

## MODELO ANALÍTICO X MODELO POR SIMULAÇÃO: COMPARATIVO ENTRE FILAS M/M/1 E M/M/2

**Ernane Rosa Martins<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás,

**Resumo:** O artigo tem como objetivo fazer a modelagem e a simulação de sistemas de filas com único servidor M/M/1 e com dois servidores M/M/2. A partir dos dados coletados, realizar a comparação com os dados encontrados no modelo analítico destas mesmas filas. Ao final, serão realizadas discussões a respeito dos resultados.

**Palavras-chave:** *Modelagem, simulação, teoria das filas.*

### 1. Introdução

Em muitos serviços que são buscados pela população, ocorre a formação de filas. Então nos perguntamos: por que das filas? Quando a procura por um serviço é maior do que a capacidade do sistema de atender ao serviço, há a formação de filas.

Assim, quando se fornece um atendimento deficitário vem a insatisfação, perde-se clientes, queda na produção; tudo isto leva a uma relação muito forte entre as condições de um sistema de filas e a minimização dos custos no atendimento do mesmo.

Diante deste cenário, surge a simulação como uma alternativa. Desta forma, os próximos tópicos apresentarão os conceitos necessários para que seja possível confirmarmos que essa informação.

### 2. Revisão de literatura

Nesta seção é apresentada a revisão bibliográfica dos principais temas abordados no trabalho: teoria das filas, as filas M/M/1 e as filas M/M/2, o modelo analítico e por simulação e o processo de simulação.

#### 2.1. Teoria das Filas

A abordagem matemática de filas se iniciou no princípio do Século XX (1908) em Copenhague, Dinamarca, com A. K. Erlang, considerado o pai da Teoria das Filas, quando trabalhava em uma companhia telefônica. Foi somente a partir da segunda guerra mundial que a teoria foi aplicada a outros problemas de filas (PRADO 2004).

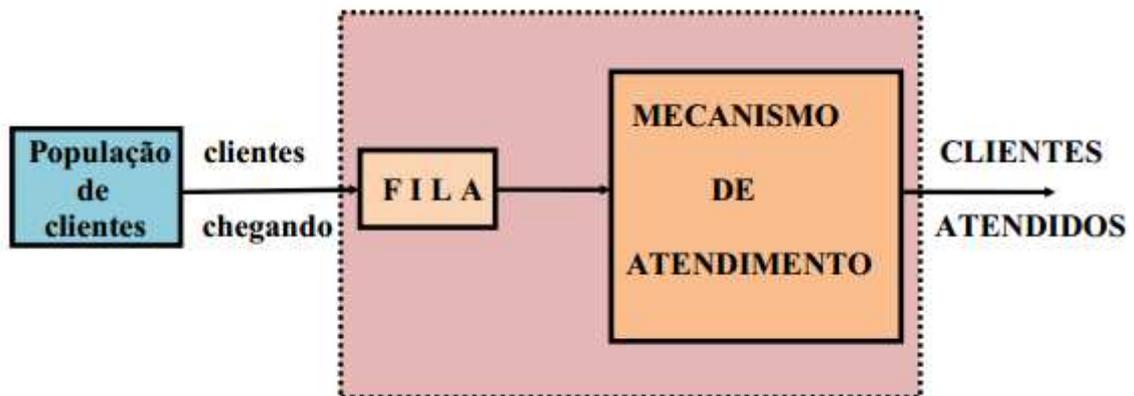
Assim, a Teoria das Filas tenta através de análises matemáticas detalhadas encontrar um ponto de equilíbrio que satisfaça o cliente e seja viável economicamente para o provedor do serviço.

Apesar do enorme progresso alcançado pela teoria, inúmeros problemas não são adequadamente resolvidos por causa de complexidades matemáticas. E esta complexidade se

deve ao fato da utilização de ferramentas que envolvem um tratamento estatístico ou estocástico.

A Figura 1 informa os elementos existentes em uma fila. Nela é possível verificar que a partir de uma população, aparecem clientes que formam fila e que aguardam por um tipo de serviço. O termo cliente é apresentado de uma maneira genérica e pode representar tanto uma pessoa como um navio. O atendimento é realizado por um ou mais servidores (que podem ser denominados de atendentes ou canais de serviço) e tanto pode ser um barbeiro ou um vendedor.

Figura 1 - Os elementos que compõem uma fila



Fonte: Fonte do autor

Algumas observações podem ser observadas quando se comenta sobre filas, tais como, a população de clientes pode ser finito ou infinito, os clientes podem chegar um de cada vez ou em blocos, a fila pode ter capacidade finita ou infinita, o mecanismo de atendimento pode ter um posto ou vários, paralelos e o sistema engloba os clientes da fila e os clientes em atendimento.

### 2.1.1. Característica das filas

De acordo com Andrade (1998), um sistema de filas é composto por seis elementos. Os três primeiros são obrigatórios e os três últimos, se não forem informados, são considerados conhecidos:

#### a) Modelo de chegada dos usuários ao serviço

O modelo de chegada é verificado pelo tempo entre as chegadas dos usuários/serviços.

Pode ser determinístico, ou seja, as chegadas ocorrem em intervalos de tempo iguais (tempo entre as chegadas é constante), ou ser uma variável aleatória, nesse caso o

tempo entre as chegadas é variável e esta relacionada com uma distribuição de probabilidades conhecida.

Além de observarmos se o modelo de chegada é determinístico ou é uma variável aleatória, é necessário também verificar a taxa de chegada  $\lambda$  (lâmbda). A constante  $\lambda$  é a taxa média de chegadas dos usuários por unidade de tempo.

b) Modelo de serviço (atendimento aos usuários)

O modelo de serviço é normalmente verificado pelo tempo de serviço, isto é, o tempo solicitado pelo atendente para concluir o atendimento. Da mesma maneira que o modelo de chegada, pode ser determinístico (constante) ou uma variável aleatória (quando o tempo de atendimento é variável e segue uma distribuição de probabilidades previamente conhecida). Neste último caso, é válido as mesmas considerações feitas à distribuição de probabilidades verificadas pelo modelo de chegada dos usuários ao serviço.

