



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Joéslei Lopes de Oliveira

Sachdev-Ye-Kitaev: Um modelo Holográfico

Campina Grande, Paraíba, Brasil

28 de janeiro de 2020

Joéslei Lopes de Oliveira

Sachdev-Ye-Kitaev: Um modelo Holográfico

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Francisco de Assis de Brito

Campina Grande, Paraíba, Brasil

28 de janeiro de 2020

O48s Oliveira, Joéslei Lopes de.
Sachdev-Ye-Kitaev : um modelo holográfico / Joéslei Lopes de. –
Campina Grande, 2019.
82 f.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".
Referências.

1. Física Quântica. 2. Sachdev-Ye-Kitaev. 3. Jackiw-Teitelboim.
4. Ação Schwarzsiana. I. Brito, Francisco de Assis de. II. Título.

CDU 530.145(043)

JOÉSLEI LOPES DE OLIVEIRA

SACHDEV-YE-KITAEV: UM MODELO HOLOGRÁFICO

Dissertação aprovada em 28/10/2019

BANCA EXAMINADORA



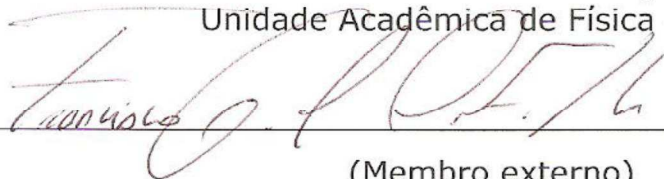
(Presidente)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Amílcar Rabelo Queiroz
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – CG

Dedico este trabalho a minha mãe, Marilene Lopes de Oliveira e a minha esposa, Joyce Lucena Rego de Oliveira, que sempre me ajudaram prontamente.

Agradecimentos

- Agradeço ao Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho.
- A todos os professores da Unidade Acadêmica de Física que contribuíram com a minha formação.
- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo em especial à minha mãe e esposa, às quais dedico esse trabalho.
- Aos colegas de pós-graduação, Felipe, Caroline, Raphaela, Girândia, Romário, Ronaldo, Thais, Faustino e Bruno e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- Aos membros da banca pelas contribuições imprescindíveis para esta versão final.
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

...eu joguei com essas ferramentas tão bem quanto pude só porque era lindo. Da mesma forma um músico toca um violino, não esperando mudar o mundo, mas só porque ele ama o instrumento.

(Freeman Dyson - Quanta Magazine)

Resumo

Nesta dissertação, aborda-se o modelo Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) focando seu aspecto holográfico através da correspondência $nAdS_2/nCFT_1$. O SYK, em particular, apresenta algumas características interessantes. É solucionável analiticamente no acoplamento forte, é caótico e possui uma simetria conforme emergente. Há pesquisas em andamento buscando respostas mais concretas a respeito de seu dual gravitacional, a gravidade dilatônica de Jackiw-Teitelboim (JT). Essa questão tem motivado os pesquisadores, envolvidos na busca, dentre outras questões, de até que ponto é possível descrever o modelo SYK por meio de um modelo gravitacional em duas dimensões. Assim, o objetivo dessa pesquisa consiste em investigar a correspondência entre o modelo SYK e JT. Dentre os resultados, é visto que essa correspondência é traduzida através de uma ação schwarziana que apresenta a reparametrização de um círculo (presença de temperatura finita no sistema).

Palavras-chave: Sachdev-Ye-Kitaev, Jackiw-Teitelboim e ação schwarziana.

Abstract

In this dissertation, the Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) model is approached focusing on its holographic aspect in the $nAdS_2/nCFT_1$ correspondence. SYK in particular has some interesting features. It is analytically solvable in strong coupling, is chaotic and has an emergent conformal symmetry. Research is under way for more concrete answers regarding its gravitational dual, the Jackiw-Teitelboim (JT) dilaton gravity. This question has motivated the researchers involved in the search to examine other questions as to how far it is possible to describe the SYK model with a two-dimensional gravitational model. Thus, the purpose of this research is to investigate the correspondence between the SYK and JT model. Among the results, it is seen that this correspondence is translated through a schwarzian action that presents the reparametrization of a circle (presence of finite temperature in the system).

Keywords: Sachdev-Ye-Kitaev, Jackiw-Teitelboim and schwarzian action.

Lista de abreviaturas e siglas

SYK	Sachdev-Ye-Kitaev
JT	Jackiw-Teitelboim
<i>AdS</i>	Espaço Anti-de Sitter
<i>nAdS</i>	Próximo ao <i>AdS</i>
<i>CFT</i>	Teoria de Campo Conforme
<i>nCFT</i>	Próximo a <i>CFT</i>
1PI	Diagramas Irredutíveis de Uma Partícula
UV	Ultravioleta
IR	Infravermelho

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Origem e Motivação	19
1.2	Esboço da Dissertação	21
2	ASPECTOS BÁSICOS DO MODELO SACHDEV-YE-KITAEV	23
2.1	Configuração Geral	23
2.2	O Hamiltoniano para $q = 4$	23
2.3	Função de Dois Pontos Livre	26
2.4	Diagramas 1PI e Equação de Schwinger-Dyson	28
2.5	Simetria conforme e temperatura finita	34
2.6	Quebra Espontânea de Simetria	37
3	AÇÃO EFETIVA DO MODELO SYK	39
3.1	Campos Bilocais	39
3.1.1	Simetria Conforme na Ação Efetiva do SYK	42
3.2	Flutuações nos Campos Bilocais	43
3.2.1	Modos Nambu-Goldstone	45
3.2.2	Ação Efetiva Contendo a Reparametrização	46
4	CORRESPONDÊNCIA HOLOGRÁFICA	51
4.1	Gravidade Dilatônica	51
4.2	O Problema <i>Backreaction</i>	52
4.3	Gravidade Dilatônica de Jackiw-Teitelboim	57
4.4	Configuração do Espaço $nAdS$	58
4.5	Teoria Schwarziana	60
5	CONCLUSÕES	63
5.1	Considerações Finais	63
5.2	Perspectivas	63
	REFERÊNCIAS	65
	APÊNDICES	73
	APÊNDICE A – RELAÇÃO DE ANTI-COMUTAÇÃO	75

APÊNDICE B – ESCALAR DE RICCI QUE FAZ A CONEXÃO ENTRE AS MÉTRICAS	77
APÊNDICE C – TERMO DIVERGENTE DA AÇÃO GRAVITACIONAL	81
APÊNDICE D – LEI DE DECOMPOSIÇÃO PARA O A DERIVADA SCHWARZIANA	85

1 Introdução

1.1 Origem e Motivação

O modelo de Sachdev-Ye-Kitaev (SYK) foi proposto como um exemplo mais simples, porém não trivial, da correspondência *AdS/CFT*, baseado no modelo de Sachdev e Ye [1–4]. Investigações detalhadas do modelo SYK [5–15] lançaram luz sobre aspectos interessantes e altamente não triviais da correspondência *AdS/CFT* e fornecem uma estrutura potencial para uma interpretação holográfica para buracos negros.

A correspondência *AdS/CFT*, às vezes chamada de dualidade de Maldacena ou dualidade de *gauge/gravity* [16], conjectura que diz que há uma relação entre esses dois tipos de teorias físicas. O espaço Anti-de Sitter (*AdS*) formulado em termos de teoria das cordas e usado em estudos de gravidade quântica e a Teoria de Campo Conforme (*CFT*), conceitos de campo quântico que contemplam teorias semelhantes às de Yang-Mills na descrição de partículas do modelo padrão.

O modelo SYK consiste em um sistema de N corpos, em Mecânica Quântica, vivendo em $(0 + 1)$ dimensão, interagindo aleatoriamente ponto-a-ponto em q pontos entre eles [17]. Para um N muito grande ele é solucionável e é possível obter uma descrição diagramática para o modelo aonde são somados todos os diagramas de Feynman. Assim, são calculadas as funções de correlação de dois e quatro pontos. Isso porque, ao fazer $N \rightarrow \infty$, só sobrevivem os "diagramas de melão" para as funções de dois pontos ou os "diagramas de escada" para as funções de quatro pontos.

No entanto, no limite de baixas energias, que fica na faixa do infravermelho (IR), o modelo SYK apresenta uma simetria de reparametrização conforme emergente [8, 18] e produz correlacionadores ordenado fora do tempo. Isso abre margem para uma interpretação de caos quântico ao modelo. Formalmente o caos quântico não é bem definido, mas o crescimento ordenado fora do tempo dos operadores de momento e posição, sobre uma transformação canônicas diante de um *ensemble* estatístico, é interpretado como caos quântico. Esse caos é traduzido através do expoente máximo de Lyapunov, característico de buracos negros, fornecendo um exemplo de efeito borboleta, isso faz do modelo uma ferramenta holográfica poderosa para compreender o embaralhamento de informações relacionado a entropia dessas estruturas supermassivas misteriosas [19–24].

O estudo de buracos negros sempre despertou o interesse da comunidade científica [25], mas graças aos avanços científicos recentes as pesquisas relacionadas a eles estão cada vez mais intensas. A detecção das ondas gravitacionais pelo LIGO e Virgo [26], por exemplo, possibilitaram conhecer, com mais precisão, características físicas dessas

estruturas. Os resultados obtidas com o *Event Horizon Telescope* produziram a primeira imagem de um horizonte de eventos de um buraco negro do centro da galáxia M87 [27]. Essa intensa pesquisa, decorrente desses grandes avanços recentes sobre buracos negros, impulsiona ainda mais o uso do SYK como uma ferramenta holográfica para compreender essas estruturas misteriosas.

Existe ainda conexões do modelo SYK com a Teoria de Matrizes Aleatória, a qual elaboraram ainda mais essa interpretação quântica de buracos negros do modelo [28–34]. Modelos relacionados também foram estudados [35–37], bem como várias generalizações do SYK [38–42]. A solução e as propriedades na ordem inicial no limite de $N \rightarrow \infty$ são compartilhadas com os modelos do tipo tensor [43–46].

Com tanto destaque, surgiram várias propostas experimentais para o SYK [76], a fim de comprova-lo experimentalmente ou defini-lo como um modelo de brinquedo, usado apenas por teóricos. Um consenso quanto a isso ainda não foi estabelecido, já que os estudos em laboratórios ainda são propostas experimentais.

Um exemplo, de proposta experimental para o SYK, é o estudo de flocos de grafeno sujeitos a um regime de alta desordem e a um campo magnético. Essa proposta obteve uma fase quântica descrita por um dual holográfico de um buraco negro extremo no espaço bidimensional AdS_2 . Essa fase da matéria pode ser caracterizada como um líquido não-Fermi maximamente caótico e é descrito por uma versão fermiônica complexa do SYK [77].

Outro exemplo, é a proposta de um ponto quântico acoplado a um conjunto de fios supercondutores topológicos. Esses fios hospedam os modos zero de Majorana, uma espécie de quase-partícula com características dos férmions de Majorana. Esses pontos geraram interações e distúrbios intrínsecos ao ponto, os quais mediam os acoplamentos aleatórios dos férmions de Majorana desejados [78, 79].

Outra proposta experimental interessante consiste no confinamento de átomos fermiônicos ultra frios em redes óticas, ou acoplamento de dois átomos com estados moleculares através de lasers foto-associados [35].

Existem também propostas experimentais com simulação de quatro qubits em Ressonância Magnética Nuclear. Nela é observado a instabilidade do pareamento dos férmions no estado líquido não-Fermi, bem como a transição caótica-não-caótica. Essa proposta abre um novo caminho para investigar características dos estados líquidos não-Fermi de sistemas quânticos caóticos [80].

Apesar do grande interesse no modelo, o *bulk* dual preciso do modelo SYK ainda não é conhecido. No entanto, foi conjecturado em [47–49] que o setor de gravidade desse modelo é o modelo de Jackiw-Teitelboim (JT) [50, 51] de gravidade de dilatônica com uma constante cosmológica negativa estudada em [52], enquanto [53–57] fornecem fortes

evidências de que é realmente a teoria de Liouville. Vários outros aspectos desse setor de gravidade dilatônica também foram estudados [58–62]. Por outro lado, também é sabido que o setor de matéria contém uma quantidade infinita de partículas [10–12]. Os acoplamentos dessas partículas foram calculados utilizando funções de correlação de ponto mais alto no modelo SYK [12, 13], e o espectro do setor de matéria pode ser entendido a partir da teoria da gravidade 3D [63, 64].

Todavia, trabalhar com espaço AdS na presença de matéria é problemático. Isso devido ao *backreaction*, a destruição da região assintótica do AdS_2 pela presença de campos de matéria [47, 48]. No contexto da relatividade geral esse fato é bem conhecido e é chamado de instabilidade de Aretakis [65]. Porém, em buracos negros extremos é possível incluir uma correção na geometria do AdS_2 , um *cutoff* no limite do ultravioleta (UV), e obter a dinâmica para campos de gravidade dilatônica para a fronteira próxima do AdS_2 . Essas teorias, como o modelo de JT (amplamente estudados mais recentemente em [7]), é possível tratar o espaço próximo ao AdS_2 , nesse sentido ele é chamado de $n - AdS_2$, onde n significa próximo [18, 49].

Uma característica relevante é que a simetria no modelo SYK é espontânea e explicitamente quebrada para um N muito grande no limite do IR sob as transformações lineares da álgebra $SL(2, \mathbb{R})$, um fato que concede a temperatura finita ao modelo. Por esse motivo, a teoria de campo conforme do modelo é geralmente chamada $nCFT_1$, próximo do CFT_1 . Note então que a maneira apropriada de estudar a correspondência AdS/CFT para o SYK e JT é como uma $nAdS_2/nCFT_1$. Essas aproximações podem ser traduzidas através de uma ação schwarziana, que se apresenta de forma análoga em ambas as teorias. Uma característica que também é interpretada como holografia [9, 12, 14, 63, 64, 66].

Mesmo com essa variedade de propostas experimentais a questão da gravidade dual do SYK permanece em um mistério, a resposta exata ainda não é conhecida. Para ser mais claro, tem-se apenas resultados análogos entre o SYK e JT. Questiona-se então até que ponto é possível descrever o SYK com um modelo de gravidade dilatônica. E, por trás desse problema, há a questão da existência de uma gravidade quântica, ou se a correspondência entre os modelos pode realmente apontar nesta direção.

1.2 Esboço da Dissertação

Diante da problemática com respeito a gravidade dual do SYK, este trabalho tem como objetivo investigar a correspondência entre o SYK e JT, a fim de apresentar alguns dos avanços recentes no entendimento dessa questão, bem como sua conexão com um buraco negro. E, talvez, lançar luz sobre esse problema.

No Cap. 2 é apresentado os principais aspectos do modelo SYK, resume-se a discussões diagramática para o modelo. Sendo assim, é calculado as função de correlação

de dois pontos e é mostrado, usando técnicas de perturbação padrão, que no limite N grande a única contribuição para a essas funções surge dos "diagramas de melão".

Ainda no Cap. 2, munidos dos diagramas irreduzíveis de uma partícula, são obtidas as equações de Schwinger-Dyson. Com elas é estudado a simetria conforme do SYK no limite do infravermelho (IR). Em seguida é destacado que essa simetria é quebrada sob transformações do subgrupo $SL(2, R)$.

O Cap. 3, destina-se a apresentar a ação de reparametrização dos campos bilocais, \tilde{G} e $\tilde{\Sigma}$, do SYK. Essa característica faz o modelo apontar uma dualidade holográfica com a gravidade dilatônica de JT. Nesse caso, para abordar essa dualidade, é usado o "método da réplica". Ele permite tratar com mais precisão os campos bilocais, além de retomar os resultados do Cap. 2.

Então, considerando as flutuações dos campos bilocais, consegue-se uma ação em que os seus modos zero passam a ser auto-funções do *kernel* com auto-valor 1. É discutido a interpretação física destes modos zero como modos de Nambu-Goldstone. Então, ao impor algum argumento qualitativo, é apontado que a ação dessas reparametrizações é uma ação schwarziana.

No Cap. 4 é investigado a correspondência holográfica entre o SYK e a gravidade dilatônica de JT em 2d. Parte-se de uma ação simples para modelos de gravidade dilatônica e, em seguida, destaca-se o problema da "reação posterior", compartilhado entre esse tipo de teoria dilatônica e buracos negros extremos em 4d. Então, por meio desse problema, justifica-se a contribuição de um termo divergente a ação da gravidade dilatônica. E, conseqüentemente, chega-se a teoria de JT.

Diante da ação de JT, percebe-se que a dinâmica do sistema resume-se a ação do *dilaton* na curvatura extrínseca. Sendo assim, essa curvatura é calculada e finalmente chega-se a uma ação schwarziana. Então, é acentuado a correspondência com o SYK.

Por fim, terminando a parte principal desta dissertação, no Cap. 5 é exposto algumas conclusões obtidas com o presente estudo, bem como perspectivas a esse respeito.

No apêndice A tem-se uma breve discussão sobre spinors e como é possível encontrar a representação apropriada para o modelo SYK. Já apêndice B calcula-se o escalar de Ricci e no apêndice C é feito a minimização de uma ação gravitacional para mostrar que esse processo produz um termo de fronteira, algo útil para o entendimento do Cap. 4. O apêndice D trás a lei de decomposição para a derivada schwarziana utilizada na ação schwarziana.

2 Aspectos Básicos do Modelo Sachdev-Ye-Kitaev

2.1 Configuração Geral

Para q férmions de Majorana acoplados, o hamiltoniano do SYK é dado por [82]

$$H = \sum J_\alpha \Gamma_\alpha, \quad (2.1)$$

com $\Gamma_\alpha = (i)^{q(q-1)/2} \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \cdots \gamma_{i_q}$. Aqui os γ_{i_q} são as matrizes *gamma* euclidianas para férmions de Majorana e como tal, obedecem uma relação de anti-comutação ¹

$$\{\gamma_k, \gamma_l\} = 2\delta_{kl}. \quad (2.2)$$

Observe que o fator i , na definição de Γ_α , é inserido para garantir que o hamiltoniano seja hermitiano. Um operador hermitiano é o gerador das translações temporais, dito, de forma corriqueira, como o operador que "espia o futuro". Isso significa que ele gera uma quantidade conservada no tempo, nesta dissertação, o acoplamento aleatório dos férmions.

As interações dos férmions de Majorana são aleatórias. O termo "aleatório", como usado aqui, não significa que cada um desses férmions interagem de maneira diferente, mas sim que a intensidade da interação varia, aleatoriamente, dependendo de como ela é selecionado. Sendo assim, o valor do acoplamento das partículas é feito por um distribuição gaussiana

$$P(J_\alpha) = \left(\frac{N^{q-1}}{2(q-1)! \pi J^2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{N^{q-1} J_\alpha^2}{2(q-1)! J^2} \right). \quad (2.3)$$

O termo J_α , na Eq. 2.3, é uma variável aleatória e representa os acoplamentos, ao acaso e desordenados, dos férmions de Majorana. Isso introduz a desordem ao modelo. Já o J e o N são, respectivamente, a intensidade da interação e numero de interações.

O espaço de Hilbert do SYK é:

$$L = 2^{N/2} \quad (2.4)$$

As funções deste espaço são chamadas de quadrados integráveis.

2.2 O Hamiltonino para $q = 4$

Para um caso particular de acoplamento de $q = 4$ férmions de Majorana [17], Fig. 1, o hamiltoniana é

¹ Para mais detalhes, veja o Apêndice A

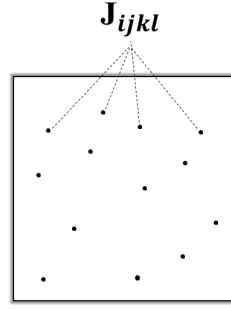


Figura 1 – Acoplamento aleatório de 4 férmions de Majorana.

$$H = \frac{1}{4!} \sum J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l. \quad (2.5)$$

O χ denota os campos dos férmions de Majorana e devem obedecer a Eq. 2.2. Veja também que os campos tem dimensão 0, mas o acoplamento J_{ijkl} tem dimensão 1, de energia. Então perceba a importância dos acoplamos para o sistema.

Para ficar mais clara a visualização dos acoplamentos, uma representação de vértice é apresentado na Fig. 2.

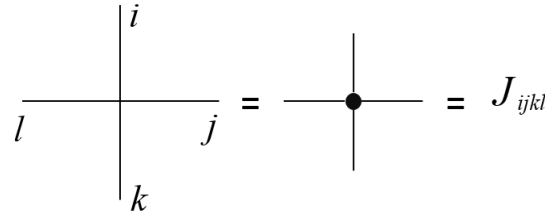


Figura 2 – Vértice com o fator J_{ijkl} apresentado de duas maneiras equivalentes.

