Otimização de rotas: uma aplicação do problema de caminho mais curto em uma loja de eletrodomésticos

Lays Capingote Serafim da Silva (UFG) laysengenharia7@gmail.com
Edvaldo Capingote Serafim da Silva (UFG) capingote_7@hotmail.com
Paulo Eduardo Lino Palhares (UFG) pauloelp@yahoo.com.br

Resumo

A Pesquisa Operacional oferece aos gestores a oportunidade de tomar decisões mais eficientes, pois se baseia em métodos determinísticos como a Programação Linear, através de bases científicas e modelos matemáticos. Nos últimos anos tem-se observado uma grande procura pela resolução de problemas de programação linear, em particular aqueles modelados como o de caminho mais curto. Diante desse contexto, o presente estudo tem como objetivo a aplicação do Problema de Caminho mais Curto em uma loja de eletrodomésticos de Catalão, Goiás, a fim de, definir a melhor rota que minimiza as distâncias da loja ao depósito onde são armazenados os produtos. Para isso, foi utilizada a Programação Linear, que goza do apoio da modelagem matemática para moldar problemas reais. Para tanto, os procedimentos de pesquisa adotados foram o estudo de caso e a pesquisa experimental. O modelo matemático do estudo foi elaborado e esclarecido utilizando o software LINDO, assim, através dos resultados obtidos observou-se que a rota ótima comprovada neste estudo por técnicas matemáticas é a mesma utilizada pelo motorista que se baseia em métodos empíricos. A realização do estudo certifica que a pesquisa operacional e a programação linear são metodologias eficientes na solução de problemas como o apresentado.

Palavras-Chaves: Pesquisa operacional, Programação linear, Rotas.

1. Introdução

O processo decisório é uma atividade comum na vida das pessoas. Gomes e Almeida (2002) salientam que tomar decisões é uma das tarefas mais difíceis enfrentadas individualmente ou por um grupo de indivíduos, pois quase sempre tais decisões resultam em consequências positivas e negativas.

Uma decisão relevante e habitual nas empresas que realizam entregas de produtos envolve a definição do melhor caminho a ser percorrido, de forma que haja rapidez na entrega e consequentemente a satisfação dos clientes. De acordo com Silva (2012), tentativas de otimização, como encontrar melhores rotas que diminuam gastos, é um fator comum no cotidiano das pessoas físicas e jurídicas, afinal, quem nunca gastou mais combustível errando o caminho para algum estabelecimento? Ou qual empresa que nunca mudou a rota dos veículos testando o caminho mais curto para gerar economia?

Uma metodologia que tem a capacidade de auxiliar no processo decisório é a Pesquisa Operacional, em conjunto com a Programação Linear, utilizada para descobrir a melhor solução para problemas que tenham modelos matemáticos com expressões lineares. Segundo Pinto e Schramm (2005), o desenvolvimento de modelos de programação linear é um dos recursos que as organizações podem utilizar para otimizar processos. Esses modelos, quando utilizados de forma correta e sobre bases confiáveis, fazem com que os gestores tomem decisões racionais, totalmente voltadas para a melhoria.

O objetivo do estudo é a aplicação do Problema de Caminho mais Curto em uma loja de eletrodomésticos de Catalão, Goiás, para descobrir a melhor rota que minimiza as distâncias da loja ao depósito onde são armazenados os produtos. Para alcançar este objetivo, (1) realizou-se o levantamento de informações referentes às possibilidades de rotas e distâncias do ponto de origem ao ponto de destino, (2) formulou-se o modelo matemático de programação linear e (3) solucionou-se o problema utilizando o software LINDO para análise dos resultados.

O artigo adota a seguinte estrutura: na seção dois é apresentado o referencial teórico a cerca dos seguintes assuntos: pesquisa operacional, programação linear, problema do caminho mais curto e sobre o software LINDO utilizado neste estudo para a resolução da modelagem matemática, respectivamente; na terceira seção é apresentada a metodologia aplicada na pesquisa; na seção quatro encontra-se o estudo de caso, com a formulação do problema, elaboração do modelo matemático, resultados e discussões; e na quinta seção as considerações finais.