A constante  $\mu$  (mi) é a taxa média de atendimentos por unidade de tempo, por atendente.

c) Número de servidores

É o número de atendentes disponíveis no sistema.

d) Capacidade do sistema

É a capacidade de atendimento de usuários do sistema. Inclui o número de usuários que estão sendo atendidos mais os que esperam na fila. Se esta informação não aparecer, o sistema é considerado com capacidade ilimitada ( $\infty$ ).

e) Tamanho da população

Número de clientes que podem aparecer em um sistema. Pode ser finito ou infinito.

f) Disciplina da fila

É o modo como os usuários são atendidos. A disciplina da fila pode ser:

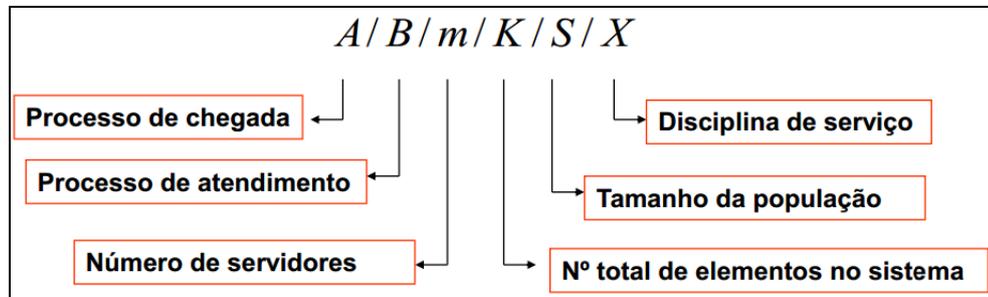
- FIFO (first in, first out): primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido;
- LIFO (last in, first out): último a chegar é o primeiro a ser atendido;
- ALEATÓRIO, isto é, os atendimentos são feitos sem qualquer preocupação com a ordem de chegada;
- COM PRIORIDADE, quer dizer, os atendimentos são feitos de acordo com prioridades estabelecidas;

Se a disciplina da fila não for informada, é considerada de acordo com o modelo FIFO.

## 2.2. Filas

A notação de Kendall (David Kendall) foi desenvolvida em 1951 para descrever o comportamento de um sistema de fila em uma única frase. A figura 2 demonstra com clareza:

Figura 2: Os elementos que compõem uma fila.  
 Figura 2 - Os elementos que compõem uma fila.



Fonte: Fonte do autor

Os valores de A e B dependem do tipo de distribuição a que elas se referem. Observe a tabela 1 a seguir:

Tabela 1 - Tipos de distribuição

Características da Fila	Símbolo	Significado
Teoria social	D	Determinístico
Método	M	Exponencial (Poisson)
Questão	A	Aleatório
Raciocínio	G	Outros
	FIFO	Primeiro a chegar é o primeiro a sair
	LIFO	Último a chegar é o primeiro a sair
Disciplina da Fila	SIRO	Atendimento aleatório
	PRI	Atendimento por prioridade
	GD	Outra ordem

Fonte: Fonte do autor

Outro tipo de notação também é bastante utilizado e é denominada de condensada A/B/c. Nessa formatação, não há limite para o tamanho da fila, a população é infinita e a disciplina é FIFO.

É importante observar que, quando a distribuição for exponencial, usa-se M (Markoviana) em A e B. Estes tipos de filas são caracterizados tanto para as chegadas quanto o atendimento serem marcovianos. Elas seguem a distribuição de Poisson (p/ ritmos) ou Exponencial negativa (p/ intervalos), além disso, existe apenas um servidor.

### 2.2.1. Filas M/M/1

Uma fila M/M/1 é um modelo de fila em que os tempos entre chegadas sucessivas de clientes são exponencialmente distribuídos, os tempos de atendimento no servidor são exponencialmente distribuídos, e existe apenas um servidor de atendimento.

Estando o servidor ocupado, os clientes permanecem em uma fila única e são atendidos numa disciplina que respeita a ordem de chegada dos clientes, ou “o primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido” CHWIF & MEDINA (2007).

No caso de se trabalhar com uma população infinita de clientes, as principais medidas de desempenho na fila serão calculadas da seguinte forma (figura 3):

Figura 3 - Medidas de desempenho da fila M/M/1.

Número médio de usuários na fila	x	Número médio de usuários no sistema
$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \text{ (eq. I)}$		$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \text{ (eq. II)}$
Tempo médio de espera na fila	x	Tempo médio no sistema
$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \text{ (eq. III)}$		$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \text{ (eq. IV)}$

Fonte: Fonte do autor

Observando as medidas da figura 3, temos o que é chamado de TAXA de UTILIZAÇÃO ( $\rho$ ) ou a probabilidade de encontrar o sistema ocupado, como sendo a relação entre o ritmo médio de chegada ( $\lambda$ ) e o ritmo médio de atendimento ( $\mu$ ), conforme mostra a fórmula abaixo:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \text{ (eq. V)}$$

### 2.2.2. Filas M/M/2

No modelo de Fila M/M/2 (M = tempos entre chegadas com distribuição exponencial, M = tempo de serviço com distribuição exponencial e 2 servidores) tanto as chegadas quanto o atendimento são marcovianos, seguem a distribuição de Poisson ou exponencial.

Seguindo o mesmo procedimento, a figura 4 apresenta as principais medidas de desempenho das filas M/M/S:

Figura 4: Medidas de desempenho da fila M/M/S

<p>Número médio de clientes no sistema</p> $L = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0 + \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{eq. VI})$	<p>Número médio de clientes na fila</p> $W = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot P_0}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} + \frac{1}{\mu} \quad (\text{eq. VII})$
<p>Tempo médio gasto no sistema</p> $L_q = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot P_0}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \quad (\text{eq. VIII})$	<p>Tempo médio de espera na fila</p> $W_q = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot P_0}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \quad (\text{eq. IX})$
<p>Probabilidade de haver 0 clientes no sistema</p> $P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s! \left(1 - \frac{\rho}{s}\right)}} \quad (\text{eq. X})$	
<p>Probabilidade de haver n clientes no sistema</p> $P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \cdot P_0, n \leq s \quad P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! s^{n-s}} \cdot P_0, n \geq s \quad (\text{eq. XI})$	

Fonte: Fonte do autor

#### 2.4. Modelo analítico x modelo por simulação

Segundo PAULO (2008), as diferenças entre modelos analíticos e modelos de simulação recaem na natureza de suas soluções. No modelo analítico é possível encontrar a solução para um problema matemático na forma de procedimentos via um algoritmo. As soluções obtidas são usadas como medidas de desempenho do sistema.