A dinâmica do sistema do modelo SYK é dada pela lagrangiana no espaço euclidiano,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \chi_i \partial_t \chi_i - \frac{1}{4!} \sum_{ijkl} J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l, \quad (2.6)$$

encontrada através da ação

$$S = \int d\tau \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \chi_i \partial_\tau \chi_i + \frac{1}{4!} \sum_{ijkl} J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \right). \quad (2.7)$$

Conhecendo a lagrangiana, basta usar a equação de Euler-Lagrange para encontrar o

operador diferencial de primeira ordem dos campos de Majorana, em um tempo imaginário.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} &= \frac{\partial L}{\partial \chi_i} \\
\frac{dL}{d\chi_i} - \frac{d}{d(-t)} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_i} \right) &= 0 \\
\frac{1}{2} \dot{\chi}_i - \frac{1}{3!} J_{jkl} \chi_j \chi_k \chi_l - \left(-\frac{1}{2} \dot{\chi}_i \right) &= 0 \\
\dot{\chi}_i &= \frac{1}{3!} \sum_{jkl}^N J_{jkl} \chi_j \chi_k \chi_l,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

O $\dot{\chi}_i$ caracteriza a variação de três campos de férmions de Majorana. Note que a variável temporal se torna temperatura através de uma rotação de Wick, $t \rightarrow -i\tau = -i\beta$.

O acoplamento é uma variável aleatória com uma distribuição gaussiana. Então, para $q = 4$ é dado por

$$P(J_{ijkl}) = \left(\frac{N^3}{12\pi J^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{N^3 J_{ijkl}^2}{12J^2} \right). \tag{2.9}$$

Da distribuição gaussiana 2.9 se obtém a média

$$\begin{aligned}
\overline{J_{ijkl}} &= \int_{-\infty}^{\infty} d(J_{ijkl}) J_{ijkl} P(J_{ijkl}) \\
&= \left(\frac{N^3}{12\pi J^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d(J_{ijkl}) J_{ijkl} \exp \left(-\frac{N^3 J_{ijkl}^2}{12J^2} \right) \\
\overline{J_{ijkl}} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Perceba que o resultado nulo indica que cada acoplamento tem a mesma intensidade na distribuição. Entretanto, a média da desordem é finita e indica a dispersão da média,

$$\begin{aligned}
\overline{J_{ijkl}^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} d(J_{ijkl}) J_{ijkl}^2 P(J_{ijkl}) \\
&= \left(\frac{N^3}{12\pi J^2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d(J_{ijkl}) J_{ijkl}^2 \exp \left(-\frac{N^3 J_{ijkl}^2}{12J^2} \right).
\end{aligned}$$

Ao usar a integral gaussiana nessa equação,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \exp(-ax^2) = \left(\frac{\pi}{4a^3} \right)^{1/2},$$

se obtém

$$\overline{J_{ijkl}^2} = \frac{6J^2}{N^3}. \tag{2.11}$$

Esse resultado é importante. Ele mostra a estimativa da intensidade do banho térmico pela dispersão dos acoplamentos aleatórios. Logo, o significado físico da constante de acoplamento, J , é a medida da intensidade dos banhos térmicos [73], média sobre a desordem ou, simplesmente, variância.

2.3 Função de Dois Pontos Livre

A função de correlação pode ser interpretada, fisicamente, como a amplitude de propagação de uma partícula por meio da excitação entre os tempos τ e τ' . Em vista disso ela é, muitas vezes, chamada de função de dois pontos. No entanto, ela também é conhecida como propagador de Feynman, quando, na teoria, se considerara livre das demais interações, ou seja, considera-se apenas a função de correlação entre dois pontos [73, 83, 84]. A sua definição, no espaço euclideo, para férmions de Majorana é

$$G_{ij}(\tau) \equiv \langle T \chi_i(\tau_1) \chi_j(0) \rangle. \quad (2.12)$$

O T é operador de ordenamento temporal, cujo principal sentido é ordenar, de acordo com o tempo (um tempo imaginário $\tau = it$), do maior para o menor, os operadores de campo de Majorana (χ).

Essas características, de impor um tempo imaginário, define o formalismo de Matsubara ou o formalismo de tempo imaginário [84, 85], por meio do qual, consegue-se obter a interação dos férmions de Majorana no modelo SYK, Eq. 2.8.

Um dos meios de se obter explicitamente a Eq. 2.12 é o método funcional [86]. Nele se tem uma função de partição $Z_0[J]$ para uma fonte qualquer J (o índice 0 é usado para indicar que é a teoria livre). Como o nome do método sugere, existirá nele uma função. Ela será a responsável pela correlação, das amplitudes de propagação, geradas pela fonte. Assim,

$$Z_0[J] = \int D\chi_1 \cdots D\chi_N \cdot e^{(-S)}. \quad (2.13)$$

O símbolo $\int D\chi_1$ é simplesmente outra maneira de escrever “soma sobre todos os caminhos”.

A função 2.13 foi escrita de modo a se conseguir a amplitude total do sistema e S é a sua fase. No limite clássico apenas um caminho, o clássico, contribui para tal amplitude. Sendo assim,

$$Z_0[J] = \int D\chi_i \cdot e^{-\left(\int d\tau \frac{1}{2} \chi_i \partial_\tau \chi_i - \int d\tau J_i \chi_j\right)}. \quad (2.14)$$

A Eq. 2.14 pode ser reescrita completando quadrados [87],

$$-\frac{1}{2} \chi_i \partial_\tau \chi_i + J_i \chi_j = -\frac{1}{2} (\chi_i \partial_\tau^{-1} J_i) \partial_\tau (\chi_i \partial_\tau^{-1} J_i) + \frac{1}{2} J_i \partial_\tau^{-1} J_j. \quad (2.15)$$

Logo, é possível reescrever a Eq. 2.14 da seguinte forma:

$$Z_0[J] = \int D\chi_i \cdot e^{-\int d\tau \frac{1}{2} (\chi_i \partial_\tau^{-1} J_i) \partial_\tau (\chi_i \partial_\tau^{-1} J_i)} \cdot e^{\int d\tau (\frac{1}{2} J_i \partial_\tau^{-1} J_j)}. \quad (2.16)$$

Observe que o primeiro termo, dessa equação, é equivalente à soma sobre todos os caminhos na ausência de fontes, o qual é denotado por $Z[0]$ (normalizado da forma $Z[0] = 1$). Assim,

$$Z_0[J] = e^{\int d\tau (\frac{1}{2} J_i \partial_\tau^{-1} J_j)}. \quad (2.17)$$

A propriedade do operador ∂^{-1} quando atua na função de Green Δ pode ser vista como,

$$\frac{d}{d\tau} \Delta(\tau - \tau') = \delta(\tau - \tau'), \quad (2.18)$$

que leva à função de Green,

$$\Delta(\tau - \tau') = \frac{1}{2} \text{sgn}(\tau - \tau'). \quad (2.19)$$

Onde é definido a função "sinal" da forma

$$\text{sgn}(\tau - \tau') \equiv \begin{cases} -1, & \text{se } (\tau - \tau') < 0. \\ 0, & \text{se } (\tau - \tau') = 0. \\ 1, & \text{se } (\tau - \tau') > 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Note que ∂_τ^{-1} se identifica com a própria função de Green. Assim, a equação Eq.2.17 pode ser reescrita como

$$Z_0[J] = e^{\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J_i(\tau') \Delta(\tau - \tau') J_j(\tau)}. \quad (2.21)$$

Agora, é possível calcular a função livre de dois pontos com as conexões dos índices ij :

$$G_{0,ij}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\delta}{\delta J_i(\tau_1)} \left\{ \frac{\delta}{\delta J_j(\tau_2)} Z_0[J] \Big|_{J=0} \right\}. \quad (2.22)$$

Aqui é definido a derivada funcional, $\frac{\delta}{\delta J(\tau)}$, da seguinte forma [86]:

$$\frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} J(\tau_2) = \delta(\tau_1 - \tau_2), \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{\delta J_i(\tau_1)} \int d\tau_2 J_j(\tau_2) \Delta(\tau_2) = \Delta(\tau_1) \delta_{ij}. \quad (2.23)$$

Essa definição é a generalização natural, para funções contínuas, da regra de vetores discretos,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j x_j k_j = k_j. \quad (2.24)$$

Fazendo $\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J_i(\tau') \Delta(\tau - \tau') J_j(\tau) = u$ e usando as propriedades da derivada da função composta, $\partial_J u \partial_u e^u$. É possível escrever

$$\begin{aligned} G_{0,ij}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{\delta}{\delta J_i(\tau_1)} \left[\frac{\delta}{\delta J_j(\tau_2)} \left(\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J_i(\tau') \Delta(\tau - \tau') J_j(\tau) \right) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left(\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J_i(\tau') \Delta(\tau - \tau') J_j(\tau) \right) \Big|_{J=0} \\ &= \frac{\delta}{\delta J_i(\tau_1)} \left[\frac{1}{2} \int d\tau' \Delta(\tau_2 - \tau') J_i(\tau') + \frac{1}{2} \int d\tau J_j(\tau) \Delta(\tau - \tau_2) \right] \\ &= \Delta(\tau_1 - \tau_2) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Note que, da Eq. 2.12, $\tau_2 = 0$. Sendo assim, sobrevive apenas o seguinte termo:

$$G_{0,ij}(\tau_1) = \Delta(\tau_1)\delta_{ij} \quad (2.26)$$

Todavia, lembrando da Eq. 2.19, se consegue

$$G_{0,ii}(\tau) = G_0(\tau) = \frac{1}{2} \text{sgn}(\tau). \quad (2.27)$$

Essa é a função de dois pontos no domínio de tempo. É interessante obter esse resultado para um domínio de frequência. Então, será feita uma transformação de Fourier por meio do formalismo de Matsubara. Dessa forma,

$$G_0(\omega) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega\tau} G_0(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau e^{i\omega\tau} \text{sgn}(\tau) \quad (2.28)$$

Note que ω é a frequências de Matsubara, com $\omega = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ [84, 85]. Ela contém a temperatura inversa, β .

Como $\text{sgn}(\tau > 0) = 1$, então

$$G_0(\omega) = -\frac{1}{2} \frac{i}{\omega} (e^{i\omega\beta} - 1) = -\frac{1}{i\omega}, \quad (2.29)$$

com $\beta \rightarrow -\infty$ Em resumo, se tem dois resultados importantes, os seguintes propagadores livres:

$$G_0(\tau) = \frac{1}{2} \text{sgn}(\tau), \quad (2.30)$$

$$G_0(\omega) = -\frac{1}{i\omega}. \quad (2.31)$$

Essas equações, como será discutido com mais detalhes na próxima subseção, fornecem os diagramas de Freynman.

2.4 Diagramas 1PI e Equação de Schwinger-Dyson

Os diagramas de Freynman gerados pelas equações, 2.30 e 2.31 são chamados de "diagramas de melão", ou de "melancia". Nessa seção, se obtém, por perturbação, funções de dois pontos mais completas e, através delas, construir os diagramas Irreduzíveis de Uma Partícula (1PI) [8, 73, 86].

Os diagramas gerados pelo método perturbativo tem uma característica especial. No limite de N muito grande ou infravermelho, alguns deles serão excluídos. Então é aplicável tratar

$$S = \int d\tau L_0 - \int d\tau L_{int}. \quad (2.32)$$

Onde L_0 é o lagrangiano livre e L_{int} com suas interações mediadas pela constante de acoplamento, J . Conseqüentemente, é possível expandir, até certa ordem, a exponencial da função de partição. Sendo assim, pode-se escrever

$$Z[J] = \int D\chi_i e^{-\int d\tau L_0} \chi_a(\tau_1) \chi_b(\tau_2) \left[1 - \int d\tau L_{int} + \frac{1}{2} \left(\int d\tau L_{int} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.33)$$

Perceba a presença do fator adicional, $\chi_a(\tau_1) \chi_b(\tau_2)$, colocado devido às condições de contorno da integral de caminho para valores acima da integral livre. Ele é utilizado para fazer a conexão entre vértices [86]. Já o L_{int} só depende dos campos, não das suas derivadas. Então, pode ser definido como

$$L_{int} = \frac{1}{4!} \sum_{ijkl}^N J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l. \quad (2.34)$$

As funções de correlação são calculadas da seguinte forma:

$$G_{ab}(\tau_1, \tau_2) = \langle T \chi_a(\tau_1) \chi_b(\tau_2) \rangle = \int D\chi_1 e^{-\int (L_0 - L_{int})} \chi_a(\tau_1) \chi_b(\tau_2). \quad (2.35)$$

E, com a expansão, são dadas por

$$G_{ab}(\tau_1, \tau_2) = \int D\chi_i e^{-\int d\tau L_0} \chi_a(\tau_1) \chi_b(\tau_2) \times \left\{ 1 + \int dJ_{ijkl} P(J_{ijkl}) \left[- \int d\tau L_{int} + \frac{1}{2} \left(\int d\tau L_{int} \right)^2 + \dots \right] \right\}. \quad (2.36)$$

Note que, a partir do segundo termo, é preciso usar a média das funções de correlação com relação à distribuição de probabilidade das constantes de acoplamento. Obviamente, as funções de correlação podem ser entendidas em termos dos diagramas de Feynman, onde os diagramas com n -vértices são obtidos a partir de uma expansão da série de potências do exponencial na função de correlação.

O primeiro termo é a função de dois pontos livre, Fig. 3, já calculada:

$$G_{0,ab}(\tau_1, \tau_2) = \int D\chi_1 e^{-\int d\tau L_0} \chi_a(\tau_1) \chi_b(\tau_2) = \frac{1}{2} \text{sgn}(\tau_1 - \tau_2) \delta_{ab}. \quad (2.37)$$



Figura 3 – Diagrama do propagador livre.

A partir de agora ficará implícito a somatória sobre índices repetidos. Assim sendo, para o cálculo do segundo termo,

$$\int dJ_{ijkl} P(J_{ijkl}) \left[- \int D\chi_i e^{-\int d\tau L_0} \chi_a(\tau_1) \chi_b(\tau_2) \int d\tau \frac{J_{ijkl}}{4!} \chi_i(\tau) \chi_j(\tau) \chi_k(\tau) \chi_l(\tau) \right], \quad (2.38)$$

pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4!} \int dJ_{ijkl} P(J_{ijkl}) J_{ijkl} \int d\tau G_{0,ab}(\tau_1, \tau_2) \delta_{ab} \chi_i(\tau) \chi_j(\tau) \chi_k(\tau) \chi_l(\tau) \\ & = -\frac{\overline{J_{ijkl}}}{4!} \int d\tau G_{0,ab}(\tau_1, \tau_2) \delta_{ab} \delta_{ij} \delta_{kl} = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

A Eq. 2.39 se torna nula após a média sobre a desordem, pois o acoplamento gaussiano tem valor médio zero, Fig. 4. Assim, não há contribuições, de primeira ordem, na função de dois pontos.

No entanto, o diagrama da Eq. 2.39 era zero mesmo antes da média sobre a desordem. Pode-se observar que, pelo teorema de Wick, o número de pernas externas sempre força a contração de dois campos de Majorana dentro da integral, $\chi_i(\tau_1) \chi_j(\tau_2) \propto \delta_{ij}$.

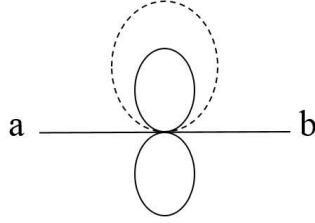


Figura 4 – Diagrama para propagador com média zero.

A linha pontilhada na Fig. 4 representa a média sobre a desordem. Não é necessário especificar os índices de tempo nos diagramas, pois eles podem corresponder a uma integral no domínio ao longo do tempo para cada vértice; caso contrário, eles rotulariam as pernas externas. Sendo assim, os índices temporais serão omitidos nos próximos diagramas.

Agora, para segunda ordem

$$\begin{aligned} & \int dJ_{ijkl} P(J_{ijkl}) J_{ijkl} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{4!} \frac{1}{4!} \int D\chi_i e^{-\int d\tau L_0} \chi_a(\tau_1) \chi_b(\tau_2) J_{ijkl} J_{mnop} \times \right. \\ & \quad \left. \times \int d\tau \chi_i(\tau) \chi_j(\tau) \chi_k(\tau) \chi_l(\tau) \int d\tau' \chi_m(\tau') \chi_n(\tau') \chi_o(\tau') \chi_p(\tau') \right] \\ & = \int dJ_{ijkl} P(J_{ijkl}) J_{ijkl} \left[\frac{1}{2} \frac{s}{4!4!} J_{ijkl} J_{mnop} \int d\tau d\tau' \delta_{ab} G_0(\tau_1 - \tau_2) \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp} [G_0(\tau - \tau')]^4 \right] \end{aligned}$$

O delta é usado para evitar contrações com os mesmos índices, mas observe que foi introduzido um fator de simetria $s = (4)^3 3! 3!$ para evitar a contagem de diagramas repetidos. Assim,

$$\begin{aligned} & \int dJ_{ijkl} P(J_{ijkl}) J_{ijkl} \left[\frac{1}{2} \frac{s}{4!4!} J_{ijkl} J_{mnop} \int d\tau d\tau' G_{0,ai}(\tau_1 - \tau) \delta_{ai} G_{0,bm}(\tau_2 - \tau') \delta_{bm} \times \right. \\ & \quad \left. \times G_{0,jn}(\tau - \tau') \delta_{jn} G_{0,ko}(\tau - \tau') \delta_{ko} G_{0,lp}(\tau - \tau') \delta_{lp} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

e usando a propriedade da função delta,

$$\sum_{jnkolp} \delta_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp} = N^3, \quad (2.41)$$

chega-se na expressão em que variância força os índices a serem iguais

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{s}{4!4!} N^3 \frac{3!J^2}{N^3} \int d\tau d\tau' G_{0,aa}(\tau_1 - \tau) G_{0,bb}(\tau' - \tau_2) [G_0(\tau - \tau')]^3. \\ & = \frac{3!J^2}{2} \frac{s}{4!4!} \int d\tau d\tau' G_{0,aa}(\tau_1 - \tau) G_{0,bb}(\tau' - \tau_2) [G_0(\tau - \tau')]^3. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Essa equação corresponde ao diagrama da Fig. 5.

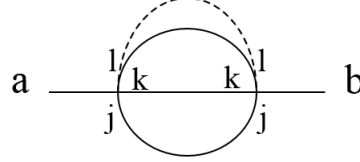


Figura 5 – "Diagrama de melão".

A próxima contribuição será a de quarta ordem,

$$\int dJ_{ijkl} P(J_{ijkl}) \left\{ \int D\chi_i e^{-\int d\tau L_0} \chi_a(\tau_1) \chi_b(\tau_2) \left[\frac{1}{4!} \left(\int d\tau L_{int} \right)^4 \right] \right\}. \quad (2.43)$$

A qual segue como

$$\begin{aligned} & \int dJ_{ijkl} P(J_{ijkl}) \left[\frac{s}{(4!)^5} J_{ijkl} J_{mnop} J_{qrst} J_{uvwx} \int d\tau d\tau' d\tau'' d\tau''' G_0(\tau_1 - \tau_2) \delta_{ab} \times \right. \\ & \quad \left. \times [G_0(\tau - \tau')]^4 \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp} [G_0(\tau'' - \tau''')]^4 \delta_{qu} \delta_{rv} \delta_{sw} \delta_{tx} \right] \\ & = \int dJ_{ijkl} P(J_{ijkl}) \left[\frac{s}{(4!)^5} J_{ijkl} J_{cnop} J_{crst} J_{uvwx} \int d\tau d\tau' d\tau'' d\tau''' G_{0,ii}(\tau_1 - \tau) \delta_{ii} \times \right. \\ & \quad \left. \times [G_0(\tau - \tau')]^3 \delta_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp} G_{0,bb}(\tau' - \tau'') \delta_{bb} [G_0(\tau'' - \tau''')]^3 \delta_{rv} \delta_{sw} \delta_{tx} \times \right. \\ & \quad \left. \times G_{0,uu}(\tau''' - \tau_2) \delta_{uu} \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Note que, para haver correlação entre os vértices na Eq. 2.44, as constantes precisam ter um índice em comum, para se conseguir isso, basta usar novamente a propriedade que a media sobre a desordem força os índices a serem iguais. Com essa observação e usando a propriedade da função delta,

$$\sum_{jklmnoprstvwx} \delta_{jn} \delta_{ko} \delta_{lp} \delta_{rv} \delta_{sw} \delta_{tx} = N^6, \quad (2.45)$$

chega-se a

$$\begin{aligned} & \frac{(3!)^2 J^4 s N^6}{N^6 (4!)^5} \int d\tau d\tau' d\tau'' d\tau''' G_{0,aa}(\tau_1 - \tau) [G_0(\tau - \tau')]^3 G_0(\tau' - \tau'') [G_{0,bb}(\tau'' - \tau''')]^3 \\ & \quad \times G_{0,aa}(\tau''' - \tau_2), \end{aligned} \quad (2.46)$$

a qual produz o diagrama de Feynman da Fig. 6.

