



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Bruno Rêgo de Carvalho

**CORREÇÃO NÃO-COMUTATIVA PARA A
TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO
BTZ**

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2021

Bruno Rêgo de Carvalho

CORREÇÃO NÃO-COMUTATIVA PARA A TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO BTZ

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Marcos Antônio Anacleto

Campina Grande, Paraíba, Brasil

2021

C331c Carvalho, Bruno Rêgo de.
Correção não-comutativa / Bruno Rêgo de Carvalho. - Campina Grande, 2021.
69 f. : il. Color

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Tecnologia e Recursos Naturais, 2021.
"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antonio Anacleto".
Referências.

1. Princípio da Relatividade. 2. Buraco Negro BTZ. 3. Não-comutatividade. 4. Correções Quânticas. I. Anacleto, Marcos Antonio.
II. Título.

CDU 530.12(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA

Rua Aprígio Veloso, 882, - Bairro Universitário, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

REGISTRO DE PRESENÇA E ASSINATURAS

ATA DA DEFESA PARA CONCESSÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA, REALIZADA EM 18 DE JANEIRO DE 2021

Aos dezoito dias do mês de janeiro do ano de dois mil e vinte e um, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **BRUNO REGO DE CARVALHO** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Marcos Antonio Anacleto** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **João Rafael Lucio dos Santos** – Doutor em Física, o professor **Carlos Alex Souza da Silva** – Doutor em Física, sendo os dois primeiros, integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o terceiro, integrante do corpo docente do Instituto Federal do Ceará. HORA DE INÍCIO: **14h00** – LOCAL: **Sala Virtual, em virtude da suspensão de atividades na UFCG decorrente do corona vírus.** Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor **Marcos Antonio Anacleto**, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **Bruno Rego de Carvalho**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado "**CORREÇÃO NÃO-COMUTATIVA PARA A TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO BTZ**". Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, eu, Hélio Pereira de Oliveira, secretário, lavrei a ata, que submeto a aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 18 de janeiro de 2021.

Hélio Pereira de Oliveira
Secretário

Marcos Antonio Anacleto
Presidente da Comissão e Orientador

João Rafael Lucio dos Santos
Examinador Interno

Carlos Alex Souza da Silva
Examinador Externo

Bruno Rego de Carvalho
Candidato(a)

João Rafael Lúcio dos Santos
Coordenador do Programa

2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **BRUNO REGO DE CARVALHO**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **CARLOS ALEX SOUZA DA SILVA, Usuário Externo**, em 18/01/2021, às 16:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ANTONIO ANACLETO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 18/01/2021, às 16:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOAO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS, COORDENADOR (A)**, em 18/01/2021, às 16:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Rêgo de Carvalho, Usuário Externo**, em 19/01/2021, às 10:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador

*Seja grato por todas as coisas que acontecem na sua vida...
Sejam boas ou ruins, tudo é um aprendizado.
O grande arquiteto do universo sabe o que faz! Esse jogo é dele.
Nosso papel é apenas agradecer e sorrir. A vida é uma dádiva do Criador!*

Agradecimentos

- Primeiramente a Deus, que me ilumina e me protege nos momentos bons e ruins que ocorrem em nossas vidas.
- Ao meu Orientador professor Dr. Marcos Antônio Anacleto que me ajudou na realização deste trabalho.
- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.
- A meus pais em especial minha Mãe e aos meus irmãos que sempre estiveram me apoiando para sempre seguir sem nunca desistir.
- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo.
- Aos colegas de pós-graduação em especial aos meus amigos júnior Lima, Kiki Butovisk (Marcos Faustino), JBS (Joeslei Lopes) e PIO (Rubens).
- A Ian Lopes e Jaiane Santos pela ótima convivência no apartamento onde moramos.
- Aos funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

*"Quando a caminhada fica dura,
só os duros continuam caminhando."*

Mano Brown

Resumo

A teoria da relatividade geral prevê que uma massa suficientemente compacta pode deformar o espaço-tempo para formar um buraco negro. O limite da região da qual não é possível escapar é chamado de horizonte de eventos. A métrica obtida por Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) foi encontrada considerando a equivalência em três dimensões entre gravitação e a teoria de Chern-Simons, uma teoria topológica em três dimensões, com o mapeamento de Seiberg-Witter, na qual sua solução é descrita em $(2+1)$ -dimensões e sua solução trabalha-se com constante cosmológica negativa, um importante campo de investigação em que leva em consideração a possibilidade de modificar o Princípio da Incerteza de Heisenberg, que introduziu uma escala de comprimento fundamental. Assim, essa modificação gera correções nas propriedades termodinâmicas dos buracos negros. Neste trabalho levamos em consideração o princípio da incerteza generalizada (GUP) no formalismo de tunelamento via método de Hamilton-Jacobi, para determinar a temperatura Hawking e a entropia de buracos negros BTZ não-comutativos. A partir dessa abordagem conseguimos alcançar vários resultados de correções, incluindo a correção logarítmica esperada para a entropia de área associada aos buracos negros BTZ não-comutativos. Também abordamos a questão relativa à estabilidade do buraco negro BTZ não comutativo, investigando sua capacidade de calor específico modificado.

Palavras-chave: Buraco Negro BTZ. Não-comutatividade. Correções Quânticas.

Abstract

The theory of general relativity predicts that a sufficiently compact mass can deform space-time to form a black hole. The boundary of the region from which it is not possible to escape is called the event horizon. The metric obtained by Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) was found considering the equivalence in three dimensions between gravitation and the Chern-Simons theory, a topological theory in three dimensions, with the Seiberg-Witten mapping, in which its solution is described in $(2 + 1)$ -dimensions and their solution it works with negative cosmological constant, an important field of investigation in which it takes into account the possibility of modifying Heisenberg's Uncertainty Principle, which introduced a fundamental length scale. Thus, this modification generates corrections in the thermodynamic properties of black holes. In this work we take into account the principle of generalized uncertainty (GUP) in the tunneling formalism via the Hamilton-Jacobi method, to determine the Hawking temperature and entropy of non-commutative BTZ black holes. From this approach we were able to achieve several correction results, including the expected logarithmic correction for the area entropy associated with non-commutative BTZ black holes. We also addressed the question of the stability of the non-commutative BTZ black hole, investigating its specific modified heat capacity.

Keywords: Black Hole BTZ. Non-commutativity. Quantum Corrections.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Formação de Buracos Negros Gravitacionais	26
Figura 2 – Formação de Buracos Negros Primordiais	26
Figura 3 – Capacidade de calor específica (4.63). Para $\theta = \alpha = 0$, temos o resultado para o calor específico do buraco negro BTZ comutativo. Também mostramos o resultado quando $\theta \neq 0$ e $\alpha \neq 0$	59
Figura 4 – Capacidade de calor específica. (a) para $\theta \neq 0$ e $\alpha = 0$, temos o resultado para o calor específico do buraco negro BTZ não-comutativo.	60
Figura 5 – Capacidade de calor específica. (b) para $\theta = 0$ e $\alpha \neq 0$, temos o resultado para o calor específico do buraco negro BTZ comutativo com GUP.	60

Lista de tabelas

Tabela 1 – Classificação por massa, momento angular e carga elétrica	27
Tabela 2 – Classificação por faixa de massa. Sendo M_{\odot} a massa solar	27
Tabela 3 – N° de componentes independentes no espaço de N-dimensões	31

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
2	INTRODUÇÃO SOBRE OS BURACOS NEGROS	25
2.1	Formação e Classificação dos Buracos Negros	25
2.2	Teoria da Relatividade Geral	27
2.2.1	Teoria da Relatividade Geral e Campo Gravitacional	28
2.2.2	Equações de Einstein	28
2.2.3	Teoria da Relatividade em $(2 + 1)$ -Dimensões	30
2.3	Soluções dos Tipos de Buracos Negros	32
2.3.1	Solução de Schwarzschild	32
2.3.2	A Métrica BTZ	33
2.4	Termodinâmica do Buraco Negro	34
2.4.1	Termodinâmica no caso da métrica de Schwarzschild	36
2.4.2	Termodinâmica para a métrica BTZ	38
3	NÃO-COMUTATIVIDADE	39
3.1	Aspectos Gerais	39
3.2	Problema de Landau	40
3.3	Produto de Moyal	42
3.4	Propriedades do Produto de Moyal	42
3.5	Métrica de Schwarzschild não-comutativa	44
3.6	Barreira do potencial para Schwarzschild não-comutativo	46
3.7	Métrica BTZ no espaço não-comutativo	47
4	TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO BTZ NÃO-COMUTATIVO	49
4.1	Correções do Buraco Negro BTZ Não-Comutativo	49
4.2	Buraco Negro BTZ e o Princípio da Incerteza Generalizado	54
5	CONCLUSÕES	61
	APÊNDICES	63
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD NÃO-COMUTATIVA	65
	REFERÊNCIAS	69

1 Introdução

Os buracos negros surgiram do nascimento da teoria da relatividade geral (TGR) e a solução de Schwarzschild. Porém, no cenário da gravitação universal de Newton, havia especulações sobre as chamadas "estrelas negras". Com base nessa ideia de estrelas negras, se deu o fato de que, se a velocidade de escape de uma estrela, ou seja, a velocidade para um objeto escapar do seu campo gravitacional, fosse maior do que a velocidade da luz, então nem a própria luz poderia fugir do seu campo gravitacional.

Assim, uma das soluções da equação de Einstein, em $(2 + 1)$ -dimensões, foi obtida por Bañados-Teitelboim-Zanelli (BTZ). Conhecida como buraco negro BTZ foi considerada uma constante cosmológica negativa. A não-comutatividade do buraco negro BTZ foi estudada primeiro por Máximo Bañados e por Hyeong-Chan Kim [1, 2]. Desse modo a métrica BTZ não-comutativa que foi descoberta baseado na equivalência tridimensional entre a gravidade e a teoria de Chern-Simons, no qual é uma teoria de campos quântica tridimensional, usando o mapa de Seiberg-Witten, que pode ser interpretada como uma expansão de Θ do campo de gauge com a solução não-comutativa [3]. Então, o buraco negro BTZ é uma solução $(2 + 1)$ -dimensões gravitacionais com constante cosmológica negativa, que vem se tornando um importante campo de investigação, contudo, o espaço tridimensional é bem admitido por ser um excelente laboratório com a finalidade de explorar e testar algumas ideias por trás das correspondências AdS/CFT [4]. Após análises feitas por Anacleto, Brito e Passos [5] sobre o efeito Aharonov-Bohm gravitacional por causa do buraco negro BTZ num fundo não-comutativo. Além disso, [6] analisou o comportamento das partículas testes no espaço-tempo não-comutativo, no qual as propriedades termodinâmicas de buracos negros BTZ carregados são estudadas por [7].

Existem vários métodos para se obter a radiação Hawking e a entropia de buracos negros, entre estas abordagens destaca-se o método de Hamilton-Jacobi. Uma aproximação semiclássica considerando que a radiação Hawking como o fenômeno de tunelamento para uma partícula que atravessa o horizonte de eventos tem sido proposta nos últimos anos por [8]. Nesta aproximação apenas a partícula de energia positiva, criada dentro do horizonte de eventos, pode tunelar quanticamente através da barreira geométrica, e isto é observado como um fluxo Hawking para o infinito. Usando esse método de aproximação desenvolvida por Wentzel, Kramers e Brillouin (WKB) no formalismo de tunelamento para o cálculo da parte imaginária da ação, [8] usaram o método das geodésicas radiais nulas para determinar a temperatura Hawking, Xu e Chen [9] usaram esse método para calcular a temperatura Hawking para diferentes espaços-tempo. Então, foram feitas análises por BANERJEE, R.; MAJHI, B. R. [10] considerando a radiação Hawking a auto-gravitação e os efeitos da radiação de fundo no formalismo de tunelamento. Além disso, foi investigado também por

[11], os efeitos da radiação Hawking para o buraco negro auto-dual usando o formalismo de tunelamento de Hamilton-Jacobi. Segundo [12] os efeitos do princípio da incerteza generalizado (GUP) no formalismo de tunelamento da radiação Hawking para avaliar as correções quânticas na temperatura Hawking e a entropia do buraco negro. Porém outros autores como, [13] leva em consideração a radiação Hawking para buracos negros acústicos usando o formalismo de tunelamento enquanto, [14] estudaram as propriedades termodinâmicas do buraco negro auto-dual, usando a versão Hamilton-Jacobi com o GUP. De acordo com [15] analisaram as correções das propriedades termodinâmicas de buracos negros assumindo que o GUP mostra que a relação entropia-área é universal para todos os buracos negros.

Existem diversos trabalhos de vários autores sobre a origem estatística da entropia de um buraco negro, alguns deles são [16, 17, 18, 19, 11]. Foram computados correções de baixa ordem para a entropia Bekenstein-Hawking por [20] no qual, eles encontraram correções logarítmicas. No entanto, [21] apresentou que existe uma correção adicional logarítmica que depende de cargas conservadas. Portanto, para um entendimento da origem da entropia do buraco negro, o método brick-wall, proposto por [22] que foi usado cálculos de grandeza termodinâmicas de um buraco negro, pois, de acordo com ele, a entropia do buraco negro é apenas a entropia de campos quânticos fora do raio do horizonte do buraco negro. Porém um corte ultravioleta tem que ser introduzido quando se calcula a entropia estatística por esse método, para evitar divergências da densidade de estado próximo ao horizonte de eventos do buraco negro.

Outra forma na tentativa de remover as divergências é considerar que o princípio da incerteza de Heisenberg seja modificado, ou seja, usar a relação de incerteza de Heisenberg modificada, assim, as divergências no modelo brick-wall são removidas, como foi abordado por [23]. A entropia estatística de vários buracos negros pode ser calculada também via correção da densidade de estado através do GUP. Logo, os resultados mostram que próximo ao horizonte tanto a densidade de estado quanto a entropia estatística são finitas. Então foi proposto por [24] uma relação para a densidade de estado devido ao GUP, por isso foi usado por [25] uma nova equação de densidade de estado devido ao GUP, em que foi analisada a entropia estatística de um buraco negro acústico, rotativo, em 2+1-dimensões. Foi mostrado também que, considerando o efeito devido ao GUP na equação de densidade de estado, não é preciso um corte e as divergências no modelo brick-wall desaparecem [26].

Motivado por todos esses trabalhos focamos no método Hamilton-Jacobi para determinar a entropia do buraco negro BTZ não-comutativo usando o GUP e considerando a aproximação WKB no formalismo de tunelamento. Nosso objetivo é calcular a parte imaginária da ação para determinar a temperatura Hawking e a entropia do buraco negro BTZ não-comutativo.

Esse trabalho tem um ponto de vista qualitativo e explicativo da termodinâmica

de buracos negros, sendo que nosso objetivo de estudo é de cunho teórico, utilizando uma pesquisa descritiva e interpretativa composta pelos seguintes capítulos: 2) Introdução Sobre os Buracos Negros; 2.1) Formação e Classificação dos Buracos Negros; 2.2) Teoria da Relatividade Geral; 2.3) Soluções dos Tipos de Buracos Negros; 2.4) Termodinâmica do Buraco Negro; 3) Não-Comutatividade; 3.1) Aspectos Gerais; 3.2) Problema de Landau; 3.3) Produto de Moyal; 3.4) Métrica de Schwarzschild não-comutativa; 3.5) Métrica BTZ no espaço não-comutativa; 4) Termodinâmicas dos Buracos Negros Não-Comutativos; 4.1) Correções do Buraco Negro BTZ Não-Comutativo; 4.2) Buraco Negro BTZ e o Princípio da Incerteza Generalizado; 5) Conclusões. Sugerindo que estamos considerando o sistema natural de unidades, ou seja, $G = c = \hbar = \kappa_B = 1$.

2 Introdução sobre os Buracos Negros

Buracos negros são regiões do Universo as quais curvatura do espaço-tempo é distorcidas por um campo gravitacional originado por um colapso de estrelas ou de regiões quentes e densas logo após a explosão do Big Bang. O termo “*buraco*” vem do fato da matéria e da radiação que podem cair dentro dele, já o termo “*negro*” está associado a dizer que nem a luz pode sair dele. Imagina-se que eles são os objetos mais excêntricos do Universo. Desse modo, os buracos negros devem ser contornados por algum tipo de superfície fechada, sendo este um elemento crucial para a sua existência, na qual é denominada horizonte de eventos.

Iremos fazer um abordagem teórica neste capítulo sobre a formação e classificação dos buracos negros, bem como uma revisão sobre relatividade geral descrita por Albert Einstein em $(3 + 1)$ -dimensões e $(2 + 1)$ -dimensões. Por fim apresentaremos a relação entre buracos negros e a termodinâmica.

2.1 Formação e Classificação dos Buracos Negros

Grandes descobertas astronômicas tiveram início em 1960, o que gerou interesse ainda maior na teoria clássica da relatividade geral pela comunidade científica. Vários objetos como quasares, pulsares e fontes de raios-X indicaram a presença de um campo gravitacional muito forte que só poderia ser explicado pela Teoria da Relatividade Geral. Os quasares são objetos tipo estrelas poderosamente energéticas e brilham mais do que galáxias inteiras. Pulsares são os restos das estrelas que entraram em colapso gravitacional (*supernovas*) e que piscam rapidamente. Considera-se que os pulsares são estrelas de nêutrons ultradensas. As fontes de raios-X podem ser estrelas de nêutrons ou objetos ainda menores, conhecidas por buracos negros [27].