Já no modelo por simulação, a solução é provida via execução de um programa (modelo) que produz amostras do comportamento do sistema. Estatísticas tomadas destas amostras são usadas como medidas do desempenho do sistema.

#### 2.5. O processo de simulação

É possível definir simulação como sendo uma técnica de estudar o comportamento e reações de determinados sistemas através de modelos, ou seja, a realização de experimentos amostrais em um modelo de um sistema. Assim, os testes são realizados no modelo, ao invés de ser no sistema real, por ser mais fácil e com um menor custo (HILLIER; LIEBERMAN, 1988).

Segundo Carson (2004), a representação de um sistema ou processo pode ser considerado um modelo. A modelagem de um sistema ou processo com a inserção do tempo e as mudanças apresentadas é considerada um modelo de simulação.

As etapas para se chegar ao consenso a respeito de simulação é observada por Chase e Aquilano (1989) da seguinte forma: em um primeiro momento, definir um modelo do que se deseja simular e em um segundo momento, movimentá-lo ao longo de um determinado tempo.

Por fim, os modelos de simulação conseguem baratear e agilizar as estimativas do desempenho de configurações de um sistema e/ou alternativas de procedimentos operacionais (BARTON, 2004).

### **2.5.1. Vantagens da simulação**

Uma das vantagens claras na utilização da simulação é a conseguir alterar determinados parâmetros do sistema e observar o resultado, servindo, ao final, como auxílio na tomada de decisão sobre futuras alterações no sistema real.

Do ponto de vista de Law e Kelton (2000), as vantagens da simulação são as seguintes:

- Sistemas complexos que contenham elementos estocásticos que não conseguem ser tratados adequadamente por técnicas analíticas podem ser, na maioria das vezes, estudados por simulação;
- Fornece um controle melhor sobre as condições experimentais do que seria possível na experimentação no sistema real;

Autores como Chung (2004) destacam outras vantagens na utilização do modelo por simulação:

- A experimentação pode ocorrer em um curto período de tempo, em virtude do apoio computacional;
- Menor necessidade de análise, uma vez que os pacotes de softwares disponíveis no mercado facilitam a análise dos dados;
- Facilidade da demonstração dos modelos, em virtude da alta capacidade gráfica dos pacotes de softwares disponíveis no mercado para a simulação.

## **3. Metodologia**

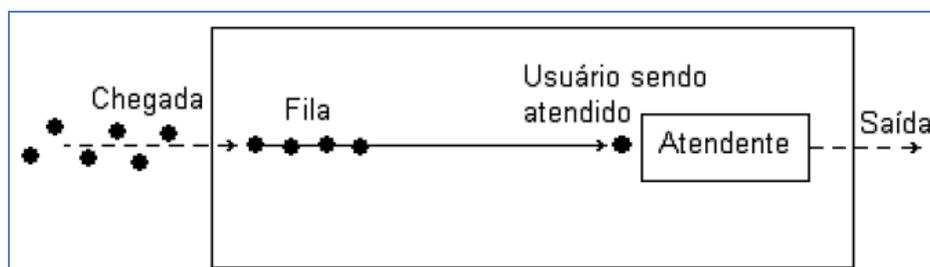
De acordo com Chwif & Medina (2007), o desenvolvimento de um modelo de simulação compõem-se de três grandes etapas:

- a) Concepção ou formulação do modelo. Nesta etapa tem-se o entendimento do sistema a ser simulado. É necessário discussões do problema com os especialistas do setor e então ocorre a definição do escopo. Neste momento são também coletados os dados de entrada, certificando-se da importância que a qualidade destes tem em todo o modelo. Faz-se então a representação do Modelo Abstrato (que está na mente do analista) utilizando técnicas adequadas. Esta representação trará um Modelo Conceitual;
- b) Implementação do modelo. Neste momento, através do Modelo Conceitual é desenvolvido o Modelo Computacional utilizando um software de simulação comercial. O modelo computacional deve então ser comparado frente ao modelo conceitual para sua avaliação, ou seja, se o modelo está condizente com o sistema real. Durante este procedimento são feitas as validações (relativo ao modelo) e as verificações (relativo ao comportamento do modelo no computador);
- c) Análise dos resultados do modelo. Nesta etapa o modelo computacional está pronto para realização dos experimentos. Temos então o Modelo Experimental. A partir desse momento, são realizadas várias “rodadas” no simulador e analisados os resultados. Caso seja necessário, fazem-se alguns ajustes no modelo computacional e reinicia as “rodadas”. Após as análises dos resultados, conclusões e recomendações sobre o sistema poderão ser registradas.

### 3.1. O modelo a ser analisado: a Fila M/M/1

A fila M/M/1 configura-se como sendo um modelo onde tanto a chegada quanto o atendimento são marcovianas (significa dizer que segue uma distribuição de Poisson ou a Exponencial Negativa) com a existência de um único atendente servidor. A figura 5 descreve um modelo de fila M/M/1.

Figura 5 - O modelo de fila M/M/1.



Fonte: Fonte do autor

#### 3.1.1. O modelo computacional da fila M/M/1

##### 3.1.1.1. A implementação

Existem diversas formas de se implementar um modelo conceitual no mercado. A escolha foi o Microsoft Excel 2007 por diversos motivos, sendo estes um dos principais:

- A facilidade no manuseio;
- A bibliografia base com fórmulas direcionadas para o software;
- A proposta de o artigo ser introdutório no ambiente de teoria de filas.