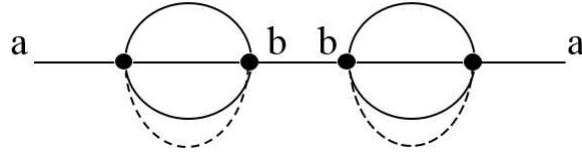


Figura 6 – "Diagrama de melão" para a perturbação de quarta ordem.

A partir dos cálculos das figuras 5 e 6, pode-se deduzir uma regra. Todo propagador interno, incluído entre dois vértices, faz com que a variância contribua com um fator N para a função de dois pontos. Isso significa que, por exemplo na Fig. 5, os três propagadores internos fornecem uma contribuição de N^3 .

Para ficar mais claro, mantendo esta regra da contribuição dos propagadores, é examinado um novo diagrama, Fig. 7. Como se pode ver nessa figura, se tem quase a mesma configuração da Fig. 6. Veja que a variância é tomada de maneira diferente.

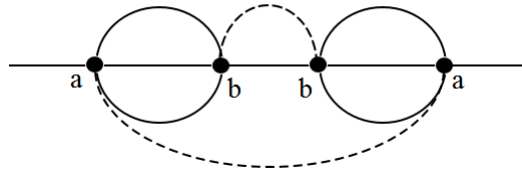


Figura 7 – Tipo de diagrama que não contribui para a função de dois pontos quando N é muito grande.

Fazendo o mesmo procedimento de antes, mas agora com a variância tomada de forma diferente:

$$\frac{(3!)^2 J^4}{N^6} \frac{s}{(4!)^5} \sum_{ijkb} \delta_{ii} \delta_{jj} \delta_{kk} \delta_{bb} \int d\tau d\tau' d\tau'' d\tau''' G_0(\tau_1 - \tau) [G_0(\tau - \tau')]^3 G_0(\tau' - \tau'') [G_0(\tau'' - \tau''')]^3 G_0(\tau''' - \tau_2). \quad (2.47)$$

Observe que a média sobre a desordem do vértice a , a um outro, impõe a condição de que os propagadores de a, b e de b, a tenham os mesmos índices. Por causa disso, se consegue um fator N^4 , ao em vez de N^6 , na soma das funções delta,

$$\frac{(3!)^2 J^4}{N^6} \frac{s}{(4!)^5} N^4 \int d\tau d\tau' d\tau'' d\tau''' G_0(\tau_1 - \tau) [G_0(\tau - \tau')]^3 G_0(\tau' - \tau'') [G_0(\tau'' - \tau''')]^3 G_0(\tau''' - \tau_2). \quad (2.48)$$

A Eq. 2.48 gera um fator de $\frac{1}{N^2}$, um fator que extingue a contribuição dos diagramas formados por esse tipo de configuração no limite N grande. A partir disso, pode-se concluir

que os únicos diagramas que contribuem para a função de dois pontos, nesse limite, são aqueles com a estrutura do "diagrama de melão".

Agora que se conhece quais diagramas contribuem para a função de correlação, é definido a auto-energia, $\Sigma(\tau_1, \tau_2)$, a soma de todos os diagramas que não podem ser divididos em dois [86], ou seja, na Fig. 8 a bola cinza representa a soma de todos esses diagramas.

$$\Sigma(\tau_1, \tau_2) = J^2 G(\tau_1, \tau_2)^3. \quad (2.49)$$

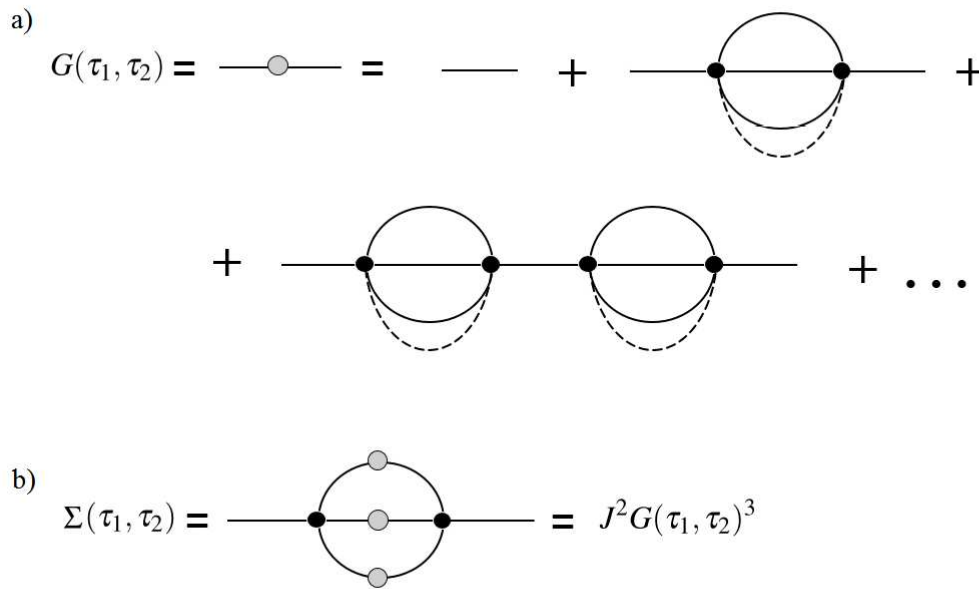


Figura 8 – a) Contribuição dos diagramas 1PI b) Auto-energia.

Conhecendo os diagramas 1PI, pode-se reescrever a Eq 2.31 em termos deles [7, 43]:

$$G(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \frac{1}{i\omega} \Sigma \frac{1}{i\omega} + \frac{1}{i\omega} \Sigma \frac{1}{i\omega} \Sigma \frac{1}{i\omega} + \dots = \frac{1}{i\omega} \left(\Sigma \frac{1}{i\omega} \right)^n. \quad (2.50)$$

Essa expressão pode ser expandida em uma série geométrica,

$$G(\omega) = \frac{1}{i\omega} \left[\frac{1}{1 - \left(\Sigma \frac{1}{i\omega} \right)} \right]. \quad (2.51)$$

A Eq. 2.51 pode ser escrita como

$$G(\omega)^{-1} = i\omega - \Sigma(i\omega), \quad (2.52)$$

ou simplesmente

$$G^{-1} = G_0 - \Sigma. \quad (2.53)$$

Essa é a equação de Schwinger-Dyson no domínio de frequência [8].

É necessário tomar o limite de N muito grande para se conseguir a função completa de dois pontos no espaço euclidiano. Entretanto, veja que quando reescrita no espaço de frequências, esse limite faz com que, por aproximação, seja perdido o $i\omega$ na Eq. 2.52. Assim, o que se tem é um $\Sigma(i\omega) \gg (i\omega)$. Fisicamente, isso significa que a frequência é dada no limite de baixa energia (ou de acoplamento forte), $\beta J \gg 1$ [7].

2.5 Simetria conforme e temperatura finita

Uma teoria de campo conforme é aquela em que os campos possuem uma invariância de escala. Assim, por exemplo, uma variação de escala nas coordenadas e transformadas de uma métrica, Fig. 9, é dita conforme se essas forem múltiplas das coordenadas originais. Uma característica disso é a preservação da soma dos ângulos internos [88].

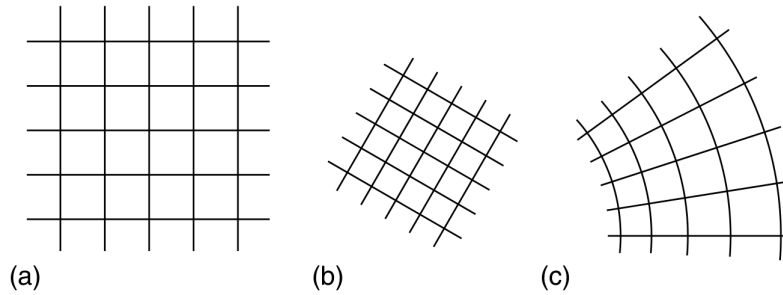


Figura 9 – a) Região bidimensional. b) Efeito da transformação conforme especial. (c) Efeito de uma transformação conforme mais geral [89].

O modelo SYK tem $(0+1)d$, ou seja, não apresenta dimensão espacial. Logo, não há noção de ângulo, toda transformação suave é conforme, $Conf(R^1) \cong Dif f(R^1)$ [8, 83]. Consequentemente, a função completa de dois pontos e a auto-energia são invariantes por reparametrização. Sendo assim,

$$G(\tau, \tau') \rightarrow |f'(\tau)f'(\tau')|^{\Delta} G(f(\tau), f(\tau')); \quad (2.54)$$

$$\Sigma(\tau', \tau) \rightarrow |f'(\tau)f'(\tau')|^{\Delta(q-1)} \Sigma(f(\tau), f(\tau')).$$

O $\Delta = \frac{1}{q}$ é a dimensão conforme dos férmions de Majorana e $f'(\tau) = \frac{df}{d\tau}$.

A simetria conforme é uma característica marcante do SYK. Com essa visão, utiliza-se as equações 2.49 e 2.52 a fim de uni-las em uma única equação,

$$G^{-1}(\omega) \cdot \Sigma(\tau_1, \tau_2) = -1.$$

Por conseguinte, através de uma transformação de Fourier, essa equação pode ser reescrita como

$$\int d\tau G(\tau_1, \tau)G(\tau, \tau_2) = -\delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (2.55)$$

No entanto, ao retomar as Eq. 2.49 e 2.52 tem-se

$$J^2 \int d\tau' G(\tau, \tau')G(\tau', \tau'')^3 = -\delta(\tau - \tau''). \quad (2.56)$$

Em termos de diagramas de Feynman, a Eq. 2.56 pode ser representada pela Fig. 10.

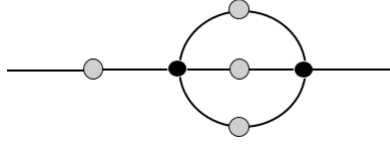


Figura 10 – Equação Schwinger-Dyson em um domínio de tempo e frequência.

Agora é possível ver a simetria conforme do SYK, uma consequência do limite IR definido como $\Delta = \frac{1}{q}$ e aplicado na Eq. 2.56. Isso possibilita a utilização do seguinte *ansatz* [8, 83]:

$$G(\tau) = \frac{b}{|\tau|^{2\Delta}} \text{sgn}(\tau). \quad (2.57)$$

Com $G \sim \frac{1}{\tau^{2\Delta}}$ garantindo o limite IR. Essa é uma função invariante sobre 2.54.

Entretanto, é necessário determinar a constante b . Isso pode ser feito usando a Eq. 2.56, com ela chega-se

$$J^2 b^4 \int d\tau' \frac{\text{sgn}(\tau - \tau') \text{sgn}(\tau' - \tau'')}{|\tau - \tau'|^{2\Delta} |\tau' - \tau''|^{6\Delta}} = -\delta(\tau - \tau''). \quad (2.58)$$

Usando novamente uma transformação Fourier,

$$\begin{aligned} \frac{\text{sgn}(\tau)}{|\tau|^{2\Delta}} &= \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega\tau} C(2\Delta) |\omega|^{2\Delta-1} \text{sgn}(\omega), \\ \frac{\text{sgn}(\tau)}{|\tau|^{6\Delta}} &= \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega\tau} C(6\Delta) |\omega|^{6\Delta-1} \text{sgn}(\omega). \end{aligned}$$

com,

$$C(2\Delta) = i2^{1-2\Delta} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1-\Delta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \Delta\right)} \quad (2.59)$$

e

$$C(6\Delta) = i2^{1-6\Delta} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1-3\Delta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+3\Delta\right)},$$

chega-se a

$$J^2 b^4 C(2\Delta) C(6\Delta) \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(\tau-\tau'')} |\omega|^{8\Delta-2} = -\delta(\tau - \tau''). \quad (2.60)$$

Fazendo $q = 4$, o que implica em $\Delta = \frac{1}{4}$, e sabendo que $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, bem como $\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(\tau-\tau'')} = \delta(\tau - \tau'')$ se consegue

$$4J^2 b^4 \pi = 1. \quad (2.61)$$

Finalmente, se encontra

$$b = \left(\frac{1}{4J^2\pi}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.62)$$

Substituindo a Eq. 2.62 na Eq. 2.57 se consegue a função completa de dois pontos para temperatura infinita:

$$G(\tau) = \left(\frac{1}{4J^2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\text{sgn}(\tau)}{|\tau|^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.63)$$

Então, fazendo a transformação conforme da Eq. 2.54 em Eq. 2.63 com uma função $\tau \rightarrow f(\tau) = tg\left(\frac{\pi\tau}{\beta}\right)$ que caracteriza uma reparametrização em um círculo,

$$G_\beta(\tau - 0) = \left[\frac{\pi}{\beta} \sec^2\left(\frac{\pi\tau}{\beta}\right) \frac{\pi}{\beta} \sec^2(0)\right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4J^2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{tg\left(\frac{\pi\tau}{\beta}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\text{sgn}(\tau)}{\sqrt{tg\left(\frac{\pi\tau}{\beta}\right)}}, \quad (2.64)$$

encontra-se a função de dois pontos completa para uma temperatura finita [43],

$$G_\beta(\tau) = \frac{\pi^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2J\beta}} \frac{1}{\sqrt{\text{sen}\left(\frac{\pi\tau}{\beta}\right)}} \text{sgn}(\tau). \quad (2.65)$$

Na Eq. 2.65, o crescimento de τ proporciona a dinâmica da função, isso graças ao seno. Algo esperado dos acoplamento em TQC, vista que os pontos estarão separados por um quantidade de tempo suficientemente grande para que não haja interação. Logo, os acoplamentos não devem ser relacionados a uma teoria fortemente interagente em temperatura finita.

2.6 Quebra Espontânea de Simetria

É muito importante notar que a *ansatz*, Eq. 2.63 causa uma quebra espontânea da simetria conforme sob o subgrupo $SL(2, R)$. Por conseguinte, esse subgrupo é definido por

$$\tau \rightarrow f(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc = 1. \quad (2.66)$$

A derivada dessa transformação é:

$$f'(\tau) = \frac{1}{(c\tau + d)^2}. \quad (2.67)$$

Agora, para provar a invariância de $G(\tau, \tau')$ diante da transformação 2.66 com $\tau' = 0$, faz-se

$$\begin{aligned} G(\tau, 0) &= |f'(\tau)f'(0)|^\Delta G(f(\tau), f(0)) \\ &= \frac{a\tau + b}{|c\tau + d|^{2\Delta}} \frac{1}{|d|^{2\Delta}} \frac{\text{sgn}(\tau)}{\left|\frac{a\tau+b}{c\tau+d} - \frac{b}{d}\right|^{2\Delta}} \\ &= \frac{a\tau + b}{|c\tau + d|^{2\Delta}} \frac{1}{d^{2\Delta}} \frac{\text{sgn}(\tau)|d(c\tau + d)|^{2\Delta}}{|\tau(ad - bc)|^{2\Delta}} = \frac{\text{sgn}(\tau)}{|\tau|^{2\Delta}}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Logo, o *ansatz* 2.63, obedece a simetria conforme.

No entanto, se aplicar uma transformação $f(\tau) \in \text{Conf}(R^1)$ para $f(\tau) \notin SL(2, R)$ pode-se ver que o *ansatz* não é invariável. Por exemplo, tomando $f(\tau) = a\tau^2$ para as regras de transformação, tem-se

$$G(\tau, \tau') = |\tau|^2 |\tau'|^2 \frac{\text{sgn}(a\tau^2 - a\tau'^2)}{|\tau^2 - \tau'^2|^{2\Delta}} \neq \frac{\text{sgn}(\tau - \tau')}{|\tau^2 - \tau'^2|^{2\Delta}} \quad (2.69)$$

Com essas duas derivações, comprova-se a quebra espontânea da simetria conforme.

A quebra espontânea da simetria conforme é uma característica marcante do modelo SYK. Uma teoria de campo conforme com uma pequena quebra de simetria como essa é chamada de teoria de campo quase conforme ou *nCFT* [8]. Essa quebra também é vista em diversas variações do SYK, como por exemplo, no SYK acoplado ou modelos de tensores [90].

3 Ação Efetiva do modelo SYK

3.1 Campos Bilocais

Em teoria quântica de campo, o conceito de ação efetiva foi introduzido por DeWitt (1964) em suas palestras dadas em Les Houches e por Jona-Lasinio (1964) no contexto de quebra de simetria [91]. Em particular, diferente da ação calculada na Eq. 2.13, para a ação efetiva são adicionados termos de correções infinitesimais, a fim de obter todas as contribuições do sistema [83].

No Cap. 2 é utilizado o método funcional, que se resume a obter um *ensemble* sobre a desordem, ou seja, medir diretamente a função de partição $\langle Z \rangle_J$, enquanto trata J_{ijkl} como uma variável microscópica, a fonte. Agora, para obter as correções do sistema usa-se o "método da réplica". Nele mede-se a energia livre $\langle \log Z \rangle_J$ [92]. Assim, para evitar complicações no cálculo do valor médio do logaritmo, faz-se

$$\langle \log Z \rangle_J = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\langle Z^n \rangle_J - 1}{n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log \langle Z^n \rangle_J}{n}. \quad (3.1)$$

A enésima potência de Z é a função de partição de um sistema composto de n cópias idênticas e não interativas da mesma realização aleatória do sistema [92].

A integral de caminho, como no Cap. 2, é dada por

$$Z(J_{ijkl}) = \int D\chi_i \exp \left[- \int d\tau \left(\frac{1}{2} \sum_i \chi_i \partial_\tau \chi_i + \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} J_{ijkl} \chi_{ijkl} \right) \right]. \quad (3.2)$$

Aqui, $\chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \equiv \chi_{ijkl}$.

A média da enésima potência de Z pode ser escrita como

$$\langle Z^n \rangle_J = \int D J_{ijkl} P(J_{ijkl}) \cdot Z(J_{ijkl}) \quad (3.3)$$

Aqui, $\int \prod_{a=1}^N D\chi^a \equiv \int D\chi$ e, posteriormente, $\int \prod_{a=1}^N D J_{ijkl} \equiv \int D J_{ijkl}$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle_J = \int D J_{ijkl} P(J_{ijkl}) \int D\chi \exp \left\{ \sum_{a=1}^n \left[- \int d\tau \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \chi_i^a \partial_\tau \chi_i^a \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \chi_{ijkl}^a \right) \right] - \frac{N^3}{12J^2} J_{ijkl}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

As somatórias de índices repetidos ficaram subentendidas. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle_J &= \int D\chi \int DJ_{ijkl} \sqrt{\frac{N^3}{12\pi J^2}} \exp \left[- \left(J_{ijkl} \sqrt{\frac{N^3}{12J^2}} - \frac{1}{2 \cdot 4!} \sqrt{\frac{12J^2}{N^3}} \int d\tau \chi_{ijkl}^a(\tau) \right)^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left[\frac{3J^2}{(4!)^2 N^3} \int d\tau d\tau' \chi_{ijkl}^a(\tau) \chi_{ijkl}^b(\tau') - \frac{1}{2} \int d\tau \chi_i^a \partial_\tau \chi_i^a(\tau) \right] \\ &= \int D\chi \exp \left[\frac{3J^2}{(4!)^2 N^3} \int d\tau d\tau' \chi_{ijkl}^a(\tau) \chi_{ijkl}^b(\tau') - \frac{1}{2} \int d\tau \chi_i^a \partial_\tau \chi_i^a(\tau) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde a e b são índices da réplica.