2. Referencial teórico

Nesta seção são apresentados os principais temas utilizados no estudo: 2.1. Pesquisa operacional, 2.1.1. Programação linear, 2.2. Problema do caminho mais curto e 2.3. Software LINDO.

2.1. Pesquisa operacional

Segundo Marins (2011), o nome Pesquisa Operacional (PO) é de origem militar, e foi utilizada pela primeira vez na Grã-Bretanha ao longo da Segunda Guerra Mundial. Em termos científicos, a PO é determinada por um campo numeroso de aplicações que justifica a existência de várias definições: Para Ehrlich (1991, p.13), a "[...] Pesquisa Operacional é uma metodologia de estruturar processos aparentemente não estruturados por meio da construção de modelos matemáticos.” Para Daft (1999, p.486), a “[...] Pesquisa Operacional é um conjunto de modelos de decisão com bases quantitativas utilizadas para auxiliar quem toma decisões.” Segundo Ramalhete, Guerreiro e Magalhães (1985, p.20), a “[...] Pesquisa Operacional é o ramo científico que fornece uma abordagem sistemática e racional, baseada essencialmente em técnicas quantitativas na solução de problemas.” Em síntese, autores definem a PO como uma abordagem científica que busca a melhor decisão para um problema.

De acordo com Moreira (2007), um estudo da PO apresenta as seguintes etapas: definição do problema, formulação do modelo matemático, resolução do modelo matemático e implementação da solução. A PO busca a solução de problemas que podem ser representados por modelos matemáticos. Segundo Medeiros e Ramos (1994), os principais elementos de um modelo matemático são:

- Variáveis de decisão: por meio da função-objetivo, surgem variáveis fundamentais, essas variáveis são denominadas de variáveis de decisão. Os parâmetros são valores fixos no problema;
- Função objetivo: É a expressão, função ou equação que mostra a relação entre as variáveis controláveis e o objetivo do problema. Em geral, deseja-se otimizar o valor da função objetivo; isto significa dizer que deseja-se determinar as variáveis controláveis de forma a minimizar ou maximizar o valor da função objetivo;
- Restrições: São expressões, funções ou inequações, as quais limitam os valores que as variáveis podem assumir. Geralmente, as restrições representam limitações impostas pelo sistema.

De acordo com Moreira (2007), conseguir a melhor solução, ou seja, a solução ótima, demanda a solução de um sistema de equações e inequações como na programação linear.

2.1.1. Programação linear

Um dos modelos mais utilizados nos problemas de pesquisa operacional é a programação linear. De acordo com Marins (2011), a Programação Linear (PL) objetiva descobrir a melhor solução para problemas que tenham modelos matemáticos constituídos por expressões lineares. A missão da PL baseia-se na maximização ou minimização de uma função linear, nomeada de Função objetivo, obedecendo-se um sistema linear de igualdades ou desigualdades, que recebem o nome de Restrições do Modelo.

Segundo Colin (2007), a PL é uma das técnicas mais prestigiadas dentre as ferramentas gerenciais disponíveis, visto que, existe uma segurança relativamente alta de não haver outra solução melhor quando a modelagem e a solução estão corretas. As pessoas que utilizam essa técnica a classifica como um diferencial para a lucratividade e sobrevivência no longo prazo e os usuários que a utilizam com pouca frequência encontram no método fontes de vantagem competitiva duradoura.

De acordo com Andrade (2004), a PL é uma das técnicas mais eficazes na gestão e seu campo de aplicação é bastante amplo, envolvendo: organização de transportes e estoques, estudos de fluxos de caixa, investimentos e sistemas de informações, além dos clássicos problemas de produção e de mistura de componentes.

Diante dessa perspectiva, Pizzolato e Gandolpho (2009), relatam que a programação linear possui características fundamentais, como:

- Variáveis de decisão: xj, sendo j = 1, 2,..., n;
- Função objetivo Z a ser otimizada;
- Restrições lineares;
- Não negatividade das variáveis de decisão, xj ≥ 0.

Assim, o problema é representado pela programação linear utilizando modelos matemáticos.

