= \frac{q^2}{m^2 a_f^4} \iint dt_1 dt_2 \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle \phi_1(t_1, r_1) \phi_2(t_2, r_2) \rangle_{FRW}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde admitiu-se que a força flutuante obedece as propriedades

$$\begin{aligned} (i) \quad \langle f^i(t_1, r_1) \rangle_{FRW} &= 0, \\ (ii) \quad \langle f^i(t_1, r_1) f^i(t_2, r_2) \rangle_{FRW} &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Na segunda passagem utilizaram-se as equações (3.33) e (3.40). O subscrito FRW indica a geometria de espaço-tempo das flutuações do vácuo. Além disso, note a similaridade estrutural entre as relações dispostas acima e as equações mostradas anteriormente, eq. (3.8), para a força estocástica $A(t)$.

É interessante observar que para simplificar a notação vamos utilizar no lado esquerdo da eq. (3.46), a notação $\langle (\Delta u^i)^2 \rangle$. Rigorosamente, de início deveria ser escrito

$\langle u^i(t_1, r_1)u^i(t_2, r_2) \rangle$ e após o limite de coincidência das coordenadas, $r_1 \rightarrow r_2$, obter $\langle (\Delta u^i)^2 \rangle$. Contudo, essa escolha não produz perda de generalidade alguma, pois seria equivalente a primeiro optar por fazer o limite de coincidência no lado esquerdo da equação e ao final aplicar o mesmo procedimento no lado direito, preservando assim a igualdade.

Deve-se notar que a função de correlação ou função de dois pontos a qual se está lidando na equação (3.46) refere-se a geometria FRW. Então, para efeitos de cálculos, no lugar de $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_{FRW}$ deve ser substituída uma expressão correspondente nesse tipo de espaço-tempo. Entretanto, não é conhecida a forma da expressão de $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_{FRW}$, mas pode-se utilizar a função de dois pontos no espaço plano.

De acordo com Birrel e Davies [45, p. 38], sob uma transformação conforme o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ assume a forma particular

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x),$$

onde $\Omega(x)$ é uma função das coordenadas x do espaço quadri-dimensional, real, finita, contínua e não nula. Decorrente desse tipo de transformação outras quantidades que dependem do tensor métrico, por exemplo, tensor e escalar de Ricci, podem assumir formas específicas. Uma relação importante é a que o campo escalar assume [45, p. 38]:

$$\bar{\phi}(x) = \Omega^{\frac{(2-d)}{2}}(x)\phi(x), \quad (3.48)$$

sendo d o número de dimensões do espaço. Então, de acordo com a equação (3.35) a relação entre as funções de correlação nos espaços-tempo de Minkowski e FRW será

$$\langle \phi_1(\eta_1, r_1)\phi_2(\eta_2, r_2) \rangle_{FRW} = a^{-1}(\eta_1)a^{-1}(\eta_2)\langle \phi_1(\eta_1, r_1)\phi_2(\eta_2, r_2) \rangle_M. \quad (3.49)$$

Assim, o uso da relação (3.49) juntamente com uma transformação de tempo conforme $dt = a(\eta)d\eta$ conduz a equação (3.46) ao resultado

$$\langle (\Delta u^i)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2 a_f^4} \iint d\eta_1 d\eta_2 \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle \phi_1(\eta_1, r_1)\phi_2(\eta_2, r_2) \rangle_M, \quad (3.50)$$

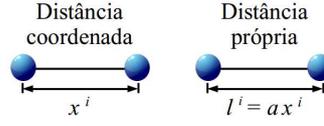
onde o subscrito M refere-se agora ao espaço-tempo plano ou de Minkowski.

A equação (3.50) corresponde a dispersão da velocidade coordenada. Para obter a dispersão da velocidade própria basta observar que no espaço tempo FRW as distâncias coordenada e própria estão relacionadas pelo fator de escala $a(\eta)$ [11] – Figura (11).

Admitindo um regime de tempo final o fator de escala $a(\eta = \eta_f) = a_f$ pode ser visto como uma constante, assim se estabelece a relação entre as velocidades coordenada e própria de modo que

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \rightarrow u^i = \frac{v^i}{a_f}$$

Figura 11 – Relação entre as distâncias própria e coordenada no espaço-tempo FRW.



Legenda: a – fator de escala; x^i – distância coordenada e l^i – distância própria. Fonte: produzido pelo autor, 2020.

e conseqüentemente

$$\langle (\Delta u^i)^2 \rangle = \frac{1}{a_f^2} \langle (\Delta v^i)^2 \rangle. \quad (3.51)$$

Tendo em vista os resultados apresentados acima, para a dispersão de velocidade própria das partículas, vamos encontrar

$$\langle (\Delta v^i)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2 a_f^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle \phi_1(\eta_1, r_1) \phi_2(\eta_2, r_2) \rangle_M. \quad (3.52)$$

A função de correlação $\langle \phi_1(\eta_1, r_1) \phi_2(\eta_2, r_2) \rangle_M$ na equação acima corresponde a função de dois pontos G^+ , equação (3.31), para o campo escalar $\phi(x)$ no estado de vácuo e na ausência de planos refletorres. Logo,

$$\langle (\Delta v^i)^2 \rangle = \frac{q^2}{m^2 a_f^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 \partial_{i_1} \partial_{i_2} G^+(\eta_1, r_1; \eta_2, r_2), \quad (3.53)$$

com

$$G^+(\eta_1, r_1; \eta_2, r_2) = \langle \phi_1(\eta_1, r_1) \phi_2(\eta_2, r_2) \rangle_M = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + r^2]}. \quad (3.54)$$

Note apenas as mudanças de rótulos: temporal de t para η ; coordenadas espaciais com e sem linha para subíndices 1 e 2 na explicitação de G^+ em termos das partes temporal e espacial.

Após derivar G^+ com relação a direção i e resolver as integrais, no limite de coincidência um resultado divergente é encontrado, não permitindo obter nenhum tipo de informação. Então, para obter um resultado finito adota-se um procedimento de renormalização que, a grosso modo, corresponde a subtrair um termo de Minkowski similar em nossos cálculos. Dito de outro modo, o que devemos fazer é redefinir a função de dois pontos G^+ de forma que

$$G_R^+ = G^+(\eta_1, r_1; \eta_2, r_2) - \left(\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{[-c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 + r^2]} \right) = 0. \quad (3.55)$$

Percebe-se que utilizando a função de correlação renormalizada G_R^+ na equação (3.53) será encontrado um resultado nulo para a dispersão de velocidades. Portanto, conclui-se que não existe movimento browniano quântico para o caso de partículas livres. Como já mencionado anteriormente uma possível explicação é que a expansão do sistema previne o movimento browniano das partículas livres, que sentem a expansão acontecer em virtude da ausência da força de ligação, $f_{ext} = 0$.

3.4.2 Partículas ligadas

Para o caso de partículas ligadas agora a força externa não é nula, mas

$$f_{ext}^i = 2m \frac{\dot{a}}{a} u^i.$$

Logo, a partir da equação (3.41) temos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u^i)^2 \rangle &= \frac{1}{m^2} \iint dt_1 dt_2 \langle f^i(t_1, r_1) f^i(t_2, r_2) \rangle_{FRW} \\ \langle (\Delta u^i)^2 \rangle &= \frac{q^2}{m^2} \iint dt_1 dt_2 a^{-2}(t_1) a^{-2}(t_2) \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle \phi_1(t_1, r_1) \phi_2(t_2, r_2) \rangle_{FRW}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde foi implementada a consideração de que $u(t = t_0) = 0$ e o uso das equações (3.45) e (3.47). Semelhante ao caso anterior, na segunda passagem das igualdades também foram levadas em conta as expressões (3.33) e (3.40).

Aplicando uma transformação de tempo conforme $dt = a(\eta)d\eta$ e utilizando as relações (3.49) e (3.51)

$$\langle (\Delta v^i)^2 \rangle = \frac{q^2 a_f^2}{m^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle \phi_1(\eta_1, r_1) \phi_2(\eta_2, r_2) \rangle_M, \quad (3.57)$$

que é a dispersão de velocidade própria para o caso de partículas ligadas.

Em contraste com o caso anterior, eq. (3.52), um fator de escala $a(\eta)^{-2}$ surge nos integrandos da equação (3.57). A presença do fator de escala altera completamente o resultado da dispersão de velocidades, pois mesmo considerando apenas o vácuo de Minkowski um resultado finito e diferente de zero será encontrado.

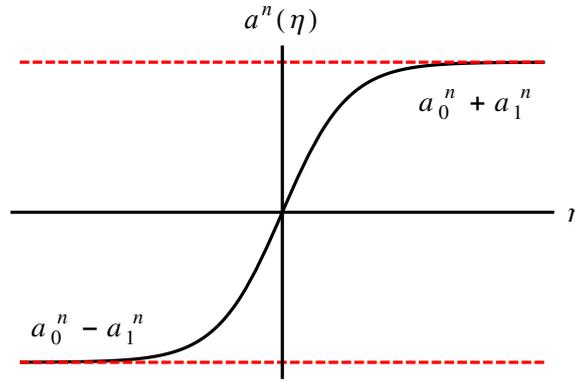
Agora, tudo se resume a resolver as equações integrais acima considerando um fator de escala associado a um tipo de expansão específica. O fator de escala que será utilizado nos cálculos que se seguem é do tipo

$$a^n(\eta) = a_0^n + a_1^n \tanh\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right), \quad (3.58)$$

que descreve um universo assintoticamente plano em regiões extremas do passado e futuro [10]. A Figura (12) mostra o comportamento gráfico de $a^n(\eta)$ com respeito ao tempo conforme η .

Para diferentes valores de n a configuração gráfica de $a^n(\eta)$ permanece análoga. Em relação aos parâmetros, o valor da constante a_0 produz um deslocamento vertical do ponto sobre o eixo $a^n(\eta)$ e a_1 modifica o espaçamento entre os limites assintóticos (pontos de máximo e mínimo) que consequentemente modifica a suavidade da transição de uma região extrema para outra. Já o termo η_0 modifica a suavidade de transição entre as regiões assintóticas sem alterar o espaçamento entre os pontos de máximo ($a_0^n + a_1^n$) e mínimo ($a_0^n - a_1^n$).

Figura 12 – Fator de escala assintoticamente plano.



Legenda: a_0 e a_1 são constantes dimensionais; η_0 é uma constante com dimensão de tempo e n é um número inteiro. Nos limites assintóticos $\pm\infty$ o fator $a^n(\eta)$ tende a $a_0^n \pm a_1^n$. Fonte: produzido pelo autor, 2020.

Com base no comportamento assintótico do fator de escala (3.58), também podemos escrever os fatores a_1 e a_0 como

$$a_0^n = \frac{a_f^n + a_i^n}{2}, \quad a_1^n = \frac{a_f^n - a_i^n}{2}, \quad (3.59)$$

com a_i caracterizando o fator de escala no início da expansão e a_f ao final [11]. Nota-se que $a_i = a(\eta = \eta_i) = 1$ uma vez que definiu-se $b(t = t_0) = 1$.

O comportamento gráfico deste fator de escala $a(\eta)$ possui semelhança com a expansão radial do potencial em função do tempo de um CBE mostrada no estudo de Eckel *et al* [36] para um condensado em formato de anel simulando um universo em expansão – ver Figura 3, página 3.

Especificando uma direção para a dispersão de velocidades, por exemplo $i = z$, ao substituir a expressão para a função de dois pontos (3.31) na equação (3.57) e atuar as derivadas sobre as respectivas coordenadas z_1 e z_2 como indicado, encontra-se

$$\langle (\Delta v^z)^2 \rangle = \frac{q^2 a_f^2}{2\pi^2 m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) [f_2(\eta, z) + 4\Delta z^2 f_3(\eta, z)], \quad (3.60)$$

com

$$f_n(\eta, z) = \frac{1}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^n} \quad (3.61)$$

e $r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. É importante destacar que os limites das integrais são estendidos para as regiões de $\pm\infty$ porque facilitam a solução pelo método de resíduos⁸, mas não produz perda de generalidade uma vez que nessas regiões o integrando é bem comportado.

⁸ No Apêndice A é feita uma breve revisão sobre o método de integração por resíduos com o intuito de facilitar a explanação das soluções das integrais no presente trabalho frente a sua constante utilização.

Substituindo o fator de escala dado pela equação (3.58) em (3.60) e efetuando as integrações obtém-se⁹

$$\langle (\Delta v^z)^2 \rangle = \frac{2q^2 a_f^2 \sinh^4(g)}{\pi^4 m^2 c_0^4 \eta_0^2 a_1^4} \left\{ S_2(r) - \frac{4\Delta z^2}{\pi^2 c_0^2 \eta_0^2} S_3(r) \right\}, \quad (3.62)$$

onde por simplicidade na notação definiu-se

$$S_n = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(p-1)}{[p^2 + b^2]^n}, \quad (3.63)$$

onde $b = r^2 / \pi^2 c_0^2 \eta_0^2$, $g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \right)$ e $\alpha^2 = a_0^2 / a_1^2$.

No limite de coincidência, $r_1 \rightarrow r_2$, nota-se que o termo devido a $S_3(r)$ não contribui e

$$\langle (\Delta v^z)^2 \rangle = \frac{2q^2 a_f^2 \sinh^4(g)}{\pi^4 m^2 c_0^4 \eta_0^2 a_1^4} \left(\zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right), \quad (3.64)$$

onde ζ é a função zeta. Esse é o resultado geral para a dispersão de velocidade na direção z para o caso de partículas ligadas devido apenas a contribuição do vácuo de Minkowski.

O resultado obtido acima independe da direção escolhida, logo se ao invés de z fosse adotado $i = x$ ou $i = y$ no final seria encontrado o mesmo resultado para a dispersão de velocidades, ou seja, é isotrópico. Esse fato é consequência da ausência de placas, pois a consideração de tais elementos produz alterações no estado de vácuo, as quais são percebidas com base nos resultados encontrados para a dispersão de velocidades. Além disso, a dispersão diferente de zero apresentada na equação (3.64) diz que as partículas ligadas apresentam movimento browniano quântico, por consequência da presença de uma força externa que anula localmente os efeitos da expansão.

Nestas últimas duas seções foi revisado o Movimento Browniano Quântico de uma partícula, livre e ligada, em um condensado em expansão conforme sem a presença de planos refletorres. Contudo, toda nossa análise aconteceu considerando que o espaço é comutativo. Agora, como proposta de trabalho, buscamos investigar este mesmo sistema considerando um espaço não-comutativo, que será o estudo desenvolvido no Capítulo 5. Para isto, antes é necessário introduzir brevemente as ideias principais por traz de um espaço não-comutativo, que é o assunto do próximo capítulo.

⁹ Para detalhes da solução ver Apêndice D.

4 Espaço-tempo não-comutativo: Breves considerações

No domínio da Mecânica Quântica os resultados de uma medida física agregam incerteza e não pode ser inteiramente preciso mais estimados com certa probabilidade quanto ao valor medido, essa é uma descrição característica da própria teoria. Matematicamente, isso é expresso através do conhecido princípio da incerteza de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (4.1)$$

o qual nos diz que os observáveis posição e momento de uma partícula não podem ter valores bem definidos ao mesmo tempo, dito de outra forma, uma pequena incerteza em uma grandeza leva grande incerteza na outra e vice-versa. Além disso, tais quantidades, agora promovidas a operadores hermitianos em um espaço de Hilbert, obedecem a relação de comutação

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij},$$

os quais estão mapeados em um espaço de fase quantizado cujo parâmetro \hbar (constante de Planck) estabelece uma área mínima nesse espaço – célula de Planck [13].

Heisenberg foi o primeiro a propor relações de incerteza entre coordenadas espaciais, que por sua vez implicam em não-comutatividade das coordenadas espaciais. A iniciativa de Heisenberg envolveu outros estudiosos na discussão, como Pauli e Oppenheimer, mas foi Snyder quem construiu uma primeira abordagem teórica para lidar com coordenadas não-comutativas [48].

Seguindo a mesma ideia de prescrição, as quantidades clássicas x_μ são promovidas a operadores \hat{x}_μ em um espaço de Hilbert que diferente do caso usual (comutativo) obedecem a relação

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\hbar\theta_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

onde o parâmetro não-comutativo $\theta_{\mu\nu}$ é uma matriz antissimétrica com dimensão de comprimento ao quadrado [48].

Diante disso, a partir do princípio de incerteza na forma generalizada

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|,$$

obtém-se a relação de incerteza

$$\Delta x_\mu \Delta x_\nu \geq \frac{1}{2} |\theta_{\mu\nu}|.$$

Assim como antes a noção de ponto é substituída por um célula $|\theta_{\mu\nu}|$ com área de Planck, onde as flutuações quânticas da posição produzem um teoria não local [48]. Além disso, outro argumento em favor da relação de não-comutatividade espacial é que em um regime de curtas distâncias (ou altas energias) a estrutura usual pode falhar [49]. Logo, ao invés da relação usual conhecida $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = 0$ teríamos uma estrutura como a apresentada pela equação (4.2), isto é, não-comutativa. Um exemplo sobre isso é colocado por [50] em que se admitirmos uma incerteza a na posição, de acordo com (4.1), o momento será proporcional a $1/a$, assim em um regime de pequenos valores de a uma grande quantidade de energia é concentrada na região (lembre, por exemplo, do caso clássico em que $E = |\vec{p}|^2/2m$, logo \vec{p} e E são proporcionais). Sabendo que matéria e energia estão conectadas, como dizem as equações de Einstein, seria produzido nessa região um campo gravitacional que torna-se mais intenso na medida em que a diminui. No caso em que $a \rightarrow 0$ o campo gerado seria forte ao ponto de que nenhum sinal, como por exemplo a luz, escape da região e portanto nenhuma informação precisa poderia ser obtida, inviabilizando a localização da partícula nesse ponto.

Na sequência expomos um exemplo de um sistema físico simples que permite observar o surgimento da não comutatividade espacial, conhecido como problema de Landau. Primeiramente é feita uma breve revisão para a dedução da lagrangiana de uma partícula em movimento na presença de um campo magnético, por se tratar de um sistema similar ao que é utilizado em seguida para mostrar o efeito de não-comutatividade espacial. A finalidade desta dedução é tornar o texto contínuo e acessível visto que poderá servir como fonte para iniciantes no tema. Por fim apresentamos algumas propriedades do produto Moyal que é um elemento fundamental quando se trabalha com teorias não-comutativas.

4.1 Lagrangiana para uma partícula em um campo magnético

O formalismo lagrangiano é uma abordagem alternativa ao conhecido formalismo newtoniano, enquanto o primeiro envolve apenas funções escalares o segundo lida com as forças (grandezas vetoriais) que atuam sobre um corpo em certa situação. Geralmente, podemos expressar a função lagrangiana de um sistema físico como

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - V, \quad (4.3)$$

onde T representa a parte cinética e V a energia potencial do sistema. Os termos q_i e \dot{q}_i são, respectivamente, coordenada e velocidade generalizada do sistema de partículas $i = 1, 2, \dots, N$.

A aplicação do princípio de Hamilton ou da mínima ação sobre essa função

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \delta L(q_i, \dot{q}_i)$$

nos permite encontrar um conjunto de equações

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (4.4)$$

conhecidas como equações de Euler-Lagrange. Matematicamente essas expressões dizem que conhecida a função lagrangiana L do sistema utilizando as relações acima obtém-se as equações que governam o movimento do sistema.

Uma das grandes vantagens de utilizar o formalismo lagrangiano é que ao invés de lidarmos com grandezas vetoriais, como é feito no caso newtoniano (\vec{F} , \vec{E} , \vec{B}), trabalhamos apenas com quantidades escalares, isto é, termos de energia potencial e cinética. Por exemplo, uma situação análoga ocorre no Eletromagnetismo quando escrevemos o campo elétrico (grandeza vetorial) em termos do potencial V (grandeza escalar). Em muitas ocasiões isso é um artifício muito prático, pois é mais fácil trabalhar com quantidades escalares uma vez que não necessitam de descrições vetoriais.

Como foi exposto, para escrever a lagrangiana de um sistema é necessário conhecer energia cinética e potencial, logo é fundamental encontrar tais grandezas e para isso vamos considerar a seguinte situação. Uma partícula de massa m e carga q que se move com velocidade \vec{v} em uma região na presença de um campo magnético \vec{B} constante experimenta uma força do tipo

$$\vec{F} = q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}. \quad (4.5)$$

Um caso geral seria considerar um campo eletromagnético, assim a força resultante sobre a partícula seria a força de Lorentz¹.

Das equações de Maxwell da eletrodinâmica sabe-se que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4.6)$$

essa equação, sem nome específico, em princípio nos diz sobre a inexistência de monopolos magnéticos.

O fato de que todo divergente de um campo rotacional é nulo nos permite escrever o campo magnético \vec{B} em termos de um potencial vetor \vec{A} como segue

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (4.7)$$

Não devemos entender \vec{A} unicamente como uma conveniência matemática decorrente de que campos magnéticos, rotacionais, têm uma divergência nula. De fato, frequentemente ele permite escolhas que simplificam de um modo matemático os problemas, porém não

¹ Para essa demonstração ver a ref. [51, p. 338-340], que desde já menciona-se que nos baseamos fundamentalmente para a explanação desse tópico.

deve-se tomá-lo meramente como um artifício matemático, um exemplo de sua manifestação física é o efeito Aharonov-Bohm.