### 3.1.1.2. Variáveis e fórmulas

#### a) Modelo Analítico

Para os cálculos das medidas de desempenho da fila em questão, utilizou-se uma planilha desenvolvida no Microsoft Excel. Nela fez-se o uso da função de manipulação denominada Solver.

Por meio desta ferramenta, foi possível calcular os valores para, posteriormente, compará-los com os valores encontrados durante a simulação. Assim, os valores das seguintes equações já são entregues por meio da planilha:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (\text{probabilidade de se encontrar o sistema ocupado – eq. A})$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (\text{tempo médio de espera na fila – eq. B})$$

#### b) Modelo por Simulação

De acordo com Perin Filho (1995), para realização da simulação, alguns parâmetros iniciais foram definidos, e o primeiro critério adotado foi o da aleatoriedade para as “n” simulações realizadas. As variáveis e as fórmulas utilizadas no modelo computacional estão descritas na tabela 2.

Tabela 2 - Variáveis utilizadas no modelo computacional.

Simbologia da variável	Significado	Equação
ri	Tempo entre as chegadas	=(-LN(1-(ALEATÓRIO()))/\$P\$3)
si	Tempo de atendimento	=(-LN(1-(ALEATÓRIO()))/\$P\$4)
ai	Instante de chegada	=D3+B4
bi	Início do atendimento	=MÁXIMO(D4;F3)
ci	Instante do fim do atendimento	=E4+C4
wi	Tempo de espera na fila	=E4-D4
ui	Tempo do sistema	=F4-D4
oi	Tempo ocioso	=E4-F3

Fonte: Fonte do autor

Portanto, a equação A do modelo analítico será calculada, no modelo por simulação, da seguinte forma:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n O_i}{C_n}$$

, em que  $O_i$  é o tempo ocioso e  $C_n$  é o tempo de simulação.

Da mesma forma com a equação B do modelo analítico, sendo calculado da seguinte forma:

$$\widehat{W}_q = \frac{\sum_{i=1}^n W_i}{n}$$

, em que  $W_q$  é o tempo de espera na fila e  $n$  é o número de usuários.

Lembrando que a equação de  $r_i$  e  $s_i$  do modelo computacional são as representações das variáveis do modelo computacional obtidas através do método da transformada inversa e são descritas pelas fórmulas, respectivamente:

$$r_i = \frac{-\ln(1-U_i)}{\lambda}, \quad s_i = \frac{-\ln(1-U_i)}{\mu}$$

Na figura abaixo, temos a representação das variáveis e das fórmulas no software Microsoft Excel 2007.

Figura 6 - Variáveis e fórmulas no Excel.

	B	C	D	E	F	G	H	I
1								
2	Tempo entre chegadas (ri)	Tempo de atendimento (si)	Instante da chegada (ai)	Instante do início do atendimento (bi)	Instante do fim do atendimento (ci)	Tempo de espera na fila (wi)	Tempo de sistema (ti)	Tempo ocioso (oi)
3			0		=E3+C3			
4	=(-LN(1-(ALEATÓRIO)))/\$P\$3	=(-LN(1-(ALEATÓRIO)))/\$P\$4	=D3+B4	=MÁXIMO(D4;F3)	=E4+C4	=E4-D4	=F4-D4	=E4-F3

Fonte: Fonte do autor

Na etapa de simulação, os valores aleatórios  $r_i$  e  $s_i$  foram gerados utilizando-se o método da transformada inversa por meio do gerador de números aleatórios do Excel. Assim, é possível caracterizá-los como sendo uma distribuição exponencial. As fórmulas de  $\lambda$  e  $\mu$  através da transformada inversa ficam da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{1}{E(x1)}$$

$$\mu = \frac{1}{E(x2)}$$

Neste caso,  $E(x1)$  é o tempo médio entre as chegadas e  $E(x2)$  é o tempo médio de atendimento e serão lançados na planilha de simulação, conforme pode ser observado na figura 7.

Figura 7: Exemplo de simulação.

n=1000	
nº replicações	10

Fonte: Fonte do autor

### 3.1.2. Simulações

A partir do modelo conceitual, foi desenvolvido um modelo computacional de acordo com o informado na tabela 2 (seção 3.1.1.2). Uma parte dela está representada na figura 8.

Figura 8 - Modelo computacional no formato de planilha eletrônica- Fila M/M/1.

	Usuários (n)	Tempo entre chegadas (ti)	Tempo de atendimento (si)	Instante da chegada (ai)	Instante do início do atendimento (bi)	Instante do fim do atendimento (ci)	Tempo de espera na fila (wi)	Tempo de sistema (ui)	Tempo ocioso (oi)
2				0,000		0,000			
3									
4	1	1,155	0,698	1,155	1,155	1,853	0,000	0,698	1,155
5	2	1,440	0,222	2,595	2,595	2,817	0,000	0,222	0,742
6	3	0,071	0,015	2,666	2,817	2,832	0,151	0,166	0,000
7	4	0,186	0,458	2,852	2,852	3,310	0,000	0,458	0,019
8	5	5,167	0,111	8,018	8,018	8,129	0,000	0,111	4,708
9	6	0,563	0,978	8,582	8,582	9,560	0,000	0,978	0,453
10	7	0,032	0,101	8,614	9,560	9,661	0,946	1,047	0,000

Fonte: Fonte do autor

A primeira simulação com a distribuição M/M/1 foi realizada utilizando os seguintes parâmetros de tempo médio:

Tabela 3 - Parâmetros de tempo médio

Parâmetros (n=1000)	Valores
Tempo médio entre as chegadas – E(x1)	1
Tempo médio de atendimento – E(x2)	0,5

Fonte: Fonte do autor

A partir da configuração destes parâmetros na planilha, foram feitas 10 replicações. Os resultados encontrados para a taxa de ocupação do servidor, o tempo médio de espera em fila e tempo médio de serviço podem ser observados na figura 9.