2.2. Problema do caminho mais curto

Segundo Lachtermacher (2007), quando se deseja encontrar uma rota com distância mínima, tem-se um Problema de Caminho mais Curto. Nestes problemas haverá sempre dois tipos de nós especiais, chamados de origem e destino, entre esses nós geralmente existem nós intermediários, que podem representar ruas que conectam outras ruas ou mesmo cidades que conectam rodovias, e assim por diante.

De acordo com Lucchesi (1979), grafo é um conjunto de vértices representados por pontos ligados às arestas representadas por linhas, que fazem as ligações entre os pontos, esse conjunto pode ser representado por diagramas. A Figura 1, a seguir, apresenta um exemplo de grafo.

Figura 1 – Representação de um grafo

Fonte: Elaboração dos próprios autores

A Figura 1 exemplifica um grafo simples por meio de um diagrama. Os pontos (1, 2, 3 e 4) representam os vértices, sendo o ponto 1 a origem e o ponto 4 o destino. As setas que fazem a ligação de um ponto para outro representam as arestas, e as letras (a, b, c, d) representam as distâncias entre esses pontos. Neste exemplo, existem dois caminhos possíveis até o ponto 4, denominado de destino, um deles é o caminho 1-2-4 e o outro 1-3-4, sendo os pontos 2 e 3 os pontos intermediários que fazem a ligação do ponto 1 ao ponto 4. Desta forma, o propósito do Problema de Caminho mais Curto é encontrar uma rota, cuja somatória das distâncias entre os vértices seja a menor possível.

Segundo Lachtermacher (2007), a modelagem matemática de um Problema de Caminho mais Curto terá variáveis binárias, se o valor da variável foi igual a 1, significa que aquele trecho deve ser percorrido. De forma inversa, se o valor da variável for igual a 0, o trecho de um ponto ao outro não deve ser utilizada.

Segundo Hillier (2006), a essência do procedimento de resolução do problema é identificar sucessivamente a partir da origem o caminho mais curto para cada um dos nós da rede na ordem ascendente de suas distancias (mais curtas) e, assim, solucionar o problema quando o nó de destino é atingido. A resolução do Problema de Caminho mais Curto pode ser realizado através da modelagem matemática de um problema de programação linear e ser resolvido por softwares computacionais como o Software LINDO.

2.3. Software LINDO

Segundo Oliveira et al (2015), o software LINDO (Linear, Interactive and Discrete Optmizer), foi projetado para solucionar problemas lineares, quadráticos e de programação inteira. De acordo com Almeida, Martins e Silva (2013), esse software foi desenvolvido pelo Lindo Systems Inc., de Chicago, EUA, possuindo capacidade de resolver problemas com até 100.000 variáveis.

De acordo com Souza (2004), o modelo matemático no software LINDO deverá conter os seguintes itens:

- Função objetivo: Deve-se iniciar com os comandos “Max” para maximizar ou “Min” para minimizar;
- Sujeito a: Representado por “st” que indica as restrições do problema;
- Restrições: Os fatores limitantes do problema estudado;
- Comando “end”: Indica a finalização do modelo.

Para Oliveira et al (2015), o LINDO é considerado uma das melhores ferramentas de resolução de modelos de otimização, ele maximiza os lucros e minimiza os custos nos problemas constantes de uma empresa, tais como, transportes, planejamento da produção, entre outros. Seu resultado é confiável e aceitável em situações simples e complexas.

3. Metodologia

Os métodos de pesquisa adotados foram o estudo de caso e a pesquisa experimental. A escolha pelo estudo de caso deve-se ao objetivo da realização do trabalho, sendo a determinação do caminho mais curto de uma loja a um depósito situados na cidade de Catalão, Goiás. Devido à abordagem quantitativa e a utilização de modelagem matemática, escolheu-se a pesquisa experimental.

O presente estudo é desenvolvido em três etapas. Na primeira etapa, é realizado o levantamento de informações referentes às possibilidades de rotas e distâncias do ponto de origem ao ponto de destino. Em seguida, é elaborado o modelo matemático de programação linear, e por fim, através da resolução do modelo matemático no software LINDO (versão demo 6.1), é realizada a análise do relatório obtido.