O fator de $4!$ é usado para que i, j, k, l obedecem as regras de anti-comutação dos férmions na Eq. 3.5. Porém, esse termo pode ser ignorado quando escrito como [93]

$$\frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N = \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq N} . \quad (3.6)$$

Assim, a Eq. 3.5 se torna

$$\langle Z^n \rangle_J = \int D\chi \exp \left(-\frac{1}{2} \int d\tau \chi_i^a \partial_\tau \chi_i^a + \frac{1}{2} \frac{11}{4} \frac{J^2}{N^3} \int d\tau d\tau' \left[\chi_i^a(\tau) \chi_i^b(\tau') \right]^4 \right), \quad (3.7)$$

onde é usado

$$\sum_{a,b=1}^n \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq N} \chi_{ijkl}^a(\tau) \chi_{ijkl}^b(\tau') = \sum_{a,b=1}^n \frac{1}{4!} \left[\sum_i^N \chi_i^a(\tau) \chi_i^b(\tau') \right]^4. \quad (3.8)$$

Perceba que, a partir desse ponto, é preciso lidar com um campo bilocal,

$$\tilde{G}^{ab}(\tau, \tau') = -\frac{1}{N} \chi_i^a(\tau) \chi_i^a(\tau'), \quad (3.9)$$

Esse é o preço pago pela remoção dos acoplamentos desordenados. Esses campos são variáveis que comutam, portanto, de alguma maneira, é possível mapear pares de férmions em bósons bilocais.

É possível reescrever a função de partição como uma integral sobre o campo bilocal \tilde{G} , Eq. 3.9, e integrar os férmions, todavia, para garantir que a teoria permaneça a mesma, é necessário introduzir outro campo, Σ , que funcionará como um multiplicador de Lagrange. Esse multiplicador força \tilde{G} a conter as informações sobre sua definição em função dos férmions de Majorana.

Então, é possível reescrever a função de partição usando a Eq. 3.7 em Eq. 3.1 para uma representação na forma de integral de uma função δ .

$$1 = \int D\tilde{G} \delta \left[\tilde{G}^{ab}(\tau, \tau') - \frac{1}{N} \chi_i^a(\tau) \chi_i^b(\tau') \right] \quad (3.10)$$

$$= \int D\tilde{G} D\tilde{\Sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \tilde{\Sigma}^{ab}(\tau, \tau') \left(\tilde{G}^{ab}(\tau, \tau') - \frac{1}{N} \chi_i^a(\tau) \chi_i^b(\tau') \right) \right], \quad (3.11)$$

Inserindo esta expressão na função de partição,

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle_J &= \int D\chi D\tilde{G}D\tilde{\Sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \tilde{\Sigma}^{ab}(\tau, \tau') \left(\tilde{G}^{ab}(\tau, \tau') - \frac{1}{N} \chi_i^a(\tau) \chi_i^b(\tau') \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left[\frac{J^2 N}{8} \int [\tilde{G}^{ab}(\tau, \tau')]^4 - \frac{1}{2} \int d\tau \chi_i^a \partial_\tau \chi_i^a \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ao usar a propriedade da integral gaussiana

$$\int d\chi e^{-\frac{1}{2} \chi A \chi} = \sqrt{\det A}, \quad (3.13)$$

chega-se a

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle_J &= \int D\tilde{G}D\tilde{\Sigma} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\det(\delta^{ab} \partial_\tau - \tilde{\Sigma}^{ab}) \right) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' (\tilde{\Sigma}^{ab} \tilde{G}^{ab} - \frac{1}{4} J^2 [\tilde{G}^{ab}]^4) \right]. \\ &= \int D\tilde{G}D\tilde{\Sigma} e^{-NI[\tilde{G}\tilde{\Sigma}]}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Agora usa-se a Eq. 3.1,

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log \left[\int D\tilde{G}D\tilde{\Sigma} e^{-NI[\tilde{G}\tilde{\Sigma}]} \right]^n}{n} \sim \int D\tilde{G}D\tilde{\Sigma} (-I[\tilde{G}\tilde{\Sigma}]). \quad (3.15)$$

Assim, a ação para uma única réplica do sistema é definida como:

$$I[\tilde{G}, \tilde{\Sigma}] \equiv -\frac{1}{2} \log \det(\partial_\tau - \tilde{\Sigma}) + \int d\tau d\tau' \left[\tilde{\Sigma} \tilde{G} - \frac{1}{4} J^2 \tilde{G}^4 \right]. \quad (3.16)$$

Essa é a ação efetiva para o SYK.

Para encontrar os campos bilocais, $(\tilde{\Sigma}, \tilde{G})$, faz-se a variação de 3.16 ir a zero com relação aos campos,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{\delta \tilde{\Sigma}(t, t')} \left\{ -\frac{1}{2} \log \det(\partial_\tau - \tilde{\Sigma}(\tau, \tau')) + \int d\tau d\tau' \left[\tilde{\Sigma}(\tau, \tau') \tilde{G}(\tau, \tau') - \frac{1}{4} J^2 [\tilde{G}(\tau, \tau')]^4 \right] \right\} \\ &= \frac{\delta}{\delta \tilde{\Sigma}(t, t')} \left\{ \log \int D\chi \exp \left[\int d\tau d\tau' \chi(\tau) (\tilde{\Sigma}(\tau, \tau') - \partial_{\tau'}) \chi(\tau') \right] + \int d\tau d\tau' \left[\tilde{\Sigma} \tilde{G} - \frac{1}{4} J^2 \tilde{G}^4 \right] \right\} \\ &= \frac{\int D\chi \chi(t) \chi(t') \exp \left[\int d\tau d\tau' \chi(\tau) (\tilde{\Sigma}(\tau, \tau') - \partial_{\tau'}) \chi(\tau') \right]}{\int D\chi \exp \left[\int d\tau d\tau' \chi(\tau) (\tilde{\Sigma}(\tau, \tau') - \partial_{\tau'}) \chi(\tau') \right]} - \tilde{G}(t, t') \\ &= [-\Sigma(\tau, \tau') + \partial_{\tau'}]^{-1} - \tilde{G}(t, t') \end{aligned} \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{\delta \tilde{G}(t, t')} \left\{ -\frac{1}{2} \log \det(\partial_\tau - \tilde{\Sigma}(\tau, \tau')) + \int d\tau d\tau' \left[\tilde{\Sigma}(\tau, \tau') \tilde{G}(\tau, \tau') - \frac{1}{4} J^2 [\tilde{G}(\tau, \tau')]^4 \right] \right\} \\ &= J^2 \tilde{G}(t, t')^3 - \Sigma(t, t'). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Onde é usado a identidade $\log \det A = \text{Tr} \log A$. Assim, se consegue as equações clássicas de movimento [66]:

$$\frac{\delta I}{\delta \tilde{G}} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\Sigma} = J^2 \tilde{G}^3; \quad (3.19)$$

$$\frac{\delta I}{\delta \tilde{\Sigma}} = 0 \Leftrightarrow [\partial_{\tau'} - \tilde{\Sigma}]^{-1} = \tilde{G}, \quad (3.20)$$

Esse procedimento é chamado de "método do ponto de sela". Perceba que essas equações, que surgem da extremização do funcional, estão simplesmente mostrando que os campos bilocais $(\tilde{\Sigma}, \tilde{G})$ são exatamente a função de dois pontos e a auto-energia do sistema, ou seja, as mesmas equações de Schwinger-Dyson do Cap. 2.

3.1.1 Simetria Conforme na Ação Efetiva do SYK

Para verificar se ação efetiva possui simetria conforme no limite do IR, ignora-se o seu termo cinético, $\partial_{\tau'}$, já que ele possui dimensão de energia e a simetria conforme está relacionada a uma invariância de escala nas coordenadas espaciais. Assim, a ação efetiva se torna [66]:

$$I[\tilde{G}, \tilde{\Sigma}] = -\frac{1}{2} \log \det(-\tilde{\Sigma}(\tau, \tau')) + \int d\tau d\tau' \left[\tilde{\Sigma}(\tau, \tau') \tilde{G}(\tau, \tau') - \frac{1}{4} J^2 \tilde{G}(\tau, \tau')^q \right].$$

Agora, ao tomar as reparametrizações

$$\tau \rightarrow f(\tau) \quad e \quad \tau' \rightarrow f(\tau'), \quad (3.21)$$

com as regras de simetria conforme, Eq. 2.54, na ação efetiva é fácil ver que o primeiro termo é invariante,

$$\begin{aligned} \log \det(-\tilde{\Sigma}(\tau, \tau')) &\rightarrow \log \det(-|f'(\tau), f'(\tau')|^{\Delta(q-1)} \tilde{\Sigma}(f(\tau), f(\tau'))) \\ &= \log[|f'(\tau) f'(\tau')|^{\Delta(q-1)} \det(-\tilde{\Sigma}(f(\tau), f(\tau')))] \\ &= \log[|f'(\tau) f'(\tau')|^{\Delta(q-1)} |f'(\tau) f'(\tau')|^{-\Delta(q-1)} \det(-\tilde{\Sigma}(\tau, \tau'))] \\ &= \log \det(-\tilde{\Sigma}(\tau, \tau')). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Então, passando para a termo que tem uma integral,

$$\begin{aligned} &\int d\tau d\tau' \left[\tilde{\Sigma}(\tau, \tau') \tilde{G}(\tau, \tau') - \frac{1}{4} J^2 \tilde{G}(\tau, \tau')^q \right] \\ &= \int d\tau d\tau' \left[|f'(\tau) f'(\tau')|^{\Delta(4-1)} \tilde{\Sigma}(f(\tau), f(\tau')) |f'(\tau) f'(\tau')|^{\Delta} \tilde{G}(f(\tau), f(\tau')) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} J^2 (|f'(\tau) f'(\tau')|^{\Delta} \tilde{G}(f(\tau), f(\tau')))^q \right] \\ &= \int d\tau d\tau' \left[|f'(\tau) f'(\tau')|^{4\Delta - \Delta + \Delta} \tilde{\Sigma}(f(\tau), f(\tau')) \tilde{G}(f(\tau), f(\tau')) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} J^2 [|f'(\tau) f'(\tau')|]^{\Delta} [\tilde{G}(f(\tau), f(\tau'))]^q \right] \\ &= \int d\tau d\tau' |f'(\tau) f'(\tau')|^{4\Delta} \left[\tilde{\Sigma}(f(\tau), f(\tau')) \tilde{G}(f(\tau), f(\tau')) - \frac{1}{4} J^2 [\tilde{G}|f'(\tau) f'(\tau')|^q] \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

No limite do IR se tem q interações, o que implica em $\Delta = 1/q$. Assim,

$$\begin{aligned} &\int d\tau d\tau' |f'(\tau) f'(\tau')| \left\{ \tilde{\Sigma}(f(\tau), f(\tau')) \tilde{G}(f(\tau), f(\tau')) - \frac{1}{q} J^2 [\tilde{G}|f'(\tau) f'(\tau')|^q] \right\} \\ &= \int d\tau d\tau' |f'(\tau) f'(\tau')| \left\{ |f'(\tau) f'(\tau')|^{-1/q} |f'(\tau) f'(\tau')|^{-1+1/q} \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{\Sigma}(\tau, \tau') \tilde{G}(\tau, \tau') - \frac{1}{q} J^2 |f'(\tau) f'(\tau')|^{-1} [\tilde{G}(\tau, \tau')]^q \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nessa equação todas as derivadas se cancelam. Portanto, esse resultado, bem como o da Eq. 3.22, mostram que a ação efetiva possui simetria conforme no limite do IR.

Na seção 2.6 é visto que ansatz do propagador conforme quebra espontaneamente a simetria conforme. Aqui, o termo cinético, ignorado no limite IR, é o responsável por quebrar explicitamente a simetria conforme. Essa característica também garante que a teoria seja uma *nCFT* [8].

3.2 Flutuações nos Campos Bilocais

Ciente da simetria conforme da ação efetiva no limite de IR, então é possível introduzir flutuações para as equações clássicas de movimento, 3.19, a fim de se obter o comportamento da ação na presença dessas flutuações. Isso posto, os campos bilocais podem ser escritos da seguinte forma [8, 83]:

$$\tilde{G} = G + |G|^{\frac{2-q}{2}} g. \quad (3.25)$$

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma + |G|^{\frac{-2+q}{2}} \sigma. \quad (3.26)$$

Ao modificar os campos bilocais com flutuações, g , σ , na ação efetiva é mantido apenas os termos de segunda ordem. Os termos lineares são nulos, já que são expansões em torno de um ponto de sela. Também pode-se ignorar os termos que são independentes de g , σ já que eles não serão integrados. Desse modo, podem ser considerados constantes. Sendo assim, a ação efetiva pode ser reescrita como

$$I = -\frac{1}{2} \log \det [\partial_\tau - (\Sigma + |G|^{\frac{-2+q}{2}} \sigma)] + \frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 \left\{ (\Sigma + |G|^{\frac{-2+q}{2}} \sigma)(G + |G|^{\frac{2-q}{2}} g) - \frac{J^2}{q} (G + |G|^{\frac{2-q}{2}} g) \right\}. \quad (3.27)$$

Para trabalhar com as flutuações presentes nessa equação é necessário tratar cada termo separadamente.

- Para o primeiro usa-se $\log(b + ax) = \log(b) + \frac{ax}{b} - \frac{a^2 x^2}{2b^2} + \mathcal{O}(x^3)$ e a identidade $\log \det A = \text{Tr} \log A$. Também se utiliza $\partial_\tau - \Sigma = G^{-1}$. Ao expandir esse termo, mantendo apenas a os de segunda ordem, chega-se a

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} \sigma(\tau_1, \tau_2) |G(\tau_1, \tau_2)|^{\frac{q-2}{2}} G(\tau_1, \tau_3) G(\tau_2, \tau_4) |G(\tau_3, \tau_4)|^{\frac{q-2}{2}} \sigma(\tau_3, \tau_4) \right).$$

Essa expressão pode ser escrita usando o *kernel* simétrico,

$$\tilde{K}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) = -J^2(q-1) |G(\tau_{12})|^{\frac{q-2}{2}} G(\tau_{13}) G(\tau_{24}) |G(\tau_{34})|^{\frac{q-2}{2}},$$

como

$$-\frac{1}{4J^2(q-1)} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 [\sigma(\tau_1, \tau_2) \tilde{K}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \sigma(\tau_3, \tau_4)]. \quad (3.28)$$

- A partir do segundo termo, a única contribuição não trivial é:

$$G^q(1 + G^{-1}|G|^{\frac{q-2}{2}}g)^q \approx G^q[1 + q(q-1)G^{-2}|G|^{2-q}g^2] \approx (\text{sgn } G)^{q-2}g(\tau_1, \tau_2),$$

onde é usado a definição da função sgn , $x = \text{sgn}(x) \cdot |x|$. Nesse caso, $q = 2n$, então $q - 2 \in \mathbb{Z}$. Isso significa que $(\text{sgn } G)^{q-2} = 1$

- Já o segundo termo se torna:

$$\frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 [\sigma(\tau_1, \tau_2)g(\tau_1, \tau_2) - \frac{1}{2}J^2(q-1)g^2(\tau_1, \tau_2)]. \quad (3.29)$$

Então, para manter a expressão final da função de partição legível, a partir de agora, é utilizado a notação abreviada:

$$\begin{aligned} \langle \sigma | \tilde{K} | \sigma \rangle &= \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 [\sigma(\tau_1, \tau_2) \tilde{K}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4) \sigma(\tau_3, \tau_4)], \\ \langle \sigma | g \rangle &= \int d\tau_1 d\tau_2 \sigma(\tau_1, \tau_2) g(\tau_1, \tau_2). \end{aligned}$$

No que essa equação diz respeito à medida de integração. Onde $d\tilde{\Sigma}d\tilde{G} = |G|^{\frac{2-q}{2}}|G|^{\frac{-2+q}{2}}d\sigma dg = d\sigma dg$. Assim, a ação efetiva se torna:

$$\frac{I}{N} = -\frac{1}{4J^2(q-1)} \langle \sigma | \tilde{K} | \sigma \rangle + \frac{1}{2} \langle \sigma | g \rangle - \frac{1}{4} J^2(q-1) \langle g | g \rangle. \quad (3.30)$$

Usando a função de partição

$$\langle Z \rangle_J \sim \int D\tilde{g}D\tilde{\sigma} \exp \left[N \left(-\frac{1}{4J^2(q-1)} \langle \sigma | \tilde{K} | \sigma \rangle + \frac{1}{2} \langle \sigma | g \rangle - \frac{1}{4} J^2(q-1) \langle g | g \rangle \right) \right], \quad (3.31)$$

e a fórmula gaussiana

$$\int dx e^{-ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}, \quad (3.32)$$

chega-se a

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle_J &\sim (4J^2(q-1)\pi)^{1/2} \int D\tilde{g}D\tilde{\sigma} \exp \left[N \left(\left(\frac{1}{2} \langle \sigma | g \rangle \right)^2 \frac{1}{4} \frac{4J^2(q-1)}{\langle \sigma | \tilde{K} | \sigma \rangle} - \frac{1}{4} J^2(q-1) \langle g | g \rangle \right) \right] \\ &= (4J^2(q-1)\pi)^{1/2} \int D\tilde{g}D\tilde{\sigma} \exp \left[N \left(\frac{J^2(q-1)}{4} \left(\frac{\langle \sigma | g \rangle^2}{\langle \sigma | g \rangle \langle g | \tilde{K} | g \rangle \langle g | \sigma \rangle} - 1 \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{I(g)}{N} = \frac{J^2(q-1)}{4} \langle g | \tilde{K}^{-1} - 1 | g \rangle. \quad (3.33)$$

Essa é a ação efetiva em termos das flutuações dos campos bilocais.

3.2.1 Modos Nambu-Goldstone

Nesta seção, mais uma vez, será estudado a ação no limite conforme. Pode-se usar as expressões já conhecidas para o propagador conforme e o *kernel* simétrico. A ação 3.33 é nula quando g é uma auto-função do *kernel* simétrico com o auto-valor 1 [8].

As equações de Schwinger-Dyson possuem simetria conforme. Isso significa que se for feito uma transformação do tipo $\tau \rightarrow \tau + \epsilon(\tau)$, G_c é uma solução (o c faz referencia as funções conformes), então $G_c + \delta_\epsilon G_c$ também é uma solução. Para encontrar a forma explícita de $\delta_\epsilon G_c$ é usado a regra de transformação para o propagador, $f(\tau) = \tau + \epsilon(\tau)$, e expansão em ϵ . Em detalhes:

$$\begin{aligned} G_c(\tau, \tau') &\rightarrow |f'(\tau)f'(\tau')|^\Delta G(f(\tau), f(\tau')) \\ &= [1 + \Delta\epsilon'(\tau) + \epsilon'(\tau')][G_c(\tau, \tau') + \epsilon(\tau)\partial_\tau G_c(\tau, \tau') + \epsilon(\tau')\partial_{\tau'} G_c(\tau, \tau')] \\ &= G_c(\tau, \tau') + [\Delta\epsilon'(\tau) + \epsilon'(\tau') + \epsilon(\tau)\partial_\tau + \epsilon(\tau')\partial_{\tau'}]G_c(\tau, \tau') \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se:

$$\delta_\epsilon G_c(\tau, \tau') = [\Delta\epsilon'(\tau) + \epsilon'(\tau') + \epsilon(\tau)\partial_\tau + \epsilon(\tau')\partial_{\tau'}]G_c(\tau, \tau'). \quad (3.34)$$

Agora é possível levar essa transformação à equação de Schwinger-Dyson no domínio de tempo e frequência:

$$\begin{aligned} \int d\tau G(\tau, \tau')\Sigma(\tau, \tau'') &= -\delta(\tau' - \tau'') \\ &= \int [G_c(\tau, \tau') + \delta_\epsilon G_c(\tau, \tau')][\Sigma_c(\tau, \tau'') + \delta_\epsilon \Sigma_c(\tau, \tau'')] \\ &= \int [G_c(\tau, \tau')\Sigma_c(\tau, \tau'') + G_c(\tau, \tau')\delta_\epsilon \Sigma_c(\tau, \tau'') \\ &\quad + \delta_\epsilon G_c(\tau, \tau')\Sigma_c(\tau, \tau'') + \delta_\epsilon G_c(\tau, \tau')\delta_\epsilon \Sigma_c(\tau, \tau'')] \\ &= \int d\tau + \int [G_c(\tau, \tau') \cdot \delta_\epsilon \Sigma_c(\tau, \tau'') + \Sigma_c(\tau, \tau'')\delta_\epsilon G_c(\tau, \tau')] \\ &= \int [G_c(\tau, \tau') \cdot \delta_\epsilon \Sigma_c(\tau, \tau'') + \Sigma_c(\tau, \tau'')\delta_\epsilon G_c(\tau, \tau')] = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Veja que os termos quadráticos em δ são descartados. Assim, por simplicidade, é possível escrever:

$$\delta_\epsilon G_c * \Sigma_c + G_c * \delta_\epsilon \Sigma_c = 0, \quad (3.36)$$

onde a integração está implícita. No limite do IR pode-se usar $\Sigma = G_c^{-1}$ e também a definição de $\Sigma_c = J^2 G_c^{q-1}$. Então, ao aplicar a regra da cadeia, $\delta_\epsilon \Sigma_c(G_c) = \delta_\epsilon \Sigma_c \cdot \delta_\epsilon G_c$, se consegue:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon G_c * \Sigma_c &= -G_c * \delta_\epsilon \Sigma_c \\ \delta_\epsilon G_c * G_c^{-1} &= -G_c * \delta_\epsilon \Sigma_c \\ \delta_\epsilon G_c &= -G_c * \delta_\epsilon \Sigma_c * G_c \\ \delta_\epsilon G_c &= -G_c * \delta_\epsilon \Sigma_c * \delta_\epsilon G_c \\ \delta_\epsilon G_c + G_c * \delta_\epsilon [J^2 G_c^{q-1}] * G_c & \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\delta_\epsilon G_c + G_c * [J^2(q-1)G_c^{q-2}] * \delta_\epsilon G_c = 0. \quad (3.38)$$

Ao usar a expressão do *kernel* nessa equação,

$$\begin{aligned} K(\tau_3, \tau_4, \tau_1, \tau_2) &= J^2(q-1)G(\tau_1, \tau_3)G(\tau_2, \tau_4)G(\tau_1, \tau_2)^{q-2} \\ G_c &= K_c [J^2(q-1)G_c G_c^{q-2}]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

é obtido

$$(1 - K_c)\delta_\epsilon G_c = 0. \quad (3.40)$$

Note que $\delta_\epsilon G_c$ é uma auto-função do *kernel* com auto-valor 1. Assim, pode-se reescrever essa expressão de uma maneira diferente para conter o *kernel* simétrico.

$$\begin{aligned} 1 - K_c &= 1 - \tilde{K}_c |G(\tau_{12})|^{\frac{2-q}{2}} |G\tau_{34}|^{-\frac{-2+q}{2}} \\ &= |G(\tau_{34})|^{\frac{2-q}{2}} - \tilde{K}_c |G(\tau_{34})|^{\frac{2-q}{2}} = (1 - \tilde{K}_c) |G|^{\frac{2-q}{2}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Essa é uma forma abreviada de:

$$\int d\tau_1 d\tau_2 \tilde{K}_c(\tau_3, \tau_4, \tau_1, \tau_2) |G(\tau_{12})|^{\frac{2-q}{2}} |G\tau_{34}|^{-\frac{-2+q}{2}} \delta_\epsilon G_c(\tau_{12}) = |G(\tau_{34})|^{\frac{2-q}{2}} \delta_\epsilon G_c(\tau_{34})$$

Assim, é provado que existem auto-funções de \tilde{K} que possuem auto-valor 1. São as que fazem a Eq. 3.40 ser satisfeita. Além disso, é mostrado que essas auto-funções são as reparametrizações do propagador conforme.