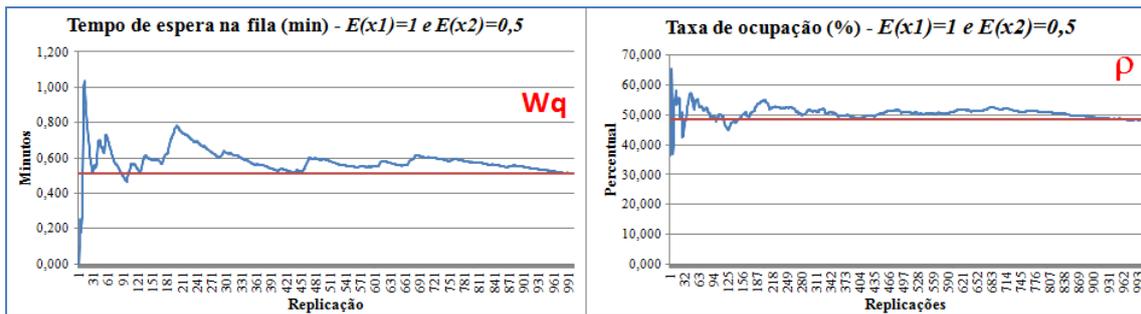
Figura 9 - Parâmetros de tempo médio e taxa de ocupação para E(x1)=1 e E(x2)=0,5

Rodada	Tempo médio de espera na fila (min)	Taxa de ocupação (%)
1	19,99	98,28
2	18,75	99,64
3	8,15	98,56
4	5,56	97,08
5	8,58	96,22
6	3,82	93,03
7	4,22	91,69
8	19,59	97,13
9	4,09	91,62
10	10,43	91,58
Média (10)	10,32	95,48
Desvio Padrão (10)	6,66	3,18

Fonte: Fonte do autor

A partir das 10 replicações, tanto o tempo de espera na fila quanto a taxa de ocupação se estabilizam, a partir de um ponto próximo a 1000, em torno do valor 0,5 (ver figura 10).

Figura 10 - Estabilização dos valores para  $E(x1)=1$  e  $E(x2)=0,5$



Fonte: Fonte do autor

Isso pode ser verificado de outra forma. Observem que, para  $E(x1) = 1$  e  $E(x2) = 0,50$ , o valor de  $\lambda$  e  $\mu$  será, respectivamente, igual a 1 e 2. A partir destas informações, é possível calcular os valores analíticos do tempo médio de espera na fila (eq. III – seção 3.1.2.1) e a taxa de ocupação (eq. I – seção 3.1.2.1), obtendo, ao final os seguintes valores:

$$Wq = \frac{1}{2(2 - 1)} = 0,5$$

$$\rho = \frac{1}{2} = 0,5$$

O resultado final do modelo por simulação está bem próximo do encontrado no analítico, como pode ser observado na tabela 4.

Tabela 4 - Comparativo modelo analítico e simulação para fila M/M/1

Parâmetros	Modelo Analítico	Simulação
Tempo médio de espera na fila (min.)	0,50	0,48
Taxa de ocupação (%)	50,00	50,51

Fonte: Fonte do autor

Dando continuidade no processo de comparação entre os dados obtidos tanto para o modelo analítico da fila M/M/1 quanto para os de simulação, foi realizado o procedimento de aceleração do tempo médio de chegada ao sistema (representado por  $E(x1)$ ) mantendo o tempo de atendimento constante ( $E(x2)$ ).

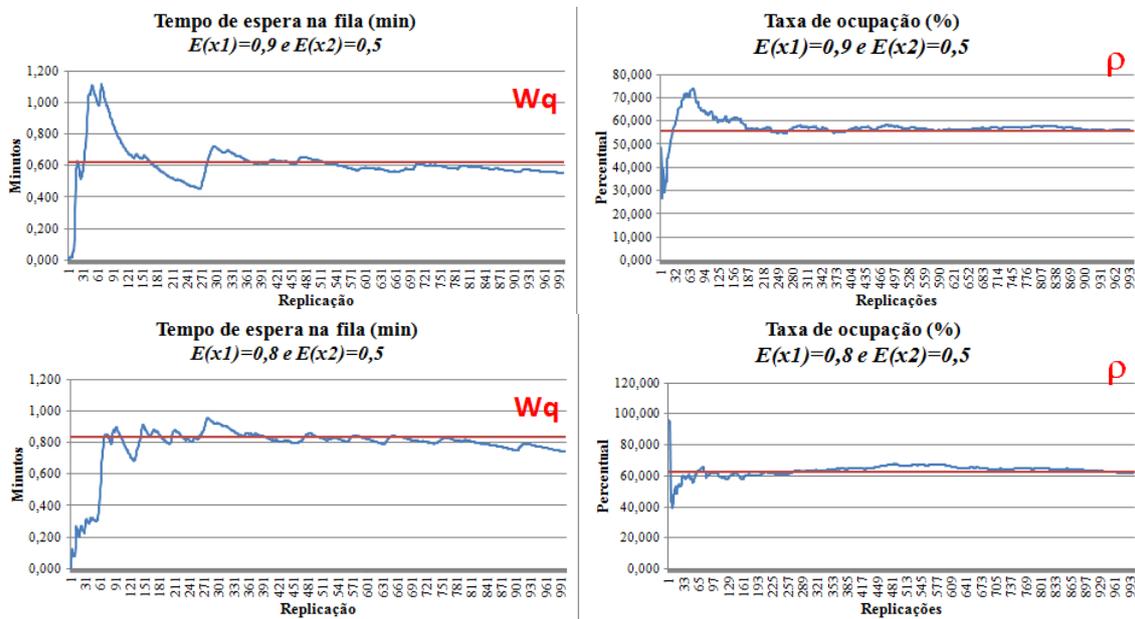
Tabela 5 - Acelerando o tempo médio entre chegadas