4. Solução proposta

4.1. O problema a ser analisado: Caminho mais curto entre uma loja e um depósito

a) Formulação do problema e dados

O presente estudo consiste em definir a melhor rota para um motorista que transporta eletrodomésticos de uma loja da cidade de Catalão, Goiás, de forma a minimizar a distância das coletas e entregas através da utilização do Problema de Caminho mais Curto. Para alcançar esse objetivo, foram analisadas as possíveis rotas que conectam o ponto de origem ao ponto de destino. O Quadro 1, a seguir, apresenta as rotas encontradas.

Quadro 1 – Possíveis rotas encontradas

	Rota 1	**Rota 2**	**Rota 3**
Origem	Avenida Raulina Fonseca Pascoal	Avenida Raulina Fonseca Pascoal	Avenida Raulina Fonseca Pascoal
Localidades intermediárias	Rua Araguaia	Rua Araguaia	Rua Tenente Coronel João Cerqueira Neto
	Rua Elias de Noch	Rua Célio Neto Paranhos	Rua Quatro
Destino	Rua Almery de Paiva	Rua Almery de Paiva	Rua Almery de Paiva

Fonte: Elaboração dos próprios autores

Como observado no Quadro 1, a Avenida Raulina Fonseca Pascoal é o ponto de origem, ou seja, a localização da loja na cidade, a Rua Almery de Paiva é a localização do depósito da loja, e as outras localidades apresentadas, são as ruas intermediárias que fazem a ligação da loja ao depósito. Desta forma, a aplicação do Problema de Caminho mais Curto neste estudo, consiste em determinar as ruas intermediárias, e por sua vez, a rota que resultará no menor caminho.

Depois de identificadas as três rotas possíveis, a avenida e as ruas foram nomeadas com números indicando os nós, para melhorar a visualização no grafo. O Quadro 2, a seguir, exibe essa relação.

Quadro 2 – Nós representando a localização das ruas

N° dos nós	Localização referente
1	Avenida Raulina Fonseca Pascoal
2	Rua Araguaia
3	Rua Tenente Coronel João Cerqueira Neto
4	Rua Elias de Noch
5	Rua Célio Neto Paranhos
6	Rua quatro
7	Rua Almery de Paiva

Fonte: Elaboração dos próprios autores

Feita a associação dos nós com as localidades, o Quadro 1, pode ser melhor representado conforme o Quadro 3, a seguir.

Quadro 3 – Rotas e seus respectivos nós

Rota 1	Rota 2	Rota 3
1	1	1
2	2	3
4	5	6
7	7	7

Fonte: Elaboração dos próprios autores

Como observado no Quadro 3, a primeira alternativa de caminho é dada pela Rota 1, percorrendo os nós: 1-2-4-7, a segunda possibilidade é dada pela Rota 2, percorrendo os nós: 1-2-5-7 e a ultima possibilidade dada pela Rota 3, pelos nós: 1-3-6-7.

Outra informação relevante para a elaboração do modelo matemático, diz respeito, as distâncias de um nó para outro nó. A Tabela 1, a seguir, apresenta essas distâncias em metros.

Tabela 1 – Distância entre os nós

Do nó	Para o nó	Distância (m)
1	2	220
2	4	650
4	7	500
2	5	900
5	7	400
1	3	1500
3	6	500
6	7	400

Fonte: Google maps

Assim, o diagrama de grafo para o Problema de Caminho mais Curto aplicado neste estudo, pode ser visualizado na Figura 2, a seguir.