Substituindo a equação (4.7) em (4.5), obtemos

$$\vec{F} = q \frac{\vec{v}}{c} \times (\nabla \times \vec{A}), \quad (4.8)$$

que utilizando a propriedade vetorial

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} \quad (4.9)$$

com $\vec{a} \rightarrow \vec{A}$ e $\vec{b} \rightarrow \vec{v}$ resulta em

$$\vec{F} = \frac{q}{c} [\nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}]. \quad (4.10)$$

A propriedade vetorial é simplificada observando que o operador $\nabla = (\partial/\partial x^i) \hat{x}^i$ e $v^i = \dot{x}^i$, logo a atuação de ∇ sobre as componentes da velocidade \vec{v} produz um resultado nulo, que por sua vez nos auxilia a estabelecer a igualdade anterior na equação da força.

Uma vez que a derivada total com respeito ao tempo do potencial vetor $\vec{A}(x, y, z, t)$ pode ser escrita como

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{A} \quad (4.11)$$

e dado que o campo magnético \vec{B} é constante, podemos adicionar na expressão (4.10) um termo $-\partial \vec{A}/\partial t$ sem perda de generalidade. Logo,

$$\vec{F} = \frac{q}{c} \left[\nabla(\vec{A} \cdot \vec{v}) - \frac{d}{dt} \nabla_{\vec{v}}(\vec{A} \cdot \vec{v}) \right], \quad (4.12)$$

onde foi utilizado o artifício matemático de que $\vec{A} \equiv \nabla_{\vec{v}}(\vec{A} \cdot \vec{v})$.

O elemento final da demonstração vem da definição da quantidade

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (4.13)$$

como força generalizada, essa expressão surge da substituição de (4.3) em (4.4) com q_i e \dot{q}_i denominadas respectivamente por coordenada e velocidade generalizada.

Agora, comparando as equações (4.12) e (4.13) percebe-se que

$$V = -\frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v},$$

o qual representa o termo potencial generalizado de L que origina a força magnética que atua sobre a partícula.

Assim, a lagrangiana de uma partícula de massa m e velocidade \vec{v} em um campo magnético constante \vec{B} é

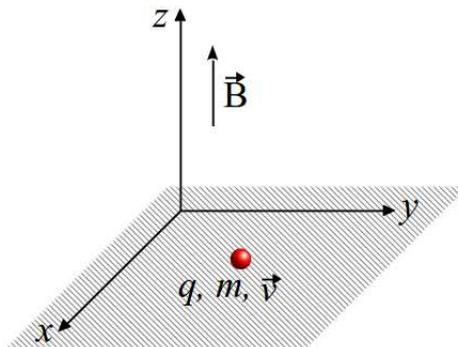
$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + \frac{q}{c}\vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (4.14)$$

A demonstração aqui desenvolvida consiste basicamente em descobrir qual é o termo da energia potencial V . É importante ressaltar que, em geral, no caso de forças eletromagnéticas, diferente de um caso simples em que o potencial depende apenas de coordenadas, temos um potencial dependente da velocidade e parte desse potencial está ligado ao momentum da partícula [51, p. 340].

4.2 O problema de Landau

Um exemplo frequentemente abordado, ou comentado, nos textos sobre não-comutatividade é o problema de Landau, que evidencia a não-comutatividade entre momentos e coordenadas espaciais [13, 52, 53, 54]. Semelhante ao que foi trabalhado na seção anterior, vamos considerar uma partícula com carga q , de massa m e com velocidade \vec{v} em um campo magnético constante perpendicular $\vec{B} = B\hat{z}$ ao plano $\vec{r} = (r_x, r_y)$ de seu movimento como mostra a figura (13).

Figura 13 – Representação do sistema considerado para exemplificação da não-comutatividade dos momentos e coordenadas espaciais.



Fonte: produzido pelo autor com base na referência [52], 2020.

A lagrangiana desse sistema será

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 + \frac{q}{c}\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}, \quad (4.15)$$

onde \vec{A} é o potencial vetor e adotou-se $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$. Além de que para evitar confusão com a carga q da partícula utilizou-se o rótulo r ao invés de q para representar as coordenadas e velocidades generalizadas.

No processo de quantização canônica deve-se determinar a função Hamiltoniana do sistema,

$$H = \sum_i p_i \dot{r}_i - L(r_i, \dot{r}_i)$$

onde $p_i = \partial L / \partial \dot{r}_i$ é o momento generalizado ou canônico.

Considerando a lagrangiana anterior encontramos

$$H = \frac{|\vec{\pi}|^2}{2m}, \quad (4.16)$$

que é a hamiltoniana do sistema escrita em termos do momento canônico e $\vec{\pi} = \vec{p} - q/c\vec{A}$ representa o momento mecânico.

Observa-se que enquanto o momento canônico \vec{p}_i e as coordenadas r_i obedecem as relações de comutação fundamentais [52]

$$\begin{aligned} [\hat{r}_i, \hat{r}_j] &= [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \\ [\hat{r}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

o momento mecânico $\vec{\pi}_i$ produz relações clássicas e quânticas de anti-comutação

$$\begin{aligned} \{\pi_i, \pi_j\} &= \frac{q}{c}\epsilon_{ij}B, \\ [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] &= \frac{i\hbar q}{c}\epsilon_{ij}B, \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde “{, }” refere-se aos parenteses de Poisson, que para duas quantidades arbitrárias A e B são definidos por [51, p. 341]

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}, \quad (4.19)$$

com p_i e q_i , respectivamente, momentum e coordenadas generalizadas.

As relações anteriores mostram que o momento mecânico não obedece as relações de comutação usuais, além disso, revelam que na presença de um campo magnético os momentos apresentam propriedades não-comutativas.

A não-comutatividade espacial emerge no limite em que os campos magnéticos são muito intensos ou as partículas possuem massas extremamente pequenas [52]. Nesse regime o termo do potencial vetor domina sobre o cinético, $q\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}/c \gg m|\dot{\vec{r}}|^2/2$, assim da lagrangiana (4.15) obtém-se que

$$L_{CMF} = \frac{q}{c}\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{q}{c}B r_x \dot{r}_y. \quad (4.20)$$

Na igualdade acima utilizou-se o fato de que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = B\hat{z}$ permite escolher $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, r_x B, 0)$, conseqüentemente o termo não nulo do produto interno $\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}$ será a componente y . O subscrito CMF indica o regime de campo magnético forte.

Agora o próximo passo para quantização naturalmente seria calcular o momento conjugado e determinar o hamiltoniano, mas aqui encontra-se uma característica que inviabiliza o método usual: as velocidades não podem ser reescritas em termos dos momentos conjugados. Na ocasião, a lagrangiana resultante é dita singular, pois viola a condição Hessiana $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r}_i \partial \dot{r}_j} \neq 0$, visto que

$$\frac{\partial^2 L_{CMF}}{\partial \dot{r}_i \partial \dot{r}_j} = 0.$$

A condição Hessiana refere-se a uma matriz de transformação $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r}_i \partial \dot{r}_j} \equiv W^{ij}$ entre momentos e coordenadas, $p^i W^{ij} = \dot{q}_j$, dizendo que a mesma deve possuir determinante diferente de zero, pois assim pode ser invertida na forma $\dot{q}_j = (W^{-1})_{ij} p^i$ [55, p. 16]. Em ocasiões como esta utiliza-se o método de quantização canônica para sistemas vinculados proposto por Dirac em que a impossibilidade de inversão entre velocidade e momento são tratados como vínculos. Detalhar o método aqui tomaria muito tempo e espaço, assim para mais detalhes indicamos as referências [55] e [56] nas quais nos baseamos.

A partir da lagrangiana (4.20) obtemos os vínculos primários

$$p_x = \frac{\partial L_{CMF}}{\partial \dot{r}_x} = 0 \rightarrow \phi_0 \equiv p_x \approx 0, \quad (4.21)$$

$$p_y = \frac{\partial L_{CMF}}{\partial \dot{r}_y} = \frac{q}{c} B r_x \rightarrow \phi_1 \equiv p_y - \frac{q}{c} B r_x \approx 0, \quad (4.22)$$

os quais fornecem parenteses de Poisson

$$\{\phi_a, \phi_b\} = \epsilon_{ab} \frac{q}{c} B, \quad (4.23)$$

com $a, b = 0, 1$, que por sua vez são classificados como de segunda classe. Um vínculo é de primeira classe quando o parenteses de Poisson entre eles é fracamente nulo e de segunda classe quando o contrário ocorre [54].

Assim, a hamiltoniana total do sistema H_T será a hamiltoniana usual (H) mais os termos dos vínculos,

$$H_T = H + \sum_{i=0,1} \lambda_i \phi_i, \quad (4.24)$$

onde λ_i são multiplicadores de Lagrange e ϕ_i os vínculos obtidos.

Seguindo, no método de Dirac para sistemas vinculados os parênteses canônicos para duas quantidades A e B são definidos como [56]

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \sum_{a,b}^k \{A, \phi_a\} M_{ab}^{-1} \{\phi_b, B\}, \quad (4.25)$$

denominados parênteses de Dirac e M_{ab}^{-1} é a inversa da matriz dos vínculos $M_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\}$.

Considerando os vínculos encontrados temos

$$M_{ab}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-qB}{c} \\ \frac{qB}{c} & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{ab} \frac{qB}{c} \quad (4.26)$$

Assim, com o auxílio das relações (4.17) e explorando as propriedades dos parêntese de Poisson, para os parêntese de Dirac obtemos

$$\{r_i, r_j\}_D = -\epsilon_{ij} \frac{c}{qB} \quad (4.27)$$

$$[\hat{r}_i, \hat{r}_j] = -\epsilon_{ij} \frac{i\hbar c}{qB}, \quad (4.28)$$

respectivamente, relações clássicas e quânticas obtida através da prescrição

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}].$$

A partir das equações (4.27) percebe-se que para o sistema no regime considerado, campos magnéticos fortes, coordenadas espaciais obedecem relações de anti-comutação, ou seja, não-comutatividade espacial. Além disso, na ocasião nota-se que a não-comutatividade espacial inicialmente apresenta-se em um nível clássico [54]. Por fim, ressalta-se que esse é um dos exemplos que fornecem evidências para se considerar um espaço-tempo não-comutativo e foi abordado aqui como motivação para o tema.

4.3 Produto Moyal e algumas propriedades

Em virtude da relação (4.2) os campos agora têm características de operadores, logo deve-se ter cautela na manipulação dos mesmos, pois como sabemos em se tratando de operadores, por exemplo, em mecânica quântica, o ordenamento de um produto entre operadores é relevante. Considerando um espaço-tempo não-comutativo a multiplicação dos campos é modificada e mesmo que contenha algumas semelhanças (associação) com o caso comutativo deve ser substituída pelo chamado produto Moyal ou estrela. O produto Moyal é um elemento matemático característico da teoria de espaços não-comutativos, que nos permite manipular os campos como funções ao invés de operadores [49].

Inicialmente vamos considerar o denominado símbolo de Weyl, definido como [13, 48]

$$\widehat{W}[f] = \int \frac{d^D x}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_i \hat{x}^i}, \quad (4.29)$$

que pode ser escrito na forma

$$\widehat{W}[f] = \int \frac{d^D x}{(2\pi)^D} f(z) \widehat{\Delta}(x), \quad (4.30)$$

onde utilizou-se a definição do operador $\widehat{\Delta}(z)$ dado por

$$\widehat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_i \widehat{x}^i} e^{-ik_i x^i}, \quad (4.31)$$

que faz um mapeamento entre os operadores de Weyl e os campos $f(x)$; D representa a dimensão do espaço.

Para o produto entre dois operadores de Weyl temos

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k' - k)e^{ik'_i x^i} e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_i k'_j}, \quad (4.32)$$

onde foi utilizada a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \quad (4.33)$$

A partir da relação (4.32) define-se o produto Moyal

$$\widehat{W}[f]\widehat{W}[g] = \widehat{W}[f \star g],$$

com

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k' - k)e^{ik'_i x^i} e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_i k'_j} \\ f(x) \star g(x) &= f(x) \exp\left[\frac{i}{2}\theta^{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j\right] g(x), \end{aligned} \quad (4.34)$$

que utilizando a expansão em série da função exponencial pode ser escrito como

$$f(x) \star g(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij} \partial_i f(x) \partial_j g(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \dots \quad (4.35)$$

É interessante observar que no caso de $\theta \rightarrow 0$ recupera-se o produto normal do espaço comutativo entre as quantidades, mostrando assim a consistência da teoria.

Utilizando as equações (4.34) e (4.35) pode-se obter algumas propriedades as quais apresentamos em seguida [13, 49, 52, 57].

(a) Comutador para duas coordenadas espaciais x^μ e x^ν :

$$\begin{aligned} [x^\mu, x^\nu] &= x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu \\ [x^\mu, x^\nu] &= \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} \\ [x^\mu, x^\nu] &= i\theta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

(b) Comutador e anti-comutador entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$:

$$\begin{aligned} [f(x) \star g(x)] &= f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) \\ [f(x) \star g(x)] &= 2if(x) \sin\left(\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right) g(x), \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \{f(x) \star g(x)\} &= f(x) \star g(x) + g(x) \star f(x) \\ \{f(x) \star g(x)\} &= 2f(x) \cos\left(\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j\right) g(x). \end{aligned} \quad (4.38)$$

As setas indicam o sentido de atuação das derivadas.

(c) Produto Moyal na representação de Fourier:

$$f(x) \star g(x) = \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{i(k_\mu + k'_\mu)x^\mu} e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu}, \quad (4.39)$$

em que a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff (4.33) foi utilizada.

(d) Associatividade:

$$[f(x) \star g(x)] \star h(x) = f(x) \star [g(x) \star h(x)]. \quad (4.40)$$

De fato, pode ser verificado utilizando a representação de Fourier.

(e) Permutação cíclica:

$$\int d^D x f_1(x) \star f_2(x) \cdots \star f_n(x) = \int d^D x f_2(x) \cdots \star f_n(x) \star f_1(x). \quad (4.41)$$

(f) Complexo conjugado:

$$[f(x) \star g(x)]^* = g(x)^* \star f(x)^*. \quad (4.42)$$

(g) Integração do produto Moyal:

Integrando ambos os lados da propriedade (c), encontramos

$$\begin{aligned} \int d^D x f(x) \star g(x) &= \int d^D x \iint \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{i(k_\mu + k'_\mu)x^\mu} e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} \\ \int d^D x f(x) \star g(x) &= \int d^D x f(x) g(x). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Para se obter essa relação utiliza-se a representação de Fourier da função delta de Dirac, função g e a transformada inversa de f . Além disso, uma vez que $\delta(k + k') \equiv \delta(k - (-k'))$, conseqüentemente, $k_\mu = k'_\nu$ e observa-se que devido a anti-simetria de $\theta^{\mu\nu}$ o termo $\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu \rightarrow 0$, logo o fator exponencial não contribui.

A finalidade de apresentar as relações acima foi exemplificar algumas modificações que surgem nas operações mais comuns devido a não-comutatividade entre as coordenadas do espaço-tempo. Como foi visto, todas decorrem de manipulações algébricas tendo como elemento principal a mudança do produto usual do espaço comutativo para o produto Moyal correspondente ao espaço-tempo não-comutativo.

5 MBQ de uma partícula em um CBE em expansão: Efeitos de não-comutatividade.

Nesse ponto do trabalho é importante lembrar o seu objetivo principal a fim de elucidar e dar justificativa para todo o desenvolvimento anterior. Em suma, através dos estudos precedentes foi explanado: (i) um pouco sobre os modelos análogos de gravidade, (ii) movimento Browniano clássico e quântico, além dos (iii) fundamentos de um espaço-tempo não-comutativo. O objetivo desses capítulos prévios foi possibilitar o entendimento dos elementos que constituem o objeto de estudo, ou seja, o (ii) movimento Browniano quântico de uma partícula em um (i) modelo análogo, com condensado de Bose-Einstein em expansão tipo Friedmann-Robertson-Walker, considerando um (iii) espaço-tempo não-comutativo.

No que se refere a organização, o texto do presente capítulo foi estruturado de forma progressiva quanto aos elementos matemáticos necessários para nossos cálculos, buscando sempre manter algum paralelismo com os desenvolvimentos anteriores. Além disso, alguns detalhes poupados na revisão serão abordados com mais minudência neste tópico, pelo fato de que o elemento novo agora considerado (NC), que distingue o nosso trabalho dos já conhecidos na literatura, exige um cuidado técnico especial.

5.1 A Métrica de fundo (*background*)

Semelhante ao que foi feito na Seção 3.4, de início é necessário obter uma métrica que simule o nosso condensado em expansão, que agora estará sensível as correções devido a não-comutatividade do espaço-tempo.

O ponto de partida de nossa investigação será a lagrangiana para o modelo abeliano de Higgs não-comutativo, que no espaço-tempo comutativo é dada por [58]

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + \left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) (|D_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 - b |\phi|^4) \\ & + \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} \left[(D_\beta \phi)^\dagger D^\mu \phi + (D^\mu \phi)^\dagger D_\beta \phi \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ é a derivada covariante, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de campo eletromagnético,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

e $\theta^{\alpha\beta}$ é o parâmetro de não-comutatividade constante, real, com dimensão de comprimento ao quadrado representado por uma matriz antissimétrica quadrada de dimensão D .

Considerando que o campo $\phi(\vec{x}, t)$ pode ser escrito em termos dos campos reais densidade $\rho(\vec{x}, t)$ e fase $S(\vec{x}, t)$ como [58]

$$\phi(\vec{x}, t) = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)} e^{iS(\vec{x}, t)},$$

além da inexistência de efeitos não-comutativos sobre a parte temporal. Calculando as equações de movimento para essa teoria e induzindo perturbações, tais que

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad \text{e} \quad S = S_0 + S_1,$$

pode-se obter uma métrica acústica não-comutativa dada por¹

$$ds^2 = \frac{b\rho_0}{2c_s\sqrt{f}} \left[-\mathcal{F}(v)d\tau^2 + \Lambda \left(\frac{v^i v^j \Gamma + \Sigma^{ij}}{\Lambda \mathcal{F}(v)} + \delta_{ij} \right) dx^i dx^j \right], \quad (5.3)$$

onde as seguintes quantidades foram definidas:

$$\begin{aligned} f &= [(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2) - (1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2] - 3(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{B} \cdot \vec{v})(\vec{\theta} \cdot \vec{v}), \\ d\tau &= dt + \frac{\vec{\xi}(v) \cdot d\vec{x}}{2\mathcal{F}(v)}, \\ \mathcal{F}(v) &= (1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\ \Lambda(v) &= (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})(1 + c_s^2 - v^2) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}, \\ \vec{\xi}(v) &= [2(1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v}]\vec{v} + (1 + c_s^2)(\vec{\theta} \times \vec{E}) - (\vec{B} \cdot \vec{v})\vec{\theta} - (\vec{\theta} \cdot \vec{v})\vec{B}, \\ \Gamma(v) &= 1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B} + (1 + 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})c_s^2 - (1 + 4\vec{\theta} \cdot \vec{B})v^2 - 2(\vec{\theta} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{v})(\vec{B} \cdot \vec{v}), \\ \Sigma^{ij}(v) &= [(1 + c_s^2)(\vec{\theta} \times \vec{E})^i - (\vec{B} \cdot \vec{v})\theta^i - (\vec{\theta} \cdot \vec{v})B^i]v^j, \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que ρ_0 é a densidade, c_s a velocidade local do som no fluido e \vec{v} é a velocidade do fluxo.

Admitindo que $\vec{v} = 0, \vec{E} = 0$ e considerando o limite não-relativístico, $c_s^2 \ll 1$, encontramos²

$$d\bar{s}^2 = \frac{b\rho_0}{2} \left[-\frac{(1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})}{(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})^{\frac{1}{2}}} c_s d\bar{t}^2 + \frac{(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})}{(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})^{\frac{1}{2}}} c_s^{-1} \delta_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j \right]. \quad (5.5)$$

Por questões de praticidade na escrita define-se as quantidades

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 &= \frac{(1 - 3\vec{\theta} \cdot \vec{B})}{(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})^{\frac{1}{2}}}, \\ \mathcal{B}^2 &= \frac{(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B})}{(1 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{B})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

¹ Para detalhes matemáticos sobre a dedução consultar a referência [58].

² As barras superiores nas variáveis foram adicionadas como auxílio para distingui-las nas manipulações que se seguem.