No esforço de descrever a formação de buracos negros iremos imaginar primeiro uma estrela com no mínimo 10 vezes a massa solar, que é necessário para se formar um buraco negro. No decorrer de sua vida a estrela transforma hidrogênio em hélio, em um processo conhecido por fusão nuclear. Neste período, a estrela possui uma velocidade de escape cerca de 1.000 quilômetros por segundo [27], ou seja, a velocidade mínima para um objeto escapar do seu campo gravitacional. A energia gerada nesse processo produz uma pressão suficiente para manter o equilíbrio com a própria gravidade da estrela. Contudo, na reta final de sua vida, esse combustível vai se acabando e o equilíbrio é quebrado, de forma que a força gravitacional supera a pressão produzida na fusão, então a estrela entra em colapso gravitacional, o resultado final desse processo é conhecido como supernova. A estrela vai encolhendo, e como consequência, o campo gravitacional na superfície da

estrela vai aumentando junto com a velocidade de escape. Chegando-se em um ponto em que a velocidade de escape aumenta para 300.000 quilômetros por segundo, a velocidade da luz. Neste caso, nem a luz consegue escapar de dentro da estrela, e como nada viaja mais rápido do que a luz, nada mais consegue sair deste campo gravitacional. O resultado desse processo ou colapso é conhecido como buraco negro: a região do espaço-tempo a partir do qual não é possível escapar para o infinito [27]. Esses tipos de buracos negros são conhecidos como buracos negros gravitacionais, que se formam a partir do colapso de uma estrela (figura 1).

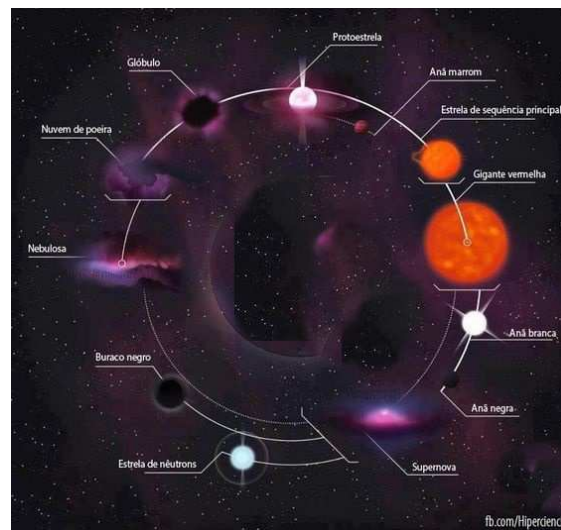


Figura 1 – Formação de Buracos Negros Gravitacionais

Fonte: <https://pt.great-spacing.com/publication/32458/>

Além dos buracos negros gravitacionais, estima-se que podem existir diversos buracos negros muito pequenos, os quais não foram formados pelo colapso estelar, mas sim a partir de regiões muito quentes e densas logo após o Big Bang. Esses são conhecidos como buracos negros primordiais (figura 2).

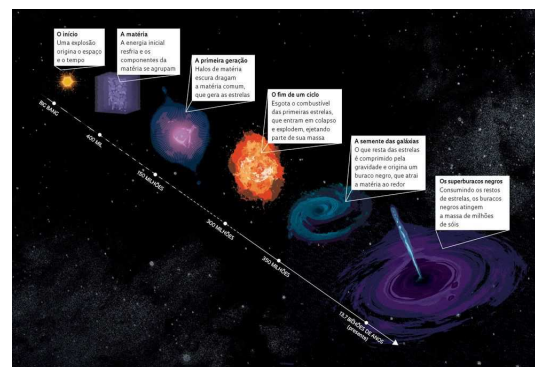


Figura 2 – Formação de Buracos Negros Primordiais

Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/821555157003457816/>

Lembrando-se que este procedimento vem de uma visão clássica. Hoje, graças aos estudos apresentados por Einstein da Teoria da Relatividade Geral, sabe-se que para uma estrela se tornar um buraco negro é preciso que sua massa esteja concentrada numa região menor do que o raio de Schwarzschild: $r = 2M$ onde M é a massa da estrela e $G = c = 1$. Esta é uma previsão descrita pela relatividade geral.

A base do esquema de classificação para os buracos negros foi dada por John Wheeler [28] e diz que um buraco negro possui poucas propriedades independentes externamente mensuráveis, ou seja, as soluções do tipo buracos negros podem ser completamente caracterizadas apenas por sua massa, seu momento angular e sua carga elétrica. Essa afirmação é conhecida por teorema no-hair. Na tabela 1 é mostrada esse tipo de classificação.

Tabela 1 – Classificação por massa, momento angular e carga elétrica

PROPRIEDADES	MÉTRICA
Somente massa	Schwarzschild
Massa e momento angular	Kerr
massa e carga elétrica	Reissner-Nordström
Massa, momento angular e carga elétrica	Kerr-Newman

Outro modo de classificação amplamente utilizado para buracos negros é aquele que se baseia na massa do buraco negro. Os limites de massa das diversas classes não são definidos com precisão e vários autores têm adotado novas classes de classificação. A tabela 2 mostra essa outra maneira de classificar, na qual a massa do buraco negro é representada em termos de massas solares (M_{\odot}).

Tabela 2 – Classificação por faixa de massa. Sendo M_{\odot} a massa solar

CLASSES	FAIXA DE MASSA
Mini buraco negro	0 à $0.1 M_{\odot}$.
Buraco negro de massa estelar	0.1 à $300 M_{\odot}$.
Buraco negro de massa intermediária	300 à $10^5 M_{\odot}$.
Buraco negro supermassivo	10^5 à $10^{10} M_{\odot}$.

2.2 Teoria da Relatividade Geral

A relatividade geral de Einstein consiste em duas: A teoria da relatividade restrita (chamada de especial ou de TRR) e a teoria da relatividade geral (TRG). A teoria especial, formulada por Einstein em 1905, refere-se a comparação de medidas feitas em referenciais inerciais, movendo-se com velocidade constante relativamente um ao outro. Por sua vez, a teoria geral (1916), que é a teoria relativística da gravitação, trata-se da descrição de

referenciais acelerados. Como veremos, o campo gravitacional é, localmente equivalente a um referencial não-inercial.

2.2.1 Teoria da Relatividade Geral e Campo Gravitacional

O caráter universal da gravitação é que, na presença de um campo gravitacional, todos os corpos caem ao longo da mesma trajetória espacial, independente da sua massa e constituição. Por outro lado, as propriedades do movimento de um corpo, em queda livre, são as mesmas do movimento que ele teria se estivesse em repouso em um referencial não-inercial, e na ausência de um campo gravitacional externo. Essa característica permite-nos concluir que um campo gravitacional é equivalente a um referencial não-inercial (Princípio da Equivalência)

Porém devemos ressaltar que os campos são equivalentes a sistemas não-inerciais não são campos reais, uma vez que os campos que possuem a equivalência podem ser eliminados quando ocorre a passagem para um referencial inercial. Os campos reais, ao invés disso, não podem ser eliminados sob nenhuma mudança de coordenadas. Na verdade, podemos eliminar um campo real apenas localmente, ou seja, em uma pequena região do espaço onde ele possa ser considerado uniforme.

Extrapolando essa discussão para o caso relativístico Einstein conclui que a gravidade é uma modificação do espaço, ou seja, uma modificação da geometria euclidiana nas proximidades de uma distribuição de massa.

2.2.2 Equações de Einstein

De acordo com a gravitação newtoniana a interação gravitacional é uma consequência da ação de um campo escalar $\phi(x, y, z)$ que foi criado por uma distribuição espacial da matéria com densidade de massa $\rho(x, y, z)$. Assim o campo gravitacional é determinado pela seguinte equação:

$$\nabla^2\phi(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z). \quad (2.1)$$

As equações de Einstein são escritas em termos de objetos matemáticos mais complexos do que um campo escalar $\phi(x, y, z)$, que são os tensores. No lugar de ϕ , vamos ter o tensor métrico $g_{\mu\nu}(t, x, y, z)$, o qual é um tensor simétrico de segunda ordem que possui 16 componentes. Devido à simetria $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, esta função possui apenas 10 componentes independentes. Ao mesmo tempo que a descrição do campo newtoniano precisa apenas de 1 potencial para descrever os efeitos do campo gravitacional.

Além do mais, essas equações devem apresentar características semelhantes à equação (2.1), ou seja, o lado direito de cada uma delas deve conter um tensor que represente a quantidade de matéria e energia, denominado de *Tensor Energia-Momento*,

representado por $T_{\mu\nu}$. Do lado esquerdo de cada equação, deve haver um tensor de segunda ordem construído em termos de derivadas segundas do tensor $g_{\mu\nu}$.

Assim esta notação de componentes no sistemas de unidades geométricas, as equações de Einstein é dada por:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, que descreve o conteúdo como geométrico no espaço-tempo, cuja forma explicita é:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.3)$$

Aqui $R_{\mu\nu}$ representam o tensor de Ricci e R o escalar de curvatura. Esses objetos são definidos como:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\alpha\mu\nu}, \quad (2.4)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

onde $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel que tem, a seguinte forma:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}. \quad (2.6)$$

O objeto $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ é conhecido como símbolo de Christoffel, é dado por:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}), \quad (2.7)$$

onde as vírgulas denotam a derivação parcial em relação às variáveis x^{μ} .

O tensor de curvatura de Riemann nos informa qual é a curvatura do espaço-tempo. Então, espaços-tempo curvos possuem $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \neq 0$ e os planos têm $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$. Além disso, no lado direito das equações de Einstein, temos o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$. Esse tensor descreve a fonte de matéria e energia que curva o espaço-tempo.

O tensor de Einstein é função da métrica e das suas derivadas, assim dado $T^{\mu\nu}$, resolver as equações de Einstein é encontrar a forma funcional na qual as 10 componentes independentes da função métrica $g_{\mu\nu}$. Logo, a equação (2.2) consiste em um sistema composto por 10 equações diferenciais parciais não-lineares aproximadas. Então, torna-se não trivial resolver essas equações por elas serem não-lineares.

Então, para encontrar as soluções da equação (2.2), Einstein concluiu que as equações que descrevem o campo gravitacional é gerado por uma grande quantidade de massa ou energia. Assim, não significa dizer que as soluções não sejam realistas. Por exemplo, as soluções de vácuo ou exteriores possuem $T^{\mu\nu} = 0$ no qual simplificam as equações de Einstein à forma:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

Dando-nos um importante grupo de soluções astrofísicas que descrevem buracos negros e estrelas compactas, como por exemplo, temos as soluções de Schwarzschild nos quais são usados para modelar esses objetos astrofísicos.

2.2.3 Teoria da Relatividade em (2 + 1)-Dimensões

Fundamentalmente, as equações de campo de Einstein parecem funcionar perfeitamente em N-dimensões. Entretanto, uma investigação mais profunda revela que, para $N < 4$, a teoria apresenta alguns problemas [29].

Nesta seção iremos fazer uma breve apresentação da Teoria da Relatividade Geral para o caso de $N = 3$, ou seja, (2 + 1)-dimensões na qual a teoria da gravitação de Newton para o plano é dada por:

$$\nabla^2\phi = 2\pi\rho. \quad (2.9)$$

Assim, essa teoria prevê que a aceleração deve cair com $1/r$ para um campo gerado por um ponto de massa M . Contudo, veremos a seguir que a relatividade geral para (2+1)-dimensões não fornece este resultado no limite de um campo fraco [30, 31].

Veja que no espaço-tempo de (3+1)-dimensões, a constante k é determinada pela necessidade de que as equações de Einstein devem se reduzir as equações de Newton no limite não relativístico e isto leva a $k = 8\pi G$ onde $c = 1$ e $G = 1$. Contudo, em (2+1)-dimensões não existe este limite. Sendo assim, nesta dimensão k permanece constante a ser determinada [30]. Para esta dimensão esperamos que as equações de Campo de Einstein tenham propriedades semelhantes as mesmas equações em (3+1)-dimensões. Além do mais desejamos que as equações recaiam automaticamente na lei da conservação da energia: $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ [30]. Em (2+1)-dimensões a métrica $g_{\mu\nu}$, os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ e o tensor de curvatura $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ são definidos de maneira usual. Segundo [31] a escolha do tensor Energia-Momento determina completamente o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e, em 3 dimensões, o tensor de Weyl (que é uma medida da curvatura do espaço-tempo) desaparece. Deste modo, as equações de campo de Einstein permanecem sendo:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

utilizando ainda a equação (2.8), podemos reescrever as equações de campo em termos do tensor de Ricci, como:

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2}g_\nu^\mu R = \kappa T_\nu^\mu \Rightarrow R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R = \kappa T_\nu^\mu \Rightarrow \quad (2.11)$$

$$R - \frac{3}{2}R = \kappa T \Rightarrow -\frac{R}{2} = \kappa T \Rightarrow R = -2\kappa T. \quad (2.12)$$

Então,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-2\kappa T) = \kappa T_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} = \kappa[T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T]. \quad (2.13)$$

Em três dimensões, o tensor de curvatura possui apenas 6 componentes independentes, então o tensor de Riemann que pode ser expresso como uma dependência linear apenas do tensor de Ricci [31, 30, 32] passa a ser dado da seguinte forma:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})R, \quad (2.14)$$

Como estamos operando com o caso em que $N > 2$, mais especificadamente $N = 3$, o tensor de Ricci pode ser expresso em termos do tensor de Einstein e ambos têm o mesmo número de componentes independentes [29]. De forma geral podemos relacionar estes dois tensores como se segue:

$$G = \frac{1}{2}(2 - N)R; \quad R = \frac{2}{2 - N}G, \quad (2.15)$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}; \quad R_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{2}{N - 2}Gg_{\alpha\beta}. \quad (2.16)$$

A tabela 3 mostra como se relacionam os componentes linearmente independentes dos tensores com o número de dimensões.

Tabela 3 – N° de componentes independentes no espaço de N-dimensões

N° de componentes algebricamente independente	N	4	3	2	1
Tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$(1/12)N^2(N^2 - 1)$	20	6	1	0
Tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$	$(1/2)N(N + 1)$	10	6	1	0
Tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$	$(1/2)N(N + 1)$	10	6	0	0
Escala de Ricci R	1, se $N > 1$	1	1	1	0

Depois de feita esta abordagem, podemos agora obter soluções para as equações de campo no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$) onde devemos ter $R_{\mu\nu} = 0$ e conseqüentemente, $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$. O espaço-tempo de Minkowisk, $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$, será a única solução possível. Significa dizer que não existem ondas gravitacionais no mundo plano e também não existe ação a distância [31, 30]. Sendo assim, devemos ver que a geometria local em (2+1)-dimensões é curvada apenas na presença de matéria ou energia.

Adotando uma forma mais geral de uma métrica com simetria circular como sendo:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\phi^2. \quad (2.17)$$

Encontraremos as funções $A(r)$ e $B(r)$ substituindo (2.17) nas equações de campo no vácuo. Desta forma, encontramos que estas funções não dependem da variável r , sendo assim, elas são constantes, as quais denominamos de A_0B_0 , Logo:

$$ds^2 = A_0dt^2 + B_0dr^2 + r^2d\phi^2. \quad (2.18)$$

Uma maneira de eliminar estas constantes é fazer a seguinte mudança de coordenadas: $t = \sqrt{A_0}t'$, $r = \frac{r'}{\sqrt{B_0}}$ e $\phi = \sqrt{B_0}\phi'$. Substituindo essas relações na métrica acima obtemos:

$$ds^2 = -dt'^2 + dr'^2 + r^2 d\phi'^2. \quad (2.19)$$

Com mudanças de coordenadas, a métrica (2.17) foi escrita na forma polar da métrica de Minkowisk. Este corresponde a cortar o plano em $\phi = 0$ e espalhando no plano. Percebe-se que $0 \leq \phi \leq 2\pi$ então, $0 \leq \phi' \leq \frac{2\pi}{\sqrt{B_0}}$. Deste modo, o cone tem um ângulo de desvio no seu vértice de:

$$D = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{B_0}}\right). \quad (2.20)$$

Mostrando que as trajetórias que estão inicialmente paralelas acabam por se cruzar e eventualmente em um ângulo D . Além do mais, pode ser mostrado que D é proporcional a massa.

Algumas motivações para estudar a teoria da relatividade geral em $(2 + 1)$ -dimensões são mostrados nos artigo de Gott e Alperete [30]. Eles falam em seu artigo que reduzir a dimensão pode ser útil para simplificar problemas de Mecânica Quântica e assim a existência da temperatura Hawking, que origina do espaço de De Sitter em $(1+1)$ -dimensões. Uma outra questão importante é que um ponto singular de massa no espaço-tempo plano é conhecido como singularidade quase regular, isto é, o comprimento de um pequeno círculo desenhado em torno de um ponto não se aproxima de $2\pi r$ a medida que $r \rightarrow 0$. Este tipo de singularidade pode ser visto na métrica de Kerr (que descreve a geometria do espaço-tempo ao redor de um corpo massivo em rotação), no qual o espaço-tempo é plano em todos os pontos, exceto no anel onde existe uma singularidade canônica, onde a circunferência de um pequeno círculo de raio r é dado por $4\pi r$.