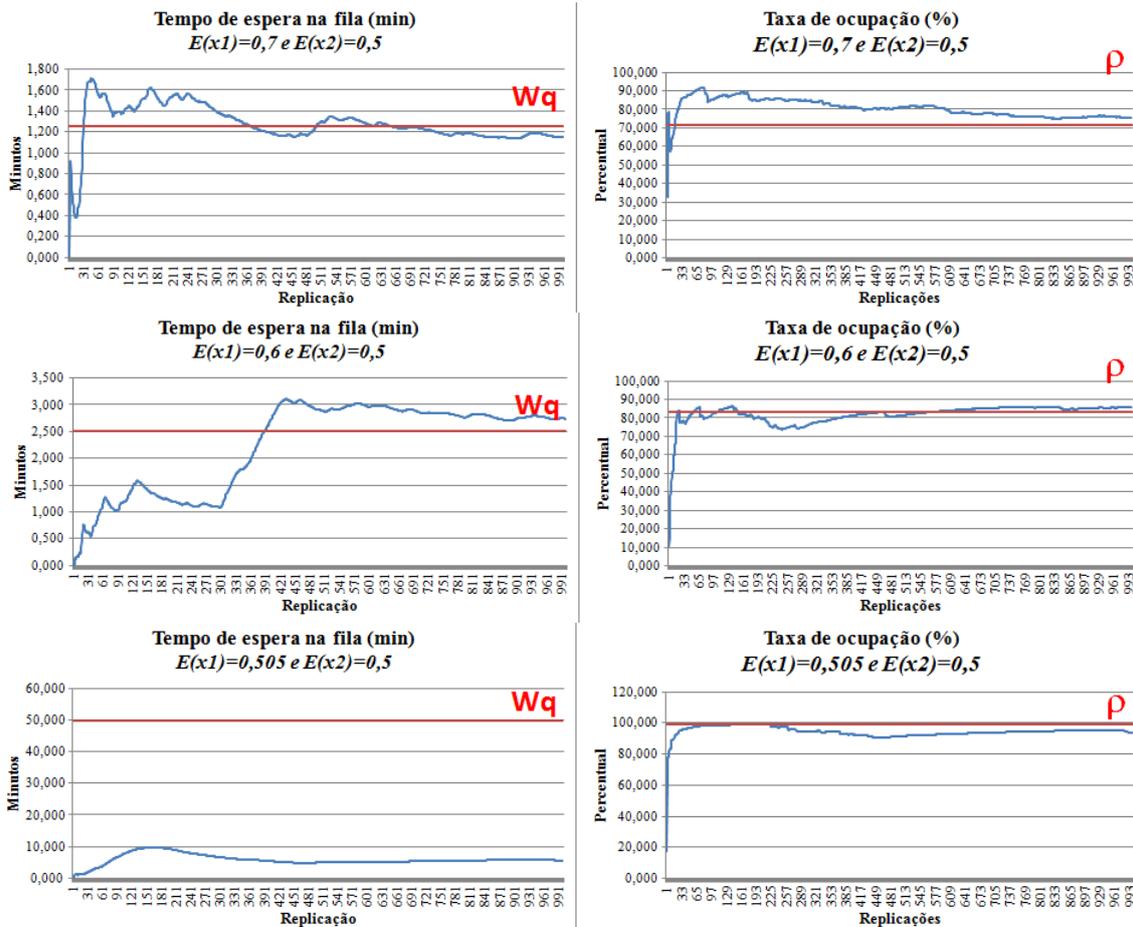
Parâmetros	Novos valores				
Tempo médio entre as chegadas – $E(x1)$	0,90	0,80	0,70	0,60	0,505
Tempo médio de atendimento – $E(x2)$	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50

Fonte: Fonte do autor

Na figura 11, é possível o resultado obtido ao acelerarmos o tempo médio entre as chegadas (tabela 5). É obsevar (graficamente) o comparativo entre os valores do tempo médio de espera a fila e a taxa de ocupação tanto do modelo por simulação quanto do modelo analítico.

Figura 11 - Estabilização dos valores para  $E(x1)=1$  e  $E(x2)=0,5$





Fonte: Fonte do autor

Se compararmos os valores encontrados durante a simulação dos novos valores de  $E(x1)$ , observamos que, a medida que o tempo médio entre chegadas diminui, a taxa de ocupação do servidor aumenta, e enquanto os valores de entrada e atendimento são distantes, 1 e 0,5 os resultados obtidos nas simulações são próximos dos resultados do método analítico.

O tempo de atendimento e de espera vão se distanciando à medida que os valores de chegada vão sendo modificados. Quando os valores de entrada ficam muito próximos aos de atendimento,  $E(x1) = 0,505$  e  $E(x2)=0,5$ , observamos que a taxa de ocupação do servidor é quase 100%, e que a simulação apresenta valores distantes dos obtidos pelo método analítico.

Neste caso em específico, isso ocorre porque os valores já estão próximos ao limite teórico da distribuição de Poisson, onde  $\rho < 1$ , e o valor de  $\rho$  está muito próximo e esse limite. Outro fator a ser considerado é que a estabilidade não é obtida com 1000 usuários.

Figura 12 - Acelerar  $E(x1)$  mantendo  $E(x2)$  constante

Rodada	Fila M/M/1 - Parâmetros de tempo médio de espera e de taxa de ocupação ao variamos E(x1)									
	0,9		0,8		0,7		0,6		0,505	
	TME (min)	TO (%)	TME (min)	TO (%)	TME (min)	TO (%)	TME (min)	TO (%)	TME (min)	TO (%)
1	0,49	55,2	0,75	64,47	1,40	71,67	1,52	78,83	19,99	98,28
2	0,56	54,58	0,93	64,24	1,48	70,72	2,29	82,32	18,75	99,64
3	0,6	57,21	0,75	62,71	1,13	70,68	1,14	76,43	8,15	98,56
4	0,76	57,79	0,75	60,48	1,55	72,53	3,12	86,03	5,56	97,08
5	0,8	59,53	0,93	63,00	1,15	74,77	1,96	82,36	8,58	96,22
6	0,59	54,49	1,30	65,55	1,26	75,97	2,39	84,21	3,82	93,03
7	0,91	56,6	0,83	62,89	1,00	67,79	1,07	75,32	4,22	91,69
8	0,67	55,19	0,81	60,14	1,40	72,45	2,26	87,28	19,59	97,13
9	1,14	59,57	0,64	58,11	1,13	70,54	3,04	87,44	4,09	91,62
10	0,58	54,39	0,83	61,56	1,03	70,64	3,81	86,71	10,43	91,58
Média	0,71	56,46	0,85	62,32	1,25	71,78	2,26	82,69	10,32	95,48
Variância	0,04	4,04	0,03	5,12	0,04	5,40	0,79	20,21	44,35	10,10
desvio padrão	0,20	2,01	0,18	2,26	0,19	2,32	0,89	4,50	6,66	3,18
Valor teórico	0,63	55,56	0,83	62,50	1,25	71,43	2,50	83,33	50,00	99,01