Efetuada uma transformação de coordenadas na parte espacial, tal que

$$d\bar{x}^i = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{B}} dx^i,$$

podemos escrever

$$d\bar{s}^2 = \frac{b\rho_0}{2} \mathcal{N}^2 \left[-c_s d\bar{t}^2 + c_s^{-1} \delta_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j \right]. \quad (5.7)$$

Agora, assumindo uma velocidade do som variável $c_s = c_s(t)$ e o parâmetro

$$\chi(t) = \left[\frac{c_s(t)}{c_0} \right]^2,$$

correspondente a um fator de escala, que por consideração possui a característica $\chi(t_0) = 1$ com $c_s(t_0) = c_0$. Então, da eq. (5.7) temos

$$d\bar{s}^2 = \frac{b\rho_0}{2} \mathcal{N}^2 \left[-\chi^{\frac{1}{2}}(t) c_0 d\bar{t}^2 + \chi^{-\frac{1}{2}}(t) c_0^{-1} \delta_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j \right].$$

Fazendo as definições $\Omega_0^2 = \frac{b\rho_0}{2c_0}$ e $\Omega_0^{-2} d\bar{s}^2 = ds^2$ e aplicando uma transformação na coordenada temporal tal que $dt = \chi^{\frac{1}{4}}(t) d\bar{t}$ obtém-se

$$ds^2 = \mathcal{N}^2 \left[-c_0^2 dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j \right], \quad (5.8)$$

com

$$a^2(t) = \chi^{-\frac{1}{2}} = \frac{c_0}{c_s(t)}, \quad (5.9)$$

que é um elemento de linha similar a métrica cosmológica de um espaço-tempo do tipo FRW, em adição do fator multiplicativo \mathcal{N} , que está relacionado a não-comutatividade espacial considerada.

A métrica anterior também admite a transformação conforme

$$ds^2 = \mathcal{N}^2 a^2(\eta) \left[-c_0^2 d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right], \quad (5.10)$$

para o tempo conforme $dt = a d\eta$, a qual está relacionada com o espaço plano de Minkowski através do fator conforme $a(\eta)^2$, além do fator extra não-comutativo \mathcal{N}^2 .

Como comentário final é pertinente, ainda que de forma moderada, tentar oferecer alguma motivação mais física acerca da escolha de $\vec{E} = 0$ nos cálculos acima. Claro que poderíamos utilizar a justificativa comum de simplicidade de trabalho uma vez que em muitos casos é natural partir de uma investigação mais simples do problema para outra mais completa. Contudo, em busca de uma argumentação mais plausível, procura-se fornecer algo além do pretexto de simplificação, o qual é mais convincente e deixamos para justificar a escolha de $\vec{v} = 0$.

Foi comentado que muitos trabalhos têm estudado o movimento Browniano de partículas na presença de planos devido as flutuações quânticas de vácuo do campo elétrico,

que são dominantes no regime não-relativístico o qual é o limite também utilizado em nosso estudo. Além disso, nota-se que a teoria³ utilizada, eq. (5.1), fornece uma métrica, eq. (5.3), que permite investigar efeitos de não-comutatividade tanto por ação de campos elétricos como magnéticos. Então, seria natural questionar por que não escolher seguir a mesma linha de ideia destas pesquisas, ou seja, investigar efeitos de não-comutatividade associados aos campos elétricos. Um primeiro motivo é que a configuração do nosso sistema difere dos que foram citados anteriormente (Seção 3.2), logo de certa forma esse detalhe nos permite alguma liberdade de escolha. Agora, outro argumento mais expressivo é que o fato de escolher apenas $\vec{B} \neq 0$ é norteado pelo problema de Landau discutido anteriormente, onde efeitos não-comutativos surgem na presença de campos magnéticos. Assim, a escolha $\vec{E} = 0$ leva em conta motivos físicos e não é uma admissão baseada meramente em questões de simplificação matemática.

É importante esclarecer que em nosso sistema as flutuações quânticas estão inteiramente associadas ao campo escalar médio que descreve o condensado. Logo, os campos \vec{E} e \vec{B} de nossa teoria não necessariamente têm a ver com o movimento estocástico, isto é, não são a causa primeira do movimento browniano. Porém, em tese, se for considerado um espaço não-comutativo estes (\vec{E} e \vec{B}) podem passar a contribuir (ou não) com a dispersão de velocidades das partículas, como será mostrado para o campo magnético.

5.2 Equação da força

A equação que descreve o movimento de uma partícula pontual de massa m e carga q acoplada a um campo escalar sem massa ϕ movendo-se em um espaço-tempo plano (Minkowski) ou conformemente plano [10, 11] é dada por

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = qg^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi. \quad (5.11)$$

Na expressão acima u^μ é o quadrivetor velocidade da partícula, τ o tempo próprio,

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \quad (5.12)$$

é a derivada covariante e

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\theta\mu} (g_{\theta\alpha,\beta} + g_{\theta\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\theta}) \quad (5.13)$$

são os símbolos de Christoffel.

³ É comum em Teoria de Campos se referir a lagrangianas como teorias, visto que delas são retiradas todas as equações que descrevem o movimento de um objeto (partícula, campo) bem como é possível obter-se outras informações sobre o mesmo, como por exemplo, tipo de interação, se o campo é carregado, etc. Assim, uma vez que um conjunto de informações compõe a teoria que descreve um sistema, desse fato decorre a relação de sinônimo entre as palavras lagrangiana e teoria.

As equações (5.11), (5.12) e (5.13) foram utilizadas na Seção 3.4 para estudar o movimento Browniano de partículas em um espaço-tempo do tipo FRW. Porém, na ocasião, Sec. 3.4, estávamos lidando com um espaço-tempo comutativo e agora a proposta de estudo tem como meta abordar o mesmo problema considerando um espaço-tempo não-comutativo. Nesse sentido, o primeiro passo é verificar se a equação da força sofrerá alguma alteração devido a mudança de espaço. De fato, como há de se esperar e será visto, a relação (5.11) sofrerá uma modificação tal que $f^\mu \rightarrow \bar{f}^\mu$. Embora a estrutura da equação (5.11) permaneça semelhante, existirão termos extras devido ao espaço-tempo não-comutativo, os quais produzirão efeitos novos e algumas implicações sobre os já existentes na literatura.

A fim de compreender bem como identificar esta correção é interessante recorrermos ao formalismo lagrangiano. Para um espaço-tempo plano, uma lagrangiana que se encaixa ao caso de estudo revisado na Seção 3.4 é da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (5.14)$$

que corresponde a teoria para um campo escalar ϕ sem massa com um potencial $V(\phi)$ qualquer adequado a teoria, por exemplo, de confinamento ou interação.

Utilizando as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0, \quad (5.15)$$

para equação do movimento encontra-se que

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (5.16)$$

Nota-se que os últimos termos do lado esquerdo são iguais aos que se encontram na equação (5.11) após o fator q . O lado direito corresponde a um termo de força (gradiente de um potencial). Tais argumentos podem tornar-se mais familiares reconhecendo a semelhança fundamental com o conceito de força generalizada em Mecânica Clássica.

Seguindo esse mesmo raciocínio, utilizando a teoria da equação (5.1) em (5.15), ao efetuar as respectivas derivadas encontra-se que⁴

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left[\left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) g^{\mu\nu} + \theta^{\alpha\mu} F_\alpha{}^\nu \right] \partial_\nu \phi - ie \partial_\mu \left[\left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) A^\mu \phi + \theta^{\alpha\mu} F_\alpha{}^\nu A_\nu \phi \right] \\ & - \left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) [ie A_\mu \partial_\mu \phi + 2e^2 A_\mu A^\mu \phi + m^2 \phi - 2\phi |\phi|^2] \\ & - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} g^{\nu\mu} [ie A_\beta \partial_\nu \phi + 2e^2 A_\nu A_\beta \phi + ie A_\nu A_\beta \phi] = 0. \end{aligned}$$

Diante do resultado acima e considerando as observações do parágrafo anterior percebe-se que nos cálculos posteriores devemos considerar a seguinte expressão:

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = \bar{f}^\mu, \quad (5.17)$$

⁴ Para detalhes matemáticos ver Apêndice B

com

$$\bar{f}^\mu = q \left[\left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) g^{\mu\nu} + \Theta^{\mu\nu} \right] \nabla_\nu \phi, \quad (5.18)$$

onde $g^{\mu\nu}$ será a métrica do nosso *background* e definiu-se

$$\Theta^{\mu\nu} = \theta^{\alpha\mu} F_\alpha{}^\nu. \quad (5.19)$$

Em nossos estudos vamos nos concentrar em uma direção particular i , logo

$$\bar{f}^i = q \left[\left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) g^{i\nu} + \Theta^{i\nu} \right] \nabla_\nu \phi. \quad (5.20)$$

Uma vez que foi mostrada a modificação necessária para a equação da força, por simplicidade, de agora em diante o barra sobre \bar{f}^i será descartada. Além do mais, consideraremos o caso em que não existem efeitos não-comutativos entre coordenadas espaciais e temporal [58],

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{para } \theta^{i0} \text{ e } \theta^{0j} \\ \neq 0, & \text{para } \theta^{ij}. \end{cases}$$

É útil fazer algumas observações sobre f^i diante da estrutura de seus termos. Em primeiro lugar é importante chamar a atenção para o fato de que não se deve confundir o resultado $\theta^{i0} = 0$ com o fator $\Theta^{i\nu}$, pois em geral

$$\Theta^{i\nu} = \theta^{\alpha i} F_\alpha{}^\nu = \begin{cases} 0, & \text{para } \alpha = 0, \text{ pois } \Theta^{i\nu} = \theta^{0i} F_0{}^\nu = 0, \\ \neq 0, & \text{para } \alpha \neq 0, \text{ pois } \Theta^{i\nu} = \theta^{ji} F_j{}^\nu. \end{cases}$$

Coincidentemente $\theta^{i0} = \Theta^{i0} = 0$, porém frisamos que os dois possuem estruturas diferentes e o motivo da equivalência vem da escolha $\vec{E} = 0$. Então, é fácil ver que $\alpha \rightarrow j = \{1, 2, 3\}$ e $\Theta^{i\nu} = \theta^{ji} F_j{}^\nu$. Além disso, sobre o índice ν , retornando ao início em que admitiu-se $\vec{E} = 0$, por consequência desse pressuposto tanto o termo $F_j{}^\nu$ é nulo para $\nu = 0$ como $g^{i\nu}$ visto que é diagonal. Assim, devemos fazer também $\nu \rightarrow p = \{1, 2, 3\}$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \theta^{ij} &= \epsilon^{ijk} \theta_k, \\ F^{ij} &= \epsilon^{ijl} B_l, \end{aligned} \quad (5.21)$$

para evitar a manipulação de expressões com muita notação indicial, verifica-se que

$$\theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = (\delta^{jj} \delta^{kl} - \delta^{jl} \delta^{kj}) \theta^l B^k = 2\vec{\theta} \cdot \vec{B}. \quad (5.22)$$

Portanto,

$$f^i = q \left[\left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B} \right) g^{ip} + \Theta^{ip} \right] \nabla_p \phi, \quad (5.23)$$

com

$$\Theta^{ip} = \theta^{ji} F_j^p. \quad (5.24)$$

Lembrando que o índice i indica a direção arbitrária da força f enquanto que p refere-se as coordenadas de posição x , y e z .

Visto que nos restringimos a direção particular $\mu = i$,

$$m \frac{Du^i}{d\tau} = f^i.$$

Utilizando as equações (5.8) e (5.13), respectivamente equação da métrica no tempo coordenado e definição dos símbolos de Christoffel, encontra-se

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{00}(u_0)^2 + \Gamma^i_{j0}u^j u^0 + \Gamma^i_{0k}u^0 u^k + \Gamma^i_{jk}u^j u^k,$$

cujos respectivos símbolos são

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{00} &= \Gamma^i_{jk} = 0, \\ \Gamma^i_{0k} &= \Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{ac_0}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

com $\dot{a} = da/d\tau$.

Considerando os resultados acima, para equação do movimento, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} f^i &= \frac{du^i}{d\tau} + \Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \frac{du^i}{d\tau} + 2 \frac{\dot{a}}{c_0 a} u^i u^0 \\ \frac{1}{m} f^i &= \frac{du^i}{dt} + 2 \frac{\dot{a}}{a} u^i, \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde novamente assumimos a aproximação entre tempo próprio e tempo coordenado $t \approx \tau$, válida em um regime de velocidades não-relativísticas, além de que $u = (u^0, u^i) = (c_0, u^i)$.

Agora, assumindo que a força f^i possa ser decomposta como a soma de uma força externa clássica, não flutuante, mais uma parcela devido a flutuações quânticas, $f^i \rightarrow f^i + f_{ext}^i$, podemos escrever

$$\frac{1}{m} (f_{ext}^i + f_q^i) = \frac{du^i}{dt} + 2 \frac{\dot{a}}{a} u^i. \quad (5.27)$$

Assim como antes, a equação (5.27) nos permite estudar duas situações físicas distintas: partículas livres e partículas ligadas, que são originadas mediante os valores da força externa f_{ext} , cujas respectivas interpretações físicas são as mesmas que foram apresentadas na Seção 3.4.

A igualdade entre as equações (3.41), no espaço comutativo, e (5.27), para o espaço não-comutativo, vem do fato de considerarmos o parâmetro não-comutativo \mathcal{N} constante, que é consequência direta da escolha de $\vec{\theta}$ e \vec{B} também constantes.

Na sequência, por questões de organização, vamos trabalhar ambos os casos separadamente. O intuito dessa divisão, além de proporcionar sistematização, é tornar evidente as diferenças entre os resultados considerando um espaço-tempo não-comutativo e comutativo (Sec. 3.4). Também ressalta-se que em nossos cálculos vamos considerar o parâmetro da não-comutatividade \mathcal{N} como um fator constante e o caso das flutuações devido apenas o vácuo puro de Minkowski (G^+).

5.3 Casos de estudo

5.3.1 Partículas livres

Quando $f_{ext}^i = 0$, utilizando a regra do produto para derivadas podemos escrever a equação (5.27) como

$$\frac{1}{m} f_q^i = \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} (a^2 u^i), \quad (5.28)$$

que integrando resulta em

$$u^i(t_f, r) = \frac{1}{ma^2(t_f)} \int_{t_0}^{t_f} a^2(t) f_q^i(t, r) dt, \quad (5.29)$$

onde admitiu-se a condição de velocidade inicial nula para a partícula, $u^i(t_0) = 0$.

Por questões de simplificação daqui em diante o subíndice q será suprimido na representação da força flutuante quântica e também será feito $a(t_f) \equiv a_f$.

Substituindo $u^i(t_f, r)$ na expressão da dispersão de velocidades, eq. (3.45), e admitindo que as flutuações da força f^i satisfazem as condições dadas pelas eqs. (3.47),

$$\begin{aligned} \langle f^i(t_1, r_1) \rangle_{FRW} &= 0, \\ \langle f^i(t_1, r_1) f^i(t_2, r_2) \rangle_{FRW} &\neq 0, \end{aligned}$$

encontramos

$$\langle (\Delta u^i)^2 \rangle = \frac{1}{m^2 a_f^4} \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) \langle f_q^i(t_1, r_1) f_q^i(t_2, r_2) \rangle_{FRW}, \quad (5.30)$$

valendo lembrar que “ $\langle \dots \rangle \equiv \langle 0 | \dots | 0 \rangle$ ”.

Substituindo (5.23) em (5.30),

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u^i)^2 \rangle &= \frac{q^2}{m^2 a_f^4} \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) \left[\left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta}_1 \cdot \vec{B}_1 \right) g_1^{ip} + \Theta_1^{ip} \right] \\ &\times \left[\left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta}_2 \cdot \vec{B}_2 \right) g_2^{is} + \Theta_2^{is} \right] \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle \phi(r_1, t_1) \phi(r_2, t_2) \rangle_{FRW}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Uma vez que na ocasião temos índices de soma é importante advertir que os subíndices 1 e 2 servem para lembrar que tais quantidades referem-se as forças distintas $f^i(r_1, t_1)$

e $f^i(r_2, t_2)$, atuando em pontos e tempos diferentes, logo não devem ser confundidos com índices de soma. Também, por segurança, fez-se a troca de índices para prevenir a perda de termos. Além disso, na equação acima ∂_{p_1} e ∂_{s_2} são derivadas com relação as coordenadas espaciais, que só atuam, respectivamente, sobre as quantidades x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2 . Note que por essa razão foi possível juntar os dois operadores derivativos no final do lado direito da equação anterior.

A imposição inicial para o parâmetro \mathcal{N} como constante implica em também considerar os fatores $\vec{\theta}$ e \vec{B} constantes, visto que o mesmo depende exclusivamente dessas quantidades. Então, não existe distinção alguma entre essas grandezas e podemos desprezar os devidos rótulos a fim de tornar a notação mais clara. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1 &= \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}, \\ \vec{\theta}_1 &= \vec{\theta}_2 = \vec{\theta}, \\ \vec{B}_1 &= \vec{B}_2 = \vec{B}.\end{aligned}\tag{5.32}$$

Levando em conta os comentários do parágrafo anterior e aplicando a propriedade distributiva na equação (5.31),

$$\begin{aligned}\langle(\Delta u^i)^2\rangle &= \frac{q^2}{m^2 a_f^4} \left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B}\right)^2 \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) g_1^{ip} g_2^{is} \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\ &+ \frac{q^2 \Theta^{is}}{m^2 a_f^4} \left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) g_1^{ip} \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\ &+ \frac{q^2 \Theta^{ip}}{m^2 a_f^4} \left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) g_2^{is} \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\ &+ \frac{q^2 \Theta^{ip} \Theta^{is}}{m^2 a_f^4} \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW}.\end{aligned}$$

Com relação aos fatores métricos percebe-se que

$$\begin{aligned}g_1^{ip} \partial_{p_1} &\rightarrow g_1^{ii} \partial_{i_1} \rightarrow a^{-2}(t_1) \mathcal{N}_1^{-2} \partial_{i_1}, \\ g_2^{is} \partial_{s_2} &\rightarrow g_2^{ii} \partial_{i_2} \rightarrow a^{-2}(t_2) \mathcal{N}_2^{-2} \partial_{i_2}.\end{aligned}\tag{5.33}$$

Logo, para dispersão de velocidade coordenada encontra-se

$$\begin{aligned}\langle(\Delta u^i)^2\rangle &= \frac{q^2 \mathcal{N}^{-4}}{m^2 a_f^4} \left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B}\right)^2 \iint dt_1 dt_2 \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\ &+ \frac{q^2 \mathcal{N}^{-2} \Theta^{is}}{m^2 a_f^4} \left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^2(t_2) \partial_{i_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\ &+ \frac{q^2 \mathcal{N}^{-2} \Theta^{ip}}{m^2 a_f^4} \left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) \partial_{p_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\ &+ \frac{q^2 \Theta^{ip} \Theta^{is}}{m^2 a_f^4} \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW}.\end{aligned}$$

É conhecido das discussões anteriores (ver Cap. 3) que no espaço-tempo FRW as distâncias coordenada e própria estão relacionadas pelo fator de escala conforme $a(t)$, que a grosso modo nos diz a taxa de crescimento (ou contração) entre as coordenadas. Levando em conta a forma da equação (5.8), percebe-se que a relação entre distância coordenada l^i e distância própria x^i tem a forma $l^i = a\mathcal{N}x^i$. Então,

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad \therefore \quad u^i = \frac{v^i}{a_f\mathcal{N}}.$$

Uma vez que

$$\langle(\Delta u^i)^2\rangle = \frac{1}{a_f^2\mathcal{N}^2}\langle(\Delta v^i)^2\rangle, \quad (5.34)$$

a dispersão para a velocidade própria da partícula será

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v^i)^2\rangle &= \frac{q^2\mathcal{N}^{-2}}{m^2a_f^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right)^2 \iint dt_1 dt_2 \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\ &+ \frac{q^2\Theta^{is}}{m^2a_f^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^2(t_2) \partial_{i_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\ &+ \frac{q^2\Theta^{ip}}{m^2a_f^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) \partial_{p_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\ &+ \frac{q^2\mathcal{N}^2\Theta^{ip}\Theta^{is}}{m^2a_f^2} \iint dt_1 dt_2 a^2(t_1) a^2(t_2) \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

com a notação reduzida $\langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \equiv \langle\phi(r_1, t_1)\phi(r_2, t_2)\rangle_{FRW}$.

Os integrandos acima estão escritos em termos da função de correlação no espaço-tempo de FRW, mas utilizando as equações (3.48) e (5.10) podemos reescrever todos no espaço-tempo de Minkowski, cuja relação será

$$\langle\phi_1(\eta_1, r_1)\phi_2(\eta_2, r_2)\rangle_{FRW} = \mathcal{N}^{-2}a^{-1}(\eta_1)a^{-1}(\eta_2)\langle\phi_1(\eta_1, r_1)\phi_2(\eta_2, r_2)\rangle_M. \quad (5.36)$$

Realizando uma mudança de tempo conforme na equação (5.35) em que $dt = a(\eta)d\eta$ e utilizando a equação (5.36), vamos encontrar

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v^i)^2\rangle &= \frac{q^2\mathcal{N}^{-4}}{m^2a_f^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right)^2 \iint d\eta_1 d\eta_2 \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M \\ &+ \frac{q^2\mathcal{N}^{-2}\Theta^{is}}{m^2a_f^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^2(\eta_2) \partial_{i_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M \\ &+ \frac{q^2\mathcal{N}^{-2}\Theta^{ip}}{m^2a_f^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^2(\eta_1) \partial_{p_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M \\ &+ \frac{q^2\Theta^{ip}\Theta^{is}}{m^2a_f^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^2(\eta_1) a^2(\eta_2) \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Observa-se que a primeira integral, sem os fatores de escala $a(\eta)$ no integrando, refere-se ao espaço-tempo de Minkowski, o qual produz resultados divergentes no limite de

coincidência. Todavia, essa divergência é eliminada utilizando um processo de renormalização (já comentado no Capítulo 3), que resumidamente seria passar a divergência para o lado esquerdo da eq. (5.37) e redefinir a expressão para dispersão de velocidades. Assim, é necessário resolver apenas as três últimas das quatro integrais presentes na equação (5.37).