Observamos que no espaço plano massas pontuais são muito bem comportadas e têm singularidades quase regulares. Na nossa investigação, vimos dois fatos interessantes: I) a Teoria da Relatividade Geral trabalha perfeitamente bem como uma teoria de campos, mesmo na ausência de grávitons e de ondas gravitacionais; II) A Teoria da Relatividade Geral não reflete necessariamente na física newtoniana no limite do campo fraco.

2.3 Soluções dos Tipos de Buracos Negros

2.3.1 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild representa a geometria do espaço-tempo fora de uma fonte gravitacional esférica e estática. Essas soluções fora da fonte são descritas como soluções de vácuo ou soluções exteriores e satisfazem as equações de Einstein na forma (2.8). O elemento de linha é determinado apenas por um parâmetro de massa M e tem a

forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (2.21)$$

sendo

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \quad (2.22)$$

e R , θ e φ correspondem às coordenadas esféricas usuais. Esta solução foi descoberta pelo astrônomo alemão K. Schwarzschild em 1916 e foi a primeira solução exata das equações de Einstein encontrada [33].

Uma importante previsão desta geometria é a existência de buracos negros. Assim nesse caso, o buraco negro é dito de Schwarzschild. Esse possui uma singularidade física em $R = 0$ coberta por um horizonte de eventos (na superfície esférica definida pelo raio de Schwarzschild $R_S = 2M$). Então ao atravessarmos o horizonte de eventos, indo para o centro do buraco negro, iremos ter a inversão dos sinais das coordenadas espaciais e temporal.

2.3.2 A Métrica BTZ

Nesta parte iremos abranger com detalhes o buraco negro da teoria de Einstein em $2 + 1$ dimensões com constante cosmológica negativa que será visto com detalhes. Essa geometria foi chamada de buraco negro BTZ por que foi proposta pelos físicos chilenos Máximos Banados, Cláudio Teitelboim e Jorge Zanelli [3, 34]. Veremos que o buraco negro surge da identificação de pontos anti-de Sitter em três dimensões a partir de um subgrupo discreto de $SO(2,2)$. A superfície $r = 0$ não é uma singularidade na curvatura, mas é uma singularidade na estrutura causal do espaço-tempo. Curvas contínuas através dessa superfície introduziriam curvas temporais fechadas na variedade.

Contudo, o objetivo desse trabalho não é demonstrar a métrica BTZ e sim apresentar algumas características do espaço em estudo anti-de Sitter (AdS) e da própria métrica, visto que o maior interesse é o estudo de propriedades termodinâmicas deste tipo de buraco negro e a obtenção de um potencial efetivo para esta métrica. Em nossas abordagens vamos utilizar o método de tunelamento para calcular grandezas termodinâmicas associadas ao buraco negro. A ação considerada por Bañados, Teitelboim e Zanelli tem a forma:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} [R + 2l^{-2}] dx^2 dt + B, \quad (2.23)$$

onde B é o termo de superfície e o raio de curvatura l que se relaciona com a constante cosmológica da seguinte maneira:

$$l^2 = -\frac{1}{\Lambda}, \quad (2.24)$$

e como foi expresso, l deve fornecer a escala de comprimento necessária para se ter um raio de horizonte de eventos. Além disso, a métrica encontrada por eles a partir de soluções

das equações de Einstein é:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi) , \quad (2.25)$$

em que N e N^ϕ são funções de r que são dadas por,

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (2.26)$$

e

$$N^\phi = -\frac{J^2}{2r^2} , \quad (2.27)$$

com t e r finitos e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Essa métrica apresenta acima com as duas constantes M e J , são identificadas como sendo a massa e o momento angular, que representam as cargas conservadas associadas com a invariância assintótica conforme o deslocamento do tempo, e a invariância de rotação, nessa ordem. Segundo [35], esta identificação é conseguida através de uma análise das integrais das superfícies que devem ser adicionadas ao hamiltoniano a fim de torná-lo bem definido. Além disso, a função N desaparece para os dois valores de r que são:

$$r_{\pm}^2 = \frac{l^2 M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right], \quad (2.28)$$

podemos averiguar que a partir dessa equação que o raio irá existir, se $M > 0$ e $|J| \leq Ml$. Para o caso extremo em que $|J| = Ml$ as duas raízes sejam iguais. Desse modo podemos extrair a partir da métrica (2.25), uma equação para o estado de Vácuo. Porém para isto acontecer, deve-se considerar que o raio do horizonte deve ir para zero, então, é só observar que devemos fazer $M \rightarrow 0$ e $J \rightarrow 0$, resultando em:

$$ds_{vac}^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(\frac{l^2}{r^2}\right) dr^2 + r^2 d\phi^2 . \quad (2.29)$$

Por outro lado é interessante notarmos que se $M = -1$ e $J = 0$ e a singularidade também desaparece sem a necessidade da existência de horizonte. Neste caso, ficamos com a métrica:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 , \quad (2.30)$$

a qual descreve um espaço anti-de Sitter (que é uma variedade quadridimensional de espaço-tempo, de uma esfera no comum espaço euclidiano) é retomado.

2.4 Termodinâmica do Buraco Negro

O buraco negro mostra o sentido interessante de aumentar a área da superfície. A área do GUP foi dada por Penrose e Floyd [36], onde foi sugerido que uma ampliação

do horizonte poderia ser uma característica geral da evolução dos buracos negros. Por outra parte, Christodoulou [37] apresentou em um processo que resultou na absorção da partícula de um buraco negro de Kerr, onde existe uma quantidade de massa irreduzível que nunca diminui. Além do mais, por um caminho totalmente diferente Hawking provou de forma geral que a área da superfície do buraco negro não pode diminuir [27]. Existem pares de partículas virtuais (denominadas assim por serem criadas e aniquiladas tão rapidamente que seria impossível de detectá-las), que se manifestam como fótons, surgindo e se aniquilando a todo momento muito rapidamente. Esse frenesi de criação e aniquilação é conhecido como flutuação quântica [38, 39].

Quando a mecânica quântica é levada em conta, é de se esperar que as energias das partículas devam ser restringidas para que o comprimento de onda dessas partículas sejam menores do que o tamanho do buraco negro. Assim, parece razoável postular que o número de configurações interna seja finito [40]. Neste caso, associa-se com o buraco negro uma entropia S_H no qual é o logaritmo desse número, de possíveis configurações. É importante o estudo da termodinâmica de buracos negros para perceber como a entropia do universo aumenta espontaneamente. Se considerarmos a primeira lei da termodinâmica como sendo:

$$dE = TdS - pdV, \quad (2.31)$$

na qual o fator de proporcionalidade que é chamado de temperatura do sistema é dado por T , S é a entropia, p é a pressão e V é o volume do sistema. A partir dessa relação observou-se uma mudança pequena na entropia do sistema, a qual provoca uma variação proporcional à energia do sistema.

Então, para os buracos negros, essa pequena variação da massa altera a área do horizonte de eventos. Essa mudança da massa, que é multiplicada pelo fator de proporcionalidade denominado gravidade da superfície, nada mais é que uma medida da força do campo gravitacional no horizonte de eventos. Assim, chamamos k a gravidade de superfície.

Como foi dito, podemos fazer algumas correspondências de propriedades termodinâmicas com os buracos negros como, por exemplo, energia, entropia e temperatura são correspondidas à massa, à área e a gravidade da superfície como é mostrado em seguida:

$$E \longleftrightarrow M, \quad (2.32)$$

$$S \longleftrightarrow A, \quad (2.33)$$

$$T \longleftrightarrow \frac{k}{2\pi}. \quad (2.34)$$

Na Teoria da Relatividade Geral, essa similaridade é basicamente perfeita com cada lei da termodinâmica, correspondendo a uma lei da Mecânica dos buracos negros [41].

A lei zero afirma que no equilíbrio térmico a temperatura superficial, k é uma constante. Assim, a primeira lei da termodinâmica mostra a conservação da energia dada pela equação (2.31), então, [42] mostra que o equivalente para um buraco negro é:

$$dM = \frac{k dA}{8\pi} + \Omega_H dJ, \quad (2.35)$$

na qual M é a massa, A é a área, k é a gravidade superficial, Ω_H é a velocidade angular e J é o momento angular do buraco negro, além do mais a massa e a energia se relaciona como sendo $E = mc^2$. Já a segunda lei da termodinâmica diz que a entropia nunca diminui, o que requer uma relação em que a área do buraco negro também nunca diminui. Por fim, usando a terceira lei da termodinâmica, que estabelece ser impossível alcançar $T = 0$, resultando em dizer que a gravidade da superfície nunca vai ser zero [41, 42]. Para que isto seja consistente é necessário que o buraco negro emita uma radiação térmica com uma temperatura dada por:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dg_{00}}{dr} \right|_{r=r_h}. \quad (2.36)$$

Em que $r = r_h$ é o ponto dado pelo raio do horizonte de eventos. A entropia do buraco negro é definida como:

$$S = \int \frac{dM}{T_h}. \quad (2.37)$$

Nós vamos considerar nas próximas seções os exemplos para o cálculo da temperatura e da entropia para o caso de Schwarzschild e para o caso BTZ.

2.4.1 Termodinâmica no caso da métrica de Schwarzschild

Vamos agora considerar a métrica de Schwarzschild para calcular tanto a temperatura Hawking tanto como a entropia através das relações acima. Para a métrica (2.21) a temperatura é calculada através da equação (2.36) na qual obtemos:

$$T_H^{(s)} = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \Big|_{r=2M} \Rightarrow T_H^{(s)} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (2.38)$$

Calculando a entropia através da equação (2.37) e usando como base a equação acima chegamos há:

$$S^{(s)} = \int 8\pi M dM = 4\pi M^2 = \pi r_h^2, \quad (2.39)$$

onde denominamos r_h como sendo o raio do horizonte de Schwarzschild. Escrevendo este resultado em termos da entropia em termos da área de uma esfera, então:

$$S^{(s)} = \frac{A}{4}. \quad (2.40)$$

Também conhecida como a formula de Bekeinstei-Hawking, a qual postula que a entropia de um buraco negro deve ser proporcional a sua área. Vamos utilizar o índice

(S) para representar propriedades referentes ao buraco negro de Schwarzschild, tais como temperatura, entropia e calor específico.

Vamos ter então, para a lei da radiação de Stephan-Boltzmann para um corpo negro a seguinte expressão:

$$\frac{dE}{dt} \cong -\sigma AT^4, \quad (2.41)$$

onde σ é uma constante dada por:

$$\sigma = \frac{\pi^2}{60}. \quad (2.42)$$

No sistema natural de unidades.

A área racionalizada para um buraco negro de Schwarzschild é dada por $\alpha = 4M^2$ [43]. Diferenciando esta solução para a massa M , resulta em:

$$dM = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}}d\alpha, \quad (2.43)$$

assim, temos que a temperatura do buraco negro de Schwarzschild será:

$$\frac{dM}{d\alpha} = \Theta = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{8M}. \quad (2.44)$$

Esse resultado indica que quanto menor a massa do buraco negro maior será sua temperatura. Além disso, temos que o potencial de Gibbs e de Helmholtz serão iguais e assim:

$$dF = dG = -\alpha d\Theta. \quad (2.45)$$

Logo, há um único calor específico, dado por:

$$C = -\alpha = -\frac{1}{16\Theta^2}, \quad (2.46)$$

$$C = -4M^2,$$

desta forma, vimos que o calor específico do buraco negro de Schwarzschild é sempre negativo, de onde chega-se à conclusão que a temperatura Θ sempre diminui.

Fazendo uma análise no caso de Schwarzschild, onde $E = M$ (lembre que estamos no sistema de unidades naturais), assim $A = 16\pi M^2$ e $T_H^{(S)} = 1/8\pi M$, percebemos que:

$$\frac{dM}{dt} \propto \frac{1}{M^2}. \quad (2.47)$$

Consequentemente, quanto mais massivo for o buraco negro, maior será seu tempo de vida, além disso, considerando o Sistema Internacional de Unidades e substituindo os valores de todas as constantes na temperatura $T_H^{(S)}$, identificamos:

$$T_H^{(S)} \propto \frac{1}{M} \cdot 10^{23}. \quad (2.48)$$

Considerando por exemplo, o Sol, e se ele colapsar e se torna um buraco negro, a sua massa é dada pela ordem de $10^{30}Kg$, veríamos que a temperatura radiada por ele seria da ordem de $10^{-7}K$, que é um valor muito baixo para ser detectado. Assim, conseguiríamos, por exemplo, procurar por buracos negros velhos, em que sua radiação estivesse quase no fim. Estes buracos negros seriam inapropriados já que seu tempo de vida é de ordem 10^{73} anos, o que retrata uma idade muito maior do que a idade do próprio universo [39].

2.4.2 Termodinâmica para a métrica BTZ

Utilizando a métrica BTZ, considerando que na seção anterior através da equação (2.25), a temperatura será de:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right) \Big|_{r=r_+} \Rightarrow T_H = \frac{1}{2\pi r_+} \left(\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} \right). \quad (2.49)$$

Usando essa equação para calcular a entropia através de (2.37), obtemos:

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi r_+ \left(\frac{r^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r^2} \right)^{-1} \left(\frac{2r_+}{l^2} - \frac{j^2}{2r_+^3} \right) dr_+ \Rightarrow \\ S &= \int 4\pi dr_+ \Rightarrow \\ S &= 4\pi r_+ \Rightarrow \\ S &= A. \end{aligned} \quad (2.50)$$

O calor específico para a métrica BTZ com $J = 0$ é dado por:

$$C = \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\partial M}{\partial r_h} \left(\frac{\partial T}{\partial r_h} \right)^{-1}, \quad (2.51)$$

e assim, encontramos o calor específico positivo $C > 0$, significa que o buraco negro BTZ é estável.

$$C = 4\pi r_h. \quad (2.52)$$

onde temos que $C = 4\pi r_h$ é o calor específico da métrica BTZ comutativa.

Considerando que a área do buraco negro em (2+1)-dimensões é $A = 4\pi r_+$ [44] e baseado nos teoremas provados por Stephen Hawking, Jacob Bekenstein considerou que a entropia do buraco negro deveria ser proporcional à área de seu horizonte de eventos. Por exemplo, para estes casos particulares, comprovamos a relação entre entropia e área.

3 Não-Comutatividade

Os pressupostos básicos da não-comutatividade foram propostos desde cedo pelos fundadores da mecânica quântica, por exemplo, Heisenberg, na tentativa de introduzir um corte ultravioleta eficaz. Experimentando contornos de divergências nas teorias como da eletrodinâmica quântica e Snyder foi o primeiro a formalizar a ideia de não-comutatividade [45].

A motivação para o estudo do espaço-tempo não-comutativo aparece em teorias como a teoria das cordas, no qual o limite de baixas energias encontramos a teoria de Yang-Mills não-comutativa, proposta de Seiberg e Witten, e também, em teoria não-comutativa no problema de Landau (sobre o movimento do elétron na presença de um campo magnético externo) [46]. Na matéria condensada, surge a teoria de campos não-comutativa e no efeito Hall quântico.

3.1 Aspectos Gerais

O espaço-tempo não-comutativo veio basicamente junto com a mecânica quântica, uma vez que no espaço de fases as variáveis canônicas x^μ e p_ν são substituídas pelos operadores \hat{x}^μ e \hat{p}_ν obedecendo a relação de comutação de Heisenberg. Como Consequência, o espaço de fases tornam-se espalhado e a noção de ponto sede lugar à célula de Planck [45], e quando tomamos o limite clássico em que $\hbar \rightarrow 0$, obtemos o espaço contínuo. Van Neumann entretanto, procurou descrever essa geometria "sem ponto", segundo ele "a noção de ponto no espaço quântico não tem sentido por causa do princípio da incerteza de Heisenberg da mecânica quântica", e levou à álgebra de Von Neumann, que era essencialmente o surgimento da geometria não-comutativa [45].

De forma análoga ao que acontece no espaço de fases da mecânica quântica, na geometria não-comutativa as coordenadas do espaço-tempo x^μ são substituídos por operadores Hermitianos \hat{x}^μ , os quais obedecem a seguinte relação de comutação:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Na qual $\Theta^{\mu\nu}$ representa uma matriz anti-simétrica $D \times D$, onde D é a dimensão do espaço-tempo e $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D - 1$, é a dimensão do comprimento ao quadrado. Uma vez que, no caso mais simples Θ é uma constante, por conta das coordenadas não comutarem, elas não podem ser diagonalizadas simultaneamente, implicando uma relação de incerteza proporcional a Θ . Aplicando o princípio da incerteza de Heisenberg generalizado, temos:

$$\Delta x^{\mu 2} \Delta x^{\nu 2} \geq \left(\frac{1}{2i} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \right)^2, \quad (3.2)$$

resultando em,

$$\Delta x^{\mu 2} \Delta x^{\nu 2} \geq \frac{1}{2} |\Theta^{\mu\nu}|. \quad (3.3)$$

A partir dessa relação a noção de ponto não faz mais sentido, já que se localizarmos bem uma coordenada a outra se torna espalhada, perdendo assim a representação usual de um ponto através da localização de duas coordenadas. A melhor evidência que temos da teoria da não-comutatividade parte da teoria das cordas, que é o melhor candidato para a teoria quântica da gravidade. Devido as cordas possuírem comprimentos finitos, definidos pela escala de Planck $l_p \approx \sqrt{\frac{G\hbar}{c^2}} \approx 10^{-35}m$, não é possível considerar distâncias menores do que l_p . Assim, para energias altas, as cordas modificam o princípio da incerteza de Heisenberg [45]. Além do mais, estudos presentes mostram que o princípio da incerteza generalizado (GUP) tem se tornado cada vez mais importante nas proximidades dos horizontes de eventos dos buracos negros [45, 12].