A interpretação física, para auto-funções de \tilde{K} possuírem auto-valor 1, é que esses modos zero estão associados a quebra de simetria conforme da ação efetiva pela solução G_c . Assim, esses modos zero podem ser vistos como os modos de Nambu-Goldstone, excitações coletivas que governam a propriedade de baixa energia do sistema [94].

3.2.2 Ação Efetiva Contendo a Reparametrização

Agora, almeja-se encontrar a ação para as reparametrizações, $\tau \rightarrow f(\tau)$, quando elas estão incluídas na ação original. A seguir é utilizado um argumento intuitivo inspirado pela teoria de campo efetiva [8]. Procura-se por uma expressão, com ordens derivativas mais baixas, que seja invariante sob $SL(2, R)$. Aqui trabalha-se sem temperatura. Dessa maneira, a ação procurada deve satisfazer a seguinte propriedade:

- Se $f \in SL(2, R) \leftrightarrow f(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \rightarrow S[f] = 0$, com $ad - bc = 1$,
- Se $f \notin SL(2, R) \rightarrow S[f]$ deve ser invariante sob $f \rightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$

A primeira afirmação decorre do fato de que G_c é invariante sob $SL(2, R)$, então $\delta_{SL(2,R)} G_c$ deve gerar zeros. A segunda de que, à temperatura zero, G_c também é invariante

sob $SL(2, R)$ e, portanto, a ação contendo a reparametrização deve ter uma simetria exata sob essas transformações.

Em outras palavras, procura-se por uma combinação de derivadas de F de $SL(2, R)$ que reduz exatamente a mesma combinação de derivativos em f . Por isso, a primeira e segunda derivada de F são [8]

$$\begin{aligned} F' &= \frac{f'}{(cf(\tau) + d)^2}, \\ F'' &= \frac{f''}{(cf(\tau) + d)^2} - \frac{2c(f')^2}{(cf(\tau) + d)^3}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

feitas em cima de

$$F(\tau) = \frac{af(\tau) + b}{cf(\tau) + d}. \quad (3.43)$$

Em ambos os casos, as derivativos tem um termo em comum $1/(cf(\tau) + d)^2$. Através dele pode-se escrever

$$\frac{F''}{F'} = \frac{f''}{f'} - \frac{2cf}{cf(\tau) + d}. \quad (3.44)$$

Nesta equação, o primeiro termo do lado direito é exatamente o que se procura, mas o segundo termo precisa ser eliminado. Assim, derivando mais uma vez:

$$F''' = \frac{f'''}{(cf(\tau) + d)^2} - \frac{6cf'f''}{(cf(\tau) + d)^3} + \frac{6c^2(f')^3}{(cf(\tau) + d)^4}. \quad (3.45)$$

Dividindo por F' se consegue

$$\frac{F'''}{F'} = \frac{f'''}{f'} - \frac{6cf''}{(cf(\tau) + d)} + \frac{4c^2(f')^2}{(cf(\tau) + d)^2}. \quad (3.46)$$

Este termo é semelhante ao $\frac{F''}{F'}$. Assim pode-se quadrar $\frac{F''}{F'}$ e se obtém

$$\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 = \left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \frac{4cf''}{(cf + d)} + \frac{4c^2(f')^2}{(cf(\tau) + d)^2}. \quad (3.47)$$

Isso posto, pode-se fazer a seguinte combinação:

$$\frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''}{F'}\right)^2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \equiv \{f, \tau\} \quad (3.48)$$

Aqui $\{f, \tau\}$ denota a derivada schwarziana [89]. Esse é um operador invariante sob transformação $SL(2, R)$. A prova para isso é feita da seguinte forma. Se

$$f(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \in SL(2, R). \quad (3.49)$$

Então, pode-se definir

$$u(\tau) = f'(\tau^{-1/2}) = c\tau + d. \quad (3.50)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
u'' = 0 &\leftrightarrow -\frac{3}{4}(f')^{-5/2}f'' - \frac{1}{2}(f')^{-3/2}f''' = 0 \\
&\leftrightarrow -\frac{1}{2}(f')^{-1/2} \left[\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right] = 0 \\
&\leftrightarrow -\frac{1}{2}(f')^{-1/2} \{f, \tau\} = 0 \\
&\leftrightarrow \{f, \tau\}.
\end{aligned}$$

No final, encontra-se uma expressão que é nula caso a reparametrização seja dada por uma transformação fracionária linear, já que a reparametrização deve obedecer a álgebra $SL(2, R)$. Sendo assim, a Eq. 3.33 pode ser escrita como:

$$\frac{I}{N} = \frac{-c}{J} \int d\tau \{f, \tau\}. \quad (3.51)$$

A constante c é dada por [95],

$$c \equiv \frac{1}{4q^2}. \quad (3.52)$$

A ação 3.51 também é conhecida como ação schwarziana [92]. Vale lembrar que ela é obtida devido a quebra de simetria conforme. Algo semelhante será visto no Cap. 4. Essa característica faz o SYK apontar uma dualidade holográfica com a gravidade dilatônica de Jackiw-Teitelboim.

É possível ainda introduzir a temperatura finita (mapear um círculo) $f(\tau) = \exp\left(\frac{2\pi i\tau}{\beta}\right)$ ou $f(\tau) = \text{tg}\left(\frac{\pi\tau}{\beta}\right)$. Com isso a ação se torna:

$$\frac{I_\beta}{N} = \frac{-c}{J} \int_0^\beta d\tau \left\{ \exp\left(\frac{2\pi i\tau}{\beta}\right), \tau \right\} \quad (3.53)$$

Então, usando a Eq. 3.48 com

$$\begin{aligned}
f'(\tau) &= \frac{2\pi i}{\beta} \exp\left(\frac{2\pi i\tau}{\beta}\right), \\
f''(\tau) &= \left(\frac{2\pi i}{\beta}\right)^2 \exp\left(\frac{2\pi i\tau}{\beta}\right), \\
f'''(\tau) &= \left(\frac{2\pi i}{\beta}\right)^3 \exp\left(\frac{2\pi i\tau}{\beta}\right).
\end{aligned} \quad (3.54)$$

Consegue-se

$$\frac{I_\beta}{N} = \frac{-c}{J} \int_0^\beta d\tau \left(\frac{2\pi^2}{\beta^2}\right) = -c \frac{2\pi^2}{\beta J}. \quad (3.55)$$

Na Eq. 3.55, o coeficiente $1/J$ é uma parte importante da teoria. Ele é o que faz com que os modos de Nambu-Goldstone sejam mais fáceis de excitar para $1 \ll \beta J \ll N$ [66].

A ação schwarziana também é encontrada na teoria da gravidade dilatônica de Jackiw-Teitelboim no espaço $nAdS_2$, ou próximo ao AdS_2 , através do mesmo padrão de quebra de simetria. Isso será visto no próximo capítulo.

As correções dos campos bilocais, obtidas com argumento dimensional e simétrico, sugerem que esse comportamento schwarziano é uma propriedade universal das teorias de $(0+1)d$, exibindo uma simetria conforme emergente por meio de uma invariância total à reparametrização.

4 Correspondência Holográfica

4.1 Gravidade Dilatônica

Pesquisas recentes destacam a conjectura de que a teoria gravidade dual do modelo SYK é a gravidade dilatônica em 2d de Jackiw-Teitelboim (JT) [12, 14, 63, 64, 66]. A gravidade pura, em 2d, não tem dinâmica. Porém, no espaço AdS_2 , pode atuar um campo escalar, o *dilaton*. A ação desse campo provoca deformações no espaço. E, portanto, concede dinâmica ao sistema.

O espaço AdS_2 aparece no horizonte de eventos de buracos negros. Na fronteira do AdS_2 , em particular para buracos negros extremos, é possível fazer um corte de limite UV e compacta-lo, Fig. 11. Esse corte é feito através de um simétrica conforme de reparametrização do tempo que obedece as transformações o subgrupo $SL(2, R)$.

A reparametrização é quebrada pelo subgrupo $SL(2, R)$ e a dinâmica da gravidade dilatônica de Jackiw-Teitelboim (JT), assim como é visto no SYK, é caracterizada por uma ação schwarziana que retrata a reparametrização de um círculo (presença de temperatura finita). Essa correspondência entre os modelos é apresentada como Holografia [18].

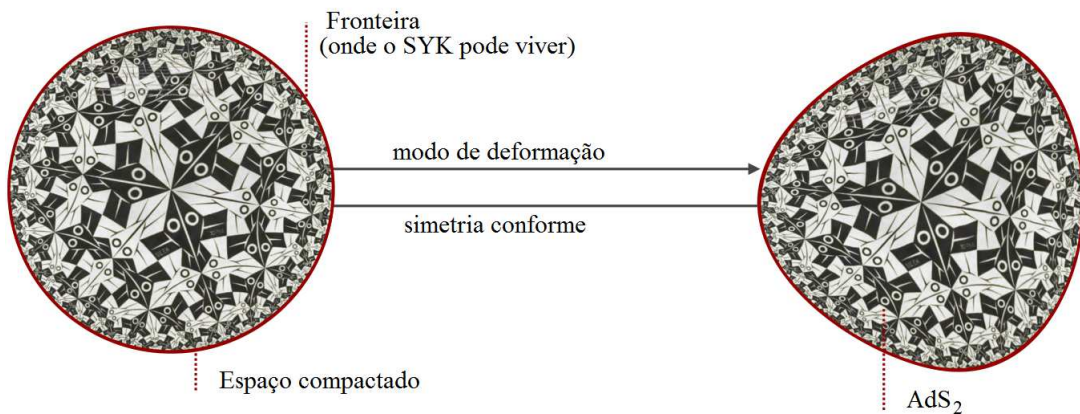


Figura 11 – Esquema da correspondência do modelo SYK com a gravidade dilatônica em 2d de Jackiw-Teitelboim (JT).

Para apresentar a ação mais simples para modelos de gravidade dilatônica, como o de JT, parte-se do seguinte *ansatz* de um métrica geral em 4d [96]:

$$ds_{4d}^2 = h_{ab} dx^a dx^b + \Phi^2 d\Omega_2^2 \quad (4.1)$$

com $a, b = 0, 1$ e $x^0 = t, x^1 = r$. Fazendo $h_{ab} = h_{ab}(t, r)$, $\Phi = \Phi(t, r)$ e $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2$

esse *ansatz* pode ser reescrito como

$$ds^2 = \Phi^2 \left[\frac{h_{ab} dx^a dx^b}{\Phi^2} + (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right] = \Phi^2 d\tilde{s}^2, \quad (4.2)$$

onde Φ é o campo de *dilaton* e $d\tilde{s}^2$ é o elemento de linha de uma variedade produto, $\tilde{M} = \tilde{N}_2 \times S^2$, que divide a métrica em duas partes.

Depois de encontrar o escalar de Ricci² que faz a conexão entre as duas partes da métrica, obtém-se para a ação gravitacional. A ação gravitacional mais simples em 4d, sem a presença de campos de matéria, pode ser escrita como

$$S_{4d} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (4.3)$$

Onde G_N é a constante gravitacional de Newton.

Reverendo a Eq. 4.1, o seu tensor métrico é dado por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -h_{00} & h_{01} & 0 & 0 \\ h_{10} & h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Como $g = \det g^{\mu\nu}$. Então, $g = -h\Phi^4 \text{sen}^2\theta$. Logo, a Eq. 4.3 retorna

$$S_{4d} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{r_0} dr \sqrt{-h} \Phi^2 R \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta}_{=4\pi}. \quad (4.5)$$

Perceba que foi imposto um limite a coordenada r , o raio do horizonte de evento de um buraco negro ($r = r_0 = r_H$). Consequentemente, usando a Eq. B.21, se tem

$$S = \frac{4\pi}{16\pi G_N} \int dt dr \sqrt{-h} \Phi^2 \left(R_2 + \frac{2}{\Phi^2} - 2h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2} - 4h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi} \right). \quad (4.6)$$

Essa é a ação mais simples para modelos de gravidade dilatônica.

4.2 O Problema *Backreaction*

Os modelos de gravidade dilatônica em 2d são um boa aproximação para a dinâmica e termodinâmica de uma grande classe de buracos negros extremos carregados magneticamente [97], incluindo aqueles que surgem da teoria das cordas com sistemas que têm escalares extras [98]. Isso porque a configuração do horizonte de eventos desses sistemas pode ser vista através do espaço AdS_2 [99].

No entanto, em buracos negros extremos, existe um problema chamado de *backreaction*. Esse problema é a destruição da região assintótica do AdS_2 devido a presença

² Veja o apêndice B

de campos de matéria. No contexto da relatividade geral, esse fato é bem conhecido e é chamado de instabilidade de Aretakis [65].

O *backreaction* pode ser visto, por exemplo, no buraco negro de Reissner-Nordstrom em uma gravidade quadridimensional de Einstein-Maxwell, um buraco negro estático, magneticamente carregado dado por [100]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{(r-r^+)(r-r^-)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{(r-r^+)(r-r^-)} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \\ F &= Q\epsilon_2 \\ r^\pm &= QL_P + EL_P \pm \sqrt{2QEL_P^3 + E^2L_P^4}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aqui F é o campo eletromagnético gerado por uma carga magnética Q e o $L_P^2 = 16\pi G_N$ é a área de Planck, ϵ_2 é o elemento de volume da esfera unitária S^2 e E é a energia de excitação,

$$E = M - \frac{Q}{L_P}. \quad (4.8)$$

onde M é a massa do buraco negro.

O buraco negro extremo emite radiação Hawking e sua entropia é proporcional a carga ao quadrado,

$$S_{BH} = \frac{\pi(r^+)^2}{L_P^2} \sim \pi Q^2 \quad (\text{extremo}). \quad (4.9)$$

Como o buraco negro extremo exibe a configuração de um estado fundamental, ele possui uma grande entropia a temperatura zero [101, 102] e através da radiação de é possível medir sua temperatura. Assim, a temperatura de um buraco negro de c é [97]:

$$T_H = \frac{r^+ - r^-}{4\pi(r^+)^2}. \quad (4.10)$$

E próximo da extremidade é

$$T_H \sim \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{L_P Q^3}} E. \quad (4.11)$$

A descrição termodinâmica do buraco negro de Reissner-Nordstrom requer que a sua emissão de um fóton através da Hawking perto da extremalidade não mude muito a energia. Isso posto, um fóton tem energia $\sim E \gg T_H$. Isso significa que a energia das excitações é limitada a [66]

$$E > E_{gap} \sim \frac{1}{L_P Q^3}. \quad (4.12)$$

Isso pode ser interpretado como uma *gap* (buraco) entre o estado fundamental e a primeira excitação. No limite clássico $L_P \rightarrow 0$ e esse *gap* se torna infinito. A entropia do estado

fundamental e um grande *gap* acima do estado fundamental devem estar presentes no SYK, isso para que seja interpretado como um dual holográfico de geometria próximo do horizonte de um buraco negro. Essas características são discutidas com mais detalhes em [66], onde é discorrido que SYK não é dual para um teoria de gravitação local fracamente acoplada e nem para uma teoria de cordas.

A conexão com a gravidade bidimensional para um buraco negro extremo é feita definindo a coordenada da seguinte forma

$$z \equiv \frac{(r^+)^2}{r - r^+} = \frac{Q^2 L_P^2}{r - r^+}. \quad (4.13)$$

E, olhando perto do horizonte, $r^+ = r^-$, é possível reescrever a métrica 4.7 como:

$$ds^2 \approx Q^2 L_P^2 \left(\frac{-dt^2 + dz^2}{z^2} + d\Omega_2^2 \right). \quad (4.14)$$

Perceba que essa redução foi tratada de forma geral na seção anterior, Eq. 4.2. Assim, pode-se dizer que o buraco negro extremo se reduz ao espaço produto $AdS_2 \times S^2$ no horizonte. Sendo assim, aplicando a lógica de que a holografia surge do fator AdS_2 , espera-se ele que seja dual a uma teoria de campos conforme unidimensional.

A ação para a teoria gravitacional do espaço AdS_2 surge da redução dimensional da ação de Einstein-Maxwell [66],

$$S_{EM,4d} = \frac{1}{L_P^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{L_P^2}{4} F^2 \right). \quad (4.15)$$

Com a redução, o que se procura é uma solução esfericamente simétrica e, portanto, usa-se o ansatz 4.1,

$$ds^2 = h_{ij} dx^i dx^j + \Phi^2 d\Omega_2^2, \quad i, j = 1, 2 \quad x^1 = r, \quad x^2 = t. \quad (4.16)$$

Assim, de 4.6, usando a configuração de campo elétrico em 2d, $F \sim Q$, no campo de matéria de 4.15, chega-se a

$$S_{EM,2d} \sim \frac{4\pi}{L_P^2} \int dt dr \sqrt{-h} [\Phi^2 R_h + 2(\partial\Phi)^2 + 2 - \frac{1}{2}\Phi^{-2}Q^2L_P^2] \quad (4.17)$$

Essa ação é uma subclasse de modelos de gravidade dilatônica [97] descritos, de forma mais geral, por

$$I_{2d} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^2x \sqrt{-h} \left[\Phi^2 R_h + \lambda(\partial\Phi)^2 - U \left(\frac{\Phi^2}{d^2} \right) \right], \quad (4.18)$$

com um potencial escalar arbitrário U e coeficiente adimensional λ para o termo cinético, o d é um parâmetro com dimensão de comprimento, usado para cancelar a dimensão do *dilaton* no argumento do potencial.

