ANTONIO GOMES DA SILVA

SISTEMAS LÓGICOS NÃO ALÉTICOS

UMA INTRODUÇÃO ÀS LÓGICAS PARACONSISTENTES E PARACOMPLETAS

EDUFCG

Antonio Gomes da Silva

Sistemas Lógicos Não Aléticos

Uma introdução às lógicas paraconsistentes e paracompletas

EDUFCG
Campina Grande - PB
2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586s Silva, Antonio Gomes da.
Sistemas lógicos não aléticos : uma introdução ás lógicas paraconsistentes e paracompletas / Antonio Gomes da Silva. - 1. ed. - Campina Grande: EDUFCG, 2017.
155 p.

ISBN 978-85- 8001-216-3
Referências.

1. Filosofia. 2. Lógica. I. Título.

CDU 1

EDITORA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE - EDUFCG
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE – UFCG
editora@ufcg.edu.br

Para
Maria Eunice,

minha mãe,

e

Laura Eunice,

minha filha.

Aos professores

Elias Humberto Alves (em memória)
Carlos Alberto Lungarzo
Ana Lêda de Araújo
Maria Vilma Fernandes de Lucena
Matias Francisco Dias

a minha gratidão e minha sincera estima
pelo quanto contribuíram
à minha formação acadêmica e pessoal.

A meu pai, em memória, e à minha mãe,
meu agradecimento mais íntimo.

Aos professores Roberto Lima de Souza
e José Eduardo de Almeida Moura,
a minha gratidão
por me haverem iniciado e estimulado
ao estudo da Lógica.

Sumário

Prefácio

por Eberth Eleutério dos Santos[1]

Campina Grande, julho de 2014

Por mais de 20 séculos, a explicitação de uma estrutura argumentativa para o discurso científico se consolidou como uma das tarefas mais primordiais do que conhecemos pelo nome de *Razão Ocidental*. Esta assumiu, desde o início, um papel autorregulativo, cujo resultado mais fundamental encarnou a forma lógico-filosófica no interior da qual localizamos as primeiras estruturas inferenciais e que passamos a perceber como as formas canônicas do pensamento científico de raiz ocidental. Exemplos de tais formas canônicas vão desde o poema de Parmênides "Sobre a Natureza", passando pelos diálogos platônicos como "O sofista", "Parmênides" e "Filebo", até os escritos aristotélicos como "As categorias" ou "Os analíticos". Na matemática, Euclides se tornou um dos paradigmas de estrutura argumentativa com "Os elementos".

---

[1] Doutor em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professor e pesquisador da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG).

Ainda que, de um ponto de vista amplo, um pensamento sistemático e matematicamente estruturado já se mostrasse bastante presente e tivesse sua importância amplamente reconhecida desde os antigos impérios do oriente, como Egito, Pérsia, China, entre outros, este se atrelava a atividades práticas muito especializadas, tais como a astronomia, a agronomia, a engenharia, a arquitetura, etc., esgotando-se quase que completamente na obtenção dos produtos dessas artes. Assim, somente a partir do século VI a.C., na região da Jônia, correspondendo à fatia grega da Ásia Menor, estabeleceu-se a coalizão de condições iniciais – geográficas, econômicas, políticas e culturais – para o florescimento de um processo civilizatório técnico e, ao mesmo tempo, aberto para uma compreensão puramente conceitual e logicamente organizada da *natureza*.

O amadurecimento dessa *Weltanschauung,* dita tipicamente grega, pode ser melhor e mais diretamente observado nos registros atribuídos àqueles que se lançaram na construção de uma nova compreensão do mundo por meio de um pensamento simultaneamente lógico e ontológico. Esses primeiros desbravadores do conceito reconfiguraram de maneira icônica, por assim dizer, as fronteiras inteligíveis do mundo, deslocando seu eixo interpretativo para a problematização da origem (os princípios), da estrutura (os elementos) e da regulação (as relações), simultaneamente abandonando sua configuração marcadamente mítica.