O fator de escala $a(\eta)$ que vamos considerar será o mesmo que foi utilizado na Seção 3.4, equação (3.58),

$$a^n(\eta) = a_0^n + a_1^n \tanh\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right),$$

que é assintoticamente plano em regiões extremas de tempo η , cujos significados das constantes a_0 , a_1 e η_0 foram explicados na Seção 3.4. Esse fator de escala presente no integrando desempenha um papel similar as funções “*smooth switching*” discutidas, fenomenologicamente, na Seção 3.2.

É oportuno fazer um comparativo entre as equações (3.52), espaço comutativo, e (5.37), espaço não-comutativo. Diferente do caso anterior, eq. (3.52), onde o resultado era nulo, agora mesmo após a renormalização temos três integrais, as quais produzirão resultados significativos para a dispersão de velocidade das partículas. A informação a ser colocada aqui é que, em nosso sistema de estudo, como será mostrado, considerar efeitos de não-comutatividade nos conduzirá a resultados diferentes de zero para $\langle(\Delta v^i)^2\rangle$ de partículas livres, que é um resultado novo.

O fato do parâmetro não-comutativo $\vec{\theta}$ ser pequeno nos permite considerar uma expansão em série de Taylor para o mesmo em torno do ponto zero. Assim,

$$\mathcal{N}^{-2}(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \approx 1 + \frac{3}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + \frac{9}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{B})^2 + \mathcal{O}(3) + \dots \quad (5.38)$$

Inicialmente vamos analisar a dispersão de velocidades na direção $i = z$. Admitindo a expansão para $\vec{\theta}$, da equação (5.37) temos

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v^z)^2\rangle &= \frac{q^2\Theta^{zs}}{m^2a_f^2} \left(1 + \frac{3}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{B})\right) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^2(\eta_2) \partial_{z_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M \\ &+ \frac{q^2\Theta^{zp}}{m^2a_f^2} \left(1 + \frac{3}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{B})\right) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^2(\eta_1) \partial_{p_1} \partial_{z_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M \\ &+ \frac{q^2\Theta^{zp}\Theta^{zs}}{m^2a_f^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^2(\eta_1) a^2(\eta_2) \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Por motivos que ficarão mais claros adiante, nos cálculos posteriores serão admitidos apenas termos de até segunda ordem.

Lembrando que os índices livres $s, p = x, y, z$, desenvolvendo a soma sobre os

respectivos índices, obtém-se

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta v^z)^2 \rangle &= \frac{q^2}{m^2 a_f^2} \left(1 + \frac{3}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \right) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^2(\eta_2) [\Theta^{zx} \partial_{z_1} \partial_{x_2} + \Theta^{zy} \partial_{z_1} \partial_{y_2} \\
&+ \Theta^{zz} \partial_{z_1} \partial_{z_2}] \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M + \frac{q^2}{m^2 a_f^2} \left(1 + \frac{3}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \right) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^2(\eta_1) [\Theta^{zx} \partial_{x_1} \partial_{z_2} \\
&+ \Theta^{zy} \partial_{y_1} \partial_{z_2} + \Theta^{zz} \partial_{z_1} \partial_{z_2}] \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M \\
&+ \frac{q^2}{m^2 a_f^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^2(\eta_1) a^2(\eta_2) \{ \Theta^{zx} [\Theta^{zx} \partial_{x_1} \partial_{x_2} + \Theta^{zy} \partial_{x_1} \partial_{y_2} + \Theta^{zz} \partial_{x_1} \partial_{z_2}] \\
&+ \Theta^{zy} [\Theta^{zx} \partial_{y_1} \partial_{x_2} + \Theta^{zy} \partial_{y_1} \partial_{y_2} + \Theta^{zz} \partial_{y_1} \partial_{z_2}] + \Theta^{zz} [\Theta^{zx} \partial_{z_1} \partial_{x_2} + \Theta^{zy} \partial_{z_1} \partial_{y_2} \\
&+ \Theta^{zz} \partial_{z_1} \partial_{z_2}] \} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M. \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Os resultados de todas as derivadas presentes na equação (5.40) podem ser generalizados pela relação

$$\partial_{k_1} \partial_{\ell_2} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M = \begin{cases} \text{Se } k = \ell, & \frac{1}{2\pi^2} [f_2(\eta, z) + 4\Delta k^2 f_3(\eta, z)], \\ \text{Se } k \neq \ell, & \frac{2\Delta k \Delta \ell f_3(\eta, z)}{\pi^2}, \end{cases} \tag{5.41}$$

com $k, \ell = x, y, z$; $\Delta k = k_1 - k_2$; $\Delta \ell = \ell_1 - \ell_2$ e

$$f_n(\eta, z) = \frac{1}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^n}, \tag{5.42}$$

em que $n = 2$ ou 3 . Além disso, $r = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ e $\partial_{k_1} \partial_{\ell_2} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M = \partial_{\ell_1} \partial_{k_2} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M$.

Apesar da quantidade de termos ser significativamente grande, a partir da generalização exposta na eq. (5.41), percebe-se que no limite de coincidência, $r \rightarrow 0$, muitos dos termos da equação (5.40) serão nulos. Então, para simplificar os devidos cálculos vamos tomar o limite de coincidência com precedência. Também, visto que $(\eta_1 - \eta_2)^4 = (\eta_2 - \eta_1)^4$, os limites das duas primeiras integrais de eq. (5.40) e os fatores que as multiplicam são idênticos, a mudança entre elas se dá apenas no rótulo. Assim, uma vez que ao final ambas fornecerão o mesmo resultado, basta calcular uma e duplicar o seu resultado.

Diante das observações feitas no parágrafo anterior,

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta v^z)^2 \rangle &= \frac{q^2 \Theta^{zz}}{\pi^2 m^2 a_f^2 c_0^4} \left(1 + \frac{3}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \right) \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \\
&+ \frac{q^2}{2\pi^2 m^2 a_f^2 c_0^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 a^2(\eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \left[\frac{\Theta^{zx} \Theta^{zx}}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \right. \\
&+ \left. \frac{\Theta^{zy} \Theta^{zy}}{(\eta_1 - \eta_2)^4} + \frac{\Theta^{zz} \Theta^{zz}}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \right]. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Em virtude dos fatores proporcionais a Θ serem constantes as integrais que devem ser resolvidas são

$$I_1 = \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \tag{5.44}$$

e

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 a^2(\eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4}, \quad (5.45)$$

onde o fator de escala é dado pela equação (3.58) com $n = 2$.

Utilizando o método de integração por resíduos descrito no Apêndice A, encontra-se como resultado, respectivamente⁵,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-2\pi i \eta_0 a_1^2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta_f (\eta_f^2 - 3\eta_{1k} \eta_f + 3\eta_{1k}^2)}{\eta_{1k}^3 (\eta_f - \eta_{1k})^3}, \\ I_1 &= \frac{2a_1^2}{3\pi^2 \eta_0^2} \left\{ 7\zeta(3) + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \Psi \left(2, \frac{\pi + 2wi}{2\pi} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

e

$$I_2 = \frac{4a_1^4}{\pi^2 \eta_0^2} \zeta(3), \quad (5.47)$$

com $\eta_{1k} = \eta_0(k + \frac{1}{2})\pi i$ e $\Psi(n, z)$ representando a função polygamma que é a n -ésima derivada da função digama $\Psi^{(n)}(z)$.

Nota-se que I_1 tem uma solução complexa e portanto devemos considerar apenas a parte real, pois é a que tem significado físico uma vez que observáveis físicos são representados por quantidades reais. Além disso, escrevemos a solução para I_1 em termos de uma variável adimensional w que está diretamente relacionada ao tempo final η_f e o parâmetro constante η_0 através da expressão

$$w = \frac{\eta_f}{\eta_0}, \quad (5.48)$$

que representa uma proporção entre η_f e η_0 , com $\eta_f > 0$.

Em adição, ressalta-se que a variável w nada tem haver com frequência, pois como já foi explicado trata-se de uma quantidade adimensional relacionada aos parâmetros de tempo η_0 e η_f . Essa manipulação matemática, eq. (5.48), é feita com o objetivo de plotar um gráfico que seja o mais justo possível quanto a ação de atribuir valores para os parâmetros que são controláveis do ponto de vista prático. Definir valores para muitas quantidades pode comprometer os resultados visto que há possibilidade de se estar dando elevado valor a uma grandeza em comparação com outra.

Utilizando as equações (5.21) e (5.24), encontramos

$$\begin{aligned} \Theta^{zx} &= -\theta^x B^z, \\ \Theta^{zy} &= -\theta^y B^z, \\ \Theta^{zz} &= \theta^x B^x + \theta^y B^y. \end{aligned} \quad (5.49)$$

⁵ Para detalhes ver o Apêndice C.

Logo,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v^z)^2 \rangle &= \frac{2q^2 a_1^2}{3\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} (\theta^x B^x + \theta^y B^y) \left(1 + \frac{3}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \right) \\ &\times \left\{ 7\zeta(3) + \text{Re} \left[\frac{1}{2} \Psi \left(2, \frac{\pi + 2wi}{2\pi} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{2q^2 a_1^4}{\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} \zeta(3) \left[(\theta^x B^z)^2 + (\theta^y B^z)^2 + (\theta^x B^x + \theta^y B^y)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.50)$$

que é a expressão geral para dispersão de velocidade própria das partículas na direção z .

Admitindo a existência de campo magnético apenas na direção z , $\vec{B} = B_z \hat{k}$, encontra-se para dispersão de velocidade das partículas paralela ao campo magnético

$$\langle (\Delta v^z)^2 \rangle = \frac{2q^2 a_1^4}{\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} \zeta(3) \left[(\theta^x B^z)^2 + (\theta^y B^z)^2 \right]. \quad (5.51)$$

Agora torna-se evidente o motivo de serem considerados termos de segunda ordem em $\vec{\theta}$, caso contrário a particularização do campo magnético na direção z , que é algo natural de um ponto de vista experimental, nos levaria a um resultado nulo para a dispersão de velocidades $\langle (\Delta v^z)^2 \rangle$. Além do mais, em princípio, na direção paralela ao campo, fixado em z , nota-se que o efeito possui uma magnitude extremamente pequena visto que é proporcional a $\vec{\theta}^2$ que por sua vez é da ordem de \hbar^2 .

Para a dispersão de velocidades na direção $i = x$, analogamente a equação (5.40) ao desenvolver a soma sobre os respectivos índices serão encontrados muitos termos de derivadas, cujo os resultados novamente podem ser expressos pela relação geral (5.41). Uma vez que tomar o limite de coincidência agora ou após resolver as integrais não altera o resultado mais facilita as operações, escolhamos por fazê-lo antecipadamente. Assim,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v^x)^2 \rangle &= \frac{q^2 \Theta^{xx}}{\pi^2 m^2 a_f^2 c_0^4} \left(1 + \frac{3}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \right) \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \\ &+ \frac{q^2}{2\pi^2 m^2 a_f^2 c_0^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 a^2(\eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \left[\frac{\Theta^{xx} \Theta^{xx}}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \right. \\ &\left. + \frac{\Theta^{xy} \Theta^{xy}}{(\eta_1 - \eta_2)^4} + \frac{\Theta^{xz} \Theta^{xz}}{(\eta_1 - \eta_2)^4} \right]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Na equação acima também já utilizou-se a igualdade entre as duas primeiras integrais diante da equivalência entre os limites e a estrutura dos integrandos, como foi discutido anteriormente.

O resultado das integrais presentes em (5.52) são idênticos aos que foram obtidos em (5.46) e (5.47), a mudança será apenas nos fatores de Θ , que utilizando a equação (5.26) são iguais a

$$\begin{aligned} \Theta^{xx} &= \theta^y B^y + \theta^z B^z, \\ \Theta^{xy} &= -\theta^y B^x, \\ \Theta^{xz} &= -\theta^z B^x. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Assim, da equação (5.52) obtém-se

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v^x)^2 \rangle &= \frac{2q^2 a_1^2}{3\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} (\theta^y B^y + \theta^z B^z) \left(1 + \frac{3}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \right) \\ &\times \left\{ 7\zeta(3) + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \Psi \left(2, \frac{\pi + 2wi}{2\pi} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{2q^2 a_1^4}{\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} \zeta(3) \left[(\theta^y B^y + \theta^z B^z)^2 + (\theta^y B^x)^2 + (\theta^z B^x)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

que é a expressão geral para dispersão de velocidade própria das partículas na direção x .

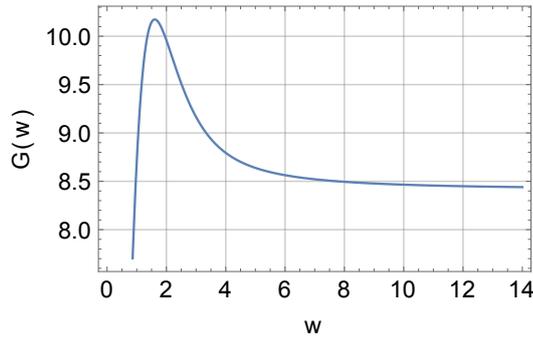
Em virtude da particularização do campo magnético $\vec{B} = B_z \hat{k}$,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v^x)^2 \rangle &= \frac{2q^2 a_1^2}{3\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} (\theta^z B^z) \left(1 + \frac{3}{2} (\theta^z B^z) \right) \\ &\times \left\{ 7\zeta(3) + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \Psi \left(2, \frac{\pi + 2wi}{2\pi} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{2q^2 a_1^4}{\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} \zeta(3) (\theta^z B^z)^2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\langle (\Delta v^x)^2 \rangle \approx \frac{2q^2 a_1^2}{3\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} (\theta^z B^z) \left\{ 7\zeta(3) + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \Psi \left(2, \frac{\pi + 2wi}{2\pi} \right) \right] \right\}. \quad (5.56)$$

Em contra partida ao caso anterior, percebe-se que para a direção perpendicular ao campo fixado, $\vec{B} = B_z \hat{k}$, o efeito surge em termos de primeira ordem, que por sua vez são dominantes, além de possuir uma dependência temporal através do parâmetro adimensional $w = \eta_f/\eta_0$. Um gráfico desse resultado em função de w pode ser visto logo em seguida na Figura (14).

Figura 14 – Comportamento gráfico produzido pela contribuição não-comutativa na equação (5.56) em função de w .



Legenda: $w = \eta_f/\eta_0 > 0$; Gráfico traçado em unidades de $G(w) \equiv \langle (\Delta v^x)^2 \rangle \times [3\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2 / 2q^2 a_1^2 (\theta^z B^z)]$ com intervalo $0.1 \leq w \leq 14$. Fonte: produzido pelo autor, 2020.

A partir do gráfico exposto na Figura (14) pode-se perceber que para grandes valores de w , regime de tempo longo η_f , o efeito da não-comutatividade tende para um valor constante. Deve-se lembrar que η_0 não é o tempo inicial, mas um valor de tempo constante, cujo significado é a taxa da expansão do fluido (cf. eq. (3.58)). Nota-se também

que o efeito tem um comportamento muito rápido para pequenos valores de w , o que seria equivalente a uma pequena separação temporal entre η_f e η_0 . Em princípio, tal efeito seria mais facilmente medido ou significativo em situações que w assume grandes valores uma vez que nessas regiões tende a um valor constante.

Considerando um regime de grandes valores de w é possível obter uma solução aproximada para o valor constante da função $G(w)$. Para isso, utiliza-se $\eta_f = \eta_0 w$ na equação (5.46), que após algumas simplificações resulta em

$$I_1 = \frac{2a_1^2}{3\pi^2\eta_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w[w^2 - 3w(k + \frac{1}{2})\pi i - 3(k + \frac{1}{2})^2\pi^2]}{(k + \frac{1}{2})^3[w - (k + \frac{1}{2})\pi i]^3}. \quad (5.57)$$

Agora, admitindo um regime de grandes valores para a variável w , tal que $w \gg k$, obtém-se

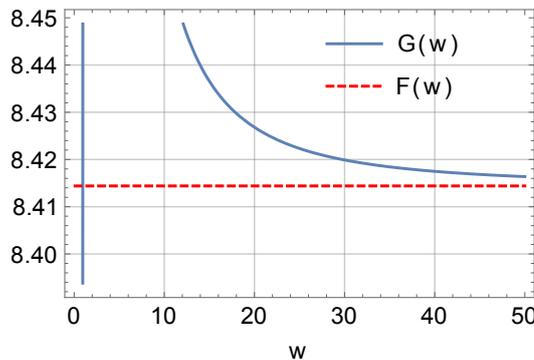
$$I_{1(Assintótico)} \approx \frac{2a_1^2}{3\pi^2\eta_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + \frac{1}{2})^3} \approx \frac{2a_1^2}{3\pi^2\eta_0^2} [7\zeta(3)]. \quad (5.58)$$

Neste regime, visto que os termos de primeira ordem dominam, a partir da equação (5.56), temos

$$\langle (\Delta v^x)^2 \rangle_{Assintótico} \approx \frac{14q^2 a_1^2 \zeta(3) (\theta^z B^z)}{3\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2}. \quad (5.59)$$

O resultado considerando um regime assintótico de w , eq. (5.59), está traçado juntamente com o resultado geral (5.56) na Figura (15). Na medida em que w tende a valores extremamente grandes a solução assintótica $F(w)$ se aproxima cada vez mais da solução geral $G(w)$. Ressalta-se que, como mostra o gráfico, a solução (5.59) serve apenas para descrever com aproximação o comportamento assintótico da dispersão de velocidades na direção x .

Figura 15 – Comportamento gráfico das contribuições não-comutativas para as soluções de $G(w)$ e $F(w)$ em função de w no limite de tempo longo.



Legenda: $w = \eta_f/\eta_0 > 0$; Gráfico de $G(w)$ e $F(w) \approx \langle (\Delta v^x)^2 \rangle \times [3\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2 / 2q^2 a_1^2 (\theta^z B^z)]$ para valores $w > 0.1$. Fonte: produzido pelo autor, 2020.

Ainda sobre os resultados encontrados, percebe-se claramente que são anisotrópicos, pois comparando as equações (5.51) e (5.56) nota-se a dependência das dispersões de velocidade com a direção do parâmetro $\vec{\theta}$ e campo magnético \vec{B} . Contudo, uma isotropia é obtida se for considerada uma condição de homogeneidade para o parâmetro não-comutativo e o campo magnético nas equações (5.54) e (5.81), em que $\theta_x = \theta_y = \theta_z = \theta$ e $B_x = B_y = B_z = B$.

Por questões de completeza é importante calcular a dispersão de velocidades total,

$$\langle(\Delta v)^2\rangle_{tot} = \langle(\Delta v^x)^2\rangle + \langle(\Delta v^y)^2\rangle + \langle(\Delta v^z)^2\rangle, \quad (5.60)$$

cujo resultado é

$$\begin{aligned} \langle(\Delta v)^2\rangle_{tot} &= \frac{4q^2 a_1^2 (\vec{\theta} \cdot \vec{B})}{3\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} \left[1 + \frac{3}{2} (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \right] \left\{ 7\zeta(3) + Re \left[\frac{1}{2} \Psi \left(2, \frac{\pi + 2wi}{2\pi} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{2q^2 a_1^4 \zeta(3)}{\pi^4 m^2 a_f^2 c_0^4 \eta_0^2} \left[2|\vec{\theta}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{\theta} \times \vec{B}) \cdot (\vec{\theta} \times \vec{B}) \right], \end{aligned} \quad (5.61)$$

com $|\vec{\theta}|^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2$ e $|\vec{B}|^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$. Para estabelecer esta igualdade foram utilizadas as equações (5.54) e (5.81), além do cálculo de $\langle(\Delta v^y)^2\rangle$, que é idêntico aos demais e deve-se observar apenas a mudança nos fatores de Θ .

Percebe-se que considerando apenas termos de primeira ordem as correções não-comutativas na equação (5.61) possuem o mesmo comportamento da eq. (5.56) apresentados na Figura (14), notando também que $(\theta_z B_z) \rightarrow 2(\vec{\theta} \cdot \vec{B})$.