Para determinar qual é a equação de movimento da ação, Eq. 4.18, primeiro precisa-se calcular qual é o escalar de Ricci que faz a conexão entre as parte da métrica. Para isso, pensa-se em cada parte da métrica, Eq. 4.16 colocado em um *gauge* conforme [66, 97],

$$ds^2 = -e^{2\omega(x^+, x^-)} dx^+ dx^-, \quad (4.19)$$

onde $x^\pm = \text{arctg}(t \pm z)$.

A Eq. 4.19 leva a dois símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{++}^+ = 2\partial_+\omega, \quad (4.20)$$

$$\Gamma_{--}^- = 2\partial_-\omega. \quad (4.21)$$

Com os símbolos de Christoffel, a curvatura de Riemann se torna

$$R_{+--+} = e^{2\omega} \partial_+ \partial_- \omega \quad (4.22)$$

e o escalar

$$R = 8e^{-2\omega} \partial_+ \partial_- \omega. \quad (4.23)$$

A ação 4.18 ser escrita como

$$I = \int d^2x \sqrt{-h} \left[\Phi^2 h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \lambda h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi - U \left(\frac{\Phi^2}{d^2} \right) \right], \quad (4.24)$$

então a sua variação é

$$\begin{aligned} \delta I = \int d^2x \left\{ \delta(\sqrt{-h}) \left[\Phi^2 h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \lambda h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi - U \left(\frac{\Phi^2}{d^2} \right) \right] \right. \\ \left. + \sqrt{-h} \left[\Phi^2 R_{\alpha\beta} \delta(h^{\alpha\beta}) + \Phi^2 \delta(R_{\alpha\beta}) h^{\alpha\beta} + \lambda \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \delta(h^{\alpha\beta}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Agora, usando a Eq. C.10,

$$\delta(\sqrt{-h}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-h} h_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (4.26)$$

a variação da ação se torna

$$\begin{aligned} \delta I = \int d^2x \sqrt{-h} \left\{ -\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \left[\Phi^2 h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \lambda h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi - U \left(\frac{\Phi^2}{d^2} \right) \right] \right. \\ \left. + \Phi^2 R_{\alpha\beta} + \lambda \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para a componente h^{++} , a única contribuição é a da variação do tensor de Ricci. Essa variação é

$$\delta(R_{\mu\lambda\nu}^\rho) = \nabla_\lambda \delta(\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\lambda\mu}^\rho). \quad (4.28)$$

Assim,

$$\delta I = \int d^2x \sqrt{-h} \Phi^2 \nabla_\sigma [h^{\alpha\beta} \delta(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma) - h^{\alpha\sigma} \delta(\Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda)] \quad (4.29)$$

e ao aplicar uma integral por partes se tem

$$\delta I = - \int d^2x \sqrt{-h} (\partial_\sigma \Phi^2) (h^{\alpha\beta} \delta(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma) - h^{\alpha\sigma} \delta(\Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda)). \quad (4.30)$$

Veja que o termo de fronteira é definido como zero.

A variação do símbolo de Christoffel é

$$\delta(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma) = -\frac{1}{2} [g_{\lambda\alpha} \nabla_\beta (g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\beta} \nabla_\alpha (g^{\lambda\sigma}) - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \nabla^\sigma (g^{\mu\nu})]. \quad (4.31)$$

E a partir do cálculo anterior do escalar Ricci para o *gauge* conforme se tem

$$\nabla^+ \delta(g^{++}) = -2e^{-2\omega} \partial_- \delta(g^{++}), \quad (4.32)$$

$$\nabla^- \delta(g^{++}) = -2e^{-2\omega} \partial_+ \delta(g^{++}) - 8e^{-2\omega} (\partial_+ \omega) \delta(g^{++}). \quad (4.33)$$

O que significa que

$$\begin{aligned} \delta I &= -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-h} [\partial_+ (e^{2\omega} \partial_+ \Phi^2) - 4e^{2\omega} (\partial_+ \omega) (\partial_+ \Phi^2)] \delta(g^{++}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-h} [e^{2\omega} \partial_+ (e^{-2\omega} \partial_+ \Phi^2)]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Portanto, a equação de movimento em relação a h^{++} é

$$e^{2\omega} \partial_+ (e^{-2\omega} \partial_+ \Phi^2) = 0. \quad (4.35)$$

Consequentemente, se adicionado um campo de matéria arbitrário à ação 4.18,

$$S = I + S_{mat}, \quad (4.36)$$

a equação do movimento correspondentemente é [97]

$$-e^{2\omega} \partial_+ (e^{-2\omega} \partial_+ \Phi^2) = T_{++}^{matéria}. \quad (4.37)$$

Integrando a equação de movimento 4.37 ao longo da direção nula entre as duas fronteiras, $u^- = 0$, encontra-se:

$$\int_0^\pi du^+ e^{-2\omega} T_{++}^{matéria} = e^{-2\omega} \partial_+ \Phi^2 |_{u^+=0} - e^{-2\omega} \partial_+ \Phi^2 |_{u^+=\pi}. \quad (4.38)$$

Os pontos com $u^+ = 0, \pi$ estão no limite do AdS_2 .

Classicamente, para qualquer excitação, a densidade de energia do tensor energia-momento é positiva ¹, $T_{++}^{matéria} > 0$. Portanto, a diferença nos termos de limite na Eq. 4.38

¹ Em uma teoria quântica de campos, não se pode ter estados com $T_{++}^{matéria} < 0$ localmente, portanto esse argumento não se aplica. Há sim, presumivelmente, uma versão quântica do argumento usando algo chamado condição de energia nula média [66].

também tem que ser positiva. A partir da Eq. 4.38 é possível ver que [66]

$$e^{-2\omega} \sim \frac{1}{\text{sen}^2(u^+)} \sim \frac{1}{(u^+)^2}, \quad \text{para } u^+ \rightarrow 0, \quad (4.39)$$

$$\sim \frac{1}{(u^+ - \pi)^2}, \quad \text{para } u^+ \rightarrow \pi. \quad (4.40)$$

Sendo assim, o campo de *dilaton* tem que divergir pelo menos em um limite para que sua derivada compense e forneça uma integral não nula (positiva),

$$\Phi^2|_{u^+ \rightarrow 0} \sim \frac{1}{u^+} + \text{const.} \quad \text{ou} \quad \Phi^2|_{u^+ \rightarrow \pi} \sim \frac{1}{u^+ - \pi} + \text{const.} \quad (4.41)$$

Portanto, a presença de qualquer campo de matéria destrói a região assintótica do AdS_2 . Esse é o *backreaction* dos campos de matéria, semelhante ao discutido em 4.12. A escala desse limite é similar a do *gap* de massa, Eq. 4.12, quando $L_P \rightarrow 0$ [103].

Do ponto de vista físico, ter um tensor energia-momento nulo para a ação gravitacional significaria que não se pode acoplar nada a modelos do tipo 4.18. Porém se existir ação dos campos de matéria, o tensão-energia é não nulo e maior que zero e considera-se a contribuição dos campos de *dilaton*.

4.3 Gravidade Dilatônica de Jackiw-Teitelboim

Nesta seção, é feita uma breve revisão do modelo de gravidade dilatônica em 2d, introduzido primeiro por Jackiw e Teitelboim [50, 51] e recentemente examinado por Almheiri e Polchinski em [97] no contexto do "problema da reação posterior".

Na presença de um campo escalar, o *dilaton*, pode-se descrever um modelo dinâmica em 2d, Eq. 4.18. É possível ainda escolher um *dilaton* para que ele seja uma pequena deformação de um valor constante,

$$\Phi^2 = \phi_0 + \phi, \quad (4.42)$$

com $\phi_0 \gg \phi$. Assim sendo, ao inserir essa equação na ação 4.18 e expandir o potencial em torno do *dilaton*, se tem [66]

$$I = -\frac{1}{16\pi G_N} \int d^2x \sqrt{-h} \left[\phi_0 R_h - U\left(\frac{\phi_0}{d^2}\right) + \phi(R_h + 2) + \frac{\lambda}{2} \frac{(\partial\phi)^2}{\phi_0 + \phi} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{\phi(\epsilon)}{d^2}\right). \quad (4.43)$$

Essa equação pode ser separada em três termos diferentes. O primeiro é

$$-\frac{\phi_0}{16\pi G_N} \int d^2x \sqrt{-h} R_h + \frac{1}{16\pi G_N} \int d^2x \sqrt{-h} U\left(\frac{\phi_0}{d^2}\right). \quad (4.44)$$

Essa é a ação de Einstein-Hilbert, mas com um termo divergente do IR. Ela é puramente topológica e dá origem à entropia do estado fundamental para um buraco negro extremo [104]

O segundo termo é o termo Jackiw-Teitelboim,

$$-\frac{1}{16\pi G_N} \int d^2x \sqrt{-h} \phi (R_h + 2). \quad (4.45)$$

Essa é uma ação que descreve uma teoria de gravidade dilatônica .

Por fim, o termo restante é

$$-\frac{1}{16\pi G_N} \int d^2x \sqrt{-h} \frac{\lambda}{2} \frac{(\partial\phi)^2}{\phi_0 + \phi}. \quad (4.46)$$

Ele é de ordem superior e, portanto, pode ser descartado da ação. Assim, adicionando o termo de Gibbons-Hawking-York a ação 4.43, ela se torna [18, 66]

$$I = -\frac{\phi_0}{16\pi G_N} \left[\int d^2x \sqrt{-g} R_g + 2 \int_{\partial} du \sqrt{-h} K \right] - \frac{1}{16\pi G_N} \left[\int d^2x \sqrt{-h} \phi (R_h + 2) + 2 \int_{\partial} du \sqrt{-h} \phi_b K \right] \quad (4.47)$$

onde K é a curvatura extrínseca. Seu papel é compensar o termo divergente que surge do princípio da mínima ação³ [105].

O parâmetro ϕ_b , da Eq. 4.47, é o valor limite do *dilaton*. A condição $\phi = \phi_b$ juntamente com as equações de movimento dita a forma (clássica) do sistema. A equação de movimento em relação ao *dilaton* é fácil de calcular, basta tomar a variação da ação com relação ao campo ϕ . Essa variação produz a restrição da curvatura escalar $R = -2$,

$$\delta_\phi S = -\frac{1}{16\pi G_N} \int dx^2 \sqrt{-g} \delta_\phi (R_h + 2) \rightarrow (R_h + 2) = 0. \quad (4.48)$$

Portanto a métrica, com uma curvatura escalar negativa constante, implica que se está em um espaço AdS_2 . Perceba então que se for adicionado um termo de matéria à ação, esse termo não afetaria as equações de movimento, já que seria independente do *dilaton*. Sendo assim, fica-se apenas com o termo de fronteira (boundary)

$$S_{JT} = -\frac{1}{8\pi G_N} \int_{bdy} du \sqrt{-h} \phi_b K. \quad (4.49)$$

Consequentemente, o campo dilatônico atua apenas como um multiplicador de Lagrange, forçando a métrica local a ser uma AdS_2 puro, já que deseja-se que as coordenadas sejam globais; além disso, significa também que somente a dinâmica clássica, fixada na variedade (*manifold*), é permitida para o modelo, além de ser dada pelo *dilaton*.

4.4 Configuração do Espaço $nAdS$

A $nCFT_1$ do modelo SYK apresenta uma correspondência holográfica com o espaço $nAdS_2$. Para visualizar isso é preciso escolher condições para se ter um limite no espaço

³ Veja o apêndice C

contínuo de baixas energias no AdS_2 , ou seja, um corte no UV. Isso porque o *backreaction* destrói a região assintótica do AdS_2 . Sendo assim, trabalha-se apenas com o $nAdS_2$. Dessa forma é exigido que a métrica induzida satisfaça as condições de Dirichlet [66],

$$h|_{bdy} = \frac{1}{\epsilon^2}, \quad \phi_b = \frac{\phi_r(u)}{\epsilon}. \quad (4.50)$$

O ϵ , em 4.50, é uma pequena variação do elemento de linha da métrica. Ele surge para se fazer a passagem do AdS para o espaço $nAdS$. Basicamente a ideia é tomar $\epsilon \rightarrow 0$ para um ϕ_r fixo e positivo. Como ϵ tende para zero, o *dilaton* permanecerá finito, consequentemente o subscrito r significa “renormalizado”[18].

Antes de calcular a curvatura extrínseca é preciso compreender a configuração do espaço $nAdS$. Sendo assim, escreve-se a métrica do AdS_2 em coordenadas de Poincaré,

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dz^2}{z^2}. \quad (4.51)$$

A gravidade dual do SYK é definida através de uma assinatura euclidiana [18]. Sendo assim, aplica-se uma rotação de Wick, $\tau = it$, na Eq. 4.51,

$$ds_E^2 = \frac{d\tau^2 + dz^2}{z^2}. \quad (4.52)$$

Desse modo, tem-se um tempo euclidiano.

Outros ingredientes, para a gravidade dual do SYK, aparecem quando se toma um corte no UV [18], isto é, fazer $z \rightarrow 0$. Logo $\epsilon \rightarrow 0$. Isso implica em se ter uma compactação do espaço, assim faz-se um reparametrização das coordenadas tomando o limite de um disco, $(\tau(u), z(u))$, de tal forma que o elemento de linha da métrica induzida na fronteira satisfaça 4.50 [49],

$$\frac{1}{\epsilon^2} = \frac{\tau'^2 + z'^2}{z^2} = h. \quad (4.53)$$

Essa equação pode ser reescrita com:

$$z = \epsilon \sqrt{\tau'^2 + z'^2}. \quad (4.54)$$

Ela é a distância euclidiana de um ponto na da fronteira do disco até a nova fronteira.

Fazendo uma expansão até $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ na Eq. 4.54, tem-se

$$z = \epsilon \tau' + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (4.55)$$

Onde τ' indica uma derivada em relação a u .

Veja que $\epsilon \rightarrow 0$. Então, com a Eq. 4.55, o espaço cortado tende a todo o disco e chega-se perto do limite real entre as fronteiras. Note então que se tem a compactação do

espaço. Veja ainda que τ' pode ser visto como uma função $\tau(u)$, representando o tempo na teoria de fronteira, Logo, determina sua curvatura extrínseca e, conseqüentemente, a ação gravitacional, Eq. 4.49.

No entanto, o interior do disco permanecerá o mesmo, mas a forma do corte depende da variável $\tau(u)$. A variável $\tau(u)$ quebrará a simetria assintótica completa do espaço AdS_2 . A translação e a rotação da forma de corte no disco não afetarão a peça propriamente dita, portanto a reparametrização é quebrada no subgrupo $SL(2, R)$ [18],

$$\tau(u) = \frac{a\tau(u) + b}{c\tau(u) + d}, \quad ad - bc = 1. \quad (4.56)$$

Para ver isto, note que a métrica de Poincaré, Eq. 4.52, quando escrita em termos de coordenadas complexas, $w = \tau + iz$, é invariante sob as transformações de Möbius, Eq. 4.56.

4.5 Teoria Schwarziana

Usando a Eq. 4.49 com as condições 4.50, tem-se

$$S_{JT} \sim -\frac{1}{8\pi G_N} \int_{bdy} \frac{du}{\epsilon} \frac{\phi_r(u)}{\epsilon} K. \quad (4.57)$$

Agora, o problema resume-se a calcular a curvatura extrínseca.

A curvatura extrínseca pode ser vista da seguinte forma:

$$K(T_1, T_2) = -(T_1, \nabla_{T_2} n), \quad (4.58)$$

onde $T^a = (\tau', z')$ é o vetor tangente para a curva na fronteira de h que empurra para frente o espaço tangente da variação do disco de Poincaré através da incorporação da curva $(\tau(u), z(u))$ [18]. Já n é a normal e tem que ser ortogonal ao vetor tangente, então é fácil construir

$$n^a = \frac{z}{\sqrt{\tau'^2 + z'^2}} (-z', \tau'). \quad (4.59)$$

com,

$$n^\tau = -\frac{zz'}{\sqrt{z'^2 + \tau'^2}}; \quad n^z = -\frac{z\tau'}{\sqrt{z'^2 + \tau'^2}}. \quad (4.60)$$

Perceba que a normal é normalizado para satisfazer $n^a n_a = 1$.

Tomando a métrica h , Eq. 4.53, como a métrica de Poincaré e usando 4.58,

$$\nabla_t n^t = \partial_y (-zz'y^{-1/2}) \partial_\tau (\tau'^2 + z'^2) = \frac{zz'\tau''}{(\tau'^2 + z'^2)^{3/2}}, \quad (4.61)$$

e

$$\begin{aligned}\nabla_z n^z &= \partial_z [z\tau'(\tau'^2 + z'^2)^{-1/2}] = \frac{\tau'}{(\tau'^2 + z'^2)^{1/2}} - \frac{zz''\tau'}{(\tau'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\tau'(\tau'^2 + z'^2)}{(\tau'^2 + z'^2)^{3/2}} - \frac{zz''\tau'}{(\tau'^2 + z'^2)^{3/2}}.\end{aligned}\quad (4.62)$$

Assim,

$$\begin{aligned}K &= \frac{zz'\tau''}{(\tau'^2 + z'^2)^{3/2}} - \left[\frac{\tau'(\tau'^2 + z'^2)}{(\tau'^2 + z'^2)^{3/2}} - \frac{zz''\tau'}{(\tau'^2 + z'^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{-\tau'(\tau'^2 + z'^2 + zz'') + zz'\tau''}{(\tau'^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (-1).\end{aligned}\quad (4.63)$$

Logo,

$$K = \frac{\tau'(\tau'^2 + z'^2 + zz'') - zz'\tau''}{(\tau'^2 + z'^2)^{3/2}}.\quad (4.64)$$

Agora, usando 4.55, a curvatura se torna [66]

$$K = 1 + \epsilon^2 Sch(\tau(u), u) + \mathcal{O}(\epsilon^4),\quad (4.65)$$

com

$$Sch(\tau(u), u) = -\frac{3}{2} \left(\frac{\tau''}{\tau'} \right)^2 + \left(\frac{\tau'''}{\tau'} \right)\quad (4.66)$$

sendo a derivada schwarziana. Inserindo 4.65 em 4.57 e descartando o termo divergente, percebe-se que a ação anterior foi reduzida para

$$S_{Sch} = -\frac{1}{8\pi G_N} \int du \phi_r(u) Sch(\tau(u), u).\quad (4.67)$$

Agora, supondo que o valor limite do *dilaton* seja uma constante $\phi_r(u) = \phi_r$ e mudando a notação, por conveniência, se tem

$$S_{Sch} = -\frac{\phi_r}{8\pi G_N} \int du \{\tau(u), u\},\quad (4.68)$$

Dessa forma, a ação é definida no limite AdS_2 com $\tau(u)$ sendo o campo invariante sob transformação $SL(2, \mathbb{R})$. Logo não é uma grande surpresa que a derivada Schwarziana apareça, já que é essa derivada também é invariante sob essa transformação [66].

Então, quais são as soluções para 4.67? Pode-se verificar que a equação de movimento é [18]

$$\left[\frac{1}{\tau'} \left(\frac{(\tau' \phi_r)'}{\tau'} \right) \right]' = 0.\quad (4.69)$$

Ao integrar a Eq. 4.69 é fácil ver que volta-se a obter Eq. 4.68 como resultado sem o fator de 3/2. Pode-se então usar a lei de composição para a derivada schwarziana [89].

Essa lei pode ser determinada de dois modos diferentes. O primeiro consiste em usar a lei de transformação do tensor de energia-momento em CFT bidimensional. O segundo é fazendo todas as derivadas da regras da cadeia necessários⁴:

$$\{\tau, u\} = \{\tilde{\tau}, u\} + \frac{1}{2}(\tilde{\tau}')^2. \quad (4.70)$$

Quando τ é uma função linear de u (lembres-se da Eq. 4.54) a schwarziano $\{\tau, u\}$ é constante. Logo, esse é o tipo de solução que se deseja para a Eq 4.70. Observe que mudar de τ para $\tilde{\tau}$ não passa de colocar um limite na fronteira para as coordenadas de Poincaré [18]. A motivação para isso é que o tamanho do círculo térmico seja 2π . Sendo assim, ele é adequadas para descrever soluções térmicas. Consequentemente, essa solução é (sob as transformações $SL(2, R)$) dada por[66]

$$\tilde{\tau}(u) = \frac{2\pi}{\beta}u \quad (4.71)$$

De fato, a periodicidade de τ requer que o tempo limite seja periódico com o período β , para que se possa interpretar β como a temperatura inversa.