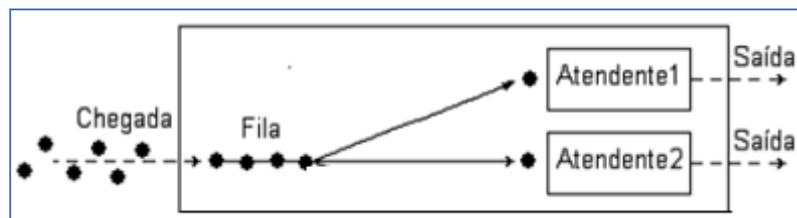
Fonte: Fonte do autor

### 3.2. O modelo a ser analisado: a Fila M/M/2

A fila M/M/2 configura-se como sendo um modelo de uma fila de espera única baseado num processo de vida e morte, em que existem 2 servidores em paralelo (figura 14). A taxa de chegada  $\lambda$  é independente do estado do sistema. A taxa de serviço  $\mu$  é igual para todos os servidores, sendo a taxa de atendimento (conjunto dos 2 servidores) dada por  $2\mu$ .

A taxa de ocupação  $\rho$  é igual a  $\lambda/2\mu$  que terá que ser  $< 1$  para que o sistema esteja em equilíbrio. A taxa de entrada em cada estado é sempre igual a  $\lambda$ .

Figura 13 - O modelo de fila M/M/2.



Fonte: Fonte do autor

#### 3.2.1. O modelo computacional da fila M/M/2

##### 3.2.1.1. A implementação

Existem diversas formas de se implementar um modelo conceitual no mercado. A escolha foi o Microsoft Excel 2007 por diversos motivos, sendo estes um dos principais:

- A facilidade no manuseio;
- A bibliografia base com fórmulas direcionadas para o software;
- Proposta do artigo ser introdutória no ambiente de teoria de filas.

##### 3.2.1.2. Variáveis e fórmulas

a) Modelo Analítico

Para os cálculos das medidas de desempenho da fila em questão, utilizou-se uma planilha desenvolvida no Microsoft Excel. Nela fez-se o uso da função de manipulação denominada Solver.

Por meio desta ferramenta, foi possível calcular os valores para, posteriormente, compará-los com os valores encontrados durante a simulação. Assim, os valores das seguintes equações já são entregues por meio da planilha:

$$\rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu} \quad (\text{probabilidade de se encontrar o sistema ocupado – eq. C})$$

$$W_q = \frac{\mu \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s \cdot P_0}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \quad \text{para } S=2; \text{ (tempo médio de espera na fila – eq. D)}$$

b) Modelo por Simulação

De acordo com Perin Filho (1995), para realização da simulação, alguns parâmetros iniciais foram definidos, e o primeiro critério adotado foi o da aleatoriedade para as “n” simulações realizadas. As variáveis e as fórmulas utilizadas no modelo computacional estão descritas na tabela 2.

Tabela 6 - Variáveis utilizadas no modelo computacional

Simbologia da variável	Significado	Equação
ri	Tempo entre as chegadas	=(-LN(1-(ALEATÓRIO()))/\$S\$3)
si	Tempo de atendimento	=(-LN(1-(ALEATÓRIO()))/\$S\$4)
ai	Instante de chegada	=D3+B4
bi	Início do atendimento	=MÁXIMO(D4;MÍNIMO(G3;H3))
ci	Instante do fim do atendimento	=E4+C4
ci1	Instante do fim do atendimento c1	=(SE(G3<=H3;F4;G3))
ci2	Instante do fim do atendimento c2	=(SE(G3<=H3;H3;F4))
wi	Tempo de espera na fila	=E4-D4
ui	Tempo do sistema	=F4-D4
oi	Tempo ocioso	=SE((D4-F3)>0;(D4-F3);0)

Fonte: Fonte do autor

Portanto, a equação C do modelo analítico será calculada, no modelo por simulação, da seguinte forma:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n O_i}{C_n}, \text{ em que } O_i \text{ é o tempo ocioso e } C_n \text{ é o tempo de simulação.}$$

Da mesma forma com a equação D do modelo analítico, sendo calculado da seguinte forma:

$$\widehat{W}_q = \frac{\sum_{i=1}^n W_i}{n}$$

, em que  $W_i$  é o tempo de espera na fila e  $n$  é o número de usuários.

Lembrando que a equação de  $r_i$  e  $s_i$  do modelo computacional são as representações das variáveis do modelo computacional e são descritas pelas fórmulas, respectivamente:

$$r_i = \frac{-\ln(1-U_i)}{\lambda}, \quad s_i = \frac{-\ln(1-U_i)}{\mu}$$

### 3.2.2. Simulações

A partir do modelo conceitual, foi desenvolvido um modelo computacional de acordo com o informado na tabela 6 (seção 3.2.1.2). Uma parte dela está representada na figura 14.