Por causa das cordas temos uma escala intrínseca finita devido a não-comutatividade l_s , onde não é possível observar escalas menores do que esta. Fundamentando em altas energias das cordas, o princípio da incerteza de Heisenberg se modifica tendo a seguinte forma:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta p} + l_s^2 \Delta p \right). \quad (3.4)$$

O limite de $l_s = 0$ na relação acima recupera a relação da mecânica quântica usual. Reduzindo essa equação com respeito a variação do momento, um limite muito abaixo do absoluto $(\Delta x)_{min} = l_s^2$ é medido. Assim, dessa maneira, a teoria das cordas nos dá de forma explicita a noção de achatamento do espaço-tempo descrito acima [45]. A relação de incerteza é suposta como sendo:

$$\Delta x^i \Delta x^j = l_p^2, \quad (3.5)$$

na qual l_p é o comprimento de Planck no espaço-tempo. Assim, no limite de baixas energias $l_p \rightarrow 0$, recuperamos o espaço-tempo clássico usual com as coordenadas comutando em grandes distâncias.

3.2 Problema de Landau

O problema de Landau refere-se a um sistema não-relativístico de N_e elétrons, que interagem movendo-se em duas dimensões. Considerando uma partícula carregada de massa m que move-se no plano $\vec{r}_a = 1, \dots, N_e$ na presença de um campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ constante e perpendicular ao plano em que eles se movem.

Para este caso a lagrangiana é dada por:

$$L = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{m_e}{2} \dot{\vec{r}}_a^2 + e \vec{r}_a \cdot \vec{A}(\vec{r}_a) - V(\vec{r}_a) \right] - \sum_{a<b} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b). \quad (3.6)$$

O primeiro termo é dado pela energia cinética, já o segundo termo é dado pelo potencial vetor, no terceiro termo ele representa o potencial eletromagnético e o último termo é dado pelo potencial de interação entre as partículas. Esse potencial vetor que aparece na equação acima é caracterizado na forma $\vec{A}(\vec{r}_a) = (0, Bx_a, 0)$ devido a um calibre. O campo magnético é representado pelo rotacional do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}_a)$. Podemos supor um calibre da seguinte maneira:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \quad e \quad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (3.7)$$

onde f é uma função arbitrária das coordenadas [47].

Para a quantização desse sistema, vamos proceder de modo usual, ou seja, determinar o correspondente operador hamiltoniano que pode ser obtido da função lagrangiana L dado por:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (3.8)$$

tomando a forma de,

$$H = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{\pi_a^2}{2m_e} + V(\vec{r}_a) \right] + \sum_{a < b} U(\vec{r}_a, \vec{r}_b), \quad (3.9)$$

sendo

$$\vec{\pi}_a = m_e \dot{\vec{r}}_a = \vec{p}_a - e\vec{A}(\vec{r}_a), \quad (3.10)$$

o momento mecânico, enquanto \vec{p}_a é o momento canônico que obedece as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [x_a, p_b^x] &= [y_a, p_b^x] = i\delta^{ab}, \\ [x_a, y_b] &= [p_a^x, p_b^y] = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A relação de comutação dos momentos mecânicos tem um comutador quântico não nulo dado por:

$$[\hat{\pi}_a^x, \hat{\pi}_b^y] = ieB\delta_{ab}, \quad (3.12)$$

onde foi usado $[\vec{p}, \vec{A}(\vec{r})] = -i\nabla A$.

Desta maneira, para um campo magnético B muito forte, o espaço dos momentos torna-se não-comutativo. O operador $\vec{\pi}_a$ pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico. Na ausência de interações, $V = U = 0$, os autovalores de energia da hamiltoniana são aqueles dos níveis de Landau.

$$E = \frac{eB}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

No espaço das coordenadas a não-comutatividade surge quando tomamos o limite de campo forte $B \rightarrow \infty$, ou formalmente tomamos o limite de massa pequena $m_e \rightarrow 0$.

Assim nesse limite a lagrangiana torna-se,

$$L_0 = \sum_{a=1}^{N_e} [eBx_a \dot{y}_a - V(x_a, y_a)] - \sum_{a < b} U(\vec{r}_a - \vec{r}_b). \quad (3.14)$$

Tomemos para cada $a = 1, \dots, N_e$, que a lagrangiana acima é da forma $p\dot{q} - h(p, q)$, e forma um par canônico (eBx_a, y_a) cuja relação de comutação é:

$$[\hat{x}_a^i, \hat{x}_b^i] = \frac{i\delta_{ab}\epsilon^{ij}}{eB} = i\delta_{ab}\Theta^{ij}, \quad (3.15)$$

assim o parâmetro da não-comutatividade é dado por,

$$\Theta^{ij} = \frac{\epsilon^{ij}}{eB}, \quad (3.16)$$

onde ϵ^{ij} é o tensor de Levi-Civita de dois índices. Observando que o espaço não-comutativo segue da não-comutatividade do momento por imposição de restrições de primeira classe $\pi_a \approx 0$. O movimento de elétrons no nível mais baixo de Landau é efetivamente descrito por um plano não-comutativo [45, 48]

3.3 Produto de Moyal

Sua primeira aparição foi na mecânica quântica escrito como uma expansão em série de potências de \hbar é utilizado para análises semiclássicas [49]. Estabelecendo assim o produto de Moyal entre duas funções definidas no espaço não-comutativo tem a forma:

$$f(x) \star g(x) = f(x) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right] g(x). \quad (3.17)$$

na qual a seta acima da derivada apresenta a direção de atuação do operador. Partindo em série ao redor de θ , temos:

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= f(x) \left[1 + \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu O(\Theta^2) \right] g(x). \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) + O(\Theta^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Este produto inclui uma fase na multiplicação de dois operadores.

3.4 Propriedades do Produto de Moyal

As próximas relações pertencem a implicações imediatas do produto de Moyal.

a) Comutador entre duas coordenadas:

$$\begin{aligned} [x^\mu : x^\nu] &= x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu \\ &= x^\mu x^\nu + \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu x^\mu \partial_\nu x^\nu - x^\nu x^\mu - \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu x^\nu \partial_\nu x^\mu \\ &= i\Theta^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

b) Comutador entre as coordenadas x^μ e $f(x)$:

$$\begin{aligned} [x^\mu : f(x)] &= x^\mu \star f(x) - f(x) \star x^\mu \\ &= x^\mu f(x) + \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu x^\mu \partial_\nu f(x) - f(x) x^\mu - \frac{i}{2} \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu f(x) \partial_\nu x^\mu. \\ &= i \Theta^{\mu\nu} \partial_\nu f(x). \end{aligned} \quad (3.20)$$

c) Comutador entre as duas funções $f(x)$ e $g(x)$:

$$\begin{aligned} [f(x) : g(x)] &= f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) \\ &= f(x) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right] g(x) - g(x) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right] f(x) \\ &= 2i f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \Theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu \right) g(x). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Mostrando que independentemente do anti-comutador de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é dado por:

$$\{f(x); g(x)\} = 2f(x) \cos \left(\frac{1}{2} \Theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu \right) g(x). \quad (3.22)$$

Vamos considerar a transformada de Fourier cuja forma é:

$$f(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}. \quad (3.23)$$

para ilustrar outras propriedades.

A representação de Fourier para o produto de Moyal de duas funções é:

$$f(x) \star g(x) = \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} f(k) g(k') e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu}, \quad (3.24)$$

usando a formula de Baker-Campbell-Hausdorff, isto é:

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \cdot e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (3.25)$$

assim, os produtos das exponenciais na integral se tornam:

$$\begin{aligned} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}^\nu} &= e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} \cdot e^{-\frac{1}{2} k_\mu [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] k'_\nu} \\ &= e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} \cdot e^{-\frac{1}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} k'_\nu}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Desse modo, obtemos:

$$f(x) \star g(x) = \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} f(k) g(k') e^{-\frac{1}{2} k_\mu \Theta^{\mu\nu} k'_\nu}. \quad (3.27)$$

Outra propriedade é a integração do produto Moyal, na qual, devemos levar em consideração a anti-simetria da matriz Θ bem como:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{i(k_\mu \hat{x}^\mu + k'_\nu \hat{x}^\nu)} = \delta(k + k'). \quad (3.28)$$

Portanto, afirmamos que:

$$\int d^D x f(x) \star g(x) = \int d^D x f(x)g(x), \quad (3.29)$$

em outros termos, a integração do produto Moyal de duas funções é igual a integração do produto natural destas duas funções.

Faremos a seguir uma breve revisão sobre o estudo do buraco negro de Schwarzschild e do buraco negro BTZ não-comutativos. Representaremos esses buracos através de suas propriedades termodinâmicas como temperatura, entropia e calor específico.

3.5 Métrica de Schwarzschild não-comutativa

Uma das primeiras soluções de buracos negros não-comutativos foi a solução do buraco negro de Schwarzschild, obtido por Nicolini, Smailagic e Spallucci em 2006. Em seu artigo, Nicolini et al. [50] mostram que os restos finais de um buraco negro, no plano de fundo não-comutativo, formam um objeto termodinâmico estável. Além de que no regime em que $M/\sqrt{\Theta} \gg 1$, a lei da entropia/área é recuperada (fórmula de Bekenstein-Hawking), ou seja, a entropia é múltipla da área.

Devido a não-comutatividade a estrutura tipo-ponto é “esmagada” e substituída por uma estrutura “achatada” no espaço-tempo plano. Este efeito é matematicamente implementado por uma regra de substituição, ou seja, a função delta de Dirac representa uma distribuição gaussiana de largura mínima $\sqrt{\Theta}$ [50]. Assim, a densidade de massa em um campo gravitacional estático e esfericamente simétrico é dada por:

$$\rho_\theta(r) = \frac{M}{(4\pi\Theta)^{3/2}} \exp(-r^2/4\Theta), \quad (3.30)$$

na qual a massa total M é espalhada na região em tamanhos lineares de $\sqrt{\Theta}$. A massa distribuída sobre uma esfera de raio r é [51]:

$$\begin{aligned} m(r) &= \int_0^r 4\pi r^2 \rho_\theta dr \\ &= \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) = \int_0^{r^2/4\Theta} x^{1/2} e^{-x} dx, \quad (3.32)$$

e as funções γ e Θ são parâmetros de não-comutatividade.

Sendo assim, a métrica do buraco negro não-comutativo de Schwarzschild é dada por,

$$ds^2 = -H(r)dt^2 + H(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\varphi^2, \quad (3.33)$$

onde (ver o Apêndice A),

$$H(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r} = 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right). \quad (3.34)$$

O raio de horizonte de evento é encontrado quando a componente g_{11} diverge, o que é análogo a fazer em $H(r) = 0$. Dessa forma temos:

$$\hat{r}_h = 2M \left[1 - \frac{2M}{\sqrt{\pi}\Theta} e^{-M^2/\Theta} + O\left(\frac{\sqrt{\theta}}{M}\right) \right], \quad (3.35)$$

veja que o horizonte de eventos no caso não-comutativo, é deslocado por um fator que depende do parâmetro Θ . Assim no limite no qual $M/\sqrt{\Theta} \rightarrow \infty$, a equação acima se reduz ao horizonte de eventos para o caso comutativo, ou seja $\hat{r}_h = 2M$.

$$\tilde{T}_H^{(S)} = \frac{H'(\hat{r}_h)}{4\pi}. \quad (3.36)$$

Assim como foi falado no primeiro capítulo, a função $H'(\hat{r}_h)$ que é conhecida como a gravidade da superfície do buraco negro, onde é a intensidade da força gravitacional no horizonte de eventos. Assim:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=\hat{r}_h} &= \frac{4M}{\hat{r}_h^2 \sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{\hat{r}_h^2}{4\Theta}\right) - \frac{M\hat{r}_h}{\sqrt{\pi}\Theta^{3/2}} e^{\hat{r}_h^2/4\Theta} \\ &= \frac{1}{\hat{r}_h} - \frac{M\hat{r}_h}{\sqrt{\pi}\Theta^{3/2}} e^{-\hat{r}_h^2/4\Theta}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

substituindo a (3.35) na equação acima vamos ter:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=\hat{r}_h} &= \frac{1}{2M} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\Theta\pi}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right)^{-1} - \frac{2M^2}{\sqrt{\pi}\Theta^{3/2}} \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{\Theta\pi}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right) e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \left(1 - \frac{4M}{\sqrt{\Theta}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2M} \left(1 + \frac{2M}{\sqrt{\Theta\pi}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right) - \frac{2M^2}{\sqrt{\pi}\Theta^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \left(1 - \frac{4M}{\sqrt{\Theta}} e^{-\frac{M^2}{\Theta}} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

O termo de $(e^{-M^2/\Theta})^2$ por ser desprezível na passagem da primeira para a segunda linha foi desconsiderado. Desprezando o termo $(4M/\Theta)e^{-M^2/\Theta}$ quando igualado os termos com ordem zero. Assim encontramos:

$$\left. \frac{dH}{dr} \right|_{r=\hat{r}_h} = \frac{1}{2M} \left[1 - \left(\frac{M}{\sqrt{\Theta}} \right)^3 \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-M/\Theta} \right]. \quad (3.39)$$

A expressão acima foi alcançada na aproximação de que $\hat{r}_h^2/4\Theta \gg 1$ devido ao fato de não ter uma expressão exata para o raio do horizonte de eventos, já que ele possui uma dependência da função γ . Além do mais, os termos de maior importância nas expansões,

no qual desprezamos os termos da primeira potência de $M/\sqrt{(\Theta)}$. Por fim, utilizando a relação (3.35) atingimos:

$$\tilde{T}_H^{(S)} = \frac{1}{8\pi M} \left[1 - \left(\frac{M}{\sqrt{\Theta}} \right)^3 \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-M^2/\Theta} + \dots \right]. \quad (3.40)$$

Considerando que $T_h^{(S)} = 1/(8\pi M)$, como a temperatura do buraco negro comutativo de Schwarzschild, reescreveremos a equação acima como:

$$\tilde{T}_H^{(S)} = T_h^{(S)} \frac{16\sqrt{\pi}M^3}{T_h^{(S)}\Theta^{3/2}} e^{-M^2/\Theta} + \dots \quad (3.41)$$

Na equação (3.40) ao tomarmos o limite, voltamos ao caso usual de Schwarzschild, que foi apresentado anteriormente.

3.6 Barreira do potencial para Schwarzschild não-comutativo

Com o objetivo de encontrar um potencial efetivo para o buraco negro de Schwarzschild não-comutativo e assim justificar o processo de tunelamento neste cenário, vamos utilizar os vetores de Killing, segundo o procedimento que se encontra no livro do Carrol.

O problema é bastante simplificado, por causa de um alto grau de simetria da métrica de Schwarzschild. Existem quatro vetores de Killing, nos quais três são para a simetria esférica e um para a translação temporal. Eles nos levam a uma constante de movimento de uma partícula livre [41]. Levando em consideração que K_μ como sendo um vetor de Killing (é um campo vetorial em uma variedade de Riemann) que preserva a métrica assim temos:

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{constante}. \quad (3.42)$$

Em adição, encontra-se outra constante de movimento devido as geodésicas:

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (3.43)$$

Logo para uma partícula com massa, podemos escolher $\lambda = r$, então vamos ter $\epsilon = 1$. Assim para uma partícula sem massa, sempre teremos $\epsilon = 0$. Desenvolveremos um potencial efetivo de maneira geral e ao final particularizamos para o nosso caso.