Agora, usando a Eq. 4.68, 4.70 e 4.66,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\phi_r}{8\pi G_N} \int_0^\beta du \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{\tilde{\tau}''}{\tilde{\tau}'} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{\tau}'''}{\tilde{\tau}''} \right) + \frac{1}{2}(\tilde{\tau}')^2 \right] \\ &= -\frac{\phi_r}{8\pi G_N} \int_0^\beta du \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 \right] = -\frac{\phi_r}{16\pi G_N} \left[\frac{4\pi^2}{\beta} \right], \end{aligned} \quad (4.72)$$

chega-se a

$$S = -c \frac{2\pi^2}{\beta} \quad (4.73)$$

com $c = \phi_r/8\pi G_N$. Essa é a solução térmica da schwarziana. Em fim, essa ação mostra que a simetria conforme no limite UV é quebrada já que não são admitidas qualquer solução, mas apenas as funções que obedecem as transformações de campo conforme, como esperado de uma peça cortada arbitrariamente de um espaço AdS_2 [18].

Perceba que a mesma peça, Eq. 4.73, no limite IR, é encontrada no modelo SYK (veja a Eq. 3.55), com a mesma quebra de simetria conforme. Portanto, o limite de baixa energia do modelo SYK está intimamente relacionado à gravidade do *dilaton* no espaço AdS_2 . A conexão precisa, no entanto, permanece desconhecida.

⁴ Para mais detalhes, veja o Apêndice A

5 Conclusões

5.1 Considerações Finais

Nessa dissertação, estudou-se o modelo SYK. Ao longo do caminho, encontrou-se muitas características interessantes, no limite N grande, o modelo se torna clássico e, portanto, solucionável. A ação efetiva do SYK envolve campos bilocais \tilde{G} e $\tilde{\Sigma}$.

A simetria conforme que emerge no IR é espontaneamente quebrada sob $SL(2, R)$. Esse padrão é idêntico ao encontrado no modelo de gravidade dilatônica de JT. Tomando este padrão de quebra em consideração, o modelo SYK pode ser considerado como um exemplo da correspondência $nCFT_1/nAdS_2$.

Pela correspondência entre o SYK e o modelo de gravidade dilatônica de JT é conjectura a dualidade gravitacional do SYK e, portanto, traduzida como holografia. Esse aspecto é visto quando a ação dos modos de reparametrização é dado por uma ação schwarziana que trata uma reparametrização de um círculo apresenta uma temperatura finita ao sistema.

As correções desses campos bilocais do SYK, obtidas com argumento dimensional e simétrico, sugerem que o comportamento schwarziano é uma propriedade universal das teorias de $(0 + 1)d$, exibindo uma simetria conforme emergente por reparametrização.

Apesar da semelhança, a gravitação dilatônica de JT no espaço $nAdS_2$ e o SYK permanece apenas como correspondência. Até o momento não se encontrou trabalhos que afirmem o contrário. Apesar da procura de uma gravidade dual quântica que possa ser descrita pelo SYK, essa questão continua em aberto [54].

A correspondência pode ser vista em outros cenários além do obtido para a métrica de Reisner-Nördstrom, por exemplo pela redução de Kaluza-Klein da ação de Einstein em 3D, de forma que o termo de contorno fornece o modelo Jackiw-Teitelboim [106].

5.2 Perspectivas

Durante esse estudo encontrou-se um resultado interessante para o crescimento do caos em branas negras, algo conhecido como velocidade borboleta. É possível notar que, para branas negras com funções métricas diferentes na direção anisotrópica, essa grandeza converge para um valor constante assintótico, perto do horizonte, algo próximo da velocidade conforme, que pode ser comparada como a velocidade da luz.

E já para funções métricas transversais iguais na direção anisotrópica, resulta apenas

em um valor contante, que pode ou não coincidir com o resultado conforme. É possível, ainda, fazer uma conexão da velocidade borboleta dessa métrica com a temperatura através das propriedades da radiação Hawking.

O SYK também possui velocidade borboleta constante sem dependência da temperatura, bem como com dependência da temperatura. Um aspecto que surge do SYK de cadeia. Essa característica é traduzidas através da difusão, uma peculiaridade relacionada ao transporte térmico. Algo semelhante ao estudos de uma superfície crítica de Fermi em metais. A questão central a respeito da velocidade borboleta envolve existe ou não de alguma correspondência entre o SYK e branas negras.

Por fim, um ponto que faltou ser abordado da gravidade dilatônica de JT diz respeito às suas funções de correlação. Ver seu comportamento quando adicionado uma ação de matéria a ação schwarziano.

Referências

- 1 SACHDEV, S.; YE, J. Gapless spin-fluid ground state in a random quantum heisenberg magnet. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 21, p. 3339, 1993. Citado na página 19.
- 2 GEORGES, A.; PARCOLLET, O.; SACHDEV, S. Mean field theory of a quantum heisenberg spin glass. *Physical review letters*, APS, v. 85, n. 4, p. 840, 2000. Citado na página 19.
- 3 SACHDEV, S. Holographic metals and the fractionalized fermi liquid. *Physical review letters*, APS, v. 105, n. 15, p. 151602, 2010. Citado na página 19.
- 4 SACHDEV, S. Strange metals and the ads/cft correspondence. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing, v. 2010, n. 11, p. P11022, 2010. Citado na página 19.
- 5 KITAEV, A. “hidden correlations in the hawking radiation and thermal noise”. *KITP*, talk given at Fundamental Physics Prize Symposium, Nov. 10, 2014. Citado na página 19.
- 6 SACHDEV, S. Bekenstein-hawking entropy and strange metals. *Physical Review X*, APS, v. 5, n. 4, p. 041025, 2015. Citado na página 19.
- 7 POLCHINSKI, J.; ROSENHAUS, V. The spectrum in the sachdev-ye-kitaev model. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2016, n. 4, p. 1, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 19, 21, 33 e 34.
- 8 MALDACENA, J.; STANFORD, D. Remarks on the sachdev-ye-kitaev model. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 10, p. 106002, 2016. Citado 9 vezes nas páginas 19, 28, 34, 35, 37, 43, 45, 46 e 47.
- 9 JEVICKI, A.; SUZUKI, K. Bi-local holography in the syk model: perturbations. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2016, n. 11, p. 46, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- 10 FU, W.; SACHDEV, S. Numerical study of fermion and boson models with infinite-range random interactions. *Physical Review B*, APS, v. 94, n. 3, p. 035135, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- 11 DAVISON, R. A. et al. Thermoelectric transport in disordered metals without quasiparticles: The sachdev-ye-kitaev models and holography. *Physical Review B*, APS, v. 95, n. 15, p. 155131, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- 12 GROSS, D. J.; ROSENHAUS, V. The bulk dual of syk: cubic couplings. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 5, p. 92, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 51.
- 13 GROSS, D. J.; ROSENHAUS, V. All point correlation functions in syk. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 12, p. 148, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

- 14 KITAEV, A.; SUH, S. J. The soft mode in the sachdev-ye-kitaev model and its gravity dual. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 5, p. 183, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 51.
- 15 TARNOPOLSKY, G. Large q expansion in the sachdev-ye-kitaev model. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 2, p. 026010, 2019. Citado na página 19.
- 16 MALDACENA, J. The large- n limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, Springer, v. 38, n. 4, p. 1113–1133, 1999. Citado na página 19.
- 17 SACHDEV, S. A simple model of quantum holography. *KITP*, strings seminar and Entanglement 2015 program (2015). Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- 18 MALDACENA, J.; STANFORD, D.; YANG, Z. Conformal symmetry and its breaking in two-dimensional nearly anti-de sitter space. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press, v. 2016, n. 12, 2016. Citado 9 vezes nas páginas 19, 21, 51, 58, 59, 60, 61, 62 e 86.
- 19 SHENKER, S. H.; STANFORD, D. Black holes and the butterfly effect. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2014, n. 3, p. 67, 2014. Citado na página 19.
- 20 LEICHENAUER, S. Disrupting entanglement of black holes. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 4, p. 046009, 2014. Citado na página 19.
- 21 SHENKER, S. H.; STANFORD, D. Stringy effects in scrambling. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2015, n. 5, p. 132, 2015. Citado na página 19.
- 22 MALDACENA, J.; SHENKER, S. H.; STANFORD, D. A bound on chaos. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2016, n. 8, p. 106, 2016. Citado na página 19.
- 23 CAPUTA, P.; NUMASAWA, T.; VELIZ-OSORIO, A. Out-of-time-ordered correlators and purity in rational conformal field theories. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press, v. 2016, n. 11, 2016. Citado na página 19.
- 24 TURIACI, G. J.; VERLINDE, H. On cft and quantum chaos. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2016, n. 12, p. 110, 2016. Citado na página 19.
- 25 HAWKING, S. W. Criação de partículas por buracos negros. *Comunicações em física matemática*, v. 43. Citado na página 19.
- 26 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Citado na página 19.
- 27 COLLABORAT, E. H. T. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing Ltd., v. 875, n. 1, p. L1, 2019. Citado na página 20.
- 28 YOU, Y.-Z.; LUDWIG, A. W.; XU, C. Sachdev-ye-kitaev model and thermalization on the boundary of many-body localized fermionic symmetry-protected topological states. *Physical Review B*, APS, v. 95, n. 11, p. 115150, 2017. Citado na página 20.

- 29 GARCÍA-GARCÍA, A. M.; VERBAARSCHOT, J. J. Spectral and thermodynamic properties of the sachdev-ye-kitaev model. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 12, p. 126010, 2016. Citado na página 20.
- 30 HARTNOLL, S. A.; HUIJSE, L.; MAZENC, E. A. Matrix quantum mechanics from qubits. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 1, p. 10, 2017. Citado na página 20.
- 31 LIU, Y.; NOWAK, M. A.; ZAHED, I. Disorder in the sachdev-ye-kitaev model. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 773, p. 647–653, 2017. Citado na página 20.
- 32 GARCÍA-GARCÍA, A. M.; VERBAARSCHOT, J. J. Analytical spectral density of the sachdev-ye-kitaev model at finite n. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 6, p. 066012, 2017. Citado na página 20.
- 33 LI, T. et al. Supersymmetric syk model and random matrix theory. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 6, p. 111, 2017. Citado na página 20.
- 34 ROBERTS, D. A.; STANFORD, D.; STREICHER, A. Operator growth in the syk model. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 6, p. 122, 2018. Citado na página 20.
- 35 DANSHITA, I.; HANADA, M.; TEZUKA, M. Creating and probing the sachdev-ye-kitaev model with ultracold gases: Towards experimental studies of quantum gravity. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press, v. 2017, n. 8, 2017. Citado na página 20.
- 36 KRISHNAN, C.; KUMAR, K. P.; ROSA, D. Contrasting syk-like models. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 1, p. 64, 2018. Citado na página 20.
- 37 RABEN, T. G.; TAN, C.-I. Minkowski conformal blocks and the regge limit for syk-like models. *arXiv preprint arXiv:1801.04208*, 2018. Citado na página 20.
- 38 GROSS, D. J.; ROSENHAUS, V. A generalization of sachdev-ye-kitaev. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 2, p. 93, 2017. Citado na página 20.
- 39 GU, Y.; QI, X.-L.; STANFORD, D. Local criticality, diffusion and chaos in generalized sachdev-ye-kitaev models. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 5, p. 125, 2017. Citado na página 20.
- 40 BERKOOZ, M. et al. Higher dimensional generalizations of the syk model. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 1, p. 138, 2017. Citado na página 20.
- 41 JIAN, S.-K.; YAO, H. Solvable sachdev-ye-kitaev models in higher dimensions: from diffusion to many-body localization. *Physical review letters*, APS, v. 119, n. 20, p. 206602, 2017. Citado na página 20.
- 42 CAI, W.; GE, X.-H.; YANG, G.-H. Diffusion in higher dimensional syk model with complex fermions. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 1, p. 76, 2018. Citado na página 20.
- 43 WITTEN, E. An syk-like model without disorder. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 20, 33 e 36.

- 44 GURAU, R. The complete $1/n$ expansion of a syk-like tensor model. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 916, p. 386–401, 2017. Citado na página 20.
- 45 PENG, C. Vector models and generalized syk models. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 5, p. 129, 2017. Citado na página 20.
- 46 NARAYAN, P.; YOON, J. Syk-like tensor models on the lattice. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 8, p. 83, 2017. Citado na página 20.
- 47 JENSEN, K. Chaos in ads 2 holography. *Physical review letters*, APS, v. 117, n. 11, p. 111601, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- 48 ENGELSÖY, J.; MERTENS, T. G.; VERLINDE, H. An investigation of ads 2 backreaction and holography. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2016, n. 7, p. 139, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- 49 FÖRSTE, S.; GOLLA, I. Nearly ads2 sugra and the super-schwarzian. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 771, p. 157–161, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 59.
- 50 JACKIW, R. Lower dimensional gravity. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 252, p. 343–356, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 57.
- 51 TEITELBOIM, C. Gravitation and hamiltonian structure in two spacetime dimensions. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 126, n. 1-2, p. 41–45, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 57.
- 52 JACKIW, R. in quantum theory of gravity ed. s. christiansen. *Physical review letters*, v. 54, p. 327–403, 1984. Citado na página 20.
- 53 BAGRETS, D.; ALTLAND, A.; KAMENEV, A. Sachdev–ye–kitaev model as liouville quantum mechanics. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 911, p. 191–205, 2016. Citado na página 20.
- 54 MANDAL, G.; NAYAK, P.; WADIA, S. R. Coadjoint orbit action of virasoro group and two-dimensional quantum gravity dual to syk/tensor models. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 11, p. 46, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 63.
- 55 BAGRETS, D.; ALTLAND, A.; KAMENEV, A. Power-law out of time order correlation functions in the syk model. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 921, p. 727–752, 2017. Citado na página 20.
- 56 STANFORD, D.; WITTEN, E. Fermionic localization of the schwarzian theory. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 10, p. 8, 2017. Citado na página 20.
- 57 MERTENS, T. G.; TURIACI, G. J.; VERLINDE, H. L. Solving the schwarzian via the conformal bootstrap. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 8, p. 136, 2017. Citado na página 20.
- 58 CVETIČ, M.; PAPADIMITRIOU, I. Ads 2 holographic dictionary. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2016, n. 12, p. 8, 2016. Citado na página 21.
- 59 HASHIMOTO, K.; TANAHASHI, N. Universality in chaos of particle motion near black hole horizon. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 2, p. 024007, 2017. Citado na página 21.

- 60 BLAKE, M.; DONOS, A. Diffusion and chaos from near ads 2 horizons. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 2, p. 13, 2017. Citado na página 21.
- 61 MALDACENA, J.; STANFORD, D.; YANG, Z. Diving into traversable wormholes. *Fortschritte der Physik*, Wiley Online Library, v. 65, n. 5, p. 1700034, 2017. Citado na página 21.
- 62 TAYLOR, M. Generalized conformal structure, dilaton gravity and syk. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 1, p. 10, 2018. Citado na página 21.
- 63 DAS, S. R.; JEVICKI, A.; SUZUKI, K. Three dimensional view of the syk/ads duality. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 9, p. 17, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 51.
- 64 DAS, S. R. et al. Space-time in the syk model. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 7, p. 184, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 51.
- 65 ARETAKIS, S. Horizon instability of extremal black holes. *Adv. Theor. Math. Phys.*, v. 19, n. arXiv: 1206.6598, p. 507–530, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 53.
- 66 SÁROSI, G. Ads_2 holography and the syk model. *arXiv preprint arXiv:1711.08482*, 2017. Citado 15 vezes nas páginas 21, 41, 42, 49, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62 e 86.
- 67 HEISENBERG, W. A quantum-theoretical reinterpretation of kinematic and mechanical relations. *Z. Phys.*, v. 33, p. 879–893, 1925. Nenhuma citação no texto.
- 68 SCHRÖDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 28, p. 1049–1070, Dec 1926. Nenhuma citação no texto.
- 69 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. Nenhuma citação no texto.
- 70 MAJORANA, E.; MAIANI, L. A symmetric theory of electrons and positrons. In: *Ettore Majorana Scientific Papers*. [S.l.]: Springer, 2006. p. 201–233. Nenhuma citação no texto.
- 71 ELLIOTT, S. R.; FRANZ, M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 87, n. 1, p. 137, 2015. Nenhuma citação no texto.
- 72 DAS, A.; KONAR, P.; THALAPILLIL, A. Jet substructure shedding light on heavy majorana neutrinos at the lhc. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 2, p. 83, 2018. Nenhuma citação no texto.
- 73 FU, W. *The Sachdev-Ye-Kitaev model and matter without quasiparticles*. Tese (Doutorado) — Harvard University Cambridge, Massachusetts, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 28.
- 74 KAXIRAS, E. *Atomic and Electronic Structure of Solids*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. 65–69 p. Nenhuma citação no texto.

- 75 GOEL, A. et al. Expanding the black hole interior: partially entangled thermal states in syk. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2019, n. 2, p. 156, 2019. Nenhuma citação no texto.
- 76 LANTAGNE-HURTUBISE, É.; LI, C.; FRANZ, M. Family of sachdev-ye-kitaev models motivated by experimental considerations. *Physical Review B*, APS, v. 97, n. 23, p. 235124, 2018. Citado na página 20.
- 77 CHEN, A. et al. Quantum holography in a graphene flake with an irregular boundary. *Physical review letters*, APS, v. 121, n. 3, p. 036403, 2018. Citado na página 20.
- 78 CHEW, A.; ESSIN, A.; ALICEA, J. Approximating the sachdev-ye-kitaev model with majorana wires. *Physical Review B*, APS, v. 96, n. 12, p. 121119, 2017. Citado na página 20.
- 79 PIKULIN, D.; FRANZ, M. Black hole on a chip: proposal for a physical realization of the sachdev-ye-kitaev model in a solid-state system. *Physical Review X*, APS, v. 7, n. 3, p. 031006, 2017. Citado na página 20.
- 80 LUO, Z. et al. Quantum simulation of the non-fermi-liquid state of sachdev-ye-kitaev model. *npj Quantum Information*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 1, p. 7, 2019. Citado na página 20.
- 81 WU, X. et al. Candidate theory for the strange metal phase at a finite-energy window. *Physical Review B*, APS, v. 98, n. 16, p. 165117, 2018. Nenhuma citação no texto.
- 82 JIA, Y.; VERBAARSCHOT, J. J. Large n expansion of the moments and free energy of sachdev-ye-kitaev model, and the enumeration of intersection graphs. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 11, p. 31, 2018. Citado na página 23.
- 83 MARCUS, E. *Holography and the Sachdev-Ye-Kitaev model*. Dissertação (Mestrado) — Utrecht University, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 26, 34, 35, 39 e 43.
- 84 BRUUS, H.; FLENSBERG, K. *Many-body quantum theory in condensed matter physics: an introduction*. [S.l.: s.n.], 2004. 127–211 p. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- 85 MILLINGTON, P. *Thermal quantum field theory and perturbative non-equilibrium dynamics*. [S.l.]: Springer Science and Business Media, 2013. 73–79 p. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- 86 PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC Press, 2018. 77–126, 275–312, 343–389 p. Citado 6 vezes nas páginas 26, 27, 28, 29, 33 e 75.
- 87 ROELFS, M. On the eigenvalue distribution of the sachdev-ye-kitaev model. 2016. Citado na página 26.
- 88 QUALLS, J. D. Lectures on conformal field theory. *arXiv preprint arXiv:1511.04074*, 2015. Citado na página 34.
- 89 POLCHINSKI, J. *String theory: An Introduction to the Bosonic String*. [S.l.]: Cambridge university press, 1998. Volume 1. 32–74 p. Citado 4 vezes nas páginas 34, 47, 61 e 85.