5.3.2 Partículas ligadas

Agora, diferente do caso anterior, admitindo uma força externa do tipo

$$f_{ext}^i = 2m \frac{\dot{a}}{a} u^i$$

na equação (5.27), integrando e pressupondo velocidade inicial nula, $u^i(t_0) = 0$, encontra-se

$$u^i(t_f, r) = \frac{1}{m} \int f^i(t, r) dt.$$

Levando esse resultado na equação (3.45) e considerando as propriedades da força estocástica f^i dispostas na eq. (3.47), temos

$$\begin{aligned} \langle(\Delta u^i)^2\rangle &= \frac{q^2}{m^2} \iint dt_1 dt_2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta}_1 \cdot \vec{B}_1 \right) g_1^{ip} + \Theta_1^{ip} \right] \\ &\times \left[\left(1 - \frac{1}{2} \vec{\theta}_2 \cdot \vec{B}_2 \right) g_2^{is} + \Theta_2^{is} \right] \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle \phi(r_1, t_1) \phi(r_2, t_2) \rangle_{FRW}. \end{aligned}$$

De acordo com os apontamentos feitos nas equações (5.32) e (5.33)

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta u^i)^2\rangle &= \frac{q^2\mathcal{N}^{-4}}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right)^2 \iint dt_1 dt_2 a^{-2}(t_1) a^{-2}(t_2) \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\
&+ \frac{q^2\mathcal{N}^{-2}\Theta^{is}}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^{-2}(t_1) \partial_{i_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\
&+ \frac{q^2\mathcal{N}^{-2}\Theta^{ip}}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^{-2}(t_2) \partial_{p_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\
&+ \frac{q^2\Theta^{ip}\Theta^{is}}{m^2} \iint dt_1 dt_2 \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW}.
\end{aligned}$$

Recorrendo a equação (5.34), a dispersão de velocidade própria da partícula será

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta v^i)^2\rangle &= \frac{q^2 a^2(t_f) \mathcal{N}^{-2}}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right)^2 \iint dt_1 dt_2 a^{-2}(t_1) a^{-2}(t_2) \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\
&+ \frac{q^2 a^2(t_f) \Theta^{is}}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^{-2}(t_1) \partial_{i_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\
&+ \frac{q^2 a^2(t_f) \Theta^{ip}}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint dt_1 dt_2 a^{-2}(t_2) \partial_{p_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW} \\
&+ \frac{q^2 a^2(t_f) \mathcal{N}^2 \Theta^{ip} \Theta^{is}}{m^2} \iint dt_1 dt_2 \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW}. \tag{5.62}
\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável $dt = a(\eta)d\eta$ na expressão anterior e usando a relação entre as funções de dois pontos $\langle\phi_1 \phi_2\rangle_{FRW}$ e $\langle\phi_1 \phi_2\rangle_M$ dada pela equação (5.36), obtém-se como resultado

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta v^i)^2\rangle &= \frac{q^2 a_f^2 \mathcal{N}^{-4}}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right)^2 \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M \\
&+ \frac{q^2 a_f^2 \mathcal{N}^{-2} \Theta^{is}}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) \partial_{i_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M \\
&+ \frac{q^2 a_f^2 \mathcal{N}^{-2} \Theta^{ip}}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_2) \partial_{p_1} \partial_{i_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M \\
&+ \frac{q^2 a_f^2 \Theta^{ip} \Theta^{is}}{m^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 \partial_{p_1} \partial_{s_2} \langle\phi_1 \phi_2\rangle_M. \tag{5.63}
\end{aligned}$$

Ao contrário do caso de partículas livres nota-se que agora o fator de escala está no denominador dos três primeiros integrandos (anteriormente eram nos três últimos). Devido a renormalização a última integral apresenta um resultado nulo. Além disso, novamente vamos considerar expansões em $\vec{\theta}$ utilizando como motivação o fato de que é um termo de ordem de grandeza muito pequena, porém desta vez vamos admitir apenas termos de 1ª ordem, de modo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^{-4} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right)^2 &\approx 1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B} + \mathcal{O}(2) + \dots, \\
\mathcal{N}^{-2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B}\right) &\approx 1 + \frac{3}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + \mathcal{O}(2) + \dots \tag{5.64}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta v^i)^2 \rangle &= \frac{q^2 a_f^2}{m^2} (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) \partial_{i_1} \partial_{i_2} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M \\
&+ \frac{q^2 a_f^2 \Theta^{is}}{m^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) \partial_{i_1} \partial_{s_2} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M \\
&+ \frac{q^2 a_f^2 \Theta^{ip}}{m^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_2) \partial_{p_1} \partial_{i_2} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_M.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Semelhante ao caso de estudo anterior vamos analisar a dispersão de velocidade das partículas em direções distintas. Iniciando nosso estudo pela direção $i = z$, expandindo os termos de soma em (5.65) e efetuando as respectivas derivadas, temos

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta v^z)^2 \rangle &= \frac{q^2 a_f^2}{2\pi^2 m^2} (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) [f_2(\eta, z) + 4\Delta z^2 f_3(\eta, z)] \\
&+ \frac{q^2 a_f^2}{\pi^2 m^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) \{2\Theta^{zx} \Delta x \Delta z f_3(\eta, z) + 2\Theta^{zy} \Delta y \Delta z f_3(\eta, z) \\
&+ \frac{1}{2} \Theta^{zz} [f_2(\eta, z) + 4\Delta z^2 f_3(\eta, z)]\} \\
&+ \frac{q^2 a_f^2}{\pi^2 m^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_2) \{2\Theta^{zx} \Delta x \Delta z f_3(\eta, z) + 2\Theta^{zy} \Delta y \Delta z f_3(\eta, z) \\
&+ \frac{1}{2} \Theta^{zz} [f_2(\eta, z) + 4\Delta z^2 f_3(\eta, z)]\},
\end{aligned} \tag{5.66}$$

com a simplificação de notação $f_n(\eta, z)$ dada pela eq. (5.42).

Ainda que não seja explicitamente perceptível as duas últimas integrais da equação anterior são iguais, pois $(\eta_1 - \eta_2)^2 = (\eta_2 - \eta_1)^2$ e seus integrandos têm a mesma forma e limites de integração, logo a mudança entre elas se dá apenas no rótulo. Então,

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta v^z)^2 \rangle &= \frac{q^2 a_f^2}{2\pi^2 m^2} (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) [f_2(\eta, z) + 4\Delta z^2 f_3(\eta, z)] \\
&+ \frac{2q^2 a_f^2}{\pi^2 m^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) \{2\Theta^{zx} \Delta x \Delta z f_3(\eta, z) + 2\Theta^{zy} \Delta y \Delta z f_3(\eta, z) \\
&+ \frac{1}{2} \Theta^{zz} [f_2(\eta, z) + 4\Delta z^2 f_3(\eta, z)]\}.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Com base no método de integração do Apêndice A encontramos como resultado para primeira integral⁶

$$\begin{aligned}
I_{A1} &= \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) [f_2(\eta, z) + 4\Delta z^2 f_3(\eta, z)] \\
I_{A1} &= \frac{4 \sinh^4(g)}{\pi^2 a_1^4 c_0^4 \eta_0^2} \left[S_2(r) - \frac{4\Delta z^2}{c_0^2 \pi^2 \eta_0^2} S_3(r) \right],
\end{aligned} \tag{5.68}$$

com

$$S_n = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(p-1)}{[p^2 + b^2]^n}, \quad b = \frac{r^2}{\pi^2 c_0^2 \eta_0^2}, \quad g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \right), \quad \alpha^2 = \frac{a_0^2}{a_1^2}. \tag{5.69}$$

⁶ Para detalhes da solução ver o Apêndice D.

No limite de coincidência,

$$I_{(r \rightarrow 0)}^{A_1} = \frac{4 \sinh^4(g)}{\pi^2 a_1^4 c_0^4 \eta_0^2} S_2(r) = \frac{4 \sinh^4(g)}{\pi^2 a_1^4 c_0^4 \eta_0^2} \left[\zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right]. \quad (5.70)$$

Sobre as últimas integrais da equação (5.67), levando em conta que os fatores de Θ^{zp} , assim como Δx_i , são independentes do tempo as integrais que precisamos resolver são da forma:

$$I_{A_2} = \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 a^{-2}(\eta_1) \frac{1}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^n}, \quad n = 2, 3. \quad (5.71)$$

Na verdade os limites de todas as integrais são de 0 até η_f , porém a “extrapolação” dos limites para $\pm\infty$ é feita porque facilita a resolução e não causa nenhuma perda ou divergência no resultado. Nessas regiões assintóticas, $\pm\infty$, o integrando é bem comportado e tem valor nulo porque enquanto $a(\eta) \rightarrow a_0^n \pm a_1^n$ o outro termo tende a zero.

Visto que tomar o limite de coincidência antecipadamente não modifica o resultado, fazendo-o com antecedência percebe-se que as integrais com $n = 3$ não contribuem por conta dos fatores de Δx_i que as multiplicam. Diante disso, o único fator diferente de zero será devido a Θ^{zz} . Para qualquer direção i , no limite de coincidência, todos os termos cruzados de $\Theta^{ij} \partial_{i_1} \partial_{j_2}$, com $j \neq i$, serão nulos, exceto um dos termos do fator $\Theta^{ii} \partial_{i_1} \partial_{i_2}$.

Com base na solução de I_{A_1} , temos

$$\begin{aligned} I_{A_2} &= \frac{2\pi i \eta_0}{a_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \cosh^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right) \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \frac{1}{[c_0^2(\eta_{1k} - \eta_2)^2 - r^2]^n}, \\ I_{(r \rightarrow 0)}^{A_2} &= -\frac{2\pi i \eta_0 \sinh^2(g)}{a_1^2 c_0^4} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \frac{1}{(\eta_{1k} - \eta_2)^4}, \\ I_{(r \rightarrow 0)}^{A_2} &= \frac{2\pi i \eta_0 \sinh^2(g)}{3a_1^2 c_0^4} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\eta_f - \eta_{1k})^3} + \frac{1}{\eta_{1k}^3} \right], \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_{1k} &= \eta_{10} + \eta_0 k \pi i, \\ \eta_{10} &= -\eta_0 \frac{\pi i}{2} - \eta_0 g. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Utilizando a definição (5.48), encontra-se

$$I_{(r \rightarrow 0)}^{A_2} = \frac{\sinh^2(g)}{3a_1^2 \eta_0^2 \pi^2 c_0^4} \left[\Psi\left(2, \frac{\pi + 2gi}{2\pi}\right) - \Psi\left(2, \frac{\pi + 2(g+w)i}{2\pi}\right) \right], \quad (5.73)$$

onde Ψ é a função polygamma e w uma variável adimensional. É importante ressaltar que deve-se considerar apenas a parte real desse resultado, pois é o que representa uma quantidade de interesse físico.

Perante os resultados de (5.70) e (5.73), para a equação (5.67) obtemos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v^z)^2 \rangle &= \frac{2q^2 a_f^2 \sinh^4(g)}{\pi^4 m^2 \eta_0^2 a_1^4 c_0^4} (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \left[\zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right] + \frac{q^2 a_f^2 \sinh^2(g)}{3\pi^4 m^2 \eta_0^2 a_1^2 c_0^4} (\theta^x B^x + \theta^y B^y) \\ &\times \operatorname{Re} \left[\Psi \left(2, \frac{\pi + 2gi}{2\pi} \right) - \Psi \left(2, \frac{\pi + 2(g+w)i}{2\pi} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.74)$$

que é a expressão geral (no limite de coincidência) para a dispersão de velocidades das partículas na direção z . Nesse resultado também já foram utilizadas as equações (5.24) e (5.21) para exprimir Θ^{zz} em termos do fator não-comutativo $\vec{\theta}$ e do campo magnético \vec{B} .

Se for escolhido a presença do campo magnético apenas na direção z , $\vec{B} = B_z \hat{k}$,

$$\langle (\Delta v^z)^2 \rangle = \frac{2q^2 a_f^2 \sinh^4(g)}{m^2 \pi^4 a_1^4 c_0^4 \eta_0^2} (1 + 3\theta^z B^z) \left[\xi(3) - \frac{\pi^4}{90} \right]. \quad (5.75)$$

O resultado acima é o mesmo obtido por Bessa *et al* [11] para dispersão de velocidades das partículas na ausência de placas acrescido de uma correção não-comutativa positiva de $3\theta^z B^z$ do seu próprio resultado.

A fim de verificar o comportamento da dispersão de velocidade em uma direção perpendicular, fazendo $i = x$ na equação (5.65) e efetuando as derivadas encontra-se que

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v^x)^2 \rangle &= \frac{q^2 a_f^2}{2\pi^2 m^2} (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) [f_2(\eta, x) + 4\Delta x^2 f_3(\eta, x)] \\ &+ \frac{2q^2 a_f^2}{\pi^2 m^2} \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) \left\{ \frac{1}{2} \Theta^{xx} [f_2(\eta, x) + 4\Delta x^2 f_3(\eta, x)] \right. \\ &+ 2\Theta^{xy} \Delta x \Delta y f_3(\eta, x) + 2\Theta^{xz} \Delta x \Delta z f_3(\eta, x) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

onde para simplificação utilizou-se a notação mostrada em (5.42).

O resultado das respectivas integrais acima são iguais aos encontrados para $\langle (\Delta v^z)^2 \rangle$, ou seja, equações (5.70) e (5.73). A mudança ocorrerá somente no fator diferente de zero no limite de coincidência: Θ^{xx} . Portanto, no limite de coincidência, obtém-se

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v^x)^2 \rangle &= \frac{2q^2 a_f^2 \sinh^4(g)}{\pi^4 m^2 \eta_0^2 a_1^4 c_0^4} (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \left[\zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right] + \frac{q^2 a_f^2 \sinh^2(g)}{3\pi^4 m^2 \eta_0^2 a_1^2 c_0^4} (\theta^y B^y + \theta^z B^z) \\ &\times \operatorname{Re} \left[\Psi \left(2, \frac{\pi + 2gi}{2\pi} \right) - \Psi \left(2, \frac{\pi + 2(g+w)i}{2\pi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Como foi escolhido fixar o campo magnético \vec{B} na direção z ,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v^x)^2 \rangle &= \frac{2q^2 a_f^2 \sinh^4(g)}{\pi^4 m^2 \eta_0^2 a_1^4 c_0^4} (1 + 3\theta^z B^z) \left[\zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right] + \frac{q^2 a_f^2 \sinh^2(g)}{3\pi^4 m^2 \eta_0^2 a_1^2 c_0^4} (\theta^z B^z) \\ &\times \operatorname{Re} \left[\Psi \left(2, \frac{\pi + 2gi}{2\pi} \right) - \Psi \left(2, \frac{\pi + 2(g+w)i}{2\pi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Em oposição a direção z , a direção x também possui uma parcela de contribuição vinda da parte real de $I_{A2}(r \rightarrow 0)$.

Com o intuito de verificar apenas o comportamento puramente proveniente dos termos não-comutativos da equação (5.78), define-se a função de plote

$$T(w) = \frac{6 \sinh^2(g)}{a_1^2} \left[\xi(3) - \frac{\pi^4}{90} \right] + \frac{1}{3} \operatorname{Re} \left[\Psi \left(2, \frac{\pi + 2gi}{2\pi} \right) - \Psi \left(2, \frac{\pi + 2(g+w)i}{2\pi} \right) \right], \quad (5.79)$$

onde

$$T(w) := \frac{\pi^4 m^2 a_1^2 c_0^4 \eta_0^2}{2q^2 a_f^2 \sinh^2(g) (\theta^z B^z)} \left\{ \langle (\Delta v^x)^2 \rangle - \frac{2q^2 a_f^2 \sinh^4(g)}{m^2 \pi^4 a_1^4 c_0^4 \eta_0^2} \left[\xi(3) - \frac{\pi^4}{90} \right] \right\}. \quad (5.80)$$

Observa-se que o fator g , dado pela equação (5.69), pode ser escrito em termos dos parâmetros do fluido, especificadamente,

$$g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{c_0}{c_{sf}} \right), \quad (5.81)$$

com $c_{sf} = c_s(\eta = \eta_f)$ representando a velocidade do som no fluido em um tempo final η_f e c_0 a velocidade inicial. É importante ressaltar que $c_{sf} < c_0$, pois como $a(\eta) = c_0/c_s(t)$ para ocorrer expansão, isto é, $a(\eta)$ crescente, c_{sf} deve assumir valores que obedecem a condição $c_{sf} < c_0$. Além disso,

$$\frac{\sinh^2(g)}{a_1^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_{sf}}{c_0} \right). \quad (5.82)$$

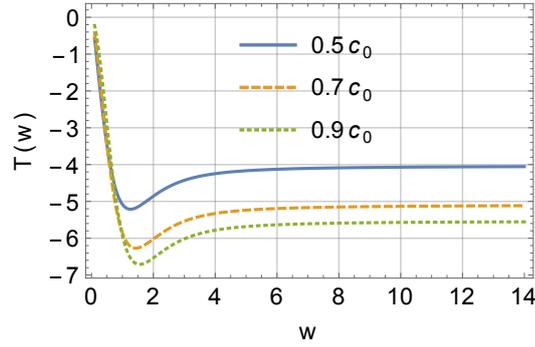
Para estabelecer a igualdade acima utilizou-se a forma exponencial da função seno hiperbólica em conjunto com as equações (3.59) e $a_i = a(\eta_i) = 1$.

O gráfico de $T(w)$, eq. (5.79), em função do parâmetro adimensional w produz o resultado mostrado na Figura (16). Observa-se que a influência da não-comutatividade na relação de dispersão da velocidade na direção x , com \vec{B} fixo na direção perpendicular z , é negativa. De início é produzido um rápido decaimento e na medida em que se têm grandes valores de w , que significa um regime de tempo longo η_f , sua magnitude aproxima-se de um valor negativo e constante.

De acordo com os resultados encontrados na literatura [11], considerando espaços comutativos, no caso de partículas ligadas sem a presença de placas a dispersão de velocidades é isotrópica. Porém, como mostram os resultados aqui obtidos, equações (5.75) e (5.78), essa propriedade não é preservada. Note que mesmo as expressões gerais, equações (5.74) e (5.77), diferem porque em tese ainda que constantes as componentes de θ_i e B_i são distintas.

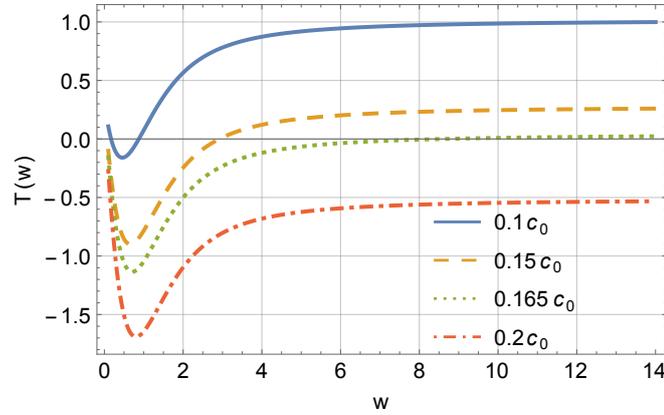
Considerando um espaço não-comutativo a dispersão nas direções paralela e perpendicular diferem, pois à depender de sua direção em relação ao campo magnético fixo em uma direção partícular \vec{B} podem assumir valores distintos de contribuição não-comutativa, mesmo que a correção se aproxime de um valor constante no regime de tempo longo.

Figura 16 – Plote da contribuição não-comutativa presente na equação (5.79).



Legenda: Gráfico traçado em unidades de $T(w)$, eq. (5.80). As três linhas traçadas representam valores arbitrários para a proporção que a velocidade final c_{sf} atinge em relação a velocidade inicial c_0 . Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Como mostra a Figura (17) nota-se que em um regime de baixas velocidades para c_{sf} as correções não-comutativas podem passar a contribuir com a dispersão de velocidades das partículas uma vez que apresentam valores positivos. Este regime equivale ao caso em que se têm rápidas expansões, pois $a^2(\eta) = c_0/c_{sf}(\eta)$.

Figura 17 – Plote da contribuição não-comutativa da equação (5.79) para baixas velocidades c_{sf} .

Legenda: Gráfico traçado em unidades de $T(w)$, eq. (5.80). As quatro linhas traçadas representam valores arbitrários para a proporção que a velocidade final c_{sf} atinge em relação a velocidade inicial c_0 . Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Semelhante ao caso anterior é interessante computar também para o caso ligado a dispersão total de velocidades, eq. (5.60). Portanto,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v)^2 \rangle_{tot} &= \frac{6q^2 a_f^2 \sinh^4(g)}{\pi^4 m^2 \eta_0^2 a_1^4 c_0^4} (1 + 3\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \left[\zeta(3) - \frac{\pi^4}{90} \right] + \frac{2q^2 a_f^2 \sinh^2(g)}{3\pi^4 m^2 \eta_0^2 a_1^4 c_0^4} (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \\ &\times \operatorname{Re} \left[\Psi \left(2, \frac{\pi + 2gi}{2\pi} \right) - \Psi \left(2, \frac{\pi + 2(g+w)i}{2\pi} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.83)$$

onde novamente o cálculo de $\langle (\Delta v^y)^2 \rangle$ foi computados usando os resultados similares para dispersão nas direções x e z observando a mudança nos fatores de Θ .

Em termos gerais, mesmo que o não seja adotada uma particularização para o campo magnético as dispersões de velocidades no espaço não-comutativo ainda são anisotrópicas, porque como já foi comentado a princípio em cada dispersão os fatores de θ_i e B_i são diferentes. Contudo uma relação isotrópica pode ser encontrada assumindo que $\theta_i = \theta$ e $B_i = B$.