Figura 2 – Diagrama de grafo para o problema em estudo

Fonte: Elaboração dos próprios autores

b) Elaboração do modelo matemático

O modelo matemático foi construído para o tratamento da programação linear. Foram definidas as variáveis de decisão da seguinte forma:

x_{12} - Segmento da loja a Rua Araguaia

x_{13} - Segmento da loja a Rua Tenente Coronel João Cerqueira Neto

x_{24} - Segmento da Rua Araguaia a Rua Elias de Noch

x_{25} - Segmento da Rua Araguaia a Rua Célio Neto Paranhos

x_{36} - Segmento da Rua Tenente Coronel João Cerqueira Neto a Rua Quatro

x_{47} - Segmento da Rua Elias de Noch ao Depósito

x_{57} - Segmento da Rua Célio Neto Paranhos ao Depósito

x_{67} - Segmento da Rua Quatro ao Depósito

As variáveis de decisão representam a combinação das localizações intermediárias que se deseja descobrir e que resultará na rota de menor caminho. Portanto, são essas localizações procuradas que darão a solução do problema. Considerando as distâncias entre os nós apresentados na Tabela 1, a função objetivo é assim apresentada:

Minimizar: $Z = 220x_{12} + 1500x_{13} + 650x_{24} + 900x_{25} + 500x_{36} + 500x_{47} + 400x_{57} + 400x_{67}$

A primeira limitação do modelo matemático foi dada pela loja, que restringiu o número de veículos destinados ao depósito. Desta forma, para coletar os produtos no depósito, a loja tem disponível na garagem um veículo, assim, definiu-se que a oferta da loja é de um veículo e a demanda do depósito é referente a este veículo. No modelo matemático essa definição é apresentada da seguinte forma: (-1) para a oferta da loja, indicando que o veículo foi conduzido para o depósito, e (+1) para a demanda, indicando que o veículo que saiu da loja chegará ao depósito. Essas duas restrições são indicadas nos nós 1 e 7, ou nós de origem e destino, respectivamente.

Como o veículo desloca-se da loja e parte diretamente para o depósito sem parada em outros locais, os nós (2, 3, 4, 5 e 6), dispõem de demandas e ofertas iguais à zero, apontando que o veículo somente irá cruzar esses caminhos. A restrição adicional refere-se a números não negativos, destacando que os resultados devem ser maiores que 0. Desta forma, as restrições de fluxo podem ser matematicamente representadas por:

$- x_{12} - x_{13} = -1$	Nó 1: Restrição da oferta
$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$	Nó 2
$x_{13} - x_{36} = 0$	Nó 3
$x_{24} - x_{47} = 0$	Nó 4
$x_{25} - x_{57} = 0$	Nó 5
$x_{36} - x_{67} = 0$	Nó 6
$x_{47} + x_{57} + x_{67} = +1$	Nó 7: Restrição da demanda
$x_{12}; x_{13}; x_{24}; x_{25}; x_{36}; x_{47}; x_{57}; x_{67} \geq 0$	Números não negativos

A Figura 3, a seguir, apresenta a aplicação do modelo matemático no software LINDO, que retornou os resultados apresentados na próxima seção.

Figura 3 – Modelagem matemática reproduzida no software

Fonte: Software LINDO

4.2. Resultados e discussões

Definida a modelagem matemática, a etapa seguinte da pesquisa foi solucioná-la utilizando o Software LINDO. Para a leitura do relatório apresentado na Figura 4 a seguir, deve-se estar atento aos seguintes pontos:

O resultado 1 no campo “value”, indica o caminho no qual o veículo deve passar em seu trajeto. Por exemplo, no caminho “x_{12}” apresentado no campo “variable”, 1 é o ponto de partida e 2 o ponto de destino, ou seja, “x_{12}” representa que o veículo está saindo do ponto 1 e dirigindo-se ao ponto 2, e assim sucessivamente.

O campo “objective function value” refere-se à distância total que foi percorrida, sendo a solução ótima para o modelo, encontrada pelo LINDO.

Figura 4 – Relatório obtido pela resolução

Fonte: Software LINDO

Assim, com base nos resultados apresentados, a solução ótima para a operação apresentada, no tocante do trajeto com menor distância pode ser demonstrada através da Figura 5 a seguir, na qual se consegue atingir uma rota com total de 1370 metros a serem percorridos.

Figura 5 – Rota ótima

Fonte: Elaboração dos próprios autores

Observa-se assim, que a Rota 1 foi a escolhida, passando pelos nós 1-2-4-7 do diagrama de grafo.