Antes de escrever abertamente as expressões para as quantidades conservadas, associadas aos vetores de Killing devemos pensar um pouco no que elas podem representar. Invariância sob translações temporais nos levam a conservação de energia, enquanto invariância sob rotações espaciais levam em consideração do momento angular [41]. Além disso, a conservação do momento angular significa que a partícula se move no plano. Assim,

podemos escolher $\theta = \pi/2$ na métrica de Schwarzschild. Com isto, os dois vetores de Killing associados à conservação da energia e do momento angular são:

$$E = g_{00} \frac{dt}{d\lambda}, \quad (3.44)$$

$$J = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (3.45)$$

Escrevendo a equação (3.43) em termos das componentes da métrica (3.33) obtemos:

$$-H = \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + H(r)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = -\epsilon, \quad (3.46)$$

multiplicando esta expressão por $H(r)$ e usando as expressões de E e J , determinamos:

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + H(r) \left[\frac{J^2}{r^2} + \epsilon \right] = 0, \quad (3.47)$$

a qual podemos reescrever como:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{2} E^2, \quad (3.48)$$

onde,

$$V_{eff}(r) = \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \right] \left(\frac{J^2}{2r^2} + \frac{\epsilon}{2} \right), \quad (3.49)$$

assim, para uma geodésica tipo tempo, $\epsilon = 0$, então:

$$V_{eff}(r) = \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \right] \left(\frac{J^2}{2r^2} \right). \quad (3.50)$$

3.7 Métrica BTZ no espaço não-comutativo

Para (2+1)-dimensões, a fonte de energia localizada em uma distribuição estática e esfericamente simétrica com um perfil Gaussiano mínimo é tomado como:

$$\rho = \frac{M}{4\pi\theta} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right). \quad (3.51)$$

Onde M é a massa total da fonte. Devido à incerteza, é distribuído por uma região de dimensão linear $\sqrt{\theta}$.

Assim, as equações de campo de Einstein no vácuo em $(2 + 1)$ dimensões do espaço-tempo, com uma constante cosmológica negativa, admite uma solução de buraco negro conhecida como solução BTZ [3]. Para um buraco negro BTZ, teremos $g_{rr} = g_{tt}^{-1}$. Logo, para manter a estrutura, precisamos que:

$$p_r = -\rho. \quad (3.52)$$

Na qual sua distribuição de massa é dada por:

$$m(r) = M \int_0^{r^2/4\theta} e^t dt = M \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right) \right]. \quad (3.53)$$

No presente caso, o raio do horizonte é dado por:

$$r_h^2 = \frac{M}{\Lambda} \left[2 \exp\left(-\frac{r_h^2}{4\theta}\right) \right], \quad (3.54)$$

então, ao solucionarmos as equações de Einstein, a métrica BTZ não-comutativa, encontramos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\varphi + N^\varphi dt)^2. \quad (3.55)$$

Aqui, além da correção não-comutativa, parece haver um fator 8 adicional, que nos impede de recuperar a métrica BTZ clássica, no limite de $\theta \rightarrow 0$.

$$f(r) = -M(1 - e^{-r/4\theta}) + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (3.56)$$

$$N^\varphi = -\frac{J}{2r^2}. \quad (3.57)$$

Então, para essas condições, a temperatura Hawking é dada pela seguinte equação [52].

$$T_H = \frac{r_H/\sqrt{\theta}}{4\pi} \left[2\Lambda\sqrt{\theta} \exp\left(-\frac{r_H^2}{4\theta}\right) \right]. \quad (3.58)$$

A equação acima revela a temperatura Hawking para o caso não-comutativo, ou seja, é levado em consideração a correção do parâmetro θ .

Assim, o próximo passo é achar as correções θ da entropia de Bekenstein-Hawking (S) do buraco negro BTZ, cuja relação é:

$$S = 4\pi r_H \approx 4\pi\sqrt{Ml} - \exp\left(-\frac{Ml^2}{4\theta}\right). \quad (3.59)$$

Na qual o primeiro termo refere-se a entropia de Benkenstein-Hawking para o buraco negro BTZ e o segundo termo é a correção para a não-comutatividade θ .

4 Termodinâmica do Buraco Negro BTZ Não-Comutativo

Tendo grande importância no estudo da fenomenologia da gravidade quântica, o princípio da incerteza generalizado, realiza um importante papel nas estimativas das possíveis modificações da termodinâmica de buracos negros [53]. Nesse capítulo iremos analisar a termodinâmica do buraco negro BTZ não-comutativo com correções correspondentes ao princípio da incerteza generalizado com aproximação de WKB, pelo método de Hamilton-Jacobi. Veremos as características termodinâmicas modificadas devido o GUP e as modificações quânticas para a lei da entropia de Bekeinstein-Hawking.

4.1 Correções do Buraco Negro BTZ Não-Comutativo

Nessa seção vamos considerar a métrica do Buraco Negro BTZ no plano fundo Não-Comutativo que foi mostrado na equação (3.51). Os resultados mostrados a partir de agora foram obtidos através de cálculos feitos no andamento do trabalho aqui feito [54].

Primeiramente, vamos considerar uma distribuição de massa lorentziana dada por [55].

$$\rho_\theta(r) = \frac{M\sqrt{\theta}}{2\pi(r^2 + \theta)^{3/2}}, \quad (4.1)$$

na qual θ é dado pelo parâmetro não-comutativo de *comprimento*², onde M é a massa total dada pelo tamanho linear de toda região de $\sqrt{\theta}$. Assim, a função da distribuição de massa espalhada pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\theta &= \int_0^r \rho_\theta(r) 2\pi r dr = M \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{r^2 + \theta}} \right), \\ &= M - \frac{M\sqrt{\theta}}{r} + \mathcal{O}(\theta^{3/2}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Considerando a massa modificada usada na equação acima, a métrica do buraco negro BTZ não-comutativo é dada por:

$$ds^2 = -\mathcal{F}(r)dt^2 + \mathcal{F}(r)^{-1}dr^2 + r^2 \left(d\phi \frac{J}{2r^2} dt \right)^2, \quad (4.3)$$

onde

$$\mathcal{F}(r) = -\mathcal{M}_\theta + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} = -M + \frac{M\sqrt{\theta}}{r} + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}. \quad (4.4)$$

Os vetores Killing, cujas normas desaparece no horizonte, são os mesmos obtidos pela correção não comutativa e são diferentes da métrica em [56]. Esse termo, $M\sqrt{\theta}/r$, do

tipo Schwarzschild é gerado devido à correção não comutativa. Nossa métrica mostra a semelhança com a métrica obtida por [57, 58] e também com uma das classes de soluções encontradas em [59] com um campo de dilatação/escalar.

Dessa maneira, vamos considerar o caso em que $J = 0$ na métrica (4.3) próximo do horizonte de eventos do buraco negro não-comutativo BTZ, então, a métrica será escrita como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2, \quad (4.5)$$

onde

$$f(r) = -M + \frac{M\sqrt{\theta}}{r} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (4.6)$$

Os horizontes de eventos são encontrados a partir da equação abaixo:

$$f(r) = -M + \frac{M\sqrt{\theta}}{r} + \frac{r^2}{l^2} = 0. \quad (4.7)$$

A qual equivale a resolver uma equação elevada ao cubo, em que teremos a seguinte forma:

$$r^3 - Ml^2r + Ml^2\sqrt{\theta} = 0. \quad (4.8)$$

Assim, as raízes da equação cúbica são dadas por:

$$r = 2\sqrt{\frac{l^2M}{3}} \sin \left[\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{3\theta}{l^2M}} \right) + \epsilon \frac{2\pi}{3} \right], \quad \epsilon \in \{0, \pm 1\}, \quad (4.9)$$

para $\epsilon = 1, 0, -1$. As três raízes em primeira ordem em θ podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_h &= r_h - \frac{\sqrt{\theta}}{2} + \dots, \\ r_c &= \sqrt{\theta} + \dots, \\ r_v &= -r_h - \frac{\sqrt{\theta}}{2} + \dots, \end{aligned} \quad (4.10)$$

nas quais $r_h = \sqrt{l^2M}$, \tilde{r}_h é dado pelo horizonte de eventos, r_c é o horizonte cosmológico e r_v o horizonte virtual, ou seja, não físico. Substituindo o resultado da equação (4.7), podemos encontrar a massa do buraco negro não-comutativo, cuja relação de primeira ordem em $\sqrt{\theta}$ é:

$$M = \frac{\tilde{r}_h^2}{l^2} + \frac{\tilde{r}_h\sqrt{\theta}}{l^2} + \dots. \quad (4.11)$$

Considerando agora o método de Hamilton-Jacobi para determinar a temperatura Hawking, usaremos a equação de Klein-Gordon para o caso de um campo escalar Φ no espaço curvo dado por:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \partial_\nu - \frac{m^2}{\hbar^2} \right] \Phi = 0, \quad (4.12)$$

em que m é a massa de uma partícula escalar e aplicando-se a aproximação WKB:

$$\Phi = \exp \left[\frac{i}{\hbar} I(t, r, x^i) \right], \quad (4.13)$$

onde obtemos

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu I\partial_\nu I + m^2 = 0, \quad (4.14)$$

em termos da métrica (4.5), vamos ter:

$$-\frac{1}{f(r)}(\partial_t I)^2 + f(r)(\partial_r I)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\phi I)^2 + m^2 = 0, \quad (4.15)$$

podendo agora assumir uma solução para a equação de Klein-Gordon que é uma separação de variáveis que se segue como:

$$I = -Et + W(r) + J_\phi\phi, \quad (4.16)$$

onde

$$\partial_t I = -E, \quad \partial_r I = \frac{dW(r)}{dr}, \quad \partial_\phi I = j_\phi, \quad (4.17)$$

na qual J_ϕ é uma constante. Assim substituindo a equação (4.43) na equação (4.15) na qual se resolve para $W(r)$. Assim na parte espacial da ação clássica obtemos:

$$I = -Et + \int dr \frac{\sqrt{E^2 - f(r) \left(\frac{j_\phi^2}{r^2} + m^2 \right)}}{f(r)} + j_\phi\phi, \quad (4.18)$$

Seguindo no regime próximo ao horizonte de eventos do buraco negro não-comutativo BTZ, $r \rightarrow \tilde{r}_h$, escrevemos assim $f(r) \approx \kappa(r - \tilde{r}_h)$, onde a parte da função espacial é descrita como:

$$W(r) = \frac{1}{\kappa} \int dr \frac{\sqrt{E^2 - \kappa(r - \tilde{r}_h) \left(\frac{j_\phi^2}{r^2} + m^2 \right)}}{(r - \tilde{r}_h)} = \frac{2\pi i}{\kappa} E, \quad (4.19)$$

onde κ representa a gravidade superficial do buraco negro BTZ não-comutativo dada por:

$$\kappa = f'(\tilde{r}_h) = \frac{2\tilde{r}_h}{l^2} - \frac{M\sqrt{\theta}}{\tilde{r}_h^2}. \quad (4.20)$$

No entanto, a probabilidade de tunelamento para uma partícula com energia E de atravessar a barreira de potencial é dada por:

$$\Gamma = \exp[-2Im(I)] \Rightarrow \Gamma = \exp\left(-\frac{4\pi E}{\kappa}\right). \quad (4.21)$$

A fim de compararmos a equação acima com o fator de Boltzmann ($\exp(-E/T_H)$), no qual obtemos a temperatura Hawking do buraco negro BTZ num plano de fundo não-comutativo, obtemos:

$$\tilde{T}_H = \frac{\kappa}{4\pi} = \frac{\tilde{r}_h}{2\pi l^2} - \frac{M\sqrt{\theta}}{4\pi\tilde{r}_h^2}, \quad (4.22)$$

no qual o resultado acima pode ser escrito em termos de $r_h = \sqrt{l^2 M}$, vamos ter:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_H &= \frac{r_h - \sqrt{\theta/2}}{2\pi l^2} - \frac{M\sqrt{\theta}}{4\pi r_h^2}, \\ &= T_h - \frac{\sqrt{\theta}}{4\pi l^2} - \frac{M\sqrt{\theta}}{4\pi r_h^2}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

Portanto, o resultado acima mostra que a temperatura de Hawking é modificada devido à presença do parâmetro não comutativo θ . Observe que quando tomamos $\theta = 0$, recuperamos a temperatura do buraco negro BTZ comutativo, que é $T_h = r_h/(2\pi l^2)$.

Vamos considerar aqui o caso do buraco negro BTZ não-comutativo rotacionado, ou seja, com $J \neq 0$. Neste caso, o elemento de linha da equação (4.3) pode ser escrito na forma:

$$ds^2 = -\mathcal{F}(r)dt^2 + \mathcal{F}(r)^{-1}dr^2 + r^2d\varphi^2, \quad (4.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r) &= -M + \frac{M\sqrt{\theta}}{r} + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \\ d\varphi &= d\phi - \frac{J}{2r^2}dt. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Na qual foi usada a transformação de coordenadas para escrever a métrica diagonalmente e assim, resolvendo a equação encontramos o horizonte de eventos dados por:

$$\mathcal{F}(r) = -M + \frac{M\sqrt{\theta}}{r} + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} = 0, \quad (4.26)$$

que é equivalente a resolver uma equação de 4º grau dado abaixo:

$$r^4 - l^2Mr^2 + \frac{l^2J^2}{4} + l^2M\sqrt{\theta}r = 0. \quad (4.27)$$

Podemos escrever a equação da seguinte maneira [60]:

$$(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2) + l^2M\sqrt{\theta}r = 0, \quad (4.28)$$

e para $\theta = 0$ temos:

$$r_{\pm}^2 = \frac{l^2M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2} \right], \quad (4.29)$$

na qual r_+ é dado pelo horizonte de evento externo e r_- é o horizonte de evento interno do buraco negro BTZ comutativo. Reescrevendo a equação (4.28), temos:

$$r^2 = r_{\pm}^2 - \frac{r_h^2\sqrt{\theta}r}{r^2 - r_{\mp}^2}, \quad (4.30)$$

onde $r_h = \sqrt{l^2M}$. Vamos agora resolver essa equação de forma aproximada. Logo, na primeira aproximação obtemos o horizonte de eventos:

$$\tilde{r}_+^2 \approx r_+^2 + \frac{r_h^2\sqrt{\theta}r_+}{r_-^2 - r_+^2}, \quad (4.31)$$

ou mantendo os termos na primeira ordem na $\sqrt{\theta}$, temos:

$$\tilde{r}_+ = r_+ + \frac{r_h^2\sqrt{\theta}}{2(r_-^2 - r_+^2)} + \dots \quad (4.32)$$

e para o horizonte interno temos:

$$\tilde{r}_-^2 \approx r_-^2 - \frac{r_h^2 \sqrt{\theta}}{r_-^2 - r_+^2}, \quad (4.33)$$

e para \tilde{r}_- , encontramos:

$$\tilde{r}_- = r_- - \frac{r_h^2 \sqrt{\theta}}{2(r_-^2 - r_+^2)} + \dots \quad (4.34)$$

Com o intuito de determinar a temperatura Hawking para o caso do buraco negro BTZ rotacional, podemos seguir os mesmo passos apresentados acima e para a probabilidade de tunelamento temos:

$$\Gamma = \exp[-4\pi E/\tilde{\kappa}], \quad (4.35)$$

na qual a gravidade superficial é dada por:

$$\tilde{\kappa} = \mathcal{F}'(\tilde{r}_+) = \frac{2\tilde{r}_+}{l^2} \left(1 - \frac{l^2 J^2}{4\tilde{r}_+^4} \right) - \frac{M\sqrt{\theta}}{\tilde{r}_+^2}. \quad (4.36)$$

Desse modo, comparando Γ com o fator de Boltzmann $\exp(-E/\mathcal{T}_H)$, obtemos a temperatura Hawking do buraco negro não-comutativo BTZ rotacional como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_H &= \frac{\tilde{\kappa}}{4\pi} = \frac{\mathcal{F}'(\tilde{r}_+)}{4\pi}, \\ &= \frac{2\tilde{r}_+}{4\pi l^2} \left(1 - \frac{l^2 J^2}{4\tilde{r}_+^4} \right) - \frac{M\sqrt{\theta}}{4\pi \tilde{r}_+^2}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para $\theta = 0$, recuperamos o resultado para a temperatura de Hawking do buraco negro BTZ rotacional que cuja relação é:

$$\mathcal{T}_h = \frac{r_+}{2\pi l^2} \left(1 - \frac{l^2 J^2}{4r_+^4} \right). \quad (4.38)$$

Da equação (4.26) obtemos a massa do buraco negro não-comutativo, que até primeira ordem em $\sqrt{\theta}$, é dada por:

$$M = \frac{\tilde{r}_+^2}{l^2} + \frac{J^2}{4\tilde{r}_+^2} + \frac{\tilde{r}_+ \sqrt{\theta}}{l^2} + \frac{\sqrt{\theta} J^2}{4\tilde{r}_+^3} + \dots \quad (4.39)$$

Assim, para analisar a entropia consideraremos a seguinte relação:

$$S = \int \frac{1}{\mathcal{T}_H} \frac{\partial M}{\partial \tilde{r}_+} d\tilde{r}_+, \quad (4.40)$$

onde

$$\frac{\partial M}{\partial \tilde{r}_+} = \frac{2\tilde{r}_+}{l^2} \left(1 - \frac{l^2 J^2}{4\tilde{r}_+^4} \right) + \frac{\sqrt{\theta}}{l^2} \left(1 - \frac{3l^2 J^2}{4\tilde{r}_+^4} \right) + \dots \quad (4.41)$$

A próxima etapa de nossa metodologia consiste em realizar a expansão em \mathcal{T}_H^{-1} até a primeira ordem em $\sqrt{\theta}$ nos levando à:

$$\mathcal{T}_H^{-1} = 4\pi \left[\frac{2\tilde{r}_+}{l^2} \left(1 - \frac{l^2 J^2}{4\tilde{r}_+^4} \right) \right]^{-1} \left\{ 1 + \frac{r_h^2 \sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_+^3} \left(1 - \frac{l^2 J^2}{4\tilde{r}_+^4} \right)^{-1} \right\} + \dots \quad (4.42)$$