5.3.3 Alguns comentários sobre as correções não-comutativas.

Na sequência são apresentadas algumas considerações sobre os efeitos de não-comutatividade expressos pelos resultados obtidos no presente trabalho. Desde já, ressalta-se que tais argumentos não apresentam uma explicação definitiva, mas comentários em nível de especulações na tentativa de fornecer possíveis interpretações físicas.

Uma observação muito interessante e que poderia inclusive elucidar em grande parte o significado da não-comutatividade no sistema é a seguinte: enquanto que no caso livre a correção não-comutativa (NC) produz um aumento em $\langle(\Delta v)^2\rangle$, no caso ligado provoca uma redução.

Se a observação acima estivesse colocada em forma de pergunta sua resposta daria um significado para as correções não-comutativas dos resultados, porém respondê-la não seria fácil. Contudo, sua resposta está fundamentalmente ligada ao que a presença das correções NC atreladas ao campo magnético no sistema podem significar fisicamente.

A princípio, é aceitável dizer que tais correções servem como uma descrição mais precisa do problema, uma vez que no regime de escala dos objetos envolvidos no sistema (quânticos) a teoria não-comutativa encontra motivação, além de que no limite $\vec{\theta} \rightarrow 0$ os resultados conhecidos são recuperados.

É oportuno lembrar da equação principal da qual decorrem ambos os casos de estudo, eq. (5.27), a saber,

$$\frac{1}{m} (f_{ext}^i + f_q^i) = \frac{du^i}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}u^i.$$

O que diferencia um caso do outro, ou melhor, o elemento que conduz aos respectivos resultados no espaço comutativo (EC) é a presença ou ausência da força externa clássica, não flutuante, f_{ext}^i . Essa força, f_{ext}^i , não necessariamente é uma força exterior ao sistema, mas que possui natureza distinta daquelas devido as flutuações quânticas, nesse sentido o termo clássica ajuda a identificar que f_{ext}^i é externa ao domínio das flutuações quânticas.

Lembrando do caso ligado no EC seria natural pensar que a não-comutatividade desempenharia um papel similar ao de uma força de ligação entre as partículas. De fato, a interpretação de que as correções não-comutativas têm essencialmente uma natureza de força é aceitável, mas possivelmente não exatamente de ligação.

A dispersão de velocidades da equação (5.61) quando associada ao teorema da equipartição $m\langle v^2 \rangle = k_B T$ nos permite estabelecer uma relação entre a energia cinética e a energia térmica adquirida pelas partículas. Então, pensando nessa inter-relação, é possível que a energia adquirida pelas partículas esteja relacionada a algo que se assemelha com uma viscosidade, talvez pelas colisões com os outros átomos do condensado. Portanto, a ideia de força para as correções não-comutativa (NC) é plausível visto que possivelmente podem se assemelhar com uma força dissipativa, ex. do tipo viscosa (fricção). Até mesmo porque no caso comutativo, Sec. 3.4, questões relativas a dissipação e fricção no sistema foram ignoradas.

Com base nestes argumentos a dispersão positiva na equação seria justificada como uma troca de energia entre as partículas mediante a força dissipativa (talvez por colisões). Esta tenderia a dificultar a mobilidade na expansão de modo que as partículas não estariam totalmente sensíveis aos efeitos expansivos, logo como consequência haveria um pequeno movimento Browniano, indicado pela dispersão de velocidades positiva encontrada.

Mais um argumento nesse linha de pensamento da correção NC como força viscosa pode ser inspirada lembrando a equação de Langevin, eq. (3.2),

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma\vec{v} + A(t),$$

onde o primeiro termo representa uma força de atrito e $A(t)$ a força estocástica.

Se a relação acima for comparada com a equação para o movimento Browniano quântico,

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = \bar{f}^\mu,$$

percebe-se que estão sendo desconsiderados efeitos devido a força friccional. Além disso, essa é a relação utilizada no caso comutativo. No caso não-comutativo a estrutura da equação de Langevin permanece a mesma, contudo a expressão da força possui mais termos, em que eurísticamente

$$f_{EC} \rightarrow f_{ENC} = f_{EC} + f_{EC} \times (\theta B),$$

como pode-se perceber comparando as equações (3.40) e (5.23). Os subscrito significam espaço comutativo (EC) e espaço não-comutativo (ENC). Assim, os fatores extras que surgem no caso NC possivelmente podem significar um termo devido a efeitos de uma força semelhante ao atrito.

Pautado nas explanações anteriores referentes ao caso livre NC, para o caso ligado NC torna-se mais simples, pois como os termo NC em tese poderiam representar a presença de forças viscosas no sistema estas tenderiam a causar uma redução na dispersão de velocidades. Classicamente, sabe-se que a dinâmica de um corpo na presença de forças viscosas é reduzida, logo considerando as correções NC no contexto de forças dissipativas a dispersão das partículas seria reduzida, pois tais agentes tendem a dificultar sua mobilidade.

A respeito destas correções NC também poderia se pensar o seguinte. Mesmo quando admitida a decomposição $f^i \rightarrow f_{ext}^i + f_q^i$, ainda continuou-se considerando a partícula pontual, ou seja, um objeto clássico, mas de acordo com a literatura [9] essa não é uma descrição realista porque a partícula também está em um nível quântico.

Por exemplo, essa consideração clássica para a partícula poderia significar, em certo sentido, uma possibilidade de seguir a trajetória exata da partícula no decorrer da expansão. Contudo, considerando NC espacial foi visto que na ocasião as posições obedecem a relação $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\hbar\theta_{\mu\nu}$. Então, o que a NC motivada pelo campo magnético poderia talvez significar é que estamos considerando uma pequena imprecisão na posição da partícula durante a expansão. Contudo, para verificar a consistência bem como validade desta hipótese seria necessário um estudo a parte.

6 Conclusões

Neste trabalho buscamos correções não-comutativas para o movimento Browniano quântico de partículas em um condensado de Bose-Einstein em expansão conforme. Para atingir nossos objetivos bem como proporcionar organização e continuidade no texto iniciou-se fazendo uma revisão e explanação sobre os componentes do sistema de estudo: um CBE como modelo análogo. Para tal descrição no Capítulo 2 foi desenvolvida uma rápida revisão sobre os modelos análogos de gravidade tanto clássico como quântico.

No Capítulo 3 foi introduzido o fenômeno do qual trata a dissertação: movimento browniano quântico. Partindo do caso clássico, usando o formalismo de Langevin, foram calculadas a dispersão de velocidade e o deslocamento quadrático médio para a partícula browniana. Em seguida, foi tratado de modo fenomenológico o caso do movimento browniano quântico e revisado a dedução da função de dois pontos no espaço-tempo de Minkowski sem a presença de planos refletivos. Na sequência foi revisado o movimento browniano quântico de uma partícula em um CBE em expansão tipo FRW no espaço-tempo comutativo, que é o ponto de partida do problema investigado nesta dissertação.

Os fundamentos de um espaço-tempo não-comutativo foram introduzidos no Capítulo 4 a fim de nos inteiramos com as suas mais simples propriedades, além de explicitar um pouco da teoria por traz do elemento inovador desta dissertação: correções não-comutativas.

Juntando todos os elementos necessários ao trabalho e descritos nos capítulos precedentes, no Capítulo 5 foi iniciada a investigação da pesquisa: estudar os efeitos de correções não-comutativas sobre o movimento browniano quântico de partículas em um CBE em expansão conforme tipo FRW.

No caso de partículas livres foi encontrado que as correções não-comutativas são aditivas, embora que em uma certa direção, eq. (5.56), apresente variações em relação ao tempo. Por outro lado, para o caso de partículas ligadas as correções não-comutativas produzem uma redução na dispersão de velocidade das partículas, como observado pelas equações (5.78), (5.79) e Figura (16), mas em um regime de baixas velocidades observa-se que podem passar a contribuir com a dispersão de velocidades como mostra o gráfico da Figura (17). Contudo, mesmo que os resultados tenham influências distintas sobre a dispersão de velocidades, em ambos os casos algumas características são semelhantes e preservadas: (i) a primeira refere-se a rápidos comportamentos para curtos valores de w e a segunda diz respeito a uma (ii) tendência para um valor constante na medida em que w assume grandes valores.

Apesar de ser controverso o movimento browniano quântico no espaço de Minkowski, em nossos resultados também encontramos que partículas no vácuo de Minkowski apresen-

tam um pequeno movimento estocástico. Esse resultado só é possível, como mostrado, se considerarmos correções não-comutativas. Realmente, o mesmo sistema aqui utilizado para o estudo do MB no caso de um espaço comutativo, ref. [11], para o vácuo de Minkowski diz que não existe MB, mas quando considera-se que o espaço-tempo é não-comutativo, em princípio, existe um MB mesmo que seja pequeno. Gostaríamos de enfatizar novamente a consistência do resultado por questões de fortalecimento da argumentação, note que no limite de $\vec{\theta} \rightarrow 0$ todos os resultados da literatura são recuperados (correspondentes aos de ref. [11], revisados na Sec. 3.4). Portanto, sem não-comutatividade recaímos no caso onde o vácuo de Minkowski não apresenta MB (para a configuração do sistema que foi aqui descrito e estudado). Os resultados obtidos aqui estão sendo organizados e revisados para uma posterior submissão de artigo.

Quanto as perspectivas de trabalho, como apontado por Seriu e Wu [9], também seria um próximo passo, no sentido de um tratamento mais realista, considerar a natureza quântica da partícula browniana no sistema de estudo. Seriu e Wu consideram uma correção quântica na coordenada temporal das funções de correlação na forma de um função gaussiana. Em tese, pautados nas observações deste autores poderíamos aplicar as mesmas idéias e verificar as consequências sobre o sistema que foi estudado nesse trabalho. Poderíamos inclusive ir um pouco mais além e verificar relações entre as correções não-comutativas e as correções da natureza quântica da partícula.

Outro possível estudo seria a adição de planos ao nosso sistema e investigar o comportamento da dispersão de velocidades considerando correções de não-comutatividade e planos. Todavia, em um primeiro momento, a presença de placas em nosso sistema é algo que representa mais uma dificuldade matemática, assim escolheu-se desenvolver nossas análises considerando apenas o vácuo puro de Minkowski. Porém, ressalta-se que a inclusão de tais elementos junto a não-comutatividade possivelmente pode revelar efeitos interessantes sobre o sistema em estudo. Além disso, poderíamos estudar influências térmicas sobre o sistema, pois embora o regime de temperatura seja extremamente baixo ainda é finito, logo influências térmicas também podem revelar novos resultados.

Referências

- 1 BROWN, R. A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The Philosophical Magazine*, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 37.
- 2 SILVA, J.; LIMA, J. Quatro abordagens para o movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 1, p. 25–35, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 17, 37, 39 e 41.
- 3 LEMONS, D. S.; GYTHIEL, A. Paul Langevin’s 1908 paper “On the theory of Brownian motion”[“sur la théorie du mouvement brownien,” *cr acad. sci.(paris)* 146, 530–533 (1908)]. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 65, n. 11, p. 1079–1081, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 41.
- 4 EINSTEIN, A. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Editor por R. Fürth e Traduzido por A. D. Copwer. [S.l.]: Dover Publications, 1956. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=X5iRDQAAQBAJ>>. Acesso em: 28 fev. 2020. Citado na página 17.
- 5 GOUR, G.; SRIRAMKUMAR, L. Will small particles exhibit Brownian motion in the quantum vacuum? *Foundations of Physics*, v. 29, n. 12, p. 1917–1949, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 17, 41 e 42.
- 6 COUGO-PINTO, M. V.; FARINA, C.; TORT, A. O efeito Casimir. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 22, n. 1, p. 122–132, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 41.
- 7 YU, H.; FORD, L. Vacuum fluctuations and Brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary. *Physical Review D*, v. 70, n. 6, p. 065009(1)–065009(4), 2004. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 42.
- 8 SERIU, M.; WU, C.-H. Switching effect on the quantum Brownian motion near a reflecting boundary. *Physical Review A*, v. 77, n. 2, p. 022107(1)–022107(11), 2008. Citado 5 vezes nas páginas 17, 41, 42, 43 e 44.
- 9 SERIU, M.; WU, C.-H. Smearing effect due to the spread of a probe particle on the Brownian motion near a perfectly reflecting boundary. *Physical Review A*, v. 80, n. 5, p. 052101(1)–052101(8), 2009. Citado 4 vezes nas páginas 17, 44, 92 e 94.
- 10 BÉSSA, C. H. G.; BEZERRA, V. B.; FORD, L. Brownian motion in Robertson–Walker spacetimes from electromagnetic vacuum fluctuations. *Journal of Mathematical Physics*, v. 50, n. 6, p. 062501(1)–062501(20), 2009. Citado 6 vezes nas páginas 17, 50, 54, 70, 118 e 119.
- 11 BÉSSA, C. H. G. et al. Quantum Brownian motion in an analog Friedmann–Robertson–Walker geometry. *Physical Review D*, v. 95, n. 8, p. 085020(1)–085020(15), 2017. Citado 10 vezes nas páginas 17, 41, 48, 50, 52, 55, 70, 87, 88 e 94.

- 12 SILVA, M. M. d. *Flutuações quânticas do vácuo na presença de uma fronteira e suas implicações sobre o comportamento de uma partícula teste nas suas proximidades*. Dissertação (Mestrado em Ciências em Física e Matemática Aplicada) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2013. Citado na página 17.
- 13 SZABO, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, v. 378, n. 4, p. 207–299, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 18, 57, 61, 64 e 65.
- 14 BRITO, F. A.; LIMA, E. E. Exploring the thermodynamics of noncommutative scalar fields. *International Journal of Modern Physics A*, v. 31, n. 11, p. 1650057(1)–1650057(33), 2016. Citado na página 18.
- 15 SAA, A. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, p. e4201(1)–e4201(14), 2016. Citado na página 21.
- 16 HAWKING, S. W. Black hole explosions? *Nature*, v. 248, n. 5443, p. 30–31, 1974. Citado na página 21.
- 17 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975. Citado na página 21.
- 18 UNRUH, W. G. Experimental black-hole evaporation? *Physical Review Letters*, v. 46, n. 21, p. 1351–1353, 1981. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 25.
- 19 BARCELO, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue gravity. *Living reviews in relativity*, v. 14, n. 1, p. 1–159, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 21, 24, 25 e 35.
- 20 FACCIO, D. et al. *Analogue gravity phenomenology: analogue spacetimes and horizons, from theory to experiment*. [S.l.]: Springer, 2013. Citado na página 21.
- 21 WEINFURTNER, S. et al. Classical aspects of Hawking radiation verified in analogue gravity experiment. In: FACCIO, D. et al. (Ed.). *Analogue Gravity Phenomenology*. [S.l.]: Springer, Cham, 2013. p. 167–180. Citado na página 23.
- 22 FOGLIZZO, T. et al. Shallow water analogue of the standing accretion shock instability: experimental demonstration and a two-dimensional model. *Physical Review Letters*, APS, v. 108, n. 5, p. 051103(1)–051103(4), 2012. Citado na página 23.
- 23 ROUSSEAU, G. et al. Observation of negative-frequency waves in a water tank: a classical analogue to the Hawking effect? *New Journal of Physics*, v. 10, n. 5, p. 053015(1)–053015(12), 2008. Citado na página 23.
- 24 WEINFURTNER, S. et al. Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system. *Physical Review Letters*, v. 106, n. 2, p. 021302(1)–021302(4), 2011. Citado na página 23.
- 25 TORRES, T. et al. Rotational superradiant scattering in a vortex flow. *Nature Physics*, v. 13, n. 9, p. 833–838, 2017. Citado na página 23.
- 26 SYMON, K. R. Introdução à Mecânica dos meios contínuos. In: _____. *Mecânica*. Rio de Janeiro: Campus, 1996. p. 329–388. Citado na página 23.

- 27 LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. Ideal fluids. In: _____. *Fluid Mechanics*. 2. ed. São Paulo: Pergamon, 1987. p. 1–43. Citado na página 24.
- 28 BUKOV, M. *Rigorous Approach to Bose-Einstein Condensation*. Tese (Bacharelado) — LMU Munich, Mathematics Department, 2011. Citado na página 27.
- 29 SALINAS, S. R. *Introdução à Física Estatística*. 2. ed. São Paulo: EdUSP, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 28, 38 e 39.
- 30 DAHMEN, S. R. Bose e Einstein: Do nascimento da estatística quântica à condensação sem interação I. *Revista brasileira de ensino de física*, v. 27, n. 2, p. 271–282, 2005. Citado na página 28.
- 31 DAHMEN, S. R. Bose e Einstein: Do nascimento da estatística quântica condensação sem interação II. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 283–298, 2005. Citado na página 28.
- 32 MUNIZ, S. R. *Desenvolvimento experimental para produção e estudo de gases quânticos: condensação de Bose-Einstein*. Tese (Doutorado em Ciências: Física Básica) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 30.
- 33 BAGNATO, V. S. A condensação de Bose-Einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 19, n. 1, p. 11–26, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.
- 34 JAIN, P. et al. Analog model of a Friedmann-Robertson-Walker universe in Bose-Einstein condensates: Application of the classical field method. *Physical Review A*, v. 76, n. 3, p. 033616(1)–033616(24), 2007. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 33.
- 35 STEINHAEUER, J. Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. *Nature Physics*, v. 12, n. 10, p. 959–965, 2016. Citado na página 31.
- 36 ECKEL, S. et al. A rapidly expanding Bose-Einstein condensate: an expanding universe in the lab. *Physical Review X*, v. 8, n. 2, p. 021021(1)–021021(13), 2018. Citado 4 vezes nas páginas 31, 48, 49 e 55.
- 37 SABÍN, C. et al. Phonon creation by gravitational waves. *New Journal of Physics*, v. 16, n. 8, p. 085003(1)–085003(15), 2014. Citado na página 31.
- 38 ALBUQUERQUE, R. M. *Obtenção de portas lógicas quânticas em condensados de Bose-Einstein*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Campus Sobral, Sobral, 2017. Citado na página 31.
- 39 BARCELO, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue gravity from Bose-Einstein condensates. *Classical and Quantum Gravity*, v. 18, n. 6, p. 1137–1156, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.
- 40 SALINAS, S. R. Einstein e a teoria do movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 263–269, 2005. Citado na página 37.
- 41 BOAS, M. L. *Mathematical methods in the physical sciences*. 3. ed. EUA: John Wiley & Sons, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 39, 104, 105, 106, 107 e 108.

- 42 CHOWDHURY, D. 100 years of Einstein's theory of Brownian motion: from pollen grains to protein trains–1. *Resonance*, p. 63–78, 2005. Citado na página 39.
- 43 PATHRIA, R. Fluctuation. In: _____. *Statistical Mechanics*. 2. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1996. p. 452–494. Citado na página 40.
- 44 LORENCI, V. D.; RIBEIRO, C. Remarks on the influence of quantum vacuum fluctuations over a charged test particle near a conducting wall. *Journal of High Energy Physics*, v. 72, n. 4, p. 72(1)–72(16), 2019. Citado na página 42.
- 45 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. *Quantum fields in curved space*. [S.l.]: Cambridge university press, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 45, 46 e 52.
- 46 BÉSSA, C. H. G. *Algumas contribuições ao estudo de sistemas clássicos e quânticos em espaços curvos*. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009. Citado na página 45.
- 47 RODRIGUES, F. d. F. *Influência das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar em uma partícula teste próxima a uma fronteira em (1+1) e (2+1) dimensões*. Dissertação (Mestrado em Ciências em Física e Matemática Aplicada) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2018. Citado na página 51.
- 48 AMORIM, R. et al. Função de Wigner-80 anos e as origens da geometria não-comutativa. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, n. 3, p. 3604(1)–3604(14), 2013. Citado 3 vezes nas páginas 57, 58 e 64.
- 49 MICU, A.; SHEIKH-JABBARI, M. M. Noncommutative ϕ^4 theory at two loops. *Journal of High Energy Physics*, v. 2001, n. 1, p. 1–44, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 58, 64 e 65.
- 50 DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J. E. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Communications in Mathematical Physics*, v. 172, n. 1, p. 187–220, 1995. Citado na página 58.
- 51 NETO, J. B. Formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica. In: _____. *Mecânica Newtoniana, Lgrangiana e Hamiltoniana*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. p. 331–346. Citado 3 vezes nas páginas 59, 61 e 62.
- 52 SZABO, R. J. Magnetic backgrounds and noncommutative field theory. *International Journal of Modern Physics A*, v. 19, n. 12, p. 1837–1861, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 61, 62 e 65.
- 53 JACKIW, R. Physical instances of noncommuting coordinates. *arXiv preprint hep-th/0110057*, 2001. Citado na página 61.
- 54 ANACLETO, M. A. *Correção não-comutativa para o efeito Aharonov-Bohm: uma abordagem da teoria quântica de campos*. Tese (Doutorado em Ciências) — Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 61, 63 e 64.
- 55 SOUZA, M. C. *Estrutura Canônica de Teoria de Gauge via Método de Dirac*. Dissertação (Mestrado em Física) — Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2016. Citado na página 63.