- 90 KIM, J. et al. Symmetry breaking in coupled syk or tensor models. *Physical Review X*, APS, v. 9, n. 2, p. 021043, 2019. Citado na página 37.
- 91 ESPOSITO, G.; KAMENSHCHIK, A. Y.; POLLIFRONE, G. *Euclidean quantum gravity on manifolds with boundary*. [S.l.]: Springer Science and Business Media, 2012. v. 85. 51–79 p. Citado na página 39.
- 92 BENEDETTI, M. Schwarzian theories and the sachdev-ye-kitaev model. 2019. (Tesi di Laurea) — Universita Degli Studi di Padova. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 48.
- 93 GARDELL, F. *Holography of SYK model*. Dissertação (Mestrado) — Uppsala University, Theoretical Physics, 2018. Citado na página 40.
- 94 WATANABE, H. Formula for the number of nambu-goldstone modes. *arXiv preprint arXiv:1904.00569*, 2019. Citado na página 46.
- 95 QI, Y.-H. et al. Schwarzian correction to quantum correlation in syk model. *arXiv preprint arXiv:1804.06164*, 2018. Citado na página 48.
- 96 WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago Press (Chicago, 1984), 2017. Citado 3 vezes nas páginas 51, 77 e 81.
- 97 ALMHEIRI, A.; POLCHINSKI, J. Models of ads_2 backreaction and holography. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2015, n. 11, p. 14, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 52, 53, 54, 55, 56 e 57.
- 98 MOITRA, U. et al. Jackiw-teitelboim gravity and rotating black holes. *arXiv preprint arXiv:1905.10378*, 2019. Citado na página 52.
- 99 MOITRA, U.; TRIVEDI, S. P.; VISHAL, V. Extremal and near-extremal black holes and near-cft 1. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2019, n. 7, p. 55, 2019. Citado na página 52.
- 100 MALDACENA, J.; MICHELSON, J.; STROMINGER, A. Anti-de sitter fragmentation. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 1999, n. 02, p. 011, 1999. Citado na página 53.
- 101 STROMINGER, A. Macroscopic entropy of $n=2$ extremal black holes. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 383, n. 1, p. 39–43, 1996. Citado na página 53.
- 102 SEN, A. Quantum entropy function from ads_2/cft_1 correspondence. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 24, n. 23, p. 4225–4244, 2009. Citado na página 53.
- 103 ALMHEIRI, A.; KANG, B. Conformal symmetry breaking and thermodynamics of near-extremal black holes. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2016, n. 10, p. 52, 2016. Citado na página 57.
- 104 NAYAK, P. et al. On the dynamics of near-extremal black holes. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 9, p. 48, 2018. Citado na página 57.
- 105 SAAD, P.; SHENKER, S. H.; STANFORD, D. A semiclassical ramp in syk and in gravity. *arXiv preprint arXiv:1806.06840*, 2018. Citado na página 58.

-
- 106 GAIKWAD, A. et al. Holographic dual to charged syk from 3d gravity and chern-simons. *arXiv preprint arXiv:1802.07746*, 2018. Citado na página 63.
- 107 ENGINE, A. *Model Sachdev-Ye-Kitaev and the caos in black holes*. Dissertação (Mestrado) — Shinshu University, 2018. Nenhuma citação no texto.
- 108 CARMELI, M. *Classical fields: general relativity and gauge theory*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2001. 136–137 p. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 83.
- 109 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The classical theory of fields*. [S.l.]: Pergamon, 1971. 290–293 p. Citado na página 83.

Apêndices

APÊNDICE A – Relação de anti-comutação

Para entender a Eq. 2.2 é preciso compreender a equação de Dirac [86], uma fórmula matricial que obedece as seguintes relações de anti-comutação:

$$\{\alpha_k, \alpha_j\} = 2\delta_{kj}; \quad (\text{A.1})$$

$$\{\alpha_k, \beta_k\} = 0; \quad (\text{A.2})$$

$$\{\beta, \beta\} = 2. \quad (\text{A.3})$$

Os α e os β são coeficientes desconhecidos.

Então, parte-se do seguinte *ansatz*:

$$(i\partial_o\beta - \beta\alpha_k\rho_k - m)\Psi = 0 \quad (\text{A.4})$$

O objetivo é conseguir uma equação que descreva, de forma relativista, certas partículas.

Veja que, na Eq. A.4, $\rho_k = -i\partial_k$ é o momento da partícula estudada, $\gamma^o \equiv \beta$ é o índice temporal e $\gamma^k \equiv \beta\alpha_k$ são três índices espaciais. Sendo assim,

$$\begin{aligned} (i\partial_o\gamma^o + i\gamma^k\partial_k - m)\Psi &= 0, \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Com o índice $\mu = \{0, k\} = 0, 1, 2, 3$. Essa é a equação de Dirac.

A prova das equações A.1, A.2 e A.3 é feito da seguinte forma:

Prov. A.1:

$$\{\gamma^o, \gamma^o\} = \{\beta, \beta\} = 2\beta^2 = 2 \quad (\text{A.6})$$

Prov. A.2:

$$\begin{aligned} \{\gamma^o, \gamma^k\} &= \{\beta, \beta\alpha_k\} \\ &= \beta\beta\alpha_k + \beta\alpha_k\beta \\ &= \beta(\beta\alpha_k + \alpha_k\beta) \\ &= \beta\{\beta, \alpha_k\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Prov. A.3:

$$\begin{aligned}
\{\gamma^k, \gamma^j\} &= \{\beta\alpha_k, \beta\alpha_j\} \\
&= \beta\alpha_k\beta\alpha_j + \beta\alpha_j\beta\alpha_k \\
&= -\beta^2\alpha_k\alpha_j - \beta^2\alpha_j\alpha_k \\
&= -\beta^2(\alpha_k\alpha_j + \alpha_j\alpha_k) \\
&= -\beta^2\{\alpha_k, \alpha_j\} \\
&= -\{\alpha_k, \alpha_j\} = 2\delta_{kj}\mathbb{1}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Assim, a representação das matrizes de Dirac para os férmions de Majorana são:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Onde σ_1 (Real), σ_2 (Imaginária), σ_3 (Real) são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.9}$$

APÊNDICE B – Escalar de Ricci que faz a conexão entre as métricas

A Eq. 4.2 possui as seguintes características [96]:

- O elemento de linha,

$$ds^2 = ds_{D-n}^2(x^D, \dots, x^{D-n-1}) + ds_n^2(x^{d-n}, \dots, x^D), \quad (\text{B.1})$$

pode ser visto como uma função quadrática conforme que contem a reparametrização de um círculo,

$$ds^2 = \omega^2 d\tilde{s}^2. \quad (\text{B.2})$$

- O escalar de Ricci que faz a conexão entre as partes da métrica é dado por

$$\tilde{R}_M = \tilde{R}_{N_2} + R_{S^2}, \quad (\text{B.3})$$

com

$$R = \frac{\tilde{R}}{\omega^2} - \frac{2(D-1)}{\omega^3} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \omega - \frac{1}{4}(D-1)(D-4) \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \omega \tilde{\nabla}_\beta \omega, \quad (\text{B.4})$$

em que

$$\nabla_\mu f = \tilde{\nabla}_\mu f = \partial_\mu f \quad (\text{B.5})$$

e

$$\nabla_\mu \nabla_\nu = \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu f - \frac{1}{\omega} \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} \right) \nabla_\mu \omega \nabla_\nu f, \quad (\text{B.6})$$

onde f é um escalar.

Então, calculando o escalar de Ricci que faz a conexão entre as partes da métrica da Eq. 4.2 através da Eq. B.4, tem-se

$$R = \frac{\tilde{R}}{\Phi^2} - \frac{6}{\Phi^3} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi. \quad (\text{B.7})$$

Note que Φ só depende de (t, r) , portanto

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = \Phi^2 h^{\alpha\beta}. \quad (\text{B.8})$$

Consequentemente

$$R = \frac{\tilde{R}}{\Phi^2} - \frac{6}{\Phi^3} \Phi^2 h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi = \frac{\tilde{R}}{\Phi^2} - \frac{6}{\Phi} h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi. \quad (\text{B.9})$$

Veja que $\tilde{R} = \tilde{R}_2 + R_{S^2}$, assim

$$R = \frac{1}{\Phi^2} (\tilde{R}_2 + R_{S^2}) - \frac{6}{\Phi} h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi. \quad (\text{B.10})$$

Note ainda da Eq. 4.2, R_{S^2} é o escalar de Ricci para uma esfera S^2 . Portanto $R_{S^2}^2 = 2$, logo se tem

$$R = \frac{1}{\Phi^2} (\tilde{R}_2 + 2) - \frac{6}{\Phi} h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi. \quad (\text{B.11})$$

Agora, atente que \tilde{R}_2 , na Eq. B.11, é primeiro termo do corte da Eq. 4.2 com $D = 2$ e também pode ser obtido pela Eq. B.4,

$$\tilde{R}_2 = \Phi^2 R_2 - 2\Phi^3 h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi + 2\Phi^4 h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi. \quad (\text{B.12})$$

Com essa observação, retomando a Eq. B.11, se consegue

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\Phi^2} \left(\Phi^2 R_2 - 2\Phi^3 h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} + 2\Phi^4 h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \frac{1}{\Phi} \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} \right) + \frac{2}{\Phi^2} - \frac{6}{\Phi} h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi \\ &= R_2 - 2\Phi h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} + 2\Phi^2 h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \frac{1}{\Phi} \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} + \frac{2}{\Phi^2} - \frac{6}{\Phi} h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi \\ &= R_2 + \frac{2}{\Phi^2} - 2\Phi h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} + 2\Phi^2 h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \frac{1}{\Phi} \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} - \frac{6}{\Phi} h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Agora, veja que

$$\tilde{\nabla}_\alpha \left(\frac{1}{\Phi} \right) = \partial_\alpha \left(\frac{1}{\Phi} \right) = -\frac{\partial_\alpha \Phi}{\Phi^2} \quad (\text{B.14})$$

e que é possível fazer os seguintes ajustes em

$$2\Phi^2 h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \frac{1}{\Phi} \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} = 2h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2} \quad (\text{B.15})$$

e em

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi &= \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi - \Phi \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} \right) \nabla_\mu \frac{\Phi}{\Phi^2} \nabla_\nu \Phi \\ &= \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi - \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} \right) \frac{\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi}{\Phi}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

bem como em

$$\frac{6}{\Phi} h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi = \frac{6}{\Phi} h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi + \frac{6}{\Phi} 2h^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{6}{\Phi} \underbrace{(h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta})}_{=2} h^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi. \quad (\text{B.17})$$

Retomando a Eq. B.13, se tem

$$R = R_2 + \frac{2}{\Phi^2} - 2\Phi h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} + 2h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2} - \frac{6}{\Phi} h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi. \quad (\text{B.18})$$

Atente ainda que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} &= \tilde{\nabla}_\alpha \left(-\frac{\tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2} \right) = -\frac{\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2} - \tilde{\nabla}_\beta \Phi \tilde{\nabla}_\alpha \frac{1}{\Phi^2} \\ &= -\frac{\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2} + 2\frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^3} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

e que

$$-2\Phi h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \frac{1}{\Phi} = 2h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi} - 4h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2}. \quad (\text{B.20})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} R &= R_2 + \frac{2}{\Phi^2} + 2h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi} - 4h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2} + 2h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2} - 6h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi} \\ &= R_2 + \frac{2}{\Phi^2} - 2h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi^2} - 4h^{\alpha\beta} \frac{\tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi}{\Phi} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

APÊNDICE C – Termo Divergente da Ação Gravitacional

A ação gravitacional, na relatividade geral, torna eficiente as equações de campo de Einstein através do princípio da mínima ação [96, 108]. Para verificar isso é toma-se a seguinte ação, sem presença de constante cosmológica:

$$S_g = \int d^4x \sqrt{-q} \mathcal{L}_G. \quad (\text{C.1})$$

Essa integral é feita entre dois valores de uma coordenada x^0 , sendo \mathcal{L}_G a lagrangiana do campo gravitacional e $g = \det(g_{\mu\nu})$.

As equações de campo de Einstein são derivadas de ordem superior do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$. Logo, a ação gravitacional deve ser escrita em termos dos símbolos de Christoffel. Porém, como a lagrangiana deve ser uma função escalar, isto é, invariante. Consequentemente, o único invariante que satisfaz essa condição é o escalar de Ricci [108]. Desse modo,

$$S_g = \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (\text{C.2})$$

Contudo, em um sistema mais geral existe a presença de outros campos, além do gravitacional. Logo, é preciso adicionar a lagrangiana de outros campos na Eq. C.2. Sendo assim,

$$S = S_g + S_F = \int d^4x \sqrt{-g} R - 2k \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_F, \quad (\text{C.3})$$

onde $k = 8\pi G/c^4$ e S_F é a ação dos campos não gravitacionais (ação de matéria), com \mathcal{L}_F sendo a sua, respectiva, lagrangiana. O princípio da mínima ação exige que a variação dessa ação seja zero,

$$\delta S = 0. \quad (\text{C.4})$$

Isso posto, a Eq. C.3 pode ser reescrita como

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_F. \quad (\text{C.5})$$

Tratando cada termo individualmente, primeiramente se tem

$$\delta S_g = \int d^4x \left(\delta \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta R \right). \quad (\text{C.6})$$

Veja que

$$\partial_\beta g = g g^{\mu\nu} \partial_\beta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \partial_\beta g^{\mu\nu}, \quad (\text{C.7})$$

e nada mais é do que um tipo de variação,

$$\partial_{\beta}g = \frac{g(x^{\beta} + \delta x^{\beta}) - g(x^{\beta})}{\delta x^{\beta}}. \quad (\text{C.8})$$

A Eq. C.7 pode ser reescrita como

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{C.9})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}(-g^{-1/2})\delta g \\ &= \frac{1}{2}(-g^{-1/2})(-gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Assim, pode-se retomar a Eq. C.6,

$$\delta S_g = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\delta R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} R \right). \quad (\text{C.11})$$

Perceba, observando a Eq. C.6, que o próximo paço é verificar δR , ou seja, quanto varia o escalar de Ricci (quando a métrica é variada). Dessa forma, sendo

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (\text{C.12})$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci. Então,

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (\text{C.13})$$

Note que é necessário agora obter $\delta R_{\mu\nu}$. A vista disso, se

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\beta} + \Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\beta}\Gamma_{\beta\mu}^{\rho}, \quad (\text{C.14})$$

onde $\Gamma_{\nu\mu}^{\beta}$ são os símbolos de Christoffel. Então,

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\beta}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\beta} + \delta\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} + \Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \delta\Gamma_{\nu\rho}^{\beta}\Gamma_{\beta\mu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\beta}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\rho}. \quad (\text{C.15})$$

Faz sentido falar da derivada covariante de $\delta\Gamma$, já que a diferença entre duas conexões é um tensor. Veja,

$$\begin{aligned} &\nabla_{\beta}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \nabla_{\beta}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\beta} = \\ &= \partial_{\beta}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} + \Gamma_{\beta\rho}^{\beta}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \cancel{\delta\Gamma_{\beta\nu}^{\rho}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\beta}} - \Gamma_{\beta\mu}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\rho}^{\beta} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\rho}^{\beta}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\rho} + \cancel{\Gamma_{\nu\beta}^{\rho}\delta\Gamma_{\rho\mu}^{\beta}} + \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}\delta\Gamma_{\beta\rho}^{\beta}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Consequentemente,

$$\nabla_{\beta}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\beta} - \nabla_{\beta}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\beta} = \delta R_{\mu\nu}. \quad (\text{C.17})$$

Assim,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} (\nabla_\beta \delta \Gamma_{\nu\mu}^\beta - \nabla_\beta \delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta) \\ &= \nabla_\beta (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\beta - g^{\beta\nu} \delta \Gamma_{\beta\mu}^\beta) = \nabla_\beta \delta V^\beta \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

com V^β sendo um vetor covariante.

Ao reescrever a Eq. C.6, se tem

$$\delta S_g = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R \right) + \int d^4x \nabla_\beta \sqrt{-g} \delta V^\beta. \quad (\text{C.19})$$

Essa equação toma forma de

$$\delta S_g = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta (\sqrt{-g} \delta V^\beta) \right]. \quad (\text{C.20})$$

Ao usar o teorema da divergência se consegue

$$\delta S_g = \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \int_{\partial\Omega} d^3x_\beta \sqrt{-g} \delta V^\beta. \quad (\text{C.21})$$

Note que o primeiro termo é uma integral sobre todo o sistema, mas o segundo é um termo de fronteira. Ele diverge, portanto é descartado. Uma justificativa seria tomar essa fronteira infinito. Então fica-se apenas com

$$\delta S_g = \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \quad (\text{C.22})$$

No entanto, para buracos negros extremos, devido ao *beckreation* dos campos massivos, é exigido a contribuição desse termo, seção 4.2. Nesse sentido, ele está relacionado a gravidade dilatônica.

A segunda parte da Eq. C.3 [108, 109], é escrita como

$$\delta S_F = -2k \int d^4x \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha g_{\mu\nu}) \right). \quad (\text{C.23})$$

Veja que,

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha g_{\mu\nu}) = \partial_\alpha \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})} \delta g_{\mu\nu} \right) - \partial_\alpha \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})} \right) \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.24})$$

Logo,

$$\delta S_F = \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})} \right) \right] \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.25})$$

Agora, definindo o tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})} \right) \right], \quad (\text{C.26})$$

a Eq. C.25 torna-se

$$\delta S_F = -2k \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right). \quad (\text{C.27})$$

Retomando a Eq. C.5, com a Eq. C.22 e a Eq. C.27, consegue-se

$$\delta S = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - k T_{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.28})$$

Uma vez que essa equação deve ser válida para uma variação arbitrária, $\delta g_{\mu\nu}$. Então, o integrando dessa equação deve ser zero,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k T_{\mu\nu}. \quad (\text{C.29})$$

Essas são as equações de campo de Einstein sem a presença de constante cosmológica.

APÊNDICE D – Lei de Decomposição para o a Derivada Schwarziana

De [89] sabe-se que a transformação é

$$(\partial_z z')^2 T(z') = T(z) - \frac{c}{12} \{z, z'\}. \quad (\text{D.1})$$

Para que a transformação da Eq. D.1 seja consistente, é preciso obter o mesmo resultado de duas transformações individuais e da composição delas. A transformação da composição é,

$$\begin{aligned} (\partial_w v(w(z)))^2 T(v(w(z))) &= T(w) - \frac{c}{12} \{v, w\} = \frac{1}{(w'_z)^2} \left(T(z) - \frac{c}{12} \{w, z\} \right) \\ -\frac{c}{12} \{v, w\} &= \frac{1}{(w'_z)^2} \left(T(z) - \frac{c}{12} \{w, z\} - \frac{c(w'_z)^2}{12} \{v, w\} \right). \end{aligned}$$

O que significa que a schwarziana satisfaz

$$\{v, \{w, z\}\} = \{w, z\} + (w'_z)^2 \{v, w\}, \quad (\text{D.2})$$

e a transformação se torna

$$(\partial_w v(w(z)))^2 T(v(w(z))) = T(w) - \frac{c}{12} \{v, \{w, z\}\}, \quad (\text{D.3})$$

onde é verificado que as transformações compõem corretamente.

Verificando explicitamente que é o formulário correto, a derivada pode ser reescrita para

$$\{v, w\} = \frac{2w'''(z)w'(z) - 3w''(z)w''(z)}{2w'(z)w'(z)} = \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2, \quad (\text{D.4})$$

e com a regra da cadeia para derivadas de ordem superior,

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}; \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = \frac{\partial^3 v}{\partial w^3} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^3 + 3 \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}. \quad (\text{D.7})$$

A derivada schwarziana correspondente a uma segunda transformação é

$$\begin{aligned} \{v, \{w, z\}\} &= \frac{v'''}{v'} w'^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{v''}{v'} \right)^2 + 3 \frac{v''_w}{w''_z} + \frac{w''_z}{w'_z} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''_z}{w'_z} \right)^2 - \frac{3}{2} (2v''_w w''_z) \\ &= \{v, w\} (w'_z)^2 + \{w, z\}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

A Eq. D.8 pode ser escrita como,

$$\{\tau, u\} = \{\tilde{\tau}, u\} + (\tilde{\tau}')^2 \{\tau, \tilde{\tau}\}. \quad (\text{D.9})$$

Agora, é possível fazer $\tau(u) = tg[\tilde{\tau}(u)/2]$, com $\tilde{\tau}(u) \sim \tilde{\tau}(u) + 2\pi$ para se ter a reparametrização de um círculo (temperatura finita) [18, 66]. Então, usando a Eq. 4.66 com,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}'(u) &= \frac{1}{2} \sec^2 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}(u)) \right] \\ \tilde{\tau}''(u) &= \frac{1}{2} \sec^2 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}(u)) \right] tg \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}(u)) \right] \\ \tilde{\tau}'''(u) &= \frac{1}{4} \sec^4 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}(u)) \right] + \frac{1}{2} \sec^2 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}(u)) \right] tg^2 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}(u)) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

consegue-se

$$\begin{aligned} \{\tau, \tilde{\tau}\} &= -\frac{3}{2} tg^2 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}) \right] + 2 \cos^2 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}) \right] \\ &\times \left\{ \frac{1}{4} \sec^4 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}) \right] + \frac{1}{2} \sec^2 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}) \right] tg^2 \left[\frac{1}{2}(2\pi + \tilde{\tau}) \right] \right\} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Consequentemente,

$$\{\tau, u\} = \{\tilde{\tau}, u\} + \frac{1}{2} (\tilde{\tau}')^2. \quad (\text{D.12})$$