Agora substituindo as equações (4.41) e (4.42) na (4.40) obtemos,

$$\begin{aligned}\hat{S} &= 4\pi \int \left\{ 1 + \left[\frac{r_h^2 \sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_+^3} + \frac{\sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_+} \left(1 - \frac{3l^2 J^2}{4\tilde{r}_+^4} \right) \right] \left(1 - \frac{l^2 J^2}{4\tilde{r}_+^4} \right) + \dots \right\} d\tilde{r}_+, \\ &= 4\pi\tilde{r}_+ + 2\pi\sqrt{\theta}\ln(\tilde{r}_+) - \frac{\pi r_h^2 \sqrt{\theta}}{\tilde{r}_+^2} - \frac{\pi r_+^2 l^2 J^2 \sqrt{\theta}}{12\tilde{r}_+^6} + \frac{2\pi l^2 J^2 \sqrt{\theta}}{8\tilde{r}_+^4} + \frac{3\pi l^4 J^4 \sqrt{\theta}}{64\tilde{r}_+^8} + S_0 + \dots,\end{aligned}\quad (4.43)$$

onde S_0 é uma constante de integração. Reescrevendo (4.43) em termos de r_+ , temos:

$$\hat{S} = 4\pi\tilde{r}_+ + \frac{2\pi r_h^2 \sqrt{\theta}}{(r_-^2 - r_+^2)} + 2\pi\sqrt{\theta}\ln(r_+) - \frac{\pi r_h^2 \sqrt{\theta}}{\tilde{r}_+^2} - \frac{\pi r_+^2 l^2 J^2 \sqrt{\theta}}{12\tilde{r}_+^6} + \frac{2\pi l^2 J^2 \sqrt{\theta}}{8\tilde{r}_+^4} + \frac{3\pi l^4 J^4 \sqrt{\theta}}{64\tilde{r}_+^8} + S_0 + \dots \quad (4.44)$$

Além disso, para $\theta = 0$ na equação (4.44) vamos ter, $S = 4\pi r_+$ que é a entropia do buraco negro BTZ rotacional não-comutativo. Porém, para o caso $J = 0$, temos $r_+ = r_h$ e a entropia se torna:

$$\hat{S} = 4\pi \left(r_h - \frac{3\sqrt{\theta}}{2} \right) + 3\pi\sqrt{\theta} + 2\pi\sqrt{\theta}\ln(r_h) + S_0 + \dots \quad (4.45)$$

Note que obtivemos uma correção logarítmica para o buraco negro BTZ não-comutativo. Portanto, nosso resultado para entropia difere daqueles encontrados em [4, 59], no sentido que em [4, 59] uma correção logarítmica não é gerada, porque a entropia é calculada usando a expressão, $S = 4\pi r_+$. Além disso, a métrica correspondente à [59] equivale à, $\sqrt{\theta} \equiv B$ que é dada para o caso não rotativo no qual ($J = 0$), assim:

$$f_B(r) = -M + \frac{MB}{r} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (4.46)$$

onde B é um parâmetro constante introduzido por um campo de dilatação/escalar. Portanto, o raio do horizonte pode ser calculado a partir da equação (4.9), tomando a aproximação $B/\sqrt{l^2 M} = B\sqrt{\Lambda/M} \ll 1$. Assim, encontramos:

$$r_{hb} = r_h - \frac{B}{2} + \dots \quad (4.47)$$

Deste modo, a equação (4.40) é uma correção logarítmica obtida para a entropia, que é dada por:

$$S_B = 4\pi r_{hb} + 2\pi B \ln(r_{hb}) + \dots, \quad (4.48)$$

com $\Delta S = S_B - S = 2\pi B \ln(r_h) + \dots$ associado a pequenas variações térmicas.

4.2 Buraco Negro BTZ e o Princípio da Incerteza Generalizado

Nessa seção vamos utilizar a relação que foi feita para calcular a temperatura de Hawking e a entropia do buraco negro BTZ não-comutativo. Aplicando o formalismo de

tunelamento usando o método de Hamilton-Jacobi, vamos aplicar o seguinte GUP [61, 62].

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 - \frac{\alpha l_p}{\hbar} \Delta p + \frac{\alpha^2 l_p^2}{\hbar^2} (\Delta p)^2 \right), \quad (4.49)$$

onde α é um parâmetro adimensional positivo e o comprimento de Planck é dado por l_p .

Na sequência usaremos as unidades $G = c = k_B = \hbar = l_p = 1$, atribuindo $\Delta p \sim E$ e seguindo os passos realizados em [63], obtemos a seguinte relação para a energia corrigida do buraco negro.

$$E_{GUP} \geq E \left[1 - \frac{\alpha}{2(\Delta x)} + \frac{\alpha}{2(\Delta x)^2} + \dots \right]. \quad (4.50)$$

Realizando o mesmo procedimento feito anteriormente, vamos ter o seguinte resultado para a probabilidade de tunelamento com energia corrigida e o E_{GUP} é dado por:

$$\Gamma \simeq \exp[-2\text{Im}(\mathcal{L})] = \exp \left[\frac{-4\pi E_{GUP}}{a} \right], \quad (4.51)$$

em que a é gravidade superficial. Comparando novamente com o fator de Boltzmann, obtemos a temperatura de Hawking corrigida para o buraco negro BTZ não-comutativo.

$$T \leq \tilde{T}_H \left[1 - \frac{\alpha}{2(\Delta x)} + \frac{\alpha^2}{2(\Delta x)^2} + \dots \right]^{-1}. \quad (4.52)$$

Simplificando assim para o caso $J = 0$, a temperatura \tilde{T}_H é dada pela equação (4.22). Além disso, como está próximo ao horizonte de eventos do buraco negro BTZ, a incerteza mínima em nosso modelo passa a ser dado na ordem do raio do horizonte. Portanto, a temperatura corrigida devido ao GUP é dada por:

$$\begin{aligned} T_{GUP} &\leq \tilde{T}_H \left(1 - \frac{\alpha}{4\hat{r}_h} + \frac{\alpha^2}{8\hat{r}_h^2} + \dots \right)^{-1}, \\ &= \frac{2\tilde{r}_h}{4\pi l^2} \left(1 - \frac{r_h^2 \sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_h^3} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{4\hat{r}_h} - \frac{\alpha^2}{8\hat{r}_h^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Escrevendo os termos acima chegamos ao resultado que $r_h = l\sqrt{M}$ resultando em:

$$T_{GUP} \leq \frac{2r_h}{4\pi l^2} \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{2r_h} \right)^2 \left[1 + \frac{\alpha}{4r_h} \left(1 + \frac{\sqrt{\theta}}{2r_h} + \dots \right) - \frac{\alpha^2}{8r_h^2} \left(1 + \frac{\sqrt{\theta}}{r_h} + \dots \right) + \dots \right]. \quad (4.54)$$

Vamos calcular a seguir a entropia do buraco negro BTZ não-comutativo usando a seguinte fórmula,

$$S_{GUP} = \int \frac{1}{T_{GUP}} \frac{\partial M}{\partial \tilde{r}_h} d\tilde{r}_h, \quad (4.55)$$

assim, substituindo (4.55) na equação (4.11) vamos ter:

$$\frac{\partial M}{\partial \tilde{r}_h} = \frac{2\tilde{r}_h}{l^2} \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_h} \right). \quad (4.56)$$

Então, ficamos com:

$$\begin{aligned}
S_{GUP} &= 4\pi \int \left(1 + \frac{\sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_h}\right) \left(1 + \frac{r_h^2\sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_h^3}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{4\hat{r}_h} + \frac{\alpha^2}{8\tilde{r}_h^2} + \dots\right) d\tilde{r}_h, \\
&= 4\pi\tilde{r}_h + 2\pi\sqrt{\theta}\ln(\tilde{r}_h) - \frac{\pi r_h^2\sqrt{\theta}}{\tilde{r}_h^2} \\
&\quad - \pi\alpha\ln(\tilde{r}_h) - \frac{\pi\alpha^2}{2\tilde{r}_h} + \frac{\pi\alpha\sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_h} - \frac{\pi\alpha^2\sqrt{\theta}}{8\tilde{r}_h^2} + \frac{\pi r_h^2\alpha\sqrt{\theta}}{6\tilde{r}_h^3} + \frac{\pi r_h^2\alpha^2\sqrt{\theta}}{16\tilde{r}_h^4} + S_0 + \dots,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

vamos expressar o resultado acima em termos de r_h obtendo a seguinte relação:

$$S_{GUP} = 4\pi \left(r_h - \frac{3\sqrt{\theta}}{2}\right) + 2\pi\sqrt{\theta}\ln(r_h) + 3\pi\sqrt{\theta} - \pi\alpha\ln(r_h) - \frac{\pi\alpha^2}{2r_h} + \frac{2\pi\alpha\sqrt{\theta}}{3r_h} - \frac{3\pi\alpha^2\sqrt{\theta}}{16r_h^2} + S_0 + \dots \tag{4.58}$$

Portanto, ao analisarmos o resultado anterior, obtivemos correções para a entropia devido aos efeitos do GUP e também correções não-comutativa. Para $\alpha = 0$, temos precisamente a correção não-comutativa para a entropia que é dada por (4.45).

Nesse ponto, vamos calcular a energia livre de Helmholtz, que pode ser determinada usando a seguinte relação [54]:

$$F_{GUP} = - \int S_{GUP} dT_{GUP}. \tag{4.59}$$

Portanto, a partir das equações (4.54) e (4.58), obtemos:

$$\begin{aligned}
F_{GUP} &= -\frac{1}{2\pi l^2} \int \left(1 + \frac{r_h^2\sqrt{\theta}}{\tilde{r}_h^3} + \frac{\alpha^2}{8\tilde{r}_h^2} + \frac{3r_h^2\alpha\sqrt{\theta}}{8\tilde{r}_h^4} - \frac{r_h^2\alpha^2\sqrt{\theta}}{4\tilde{r}_h^5}\right) S_{GUP} d\tilde{r}_h, \\
&= -\frac{\tilde{r}_h^2}{l^2} + \frac{3r_h^2\sqrt{\theta}}{2l^2\tilde{r}_h} + \frac{5r_h^2\alpha\sqrt{\theta}}{12l^2\tilde{r}_h^2} - \frac{29r_h^2\alpha^2\sqrt{\theta}}{96l^2\tilde{r}_h^3} - \frac{\sqrt{\theta}\tilde{r}_h}{l^2}\ln(\tilde{r}_h) + \frac{\sqrt{\theta}\tilde{r}_h}{l^2} \\
&\quad + \frac{\alpha^2\sqrt{\theta}\ln(\tilde{r}_h)}{8l^2\tilde{r}_h} + \frac{\alpha^2\sqrt{\theta}}{16l^2\tilde{r}_h} + \frac{\alpha\tilde{r}_h}{2l^2}\ln(\tilde{r}_h) - \frac{\alpha\tilde{r}_h}{2l^2} - \frac{r_h^2\alpha^2\sqrt{\theta}\ln(\tilde{r}_h)}{16l^2\tilde{r}_h^3} - \frac{\alpha\sqrt{\theta}\ln(\tilde{r}_h)}{4l^2} + F_0 + \dots,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

onde F_0 é uma constante de integração.

Para $\alpha = 0$ (na ausência do GUP), torna-se a energia livre de Helmholtz para o caso não-comutativo, assim:

$$F_\theta = -\frac{\tilde{r}_h}{l^2}(\tilde{r}_h - \sqrt{\theta}) + \frac{3r_h^2\sqrt{\theta}}{2l^2\tilde{r}_h} - \frac{\sqrt{\theta}\tilde{r}_h}{l^2}\ln(\tilde{r}_h) + F_0 + \dots, \tag{4.61}$$

ou reescrevendo em termos de r_h , temos:

$$F_\theta = -\frac{1}{l^2} \left(r_h - \frac{\sqrt{\theta}}{2}\right) \left(r_h - \frac{\sqrt{3\theta}}{2}\right) + \frac{3r_h\sqrt{\theta}}{2l^2} - \frac{\sqrt{\theta}r_h}{l^2}\ln(r_h) + F_0 + \dots \tag{4.62}$$

A correção da capacidade de calor específica é dada por:

$$\begin{aligned}
C_{GUP} &= \frac{\partial M}{\partial T_{GUP}} = \frac{\partial M}{\partial \tilde{r}_h} \left(\frac{\partial T_{GUP}}{\partial \tilde{r}_h}\right)^{-1}, \\
&= 4\pi\tilde{r}_h \left(1 + \frac{\sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_h}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\tilde{r}_h} - \frac{\alpha^2}{8\tilde{r}_h^2} - \frac{3\alpha\sqrt{\theta}}{8\tilde{r}_h^3} + \frac{\alpha^2\sqrt{\theta}}{4\tilde{r}_h^4} + \dots\right),
\end{aligned} \tag{4.63}$$

ao substituirmos $\alpha = 0$ na equação (4.63) temos:

$$C_\theta = 4\pi\tilde{r}_h \left(1 + \frac{\sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_h}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{\theta}}{\tilde{r}_h}\right) + \dots, \quad (4.64)$$

e em termos de r_h , a eq. anterior torna-se:

$$C_\theta = 4\pi r_h \left(1 + \frac{\sqrt{\theta}}{2r_h}\right) \left(1 - \frac{3\sqrt{\theta}}{2r_h}\right) + \dots \quad (4.65)$$

Para $\theta = 0$ temos, $C = 4\pi r_h$, que é o calor específico para o buraco negro BTZ comutativo. Observe que o calor específico zera no ponto $r_h = 3\sqrt{\theta/2}$ (ou $\tilde{r}_h = \sqrt{\theta}$ na equação (4.64)). Assim, temos um raio mínimo de:

$$r_{\theta min} = \sqrt{l^2 M_{\theta min}} = \frac{3\sqrt{\theta}}{2}, \quad (4.66)$$

e então, o buraco negro não-comutativo atinge uma massa mínima dada por:

$$M_{\theta min} = \frac{9\theta}{4l^2}. \quad (4.67)$$

Assim, esse resultado indica que o buraco negro deixa de evaporar completamente e se torna um remanescente. Em seguida, obtemos a temperatura do remanescente do buraco negro substituindo o $r_h \rightarrow r_{\theta min}$ na equação (4.23).

$$T_{\theta rem} \approx \frac{\tilde{T}_H}{3} = \frac{r_{\theta min}}{6\pi l^2} = \frac{\sqrt{\theta}}{4\pi l^2}. \quad (4.68)$$

Além de que as equações (4.45) e (4.62) para $r_h \rightarrow r_{\theta min} = 3\sqrt{\theta/2}$ encontramos:

$$S_{rem} \approx 3\pi\sqrt{\theta}\ln(3\sqrt{\theta/2}) + S_0 \approx 0, \quad S_0 = -3\sqrt{\theta} - 2\pi\sqrt{\theta}\ln(3\sqrt{\theta/2}), \quad (4.69)$$

e

$$F_{rem} z \approx 0 + \mathcal{O}(\theta) + F_0, \quad F_0 = 0. \quad (4.70)$$

Portanto, temos que a entropia e a energia livre de Helmholtz são zero para o remanescente do buraco negro BTZ não-comutativo.