-
- 56 SCARDICCHIO, A. Classical and quantum dynamics of a particle constrained on a circle. *Physics Letters A*, v. 300, n. 1, p. 7–17, 2002. Citado na página 63.
- 57 LUNA, G. C. *Radiação Hawking de um buraco negro acústico não-comutativo*. Dissertação (Mestrado em Física) — Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017. Citado na página 65.
- 58 ANACLETO, M. A.; BRITO, F. A.; PASSOS, E. Supersonic velocities in noncommutative acoustic black holes. *Physical Review D*, v. 85, n. 2, p. 025013(1)–025013(8), 2012. Citado 3 vezes nas páginas 67, 68 e 72.
- 59 BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. Analytic functions. In: _____. *Complex Variables and Applications*. 8. ed. Nova York: McGraw-Hill, 2009. p. 35–88. Citado na página 103.
- 60 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. [S.l.]: Courier Corporation, 1965. Citado na página 117.

Apêndices

APÊNDICE A – Integração via método de resíduos

Em muitas ocasiões os problemas físicos se resumem a solução de uma equação integral ou diferencial. Não queremos dizer que tudo se trata meramente de resolver essas expressões, pois antes disso existe uma série de análises e considerações que é a princípio fundamental para o problema. Contudo, em algum momento terá de se lidar com esse tipo situação, que na maioria das vezes não é simples.

Sobre a resolução de integrais, existem métodos auxiliares como substituição de variáveis, integração por partes, frações parciais, etc. Também existe um método útil e alternativo para solucionar integrais que de forma usual se tornariam complicadas e extensas. O artifício matemático em questão é o chamado método de integração por resíduos. Dada a sua constante utilização para computar muitas das integrais presentes nesse trabalho a seguir faremos uma revisão moderada e de abordagem objetiva. Assim, do ponto de vista de uma compreensão mais profunda, muitos detalhes serão poupados e para maiores informações do tema recomendamos as referências citadas ao longo do texto.

A.1 Motivação e definições iniciais

Sabe-se que a derivada de um função real $f(x)$ é dada pelo limite

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Semelhante a derivada de um função real para uma $f(z)$, em que z é um argumento complexo, segue-se a mesma estrutura, a saber,

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Em virtude da semelhança estrutural muitas das propriedades diferenciais básicas para funções de variáveis reais também são preservadas para funções de variáveis complexas [59, p. 60], como por exemplo,

- *Multiplicação por constante:*

$$\frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z),$$

a linha denota a derivada da função com respeito a z e c uma constante;

- *Potência:*

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1};$$

- *Adição e subtração:*

$$\frac{d}{dz} [f(z) \pm g(z)] = f'(z)g(z) \pm f(z)g'(z);$$

- *Produto:*

$$\frac{d}{dz} [f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$$

- *Quociente:*

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}$$

- *Regra da cadeia:* Se $f = f[g(z)]$,

$$\frac{d}{dz} \{f[g(z)]\} = f'[g(z)]g'(z).$$

Além disso, as operações derivativas com funções trigonométricas, por exemplo, $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\tan(z)$, etc, também são válidas para variáveis complexas.

O que permite o sucesso desse paralelo entre funções reais e complexas é o pressuposto de que as funções $f(z)$ sejam analíticas, isto é, que suas derivadas tenham valor único em uma determinada região e portanto esse valor não pode depender da região Δz no plano complexo. Se $f(z)$ é analítica em uma região valem as relações

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

chamadas condições de Cauchy-Riemann, onde $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ são funções reais de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Essas são condições necessárias para que a função complexa seja analítica¹.

Uma definição essencial para nossa discussão é a do significado do termo polo. Um polo nada mais é do que um ponto no qual uma certa função não é analítica, ou seja, não é bem definida. É costume dizer que nesse ponto existe uma singularidade. Por exemplo, as funções

$$f(z) = \frac{1}{z-a}, \quad g(z) = \frac{1}{z}, \quad \text{e} \quad h(z) = \ln(z) \tag{A.1}$$

possuem um comportamento definido com exceção dos pontos $f(a)$, $g(0)$ e $h(0)$. Então, os polos ou singularidades são respectivamente $z = a$ e $z = 0$, pois nesses pontos específicos as funções apresentam um comportamento divergente.

¹ Para mais detalhes ver [41, p. 667-672].

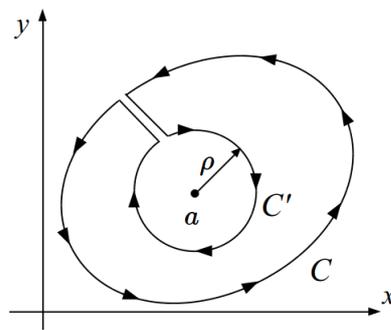
A.2 Método de Resíduos

Fazer uma motivação sobre cada conteúdo aqui exposto tomaria muito tempo e espaço, assim é mais conveniente elencar alguns teoremas os quais foram retirados de [41, p. 675-683], fonte que recomendamos a leitura. Portanto, tenhamos conhecimento dos seguintes teoremas sem prová-los.

Teorema 1 (Integral de Cauchy). *Dado um contorno simples e fechado C , isto é, que não cruza a si mesmo. Se uma função $f(z)$ é analítica dentro e sobre o contorno C , Figura (18), podemos calcular o valor de $f(z)$ em um ponto $z = a$ interno ao contorno C utilizando a seguinte relação*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad (\text{A.2})$$

Figura 18 – Ilustração para o Teorema 1.



Legenda: a é o ponto singular em que o integrando não é analítico; ρ é o raio do pequeno disco centrado na singularidade a . Os pequenos “caminhos retos” entre C e C' são extrapolados para melhorar a visualização, porém usualmente são feitos coincidir de modo que não são representados. Fonte: Retirado e modificado de [41, p. 675].

Teorema 2 (Série de Laurent). *Seja $f(z)$ uma função analítica em uma região R entre os círculos C_1 e C_2 centrados em z_0 , Figura (19). Essa função pode ser expandida na chamada “Série de Laurent”, a saber,*

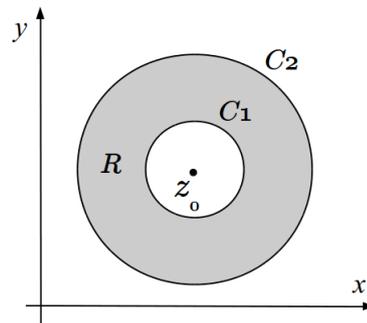
$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (\text{A.3})$$

Essa série converge na região R . Os coeficientes “b” compõem a denominada parte principal da série de Laurent.

Do teorema anterior decorem as seguintes definições:

- (I) Se toda a série de b é nula então temos que a função $f(z)$ é regular em $z = z_0$. Uma forma de ver isso é olhar para equação (A.3), se todos os b_n são zero nos resta apenas a série em a , que não produz resultado divergente quando $z = z_0$.

Figura 19 – Região de convergência do Teorema 2.



Legenda: z_0 - ponto divergente; R - Região sombreada em que a função $f(z)$ é analítica. Fonte: Retirado e modificado de [41, p. 679].

(II) Se todos os coeficientes b_n após o coeficiente de número n são nulos, então diz-se que $f(z)$ tem um polo de ordem n em $z = z_0$. Quando $n = 1$ o polo é denominado simples.

(III) Denomina-se o coeficiente b_1 como resíduo da função $f(z)$ em $z = z_0$.

Teorema 3 (Resíduos). *Matematicamente,*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \times \left(\sum R[f(z), C] \right). \quad (\text{A.4})$$

Essa expressão nos diz que a integral da função $f(z)$ no contorno C é igual ao produto de um fator $2\pi i$ pela soma de todos os resíduos de $f(z)$ dentro do contorno C escolhido. O sentido de integração no contorno é por definição anti-horário e se for alterado para o sentido horário deve-se acrescentar a equação um sinal negativo.

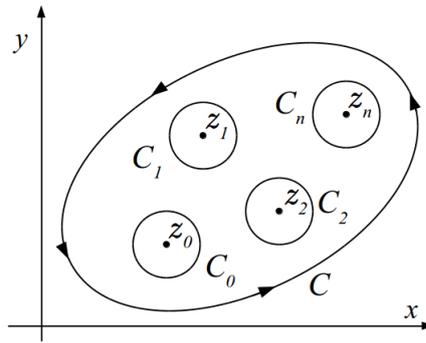
A Figura (20) representa de modo visual o enunciado do teorema A.4. A função $f(z)$ é analítica entre o contorno C e os pequenos círculos internos, $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$, centrados nas respectivas singularidades.

Como conclui-se a partir do Teorema 3, em se tratando da resolução de integrais via método de resíduos o que devemos fazer é encontrar os resíduos da função em um contorno C escolhido. Certamente o resultado final deve ser independente do contorno realizado, porém em muitas ocasiões um determinado contorno é preferível em relação a outros por possibilitar maior facilidade e simplicidade na solução.

A.3 Como encontrar resíduos

Os métodos para encontrar resíduos de funções são muitos e a depender da estrutura da função em questão é preferível um ao invés do outro. Aqui são listadas algumas das regras mais simples e usuais que serão úteis no presente trabalho. Estas regras podem ser encontradas em [41] onde são fornecidos exemplos e explicações mais sutis.

Figura 20 – Representação do Teorema 3.



Legenda: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ são as singularidades da função e C é o contorno adotado, cujo sentido é anti-horário. Fonte: produzido pelo autor com base na referência [41, p. 683], 2019.

- *Regra para polos simples:* Quando temos um polo simples, para encontrar o resíduo de $R(z_0)$ pode-se utilizar a relação

$$R(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (\text{A.5})$$

onde z_0 é o polo. Exemplo: Seja $f(z) = \frac{2+z}{2(z+4)}$, então para $R(-4)$ temos,

$$R(-4) = \lim_{z \rightarrow -4} [z - (-4)] \frac{2+z}{2(z+4)} = \lim_{z \rightarrow -4} \frac{2+z}{2} = -1.$$

- *Regra do quociente:* Dada uma função $f(z)$, se podemos escrevê-la na forma $f(z) = g(z)/h(z)$, onde a função $g(z)$ é analítica e não nula no ponto de singularidade z_0 e $h(z_0) = 0$. Então, para calcular o resíduo da mesma podemos utilizar a relação

$$R(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}, \quad (\text{A.6})$$

onde a linha denota a derivada da função $h(z)$ com relação a z . De maneira mais formal,

$$R(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}, \text{ se } \begin{cases} f(z) = g(z)/h(z), \\ g(z_0) \neq 0, \text{ finita e constante,} \\ h(z_0) = 0 \text{ e } h'(z_0) \neq 0. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Como exemplo, consideremos a função $f(z) = \frac{e^{2z}}{1+e^z}$, em $z = \pi i$. De acordo com a equação (A.6), identificando as respectivas funções, temos:

$$\left. \begin{aligned} g(z) = e^{2z} &\rightarrow g(\pi i) = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1 \neq 0 \\ h(z) = 1 + e^z &\rightarrow h'(z) = e^z \rightarrow h'(\pi i) = -1 \neq 0 \end{aligned} \right\} R(\pi i) = \frac{e^{2\pi i}}{e^{\pi i}} = -1.$$

- *Regra para polos de ordem n:* Se $f(z)$ tem um polo de ordem n nós podemos encontrar o resíduo aplicando a seguinte fórmula:

$$R(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}}{dz} [(z - z_0)^m f(z)] \right|_{z=z_0}, \quad (\text{A.8})$$

m é um número inteiro arbitrário e positivo, cujo valor é maior ou igual a ordem n do polo. Percebe-se que o método de polos simples é um caso particular da generalização (A.8) em que $m = 1$.

Quando a função $f(z)$ tem um denominador fatorado que é idêntico ou pode ser expresso como o termo $(z - z_0)$, é útil fazer m coincidir com o valor do expoente deste termo. Por exemplo, dada a função

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{(z - a)^3}$$

para o resíduo em $z = a$, seguindo a definição anterior, temos:

$$R(a) = \frac{1}{(3 - 1)!} \frac{d^{3-1}}{dz} \left[(z - a)^3 \frac{\cos(z)}{(z - a)^3} \right] \Big|_{z=a} = - \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} [\cos(z)] \Big|_{z=a} = - \frac{\cos(a)}{2}.$$

Note que foi escolhido $m = 3$ para eliminar o denominador.

Um outro método utilizado para encontrar resíduos é a série de Laurent, exposta no Teorema 2, pois como apontado o(s) coeficiente(s) da série b_n correspondem ao resíduo da função², contudo não o mencionamos aqui porque nem sempre é fácil obtê-la e nos limitamos aos métodos mais simples.

² Para detalhes ver a discussão em [41, p. 682]

APÊNDICE B – Correção para a equação da força

Por praticidade, inicialmente vamos fazer a seguinte manipulação no último termo da lagrangiana (5.1)

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\left(1+\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)(|D_\mu\phi|^2+m^2|\phi|^2-b|\phi|^4) \\ & +\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}g^{\nu\mu}\left[(D_\beta\phi)^\dagger D_\nu\phi+(D_\nu\phi)^\dagger D_\beta\phi\right].\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

Agora, usando o fato de que $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ encontra-se

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\left(1+\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)[\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-ie(\partial_\mu\phi^\dagger A^\mu\phi-A_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi)] \\ & +e^2A_\mu A^\mu|\phi|^2+m^2|\phi|^2-b|\phi|^4+\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}g^{\nu\mu}[\partial_\beta\phi^\dagger\partial_\nu\phi-ie(\partial_\beta\phi^\dagger A_\nu\phi-A_\beta\phi^\dagger\partial_\nu\phi)] \\ & +\partial_\nu\phi^\dagger\partial_\beta\phi-ie(\partial_\nu\phi^\dagger A_\beta\phi-A_\nu\phi^\dagger\partial_\beta\phi)+2e^2A_\beta A_\nu|\phi|^2.\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

Para as respectivas parcelas da equação de Euler-Lagrange (5.15) encontra-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\phi^\dagger} = & \left(1-\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)[ieA_\mu\partial_\mu\phi+2e^2A_\mu A^\mu\phi+m^2\phi-2\phi|\phi|^2] \\ & +\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}g^{\nu\mu}[ieA_\beta\partial_\nu\phi+2e^2A_\nu A_\beta\phi+ieA_\nu A_\beta\phi],\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)} = & \left(1-\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)[\partial^\mu\phi-ieA^\mu\phi]+\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}g^{\nu\mu}[\delta^\mu_\beta\partial_\nu\phi-ie\delta^\mu_\beta A_\nu] \\ & +\delta^\mu_\nu\partial_\beta\phi-ie\delta^\mu_\nu A_\beta\phi \\ \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = & \left(1-\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)[\partial^\mu\phi-ieA^\mu\phi]+\theta^{\alpha\mu}F_\alpha{}^\nu[\partial_\nu\phi-ieA_\nu\phi],\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

onde na segunda igualdade utilizou-se o fato de que $\delta^\mu_\nu = \delta^\beta_\nu\delta^\mu_\beta$.

Logo,

$$\begin{aligned}& \partial_\mu\left\{\left(1-\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)[\partial^\mu\phi-ieA^\mu\phi]+\theta^{\alpha\mu}F_\alpha{}^\nu[\partial_\nu\phi-ieA_\nu\phi]\right\} \\ & -\left(1-\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)[ieA_\mu\partial_\mu\phi+2e^2A_\mu A^\mu\phi+m^2\phi-2\phi|\phi|^2] \\ & -\frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}g^{\nu\mu}[ieA_\beta\partial_\nu\phi+2e^2A_\nu A_\beta\phi+ieA_\nu A_\beta\phi]=0.\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Com o intuito de explicitar o termo entre ∂_μ e $\partial_\nu\phi$, fazemos

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu \left[\left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) g^{\mu\nu} + \theta^{\alpha\mu} F_\alpha{}^\nu \right] \partial_\nu \phi - ie \partial_\mu \left[\left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) A^\mu \phi + \theta^{\alpha\mu} F_\alpha{}^\nu A_\nu \phi \right] \\
- & \left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) [ie A_\mu \partial_\mu \phi + 2e^2 A_\mu A^\mu \phi + m^2 \phi - 2\phi|\phi|^2] \\
- & \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} g^{\nu\mu} [ie A_\beta \partial_\nu \phi + 2e^2 A_\nu A_\beta \phi + ie A_\nu A_\beta \phi] = 0.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Como foi comentado, o termo \bar{f}^μ corrigido será toda a parcela que se encontra entre os termos ∂_μ e $\partial_\nu\phi$. Assim,

$$f^\mu \rightarrow \bar{f}^\mu = q \left[\left(1 - \frac{1}{4} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) g^{\mu\nu} + \Theta^{\mu\nu} \right] \nabla_\nu \phi, \tag{B.7}$$

onde definiu-se $\Theta^{\mu\nu} = \theta^{\alpha\mu} F_\alpha{}^\nu$ e $g^{\mu\nu}$ é a métrica de fundo (*background*) utilizado.

É importante frisar que existe apenas um termo com a estrutura mostrada acima, isto é, entre os operadores ∂_μ e $\partial_\nu\phi$, logo com base nos argumentos precedentes essa é a expressão para a força que deve ser considerada.

APÊNDICE C – Detalhes matemáticos das soluções das equações (5.44) e (5.45).

Primeiro faremos a demonstração da equação (5.45), isto é, I_2 , porque uma vez que possui os dois fatores de escala para resolver I_1 , eq. (5.44), basta aplicar os procedimentos iniciais da solução de I_2 .

Dada a equação

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 a^2(\eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4}, \quad (\text{C.1})$$

observa-se que

$$\frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4} = -\frac{1}{3} \frac{d}{d\eta_1} \left[\frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right] \quad (\text{C.2})$$

e

$$a^2(\eta_1) \frac{d}{d\eta_1} \left[\frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \right] = -\frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)] \quad (\text{C.3})$$

quando $\eta_1 \rightarrow \pm\infty$.

Substituindo (C.2) e (C.3) em (C.1) encontra-se

$$I_2 = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 a^2(\eta_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)]. \quad (\text{C.4})$$

Utilizando o mesmo raciocínio na eq. (C.4) para a variável η_2 , vamos obter

$$I_2 = -\frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \frac{d}{d\eta_2} [a^2(\eta_2)] \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)] \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^2}, \quad (\text{C.5})$$

que considerando o fator de escala apresentado na equação (3.58) assume a forma

$$I_2 = -\frac{a_1^4}{6\eta_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)} \left[\frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^2} \right]. \quad (\text{C.6})$$

De acordo com o método de integração por resíduos existem dois polos de 2ª ordem: um localizado em $\eta_1 = \eta_2$ e outro proveniente da função cosseno hiperbólico que corresponde a

$$\eta_{1k} = \eta_0 \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi i,$$

com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Os polos devido a função cosseno hiperbólico compõem uma série de polos tanto na parte superior como inferior do plano complexo.

Definindo $g(\eta_1) = \cosh^2\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)$ e fazendo uma expansão em série de Taylor em torno do ponto η_{1k} até segunda ordem,

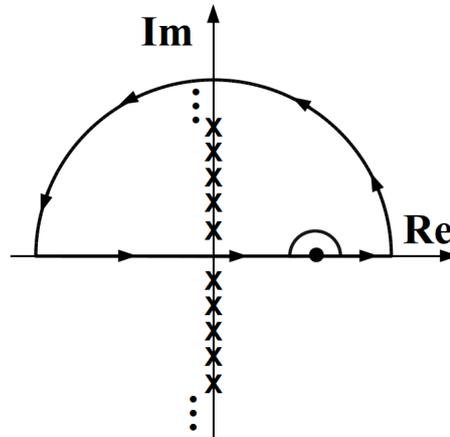
$$g(\eta_{1k}) \approx \frac{\sinh^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right)}{\eta_0^2} (\eta_1 - \eta_{1k})^2 + \dots \quad (\text{C.7})$$

Escolhendo o contorno indicado na Figura (21) e utilizando a regra geral (A.8) do Apêndice A para o cálculo dos resíduos de funções com polos de ordem n , da equação (C.6) obtém-se

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -\frac{a_1^4}{6\eta_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}\right)} \\
 &\times 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)!} \frac{d}{d\eta_1} \left[(\eta_1 - \eta_{1k})^2 \frac{\eta_0^2}{\sinh^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right)} \frac{1}{(\eta_1 - \eta_{1k})^2 (\eta_1 - \eta_2 + i\epsilon)^2} \right] \Bigg|_{\eta_1 = \eta_{1k}} \\
 I_2 &= \frac{2\pi i a_1^4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}\right)} \frac{1}{(\eta_{1k} - \eta_2)^3}. \tag{C.8}
 \end{aligned}$$

É importante destacar que o intervalo da soma se inicia de zero porque, dada a definição de η_{1k} , é a partir desse valor que o contorno engloba todos os polos referentes a parte superior do plano complexo.

Figura 21 – Contorno escolhido para realização da integral (C.6).