5. Considerações finais

O presente estudo atestou a possibilidade da aplicação de técnicas da pesquisa operacional em problemas de otimização de rotas. Destaca-se como tópicos chaves para realização deste estudo, a pesquisa operacional, programação linear e o funcionamento do software LINDO.

O estudo de caso foi realizado para a obtenção de dados claros e objetivos sobre como o motorista da loja estabelece suas rotas. Assim, foram levantados dados referentes a um dia de coleta e entrega realizada pelo motorista, de forma que o mesmo estabeleceu sua rota de acordo com seu conhecimento adquirido após anos de experiência.

As técnicas de pesquisa operacional e programação linear foram aplicadas, os dados obtidos foram modelados de acordo com as técnicas do problema de caminho mais curto e o problema foi testado utilizado o software LINDO, que encontrou a solução ótima para a problemática apresentada.

Após a solução encontrada, notou-se que a rota ótima para este caso é a mesma utilizada pelo motorista, de forma que a partir da realização deste estudo, esta técnica é validada por questões matemáticas, que comprova que esse trajeto é o melhor para realização deste serviço de coleta e entrega da loja.

Por fim, por meio da realização do presente estudo, observou-se que a utilização da pesquisa operacional e programação linear no software LINDO são capazes de solucionar os modelos matemáticos propostos de forma viável, desta forma, recomenda-se sua utilização sempre que necessário.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. de J.; MARTINS, G. A. de S.; SILVA, W. G da. Otimização de processos utilizando a programação linear. **Revista Enciclopédia Biosfera**, Goiânia, v.9, n.16, Páginas 1-13, jun-jul 2013.

ANDRADE, E. L. **Introdução à pesquisa operacional**: métodos e modelos para a análise de decisão. 3.ed. -. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e científicos, 2004, 192 p.

COLIN, E. C. **Pesquisa operacional**: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas. Rio de Janeiro: LTC, 2007, 501 p.

DAFT, Richard. **Administração.** Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos. Editora S.A.: 1999.

EHRLICH, Pierre Jacques. **Pesquisa operacional:** curso introdutório. São Paulo: Atlas, 1991.

GOMES, F. A. M.; ALMEIDA, A. T. de. **Tomada de Decisão Gerencial**: Enfoque Multicritério. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

HILLIER, F. S. **Introdução a Pesquisa Operacional.** 8° ed São Paulo. 2006, 366 -368 p.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões:** Modelagem em Excel. 3° ed. Rio de Janeiro. 2007, 142 -144 p.

LUCCHESI, C. L. **Introdução à teoria dos grafos**. Rio de Janeiro: Instituto de matemática pura e aplicada. 1979, 152 p.

MARINS, F. A. S. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró - Reitoria de Graduação, 2011. 176 p.

MEDEIROS, D. D. de. RAMOS, F. S. Gestão Industrial. Recife: Editora Universitária, 1994.

MOREIRA, D. A. **Pesquisa operacional:** curso introdutório. São Paulo: Thomson Learning, 2007, 356 p.

OLIVEIRA, I. H. I de. et al. Utilização da pesquisa operacional para otimização de rotas de um motorista autônomo na região de São Paulo. In: SIMPÓSIO DE EXCELÊNCIA EM GESTÃO E TECNOLOGIA, 12., Resende - RJ, 2015. **Anais…** Resende. . 13 p.

PINTO, D. C; SCHRAMM, F. Otimização do planejamento da produção de uma indústria de calçados. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 25, 2005, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: 2005. p. 1-8.

PIZZOLATO, N. D.; GANDOLPHO, A. A. **Técnicas de Otimização**. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 225 p.

RAMALHETE, M.; GUERREIRO, J.; MAGALHÃES, A. **Programação Linear**, v.1, Portugal: McGraw-Hill, 1985.

SILVA, E. D. **A otimização de problemas de caminho mais curto entre dois pontos em uma rota, utilizando algoritmos baseados em grafos.** São Mateus, 2012. 60 p.

SOUZA, J. F. M. Software de Otimização: Manual de Referência. Ouro Preto, 2004.