Para analisar o efeito do GUP, vamos considerar que $\theta = 0$ e $\alpha \neq 0$. Assim, a partir da equação (4.63) temos a seguinte contribuição para o calor específico:

$$C_\alpha = 4\pi r_h \left(1 - \frac{\alpha^2}{8r_h^2}\right) + \dots, \quad (4.71)$$

e o calor específico zera no ponto $r_h = r_{\alpha min} = \alpha/2\sqrt{2}$. Logo, o buraco negro BTZ com GUP torna-se um remanescente com uma massa mínima, $M_{\alpha min} = \alpha^2/8l^2$, e a temperatura é dada por:

$$T_{\alpha rem} = \frac{(T_{GUP})|_{\theta=0}}{2} = \frac{\alpha}{8\pi l^2}. \quad (4.72)$$

além disso, a entropia e a energia livre de Helmholtz são zero para o remanescente do buraco negro BTZ com GUP, como podemos ver a seguir:

$$S_{\alpha rem} \approx -\pi\alpha \ln(\sqrt{2\alpha/4}) + S_0 \approx 0, \quad S_0 = \pi\alpha \ln(\sqrt{2\alpha/4}), \quad (4.73)$$

e

$$F_{\alpha rem} \approx -(1 + \sqrt{2})\frac{\alpha^2}{8l^2} - \sqrt{2\alpha^2} \ln(\sqrt{2\alpha/4}) + F_0 \approx 0, \quad F_0 = (1 + \sqrt{2})\frac{\alpha^2}{8l^2} + \sqrt{2\alpha^2} \ln(\sqrt{2\alpha/4}), \quad (4.74)$$

Para $\theta \neq 0$ e $\alpha \neq 0$, podemos escrever a equação (4.63) da seguinte forma:

$$C_{GUP} = 4\pi r_h \left(1 + \frac{\sqrt{\theta}}{2\tilde{r}_h}\right) \left(1 - \frac{r_{m+}}{\tilde{r}_h}\right) \left(1 - \frac{r_{m-}}{\tilde{r}_h}\right) + \dots, \quad (4.75)$$

onde

$$r_{m\pm} = \frac{\sqrt{\theta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\theta + \frac{\alpha(\alpha + 3\sqrt{\theta})}{2}}. \quad (4.76)$$

Observe que para $\tilde{r}_h = r_{m+}$ ou $r_h = \frac{\sqrt{\theta}}{2} + r_{m+}$ o calor específico desaparece. Os resultados obtidos anteriormente são recuperados quando $\theta \neq 0$ e $\alpha = 0$ ou $\theta = 0$ e $\alpha \neq 0$. Para a condição de formar uma remanescente de um buraco negro BTZ não comutativo, podemos escrever as seguintes aproximações para o raio mínimo:

$$r_{min} = \frac{\sqrt{\theta}}{2} + r_{m\pm} = \begin{cases} r_{1min} = \frac{3\sqrt{\theta}}{2} + \frac{3\alpha}{8} + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ r_{2min} = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} + \frac{(3\sqrt{2} + 8)}{8} \sqrt{\theta} + \mathcal{O}(\theta). \end{cases} \quad (4.77)$$

Ao aplicarmos o raio mínimo r_{min} , o calor específico, a entropia e a energia livre de Helmholtz são nulos e pela equação (4.54) a temperatura é dada por:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\theta rem} &= (T_{gup})|_{r_h=r_{min}}, \\ &= \left(\frac{r_{min}}{2\pi l^2} - \frac{\sqrt{\theta}}{2\pi l^2}\right) \left[1 + \frac{\alpha}{4r_{min}} + \frac{\alpha}{8r_{min}^2} (\sqrt{\theta} - \alpha) - \frac{\alpha^2 \sqrt{\theta}}{8r_{min}^3} + \dots\right]. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Podemos obter expressões aproximadas para a temperatura do remanescente do buraco negro BTZ não comutativo expandindo-o em α e θ . Assim, aplicando os raios mínimos r_{1min} e r_{2min} , as temperaturas são dadas, respectivamente, por:

$$T_{1rem} = (T_{gup})|_{r_{min}=r_{1min}} = \frac{\sqrt{\theta}}{4\pi l^2} + \frac{35\alpha}{144\pi l^2} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (4.79)$$

e

$$T_{2rem} = (T_{gup})|_{r_{min}=r_{2min}} = \frac{\alpha}{8\pi l^2} + \frac{\sqrt{2\theta}}{4\pi l^2} + \frac{\sqrt{\theta}}{\pi l^2} + \mathcal{O}(\theta). \quad (4.80)$$

Então, tomando $\alpha = 0$ em T_{1rem} , obtemos o resultado da equação (4.68), e substituindo $\theta = 0$ em T_{2rem} recuperamos o resultado da equação (4.72).

A estabilidade do buraco negro, pode ser verificada nas Figuras 3, 4 e 5 onde ilustramos o comportamento do calor específico. Na Figura 3, mostramos que o calor específico é positivo para $\theta = 0.001$ e $\alpha = 0.1$, portanto, o buraco negro BTZ não comutativo com GUP é estável. Além disso, observamos que o calor específico desaparece para um raio crítico. Assim, para $\theta = 0.03$ e $\alpha = 0.1$ atinge-se dois pontos onde o calor específico desaparece, com uma região física entre eles.

Na figura 4 verificamos o comportamento do calor específico para $\theta \neq 0$ e $\alpha = 0$, e na figura 5 para $\theta = 0$ e $\alpha \neq 0$. Observe que o calor específico zera antes de entrar em uma zona não física. O buraco negro BTZ diminui de tamanho até atingir um raio crítico onde cessa o processo de evaporação e se torna um remanescente do buraco negro BTZ não-comutativo.

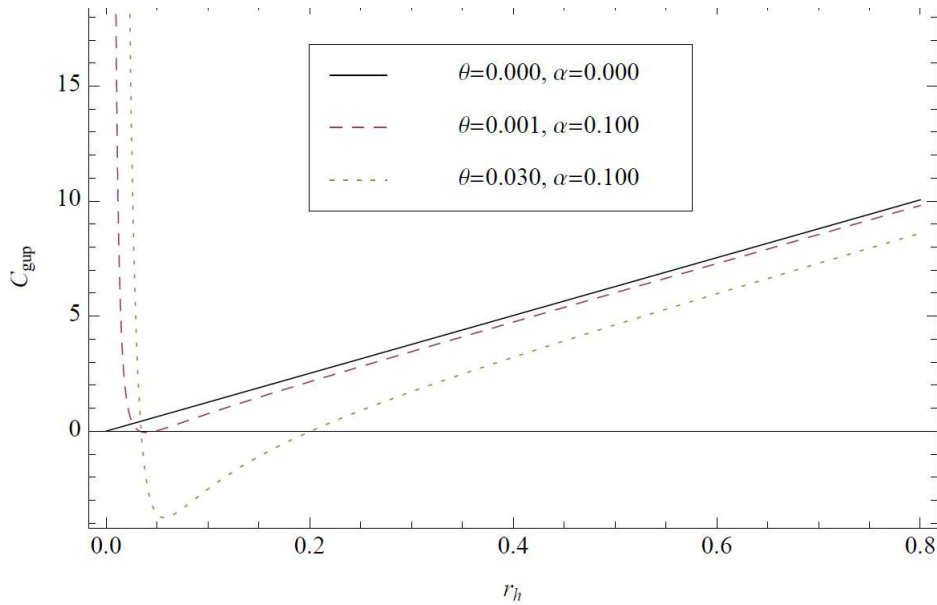


Figura 3 – Capacidade de calor específica (4.63). Para $\theta = \alpha = 0$, temos o resultado para o calor específico do buraco negro BTZ comutativo. Também mostramos o resultado quando $\theta \neq 0$ e $\alpha \neq 0$.

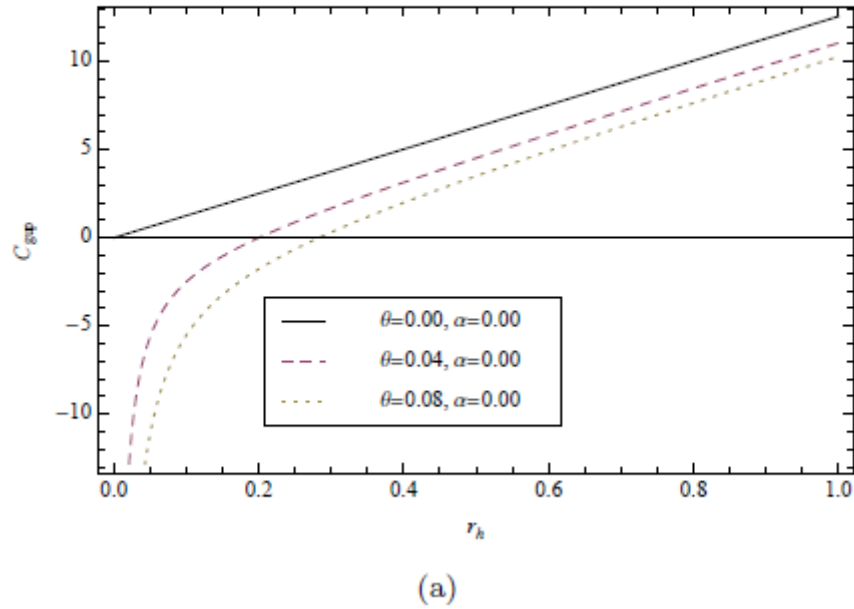


Figura 4 – Capacidade de calor específica. (a) para $\theta \neq 0$ e $\alpha = 0$, temos o resultado para o calor específico do buraco negro BTZ não-comutativo.

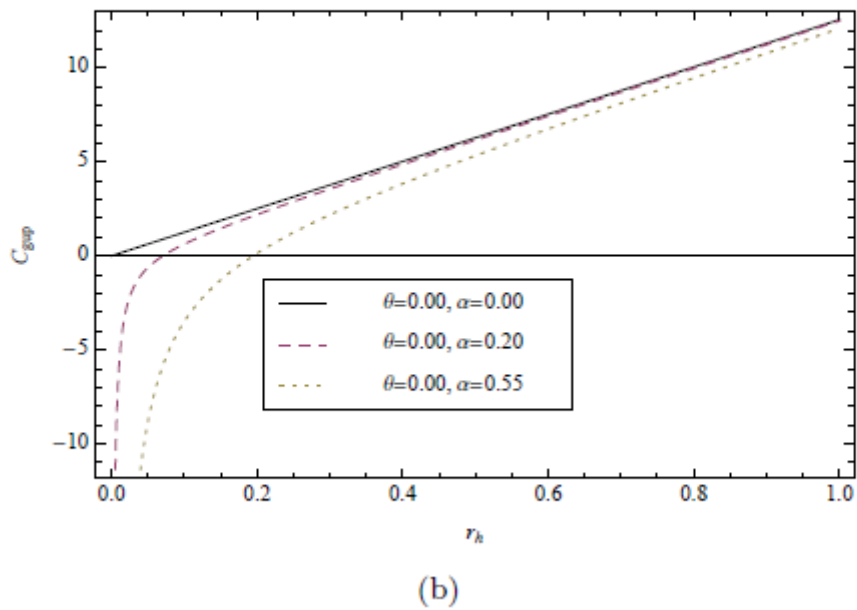


Figura 5 – Capacidade de calor específica. (b) para $\theta = 0$ e $\alpha \neq 0$, temos o resultado para o calor específico do buraco negro BTZ comutativo com GUP.

5 Conclusões

Levando-se em conta o que foi observado para a conclusão desse trabalho, consideramos propostas usadas por [27], sobre radiação emitida por buracos negros. É mostrado em vários estudos que algumas propriedades dos buracos negros como a área do horizonte de eventos, a massa e a gravidade superficial têm correspondências diretas com propriedades termodinâmicas tais como, entropia, a energia e a temperatura, nessa ordem. No desenvolver do trabalho foram analisadas várias correções quânticas para as propriedades termodinâmicas de buracos negros num plano de fundo não-comutativo. Sendo assim, varias correções foram devido a não-comutatividade do espaço-tempo e também por conta do princípio da incerteza generalizado (GUP), que tem grande importância no estudo da gravitação quântica.

Com o intuito de achar as correções de temperatura, entropia e calor específico utilizamos o método de Hamilton-Jacobi que tem base a partir da equação de Klein-Gordon para um campo escalar (4.12), escrevendo esse campo com uma aproximação WKB (4.13) de maneira a recairmos na equação de Hamilton-Jacobi relativística (4.14) para ordens mais baixas e \hbar , propondo uma separação de variáveis do tipo (4.16) e (4.43) comparando a probabilidade de tunelamento da partícula com função de partição e dessa maneira encontrar uma forma de calcular a temperatura Hawking. Considerando a temperatura, podemos encontrar a entropia e o calor específico do buraco negro.

Primeiramente, analisamos a métrica de Schwarzschild não-comutativa, que é dada pela equação (3.33), defendemos que por causa da não comutatividade do espaço-tempo, a função delta de Dirac passa a descrever uma distribuição gaussiana de largura mínima $\sqrt{\Theta}$. Logo a massa total parece ser espalhada e não concentrada num ponto. Demonstramos que próximo do horizonte de eventos a temperatura é corrigida por um fator que depende do parâmetro Θ . Assim, considerarmos $\hat{r}_h^2/2\Theta \gg 1$, porque não tínhamos uma expressão exata para o raio de Schwarzschild não-comutativo. Foram feitas investigações na seção 4.2 sobre correções para a temperatura, entropia e o calor específico devido ao GUP para esse buraco negro. Para a entropia, deduzimos que os dois primeiros termos da equação (4.43) correspondem ao caso dela ser calculada pela fórmula de Bekeinstein-Hawking [51], além disso, descobrimos correções devido ao GUP com logaritmo de massa M .

Então, considerando a métrica BTZ não-comutativa próxima ao horizonte de eventos(4.3) que vem da seção 4.2, no qual estudamos as propriedades termodinâmicas para esse buraco negro. A temperatura Hawking do buraco negro BTZ equação(4.23), que é a correção não-comutativa para a temperatura Hawking ocorre somente para termos de segunda ordem no parâmetro Θ , em outras palavras, significa dizer que as correções

são muito pequenas. Na seção 4.2, especificamos essa temperatura com o GUP e não só encontramos correções devido a não-comutatividade como também correções devido ao GUP. Logo, a temperatura (4.54) tem um fator que não depende do raio do horizonte de eventos do buraco negro e a entropia (4.58) quando $\alpha = 0$, achamos correções que ocorrem somente para termos de segunda ordem encontramos, também, correções logarítmicas para a entropia do buraco negro BTZ não-comutativo. Também verificamos a estabilidade do buraco negro BTZ, calculando a capacidade de calor específica e mostramos que o buraco negro BTZ não-comutativo se torna um remanescente com massa mínima (4.40). Portanto, a contribuição das correções não comutativas introduz um efeito GUP. Também investigamos o efeito do GUP calculando a temperatura de Hawking e a entropia do buraco negro BTZ não-comutativo. Devido ao efeito de não-comutatividade e GUP encontramos uma correção logarítmica para a entropia do buraco negro BTZ, que estão relacionadas a cada parâmetro de correção correspondente.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstração da métrica de Schwarzschild não-comutativa

Introduzindo na origem de coordenadas uma distribuição da matéria esfericamente simétrica de forma que a métrica acima é descrita como:

$$ds^2 = a(r, t)dt^2 + b(r, t)dr^2 + 2c(r, t)dtdr + d(r, t)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (\text{A.1})$$

onde $a(r, t)$, $b(r, t)$, $c(r, t)$ e $d(r, t)$ são funções arbitrárias da posição e do tempo.

Assim como as equações de Einstein são invariantes por transformações de coordenadas, escolhemos um sistema que simplifique o problema, de outra forma, vamos diagonalizar a métrica para tornar o elemento de linha mais simples. Portanto iremos considerar $r' = r'(r, t)$ e $t' = t'(r, t)$ e sendo $p = p(r, t')$ no qual:

$$p(r, t')dt' = p(r, t') \left[\left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 dr^2 + 2 \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) drdt + \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 dt^2 \right]. \quad (\text{A.2})$$

Optamos pela função $p = p(r, t')$ de modo que satisfaça as seguintes equações [41]:

$$p = p(r, t') \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 = a(r, t), \quad (\text{A.3})$$

e

$$p = p(r, t') \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) = c(r, t), \quad (\text{A.4})$$

dividindo (A.3) por (A.4) vamos ver que t' deve ser a solução da seguinte equação diferencial:

$$a(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) - c(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Portanto, substituindo (A.3) e (A.4) em (A.2).

$$p(r, t')dt'^2 - p(r, t') \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right)^2 dr^2 = a(r, t)dt^2 + 2c(r, t)dtdt, \quad (\text{A.6})$$

retirando a linha e substituindo esse resulta na equação (A.1), temos:

$$ds^2 = p(r, t)dt^2 + q(r, t)dr^2 + d(r, t) + (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (\text{A.7})$$

Fazendo pela métrica Lorentziana e optando por $d(r, t) = r^2$, devemos ter $p(r, t)$ negativo e $q(r, t)$ positivo. Essa ultima condição implica dizer que o vetor raio é definido agora tal que um caminho da circunferência de um círculo, que tem como centro na origem

de coordenadas, é igual a $2\pi r$. Nesse caso é suficiente expressar as funções $p(r, t)$ e $q(r, t)$ em forma de exponenciais, e^ν e e^λ onde ν e λ são funções das novas coordenadas r' e t' em forma de exponenciais [64], assim vamos ter:

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\phi^2). \quad (\text{A.8})$$

Demonstrando as coordenadas t, r, θ e φ por x^0, x^1, x^2 e x^3 , respectivamente. Logo escrevemos o tensor métrico da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^\nu, e^\lambda, r^2, r^2\text{sen}^2\theta), \quad (\text{A.9})$$

no qual a expressão acima representa uma matriz diagonal representado pelos elementos apresentados. Até então, pela métrica ser diagonal, podemos escrever $g^{\mu\nu}$ dessa forma temos:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^{-\nu}, e^{-\lambda}, r^{-2}, r^{-2}\text{sen}^{-2}\theta), \quad (\text{A.10})$$

Para resolver as equações diferenciais com funções de ν e λ que satisfaça as equações de Einstein, temos que calcular os símbolos de Christoffel associado a métrica (A.10). Assim:

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\beta} \left[\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} \right]. \quad (\text{A.11})$$

então,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, \quad \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-\nu}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{\lambda'}{2}e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 \frac{\dot{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{11}^1 \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r\text{sen}^2(\theta)e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}(\theta)\cos(\theta), \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{13}^3 \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cotg(\theta), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

no qual o ponto representa a derivada da função com respeito ao tempo e a linha representa a derivada da função com respeito a coordenada r .