Legenda: Ambos os polos são de segunda ordem, mas enquanto o polo η_2 , representado por \bullet , está sobre o eixo real, η_{1k} constitui uma série de polos sobre o eixo imaginário, os quais estão representado por x . Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Agora os polos em $\eta_2 = \eta_{1k}$ são de 3ª ordem e de 2ª ordem em

$$\eta_{2\ell} = \eta_0 \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \pi i$$

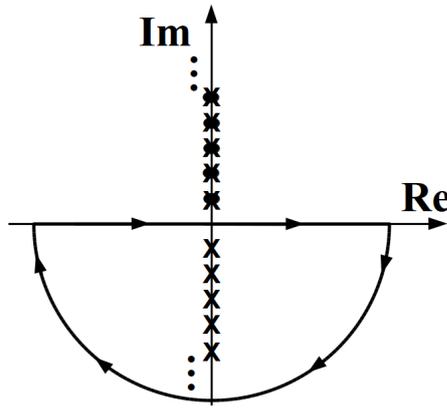
com $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

Adotando o contorno indicado na Figura (22) temos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{2\pi i a_1^4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right)} \\
&\times (-2\pi i) \sum_{\ell=-1}^{-\infty} \frac{1}{(1)!} \frac{d}{d\eta_1} \left[(\eta_2 - \eta_{2\ell})^2 \frac{\eta_0^2}{\sinh^2\left(\frac{\eta_{2\ell}}{\eta_0}\right)} \frac{1}{(\eta_{1k} - \eta_2 - i\epsilon)^3} \right] \Bigg|_{\eta_2=\eta_{2\ell}} \\
I_2 &= 4\pi^2 \eta_0^2 a_1^4 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-1}^{-\infty} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right)} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\eta_{2\ell}}{\eta_0}\right)} \frac{1}{(\eta_{1k} - \eta_{2\ell})^4} \tag{C.9}
\end{aligned}$$

Também ressalta-se que o intervalo da soma em ℓ tem início em -1 devido ao fato de que esse é o valor inicial para o primeiro polo da parte inferior do plano complexo segundo a definição de $\eta_{2\ell}$.

Figura 22 – Contorno escolhido para realização da integral (C.8).



Legenda: O polo $\eta_{2\ell}$, representado por x , está exatamente sobre os polos η_{1k} , \bullet , na parte superior do plano complexo e constitui uma série de polos sobre o eixo imaginário. Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Observando que

$$\begin{aligned}
\sinh^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right) &= \sinh^2\left(\frac{\eta_{2\ell}}{\eta_0}\right) = -1, \\
(\eta_{1k} - \eta_{2\ell})^4 &= \eta_0^4 \pi^4 (k - \ell)^4, \tag{C.10}
\end{aligned}$$

podemos simplificar a equação anterior e rescrevê-la como

$$I_2 = \frac{4a_1^4}{\pi^2 \eta_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-1}^{-\infty} \frac{1}{(k - \ell)^4} = \frac{4a_1^4}{\pi^2 \eta_0^2} \left[\sum_{\ell'=1}^{\infty} \frac{1}{(\ell')^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \frac{1}{(k + \ell')^4} \right]. \tag{C.11}$$

com a mudança de índices $-\ell \rightarrow \ell'$.

O duplo somatório pode ser transformado em uma soma sobre um único índice observando o comportamento dos termos da série como mostra a Tabela (1).

Tabela 1 – Termos iniciais da dupla somatória na eq. (C.11).

$k \setminus \ell'$	1	2	3	4	...
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{625}$...
2	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{1.296}$...
3	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{1.296}$	$\frac{1}{2.401}$...
4	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{1.296}$	$\frac{1}{2.401}$	$\frac{1}{4.096}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

Nota-se que cada termo se repete exatamente $k + \ell' - 1$ vezes, assim uma série que expressa corretamente os denominadores $(k + \ell')^4$ e a repetição, numeradores $k + \ell' - 1$, será da forma:

$$S = \sum_{p=2}^{\infty} \left(\frac{p-1}{p^4} \right) \quad (\text{C.12})$$

Para verificar que essa soma é equivalente a dupla somatória presente na equação (C.9) basta desenvolver alguns termos: $p = 2 \rightarrow S = 1/16$; $p = 3 \rightarrow S = 2/81$.

Assim,

$$I_2 = \frac{4a_1^4}{\pi^2 \eta_0^2} \left[\sum_{\ell'=1}^{\infty} \frac{1}{(\ell')^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \frac{1}{(k + \ell')^4} \right] = \frac{4a_1^4}{\pi^2 \eta_0^2} \left[\sum_{\ell'=1}^{\infty} \frac{1}{(\ell')^4} + \sum_{p=2}^{\infty} \left(\frac{p-1}{p^4} \right) \right]. \quad (\text{C.13})$$

Alterar o limite inferior da soma em p de 2 para 1 não causa nenhum prejuízo ao resultado final, pois considerando a sua estrutura isso equivale a adicionar um termo zero ao resultado. Então,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{4a_1^4}{\pi^2 \eta_0^2} \left[\sum_{\ell'=1}^{\infty} \frac{1}{(\ell')^4} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{p-1}{p^4} \right) \right] = \frac{4a_1^4}{\pi^2 \eta_0^2} \left[\sum_{\ell'=1}^{\infty} \frac{1}{(\ell')^4} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^3} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^4} \right] \\ I_2 &= \frac{4a_1^4}{\pi^2 \eta_0^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^3} \right] = \frac{4a_1^4}{\pi^2 \eta_0^2} \zeta(3). \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Para a equação (5.44),

$$I_1 = \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 a^2(\eta_1) \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^4}, \quad (\text{C.15})$$

utilizando os mesmo argumentos e manipulações algébricas do início, eqs. (C.2) e (C.3),

encontra-se

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{3} \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3} \frac{d}{d\eta_1} [a^2(\eta_1)] \\
 I_1 &= \frac{a_1^2}{3\eta_0} \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)} \frac{1}{(\eta_1 - \eta_2)^3}, \tag{C.16}
 \end{aligned}$$

que possui singularidades em $\eta_{1k} = \eta_0(k + \frac{1}{2})\pi i$, com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Adotando um contorno similar ao da Figura (21) para contornar os polos de 3ª ordem $\eta_1 = \eta_2$, a expansão (C.7) e a regra geral (A.8), após algumas simplificações, encontra-se

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 2\pi i \eta_0 a_1^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\eta_f} d\eta_2 \frac{1}{(\eta_{1k} - \eta_2)^4} = \frac{-2\pi i \eta_0 a_1^2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(\eta_f - \eta_{1k})^3} + \frac{1}{\eta_{1k}^3} \right] \\
 I_1 &= \frac{-2\pi i \eta_0 a_1^2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta_f(\eta_f^2 - 3\eta_f\eta_{1k} + 3\eta_{1k}^2)}{\eta_{1k}(\eta_f - \eta_{1k})^3}. \tag{C.17}
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

APÊNDICE D – Solução da equação (5.68).

Vamos mostrar como encontrar a solução da equação (5.68). Dado que

$$I_{A1} = \iint d\eta_1 d\eta_2 a^{-2}(\eta_1) a^{-2}(\eta_2) [f_2(\eta, z) + 4\Delta z^2 f_3(\eta, z)], \quad (\text{D.1})$$

com

$$f_n(\eta, z) = \frac{1}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^n}$$

e $n = 2, 3$, as integrais que precisamos resolver são do tipo:

$$I_{A1} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \frac{1}{\left[a_0^2 + a_1^2 \tanh\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}\right) \right]} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \frac{1}{\left[a_0^2 + a_1^2 \tanh\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) \right]} \frac{1}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^n}.$$

É importante mencionar que a ordem de integração não importa, mas deve-se perceber que o resultado de uma integral torna-se integrando da outra.

Para a primeira integral, rotulando-a por I ,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 \frac{1}{\left[a_0^2 + a_1^2 \tanh\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) \right]} \times \left\{ \frac{1}{[c_0^2(\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^n} \right\}, \quad (\text{D.2})$$

seguindo a teoria exposta no Apêndice A percebe-se que existe um polo de ordem n em $c_0\eta_1 = \pm r + \eta_2$ e outro de ordem 1 (polo simples) na função tangente hiperbólica, que corresponde a um conjunto infinito de polos da forma $\tanh(\eta_1/\eta_0) = -\alpha^2$, com $\alpha^2 = a_0^2/a_1^2 > 1$.

Utilizando a representação logarítmica da função tangente hiperbólica, cf. eq. 4.6.22 de ref. [60, p. 87],

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

para $\tanh(\eta_1/\eta_0) = -\alpha^2$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1}{\eta_0} &= -\operatorname{arctanh}(\alpha^2) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left((-1) \cdot \left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\right)\right) \\ \eta_1 &= -\eta_0 \frac{1}{2} \ln(-1) - \eta_0 \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\right) = -\eta_0 \frac{\pi i}{2} - \eta_0 \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\right). \end{aligned}$$

Com base na propriedade de periodicidade

$$\tanh(z + k\pi i) = \tanh(z)$$

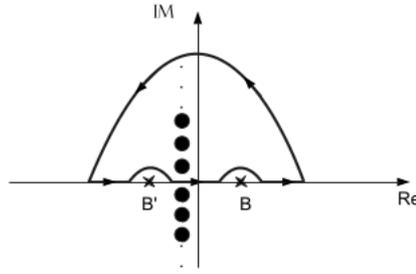
é possível estabelecer seguramente que

$$\eta_{1k} = \eta_{10} + \eta_0 k \pi i ,$$

generalizam os polos da tangente hiperbólica, com $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, $\eta_{10} = -\eta_0 \frac{\pi i}{2} - \eta_0 g$ e $g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \right)$.

Escolhendo o contorno indicado na Figura (23) pode-se aplicar a equação (A.5) do Apêndice A, pois desta forma estão sendo contornadas as singularidades $c_0 \eta_1 = \pm r + \eta_2$ no eixo real. Então, restam apenas os polos simples relativos a tangente hiperbólica.

Figura 23 – Contorno escolhido para integral $I_{(i)}$.



Legenda: x – polos de ordem n ; • – polos simples. Fonte: Retirado de [10, p. 19]

Denominando $h(\eta_1) = a_0 + a_1 \tanh \left(\frac{\eta_1}{\eta_0} \right)$, uma vez que $h(\eta_{1k}) = 0$ podemos expandir $h(\eta_1)$ em série de Taylor em torno do ponto η_{1k} . Logo,

$$\begin{aligned} h(\eta_1) &= h(\eta_{1k}) + h'(\eta_{1k})(\eta_1 - \eta_{1k}) + \dots \\ h(\eta_1) &= \frac{a_1^2}{\eta_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0} \right) (\eta_1 - \eta_{1k}) + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Considerando o contorno indicado, o qual nos permite utilizar a regra para resíduos de polos simples e a expansão de $h(\eta_1)$, obtém-se como resultado para I_{A1} :

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \times \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lim_{\eta_1 \rightarrow \eta_{1k}} (\eta_1 - \eta_{1k}) \frac{\eta_0}{a_1^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0} \right) (\eta_1 - \eta_{1k})} \frac{1}{[c_0^2 (\eta_1 - \eta_2)^2 - r^2]^n} \right\} \\ I &= \frac{2\pi i \eta_0}{a_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \cosh^2 \left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0} \right) \frac{1}{[c_0^2 (\eta_{1k} - \eta_2)^2 - r^2]^n}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Como já é conhecido, a somatória em k surge devido a existência do conjunto infinito de polos, que segundo a definição de integração por resíduos (A.4) deve-se somar todos.

Diante do resultado encontrado para I a integração na variável η_2 será:

$$I_{A1} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \frac{1}{\left[a_0^2 + a_1^2 \tanh\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}\right) \right]} \times I$$

$$I_{A1} = \frac{2\pi i \eta_0}{a_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \cosh^2\left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_2 \frac{1}{\left[a_0^2 + a_1^2 \tanh\left(\frac{\eta_2}{\eta_0}\right) \right]} \left\{ \frac{1}{[c_0^2(\eta_{1k} - \eta_2)^2 - r^2]^n} \right\}.$$

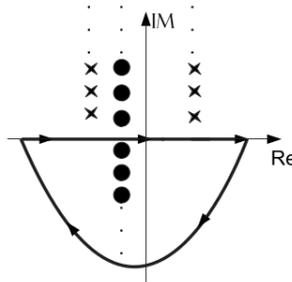
Semelhante ao caso anterior (I) temos um conjunto infinito de polos simples em $\tanh(\eta_2/\eta_0) = -\alpha^2$, que podem ser generalizados na expressão

$$\eta_{2\ell} = \eta_{20} + \eta_0 \ell \pi i, \quad (\text{D.5})$$

com $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\eta_{20} = \eta_{10} = -\eta_0 \frac{\pi i}{2} - \eta_0 g$ e $g = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\right)$.

Agora, os polos de ordem n são $c_0 \eta_2 = \pm r + \eta_{1k}$ e representam um conjunto infinito de polos no plano complexo como mostrado na Figura (24). Isso porque agora temos a presença do fator η_{1k} , em que $k = 1, 2, \dots$ compõe uma série de polos na parte superior do plano complexo.

Figura 24 – Contorno escolhido para segunda integral de I_A .



Legenda: **x** – polos de ordem n ; **•** – polos simples. Fonte: Retirado de [10, p. 19].

Assim como foi feito para I vamos escolher o contorno mostrado na Figura (24) a fim de evitar os polos de ordem n e utilizar novamente a regra para polos simples. Além disso, considerando uma expansão em série de Taylor em torno do ponto $\eta_{2\ell}$,

$$o(\eta_2) = o(\eta_{2\ell}) + o'(\eta_{2\ell})(\eta_2 - \eta_{2\ell}) + \dots$$

$$o(\eta_2) = \frac{a_1^2}{\eta_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta_{2\ell}}{\eta_0}\right) (\eta_2 - \eta_{2\ell}) + \dots, \quad (\text{D.6})$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
I_{A1} &= \frac{2\pi i \eta_0}{a_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \cosh^2 \left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0} \right) \\
&\quad - 2\pi i \sum_{\ell=-1}^{-\infty} \left\{ \lim_{\eta_2 \rightarrow \eta_{2\ell}} (\eta_2 - \eta_{2\ell}) \frac{\eta_0}{a_1^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta_{2\ell}}{\eta_0} \right) (\eta_2 - \eta_{2\ell})} \frac{1}{[c_0^2 (\eta_{1k} - \eta_2)^2 - r^2]^n} \right\} \\
I_{A1} &= \frac{4\pi^2 \eta_0^2}{a_1^4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=-1}^{-\infty} \cosh^2 \left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0} \right) \cosh^2 \left(\frac{\eta_{2\ell}}{\eta_0} \right) \frac{1}{[c_0^2 (\eta_{1k} - \eta_{2\ell})^2 - r^2]^n}. \tag{D.7}
\end{aligned}$$

O sinal negativo no fator $-2\pi i$ bem como na somatória em $-\ell$ aparece devido o contraste do sentido horário escolhido para integração, Fig.(24), e a definição na eq. (A.4) de que o mesmo deve ser anti-horário. Simplifica-se essa equação observando que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[c_0^2 (\eta_{1k} - \eta_{2\ell})^2 - r^2]^n} &= \frac{(-1)^n}{(\pi c_0 \eta_0)^{2n}} \frac{1}{[(k - \ell)^2 + b^2]^n}, \text{ com } b = \frac{r^2}{\pi^2 c_0^2 \eta_0^2} ; \\
\cosh^2 \left(\frac{\eta_{1k}}{\eta_0} \right) &= \cosh^2 \left(-\frac{\pi i}{2} - g + k\pi i \right) = -\sinh^2 (g) ; \\
\cosh^2 \left(\frac{\eta_{2\ell}}{\eta_0} \right) &= \cosh^2 \left(-\frac{\pi i}{2} - g + \ell\pi i \right) = -\sinh^2 (g) .
\end{aligned}$$

Então,

$$I_{A1} = \frac{4\pi^2 \eta_0^2}{a_1^4} \frac{(-1)^n}{(c_0 \pi \eta_0)^{2n}} \sinh^4 (g) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=-1}^{-\infty} \frac{1}{[(k - \ell)^2 + b^2]^n}. \tag{D.8}$$

É possível reescrevermos o duplo somatório na equação acima como um único somatório. Para demonstrar isso vamos seguir uma abordagem de natureza argumentativa. De início, façamos uma mudança de índices em que $\ell' = -\ell$, logo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=-1}^{-\infty} \frac{1}{[(k - \ell)^2 + b^2]^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \frac{1}{[(k + \ell')^2 + b^2]^n}. \tag{D.9}$$

Observando a disposição de alguns termos da dupla somatória da eq. (D.9) na Tabela (2) para valores arbitrários de k e ℓ' , nota-se que há uma simetria entre os termos e conseqüentemente alguns se repetirão na medida em que se efetua a soma sobre os respectivos índices.

Denominando por $S_{k\ell'}$ os termos da série,

- $S_{11} = \frac{1}{[4 + b^2]^n}$;
- $S_{12} = S_{21} \Rightarrow \frac{1}{[9 + b^2]^n} + \frac{1}{[9 + b^2]^n} = \frac{2}{[9 + b^2]^n}$, onde $9 = (k + \ell')^2 = (3)^2$;

Tabela 2 – Termos iniciais da dupla somatória da eq. (D.9).

$k \ell'$	1	2	3	4	...
1	$\frac{1}{[4 + b^2]}$	$\frac{1}{[9 + b^2]}$	$\frac{1}{[16 + b^2]}$	$\frac{1}{[25 + b^2]}$...
2	$\frac{1}{[9 + b^2]}$	$\frac{1}{[16 + b^2]}$	$\frac{1}{[25 + b^2]}$	$\frac{1}{[36 + b^2]}$...
3	$\frac{1}{[16 + b^2]}$	$\frac{1}{[25 + b^2]}$	$\frac{1}{[36 + b^2]}$	$\frac{1}{[49 + b^2]}$...
4	$\frac{1}{[25 + b^2]}$	$\frac{1}{[36 + b^2]}$	$\frac{1}{[49 + b^2]}$	$\frac{1}{[64 + b^2]}$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Produzido pelo autor, 2020.

- $S_{22} = S_{13} = S_{31} \Rightarrow \frac{1}{[16 + b^2]^n} + \frac{1}{[16 + b^2]^n} + \frac{1}{[16 + b^2]^n} = \frac{3}{[16 + b^2]^n}$, onde $16 = (k + \ell')^2 = (4)^2$;
- $S_{23} = S_{32} = S_{14} = S_{41} \Rightarrow \frac{4}{[25 + b^2]^n}$, onde $25 = (k + \ell')^2 = (5)^2$ e assim por diante.

A partir dos resultados acima não é difícil perceber que cada elemento da série se repete exatamente uma quantidade de $(k + \ell') - 1$ vezes. Então, pode-se dizer que a repetição dos termos na equação (D.9) obedece a seguinte relação matemática:

$$\text{Rep}[S_{k\ell'}] = [(k + \ell') - 1]. \quad (\text{D.10})$$

Ainda que considerados poucos termos é fácil ver que uma série da forma

$$S_p = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{[p^2 + b^2]^n},$$

com $p = k + \ell'$, reproduz os mesmos denominadores da equação (D.9), mas fornece um resultado diferente porque não expressa corretamente a repetição dos termos. Entretanto, levando em conta a estrutura da equação (D.10) e o seu significado, multiplicando o numerador da expressão anterior por um fator de $(p - 1)$ vamos obter uma série equivalente a da eq. (D.9), ou seja,

$$S_p = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(p - 1)}{[p^2 + b^2]^2}. \quad (\text{D.11})$$

O fator extra $(p - 1)$ fornece a repetição de cada termo, como na equação (D.9) e que está exposto na Tabela (2). Para verificar a validade do argumento basta considerar alguns termos:

- $S_2 = \frac{(2 - 1)}{[(2)^2 + b^2]^2} = \frac{1}{[4 + b^2]^2}$, que corresponde ao caso $p = S_{11}$;

- $S_3 = \frac{(3-1)}{[(3)^2 + b]^2} = \frac{2}{[9 + b^2]^n}$, que corresponde ao caso $p = S_{12} + S_{21}$;
- $S_4 = \frac{(4-1)}{[(4)^2 + b]^2} = \frac{3}{[16 + b^2]^n}$, que corresponde ao caso $p = S_{13} + S_{31} + S_{22}$, e assim sucessivamente.

Diante das discussões anteriores pode-se estabelecer sem perda de generalidade a igualdade

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \frac{1}{[(k + \ell')^2 + b^2]^n} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(p-1)}{[p^2 + b^2]^n}. \quad (\text{D.12})$$

Seguindo com a demonstração, utilizando a eq. (D.12) na eq. (D.8) temos

$$I_{A1} = \frac{4\pi^2\eta_0^2}{a_1^4} \frac{(-1)^n}{(c_0\pi\eta_0)^{2n}} \sinh^4(g) \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(p-1)}{[p^2 + b^2]^n}. \quad (\text{D.13})$$

Lembrando que n assume valores iguais a 2 e 3, considerando a forma da equação (D.1) e utilizando o resultado acima, para integral I_A obtém-se

$$I_{A1} = \frac{4 \sinh^4(g)}{a_1^4 \pi^2 c_0^4 \eta_0^2} \left\{ S_2(r) - \frac{4\Delta z^2}{\pi^2 c_0^2 \eta_0^2} S_3(r) \right\}, \quad (\text{D.14})$$

onde por simplicidade na notação definiu-se

$$S_n = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(p-1)}{[p^2 + b^2]^n}.$$

Como queríamos demonstrar.