Figura 14 - Modelo computacional no formato de planilha eletrônica - Fila M/M/2

	Usuários (n)	Tempo entre chegadas (ri)	Tempo de atendimento (si)	Instante da chegada (ai)	Instante do início do atendimento (bi)	Instante do fim do atendimento (ci)	Instante do fim do atendimento (ci1)	Instante do fim do atendimento (ci2)	Tempo de espera na fila (wi)	Tempo de sistema (ti)	Tempo ocioso (oi)
2											
3				0,000		0,000	0,000	0,000			
4	1	0,224	0,469	0,224	0,224	0,693	0,693	0,000	0,000	0,469	0,224
5	2	0,693	0,419	0,916	0,916	1,336	0,693	1,336	0,000	0,419	0,224
6	3	0,273	0,572	1,189	1,189	1,761	1,761	1,336	0,000	0,572	0,000

Fonte: Fonte do autor

A única simulação com a distribuição M/M/2 foi realizada utilizando os seguintes parâmetros de tempo médio:

Tabela 7 - Parâmetros de tempo médio

Parâmetros (n=1000)	Valores
Tempo médio entre as chegadas – E(x1)	0,505
Tempo médio de atendimento – E(x2)	0,5

Fonte: Fonte do autor

A partir da configuração destes parâmetros na planilha, foram feitas 10 replicações. Os resultados encontrados para a taxa de ocupação do servidor, o tempo médio de espera em fila e tempo médio de serviço podem ser observados na figura 15.

Figura 15 - Parâmetros de tempo médio e taxa de ocupação para E(x1)=0,505 e E(x2)=0,5 – Fila M/M/2

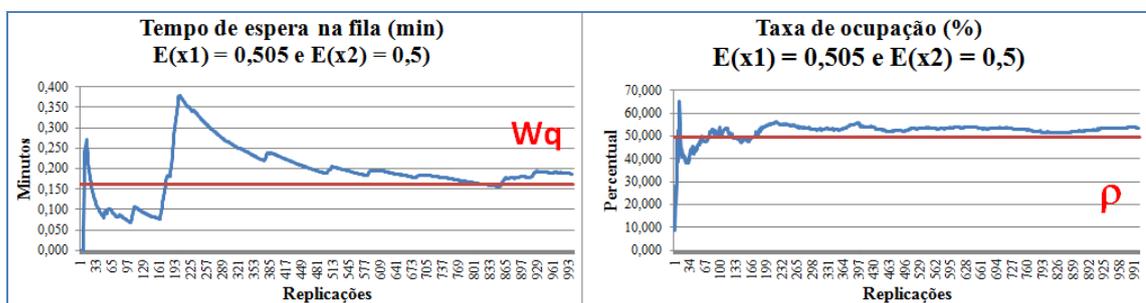
Rodada	MM2	
	0,505	
	TME (min)	TO (%)
1	0,1557	58,3518
2	0,1581	57,3686
3	0,1614	60,0598
4	0,1398	55,1806
5	0,2061	59,7732
6	0,2182	59,0391
7	0,1977	63,5476
8	0,1668	56,097
9	0,2098	58,1902
10	0,2115	61,662
<b>Média</b>	<b>0,1825</b>	<b>58,9270</b>
<b>Variância</b>	<b>0,0008</b>	<b>6,2432</b>
<b>desvio padrão</b>	<b>0,0288</b>	<b>2,4986</b>
<b>Valor teórico</b>	<b>0,1623</b>	<b>49,5000</b>

Fonte: Fonte do autor

Para tempo médio de chegada igual a 0,505, ou seja, com valores próximos ao limite teórico, é possível perceber que não há o mesmo impacto na fila M/M/2 do que ocorreria na M/M/1.

No modelo M/M/2, observa-se que os valores de simulação e analítico estão próximos. Outro fato constatado é que, por se tratar de dois servidores, a taxa de ocupação destes e o tempo médio de espera em fila são bem mais reduzidos, mesmo se for trabalhado com uma taxa média de chegada de 0,505, conforme observado também na figura 16.

Figura 16 - Parâmetros de tempo médio e taxa de ocupação convergindo



Fonte: Fonte do autor

#### 4. Considerações finais

Este estudo demonstrou a aplicação da simulação como uma técnica que proporciona aos seus usuários maior embasamento na tomada de decisões. Por meio da simulação é possível prever as consequências de certas alterações nos processos e, dessa forma, analisar a viabilidade

destas sem ter de testá-las no sistema real, o que aumenta a probabilidade de se fazer a melhor escolha.

Observou-se que as simulações da fila M/M/1 do tempo médio de espera na fila e da taxa de ocupação foram fidedignas até certo ponto, pois ao montar o cenário para  $E(x_1)=0,505$  e  $E(x_2)=0,5$ , não foi possível observar a proximidade dos valores de simulação e analítico. A questão ocorreu por alguns motivos, tais como o número de usuários inferior ao necessário e a quantidade de replicações. Isso demonstra que o valor de N é muito importante ao simularmos um sistema qualquer.

Na simulação da fila M/M/2, os valores encontrados convergem para o calculado no modelo analítico por causa do número de servidores disponíveis no sistema. Os valores, mesmo diante de uma taxa de chegada próxima da taxa de atendimento.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, EDUARDO L. **Introdução à Pesquisa Operacional: métodos e modelos para a análise de decisão**. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- BARTON, R. R. **Designing Simulation Experiments**. Proceedings of the Winter Simulation Conference, USA, 2004.
- CARSON, J. S. **Introduction to Modeling And Simulation**. Proceedings of the Winter Simulation Conference, U.S.A, 2004.
- CHASE, R. B. & AQUILANO, N. J. **Production and Operations Management**. 5th ed. IRWIN, 1989.
- CHUNG, A. A. **Modeling Handbook: A practical approach**. Boca Raton: CRC Press, 2004.
- CHWIF, LEONARDO; MEDINA, AFONSO C. **Modelagem e simulação de eventos discretos, teoria & aplicações**. Segunda edição. São Paulo, 2007.
- HILLIER, F. S., LIEBERMAN G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 3. Ed. Rio de Janeiro: Campus / São Paulo: Universidade de São Paulo, 1988.
- LAW, A. M. & KELTON, W. D. **Simulation modeling and analysis**. 3. Ed. McGraw-Hill Higher Education, 2000.
- PRADO, S. H. **Teoria das filas e da Simulação**. Belo Horizonte: Desenvolvimento Gerencial, 2004.
- PERIN FILHO, Clovis. **Introdução à Simulação de Sistemas**. Editora da Unicamp, Campinas, 1995.