Partindo desses símbolos, vamos calcular os componentes do tensor de Ricci e do tensor de Einstein: $G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R$. Obtemos assim:

$$G_0^0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0. \quad (\text{A.13})$$

$$G_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = 8\pi T_0^1. \quad (\text{A.14})$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1. \quad (\text{A.15})$$

$$G_2^2 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\dot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\lambda}{2} \right) = 8\pi T_2^2. \quad (\text{A.16})$$

$$G_3^3 = G_2^2 = 8\pi T_3^3. \quad (\text{A.17})$$

Assim nesse caso o tensor energia-momento não é nulo fora da fonte do campo gravitacional, então diferente do caso usual, temos:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1. \quad (\text{A.18})$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0. \quad (\text{A.19})$$

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (\text{A.20})$$

subtraindo (A.19) de (A.18), obtemos:

$$\nu' + \lambda' = T_0^0 - T_1^1, \quad (\text{A.21})$$

levando em conta para manter a forma da métrica de Schwarzschild usual precisamos impor que $T_0^0 = T_1^1$. Portanto:

$$\nu' + \lambda' = 0, \quad (\text{A.22})$$

e como resultado,

$$\nu + \lambda = f(x^0). \quad (\text{A.23})$$

No entanto, se o intervalo ds^2 sob a forma (A.8), vamos ter a possibilidade de fazer uma transformação arbitrária do tempo da forma $x^0 = h(x'^0)$ sem que a forma do elemento de linha seja alterada, além de que, essa transformação possibilita somar a função ν uma função arbitrária do tempo, que permite sempre anular $f(t)$ em (A.23). Então para cada transformação de coordenadas, devemos ter $f = 0$, de forma que $\nu = -\lambda$, assim nos temos tanto λ quanto ν são funções independentes de t , o que implica dizer que para um campo gravitacional esfericamente simétrico no vácuo é automaticamente estático [64]. Note que a dependência temporal da métrica pode ser eliminada por meio de uma transformação de coordenadas apropriada (*Teorema de Birkhoff*).

Levando em conta o tensor energia-momento do buraco negro de Schwarzschild no plano de fundo não-comutativo como sendo:

$$T_\mu^\nu = \text{diag} \left(-\rho_\Theta, -\rho_\Theta, -\rho_\Theta, -\frac{1}{2}r\partial_r\rho_\Theta, -\rho_\Theta, -\frac{1}{2}r\partial_r\rho_\Theta \right). \quad (\text{A.24})$$

assim conseguimos manipular equação (A.19) como mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi\rho_\Theta &\Rightarrow \frac{1}{r^2}(e^{-\lambda} - re^{-\lambda}\lambda') - \frac{1}{r^2} = -8\pi\rho_\Theta \Rightarrow \\ \frac{d}{dr}(re^{-\lambda}) - 1 = -8\pi\rho_\Theta r^2 &\Rightarrow re^{-\lambda} - r = -2 \int_0^r 4\pi r^2 \rho_\Theta dr \Rightarrow \\ e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

onde

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_\Theta dr. \quad (\text{A.26})$$

Da maneira como foi mostrado no capítulo da não-comutatividade, as coordenadas passam a não comutarem para as escalas de ordem de l_ρ , assim a noção de ponto não faz mais sentido, modificando esta estrutura no espaço-tempo não-comutativo numa estrutura difusa, a chamada célula de Plank. Portanto a posição como foi mostrada pelo delta de Dirac passa a ser representada por uma distribuição Gaussiana de comprimento $\sqrt{\Theta}$, logo:

$$\rho_\Theta = \frac{M}{(4\pi\Theta)^{3/2}} \exp(-r^2/4\Theta). \quad (\text{A.27})$$

Mudando uma nova variável $x = r^2/4\Theta$ e usando a condição acima refazemos a equação (A.26) assim:

$$m(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r^2/4\Theta} x^{1/2} e^{-x} dx \Rightarrow m(r) = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right), \quad (\text{A.28})$$

onde

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) \equiv \int_0^{r^2/4\Theta} x^{1/2} e^{-x} dx. \quad (\text{A.29})$$

é a função γ incompleta. Por fim a métrica de Schwarzschild não-comutativa pode ser escrita da seguinte forma:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) \right] dt^2 + \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) \right]^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (\text{A.30})$$

Foi levado em consideração o tensor da energia-momento dada pela equação (A.24), assim chegamos a essa solução. Porém, para achar essa solução precisamos considerar que $\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$ em função da conservação de energia, o que resulta em:

$$\begin{aligned} \partial_\nu T_\mu^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T_\mu^\alpha &= 0 \Rightarrow \\ \partial_r T_r^r - \Gamma_{01}^0 (T_0^0 - T_1^1) - \Gamma_{22}^2 (T_2^2 - T_1^1) - \Gamma_{31}^3 (T_3^3 - T_1^1) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

os únicos símbolos diferentes de zero são:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00}, \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} \quad e \quad \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta}, \quad (\text{A.32})$$

tendo em conta que devido a simetria esférica $T_2^2 = T_3^3$ dessa forma:

$$\partial_r T_r^r - \frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T_r^r - T_0^0) + g^{\theta\theta} \partial_r g_{\theta\theta} (T_r^r - T_0^0) = 0. \quad (\text{A.33})$$

Com intenção de manter a propriedade do tipo Schwarzschild: $g_{00} = -1/g_{11}$, portanto, precisamos que $T_0^0 = T_r^r = -\rho_\Theta$ [50]. Logo:

$$T_\theta^\theta = -\rho_\Theta - \frac{2}{r} \partial_r \rho_\Theta. \quad (\text{A.34})$$

Referências

- 1 GA, B. M. e Chandia. O e Grand. N e Schaposnik. FA e S. Formulação de chern-simons da gravidade não comutativa em três dimensões. v. 64, p. 084012. Citado na página 21.
- 2 HYUNG, K. H.-C. e Park. Mu-In e Rim. Chaiho e Y. J. Buraco negro manchado de btz por falta de comutatividade no espaço. *Journal of High Energy Physics*, v. 2008, n. 10. Citado na página 21.
- 3 JORGE, B. M. e Teitelboim. Claudio e Z. Buraco negro no espaço-tempo tridimensional. *Physical Review Letters*, v. 69, p. 1849. Citado 3 vezes nas páginas 21, 33 e 47.
- 4 MALDACENA, J. O limite n grande de teorias de superconformes de campos e supergravidade. *Revista internacional de física teórica*, v. 38, n. 4, p. 1113–1133. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 54.
- 5 E, A. M. e Brito. FA e P. Efeito gravitacional de aharonov - bohm devido ao buraco negro não comutativo do btz. *Letras de Física B*, v. 743, p. 184–188. Citado na página 21.
- 6 SADEGHI JAFAR E SHAJIEE, V. R. Potencial efetivo no buraco negro não comutativo da btz. *Revista Internacional de Física Teórica*, v. 55, n. 2, p. 892–900. Citado na página 21.
- 7 HENDI, S. H.; PANAHYAN, S.; MAMASANI, R. Thermodynamic stability of charged btz black holes: Ensemble dependency problem and its solution. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 47, n. 8, p. 91, 2015. Citado na página 21.
- 8 PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. *Physical Review Letters*, APS, v. 85, n. 24, p. 5042, 2000. Citado na página 21.
- 9 XU, Z.; CHEN, B. Hawking radiation from general kerr-(anti) de sitter black holes. *Physical Review D*, APS, v. 75, n. 2, p. 024041, 2007. Citado na página 21.
- 10 BANERJEE, R.; MAJHI, B. R. Quantum tunneling and back reaction. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 662, n. 1, p. 62–65, 2008. Citado na página 21.
- 11 SILVA, C.; BRITO, F. Quantum tunneling radiation from self-dual black holes. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 725, n. 4-5, p. 456–462, 2013. Citado na página 22.
- 12 MAJUMDER, B. Entropia de buracos negros com comprimento mínimo no formalismo de tunelamento. *Relatividade Geral e Gravitação*, v. 45, n. 11, p. 2403–2414. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 40.
- 13 ANACLETO, M. et al. Quantum-corrected finite entropy of noncommutative acoustic black holes. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 362, p. 436–448, 2015. Citado na página 22.
- 14 ANACLETO, M.; BRITO, F.; PASSOS, E. Quantum-corrected self-dual black hole entropy in tunneling formalism with gup. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 749, p. 181–186, 2015. Citado na página 22.

- 15 FAIZAL, M.; KHALIL, M. M. Gup-corrected thermodynamics for all black objects and the existence of remnants. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 30, n. 22, p. 1550144, 2015. Citado na página 22.
- 16 FROLOV, V.; NOVIKOV, I. Dynamical origin of the entropy of a black hole. *Physical Review D*, APS, v. 48, n. 10, p. 4545, 1993. Citado na página 22.
- 17 MAGÁN, J. M.; MELNIKOV, D.; SILVA, M. R. Black holes in ads/bcft and fluid/gravity correspondence. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2014, n. 11, p. 69, 2014. Citado na página 22.
- 18 SOLODUKHIN, S. *Entanglement entropy of black holes Living Rev.* [S.l.]: Rel, 2011. Citado na página 22.
- 19 MENG, X.-H.; XU, W.; WANG, J. A note on entropy relations of black hole horizons. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 29, n. 18, p. 1450088, 2014. Citado na página 22.
- 20 GOVINDARAJAN, T.; KAUL, R. K.; SUNEETA, V. Logarithmic correction to the bekenstein-hawking entropy of the btz black hole. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 18, n. 15, p. 2877, 2001. Citado na página 22.
- 21 RINALDI, M. The entropy of an acoustic black hole in bose–einstein condensates: transverse modes as a cure for divergences. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 22, n. 04, p. 1350016, 2013. Citado na página 22.
- 22 HOOFT, G. On the quantum structure of a black hole. *Nuclear Physics, B*, Elsevier, v. 256, p. 727–745, 1985. Citado na página 22.
- 23 BRUSTEIN, R.; KUPFERMAN, J. Black hole entropy divergence and the uncertainty principle. *Physical Review D*, APS, v. 83, n. 12, p. 124014, 2011. Citado na página 22.
- 24 NOUICER, K. Quantum-corrected black hole thermodynamics to all orders in the planck length. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 646, n. 2-3, p. 63–71, 2007. Citado na página 22.
- 25 ANACLETO, M. et al. The entropy of the noncommutative acoustic black hole based on generalized uncertainty principle. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 737, p. 6–11, 2014. Citado na página 22.
- 26 ZHAO, H.; LI, G.; ZHANG, L. Generalized uncertainty principle and entropy of three-dimensional rotating acoustic black hole. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 376, n. 35, p. 2348–2351, 2012. Citado na página 22.
- 27 HAWKING, S. W. Buracos negros e termodinâmica. v. 13, n. 2. Citado 4 vezes nas páginas 25, 26, 35 e 61.
- 28 REES, M.; RUFFINI, R.; WHEELER, J. A. Black holes, gravitational waves, and cosmology: an introduction to current research. *bhgw*, 1974. Citado na página 27.
- 29 KAREL, G. S. e Abbott. James e Kucha v r. Teoria de einstein em um espaço-tempo tridimensional. *Relatividade e Gravitação Gerais*, v. 16, p. 751–775. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

- 30 GOTT J. RICHARD E ALPERT, M. Relatividade geral em um espaço-tempo dimensional $(2+1)$. *Relatividade e Gravitação Gerais*, v. 16, p. 243–247. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 32.
- 31 DIAS, O. J. Soluções de buracos negros e criação de pares de buracos negros em espaços tridimensionais, quatro e superiores. *arXiv preprint hep-th / 0410294*. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- 32 WEINBERG, S. *Cosmology*. [S.l.]: Oxford university press, 2008. Citado na página 31.
- 33 SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie, sitzber. deutsch. akad. wiss. berlin, kl. math. *Phys. Tech*, v. 189, 1916. Citado na página 33.
- 34 M. Banados, m. henneaux, c. teitelboim and j. zanelli. *Phys. Rev. D*, v. 48, p. 1506, 1993. Citado na página 33.
- 35 JORGE, B. M. e Henneaux. Marc e Teitelboim. Claudio e Z. Errata: Geometria do buraco negro $2+1$ [phys. rev. d 48, 1506 (1993)]. v. 88, p. 069902. Citado na página 34.
- 36 PENROSE, R.; FLOYD, R. Extraction of rotational energy from a black hole. *Nature Physical Science*, Nature Publishing Group, v. 229, n. 6, p. 177–179, 1971. Citado na página 34.
- 37 CHRISTODOULOU, D. Reversible and irreversible transformations in black-hole physics. *Physical Review Letters*, APS, v. 25, n. 22, p. 1596, 1970. Citado na página 35.
- 38 DAMASIO F E PACHECO, S. Buracos nem tãa negros assim. *AF ' i sica na Escola*, v. 10, p. 30–35. Citado na página 35.
- 39 TONIATO, J. D. *Modelo Acústico Análogo ao Buraco Negro de Schwarzschild*. Tese (Doutorado) — Dissertação, Universidade Federal do Espírito Santo, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 38.
- 40 GIBBONS GARY W E HAWKING, S. W. Horizontes cosmológicos de eventos, termodinâmica e criação de partículas. v. 15, n. 10, p. 2738. Citado na página 35.
- 41 CARROLL, S. M. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 35, 36, 46 e 65.
- 42 UNRUH WILLIAM E SCH Ü TZHOLD, R. *Análogos quânticos: de transições de fase a buracos negros e cosmologia*. [S.l.: s.n.]. v. 718. Citado na página 36.
- 43 OLIVEIRA, D. S. de; ZANCHIN, V. T. Termodinâmica dos buracos negros. Citado na página 37.
- 44 EUNE, M.; KIM, W.; YI, S.-H. Hawking-page phase transition in btz black hole revisited. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2013, n. 3, p. 20, 2013. Citado na página 38.
- 45 SZABO, R. J. Teoria quântica de campos em espaços não comutativos. *Relatórios de Física*, v. 378, n. 4, p. 207–299. Citado 3 vezes nas páginas 39, 40 e 42.

- 46 FISICA, P. d. P.-G. em. *Invariância de calibre e análise de vínculos em teorias de campo eletromagnético no espaço-tempo não-comutativo*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2017. Citado na página 39.
- 47 GREINER, W. *Quantum mechanics: an introduction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 41.
- 48 TEDESCO, D. G. Um estudo sobre a teoria de campos no espaço-tempo não-comutativo. 2010. Citado na página 42.
- 49 A, O. T.; MOLZAHN, F. H. Moyal quantum mechanics: the semiclassical heisenberg dynamics. *arXiv preprint hep-th/9409120*, 1994. Citado na página 42.
- 50 EURO, N. P. e Smilagic. Anais e S. Geometria não comutativa inspirou o buraco negro de schwarzschild. *Letras de Física B*, v. 632, n. 4, p. 547–551. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 68.
- 51 WEI, S.-W. et al. Area spectrum of schwarzschild black hole inspired by noncommutative geometry. *arXiv preprint arXiv:1004.2005*, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 61.
- 52 RAHAMAN, F. et al. Btz black holes inspired by noncommutative geometry. *Physical Review D*, APS, v. 87, n. 8, p. 084014, 2013. Citado na página 48.
- 53 TAWFIK, A.; DIAB, A. Generalized uncertainty principle: Approaches and applications. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 23, n. 12, p. 1430025, 2014. Citado na página 49.
- 54 ANACLETO, M. et al. Noncommutative correction to the entropy of btz black hole with gup. *arXiv preprint arXiv:2010.09703*, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 56.
- 55 LIANG, J.; LIU, B. Thermodynamics of noncommutative geometry inspired btz black hole based on lorentzian smeared mass distribution. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 100, n. 3, p. 30001, 2012. Citado na página 49.
- 56 CARLIP, S. The (2+ 1)-dimensional black hole. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 12, n. 12, p. 2853, 1995. Citado na página 49.
- 57 CHAN, K. C.; MANN, R. B. Spinning black holes in (2+ 1)-dimensional string and dilaton gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 371, n. 3-4, p. 199–205, 1996. Citado na página 50.
- 58 MARTINEZ, C.; ZANELLI, J. Conformally dressed black hole in 2+ 1 dimensions. *Physical Review D*, APS, v. 54, n. 6, p. 3830, 1996. Citado na página 50.
- 59 CHAN, K. C. Modifications of the btz black hole by a dilaton and scalar. *Physical Review D*, APS, v. 55, n. 6, p. 3564, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 54.
- 60 VISSER, M. Area products for stationary black hole horizons. *Physical Review D*, APS, v. 88, n. 4, p. 044014, 2013. Citado na página 52.
- 61 ALI, A. F.; DAS, S.; VAGENAS, E. C. Discreteness of space from the generalized uncertainty principle. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 678, n. 5, p. 497–499, 2009. Citado na página 55.

-
- 62 BASTOS, C. et al. Noncanonical phase-space noncommutativity and the kantowski-sachs singularity for black holes. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 2, p. 024005, 2011. Citado na página 55.
- 63 ANACLETO, M. et al. Quantum-corrected rotating acoustic black holes in lorentz-violating background. *Physical Review D*, APS, v. 100, n. 10, p. 105005, 2019. Citado na página 55.
- 64 CARMELI, M. *Campos clássicos: relatividade geral e teoria dos medidores*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 67.