Assim, esses desbravadores do pensamento, a um só tempo lógico-filosófico-científico, basearam-se na noção de uma *ordem fundante*, por vezes imanente por vezes transcendente, da própria natureza, mas que, nem por isso, remetia imediatamente a qualquer ordenação mítica. De fato, uma das marcas distintivas dessa revolução que se instaurava no interior do pensamento filosófico, lógico e matemático se denunciava através do paulatino abandono de toda intencionalidade divina que antes se entrelaçava imediatamente com a própria essência da natureza, projetando-a instantaneamente para além de toda racionalidade humana. Esta intencionalidade puramente divina cedeu lugar a uma estrutura impessoal denominada *Kósmos* que, por sua vez, se caracterizaria especialmente pela autonomia de seus ordenamentos internos quase mecânicos. Para utilizar uma acepção contemporânea que não deixa de fazer referência ao sentido mais radical da palavra: "Kósmos é o ser-homem no *como* de uma mentalidade afastada de Deus"[2]. E assim vemos o surgimento das muitas teorias cosmológicas.

Basicamente, essas teorias cosmológicas (cosmogônicas) buscavam apresentar o *princípio* fundamental (*Arkhé*)[3], chave da inteligibilidade do mundo, através da escolha dos elementos que constituíam toda a realidade (a existência efetiva da natureza) e que eram expressos por meio de uma unidade ou de uma multiplicidade conceitual. Toda efetiva e maleável concretude do *vir a ser*, a totalidade do *real*, seria tributária dessa unidade ou multiplicidade conceitual, absolutamente impessoal, portadora e doadora de ordem e significado à totalidade da natureza. Por sua vez, a natureza se manifestaria e se identificaria originariamente com este princípio básico, sendo ela própria sua tradução fenomênica. A aparente

---

[2] HEIDEGGER. Sobre a essência do fundamento. 1973, p.306.
[3] Cf. ARISTÓTELES, 2005, Livros A (Capítulos II-X) e D (Capítulo I).

desordem (*Kaos*) e imprevisibilidade dos fenômenos naturais seriam apenas o reflexo da incompreensão desse princípio ordenador impessoal.

A estratégia adotada por esses primeiros investigadores era a da observação atenta e a da formulação de proposições purificadas, tanto quanto fosse possível, dos elementos míticos e místicos que, em geral, atribuíam uma intencionalidade imanente ao mundo e que terminavam por obscurecer o fenomênico. Desta feita, essa reorganização do pensamento grego que se via, agora, às voltas com os elementos de uma interpretação natural dos fenômenos implicou as condições lógicas e epistemológicas para o abandono do sobrenatural. Inversamente, o abandono do sobrenatural contribuiu para a constituição dessa nova visão naturalizante. Vemos, a partir de então, o nascimento de uma *Filosofia física*, uma *Filosofia da natureza*, que cumpriria o papel de assentar os conceitos de *Ser* e de *Movimento*.

A filosofia realiza, então, seus movimentos no sentido do escrutínio abstrato da *natureza*. Como resultado, a filosofia passa, desde então, a ser entendida como uma descrição de uma estrutura eminentemente física, ainda que não absolutamente material, cujo cerne deve conter algum tipo de relação causal, de ordem fundamentalmente conceitual e, por isso mesmo, inconciliável com o antigo animismo imanente, promotor das formas antropomorfizadas de descrição da realidade representadas pelas diversas classes de divindades.

A *natureza* passou, a partir daí, por um processo de *desantropoformização* promovido pela cristalização de um discurso cada vez mais sedimentado na determinação de seus princípios puramente conceituais, ou lógico-filosóficos. Trata-se aqui de um movimento de condicionamento bilateral, por meio do qual a Razão descortina o mundo através da aplicação extensiva de conceitos e regras lógicas; ato contínuo, a Razão descortina a si mesma, na medida em que se estabelece como única fonte interpretativa confiável da estrutura lógico-conceitual do mundo. Razão e *natureza* se projetam uma sobre a outra, como espelhos colocados frente a frente. A natureza se torna a imagem especular da Razão e esta, por sua vez, torna-se capaz de olhar para si mesma, assim refletida como natureza.

As cosmologias (cosmogonias) dos primeiros filósofos representam os primeiros reflexos dessa *ordem universal natural* que, em última instância, é a própria ordem da Razão. A natureza é a imagem projetada da Razão ordenadora traduzida aqui como uma estrutura impessoal e, por isso, completamente interpretável em proposições originais, precisas, potentes e invulgares; invulgares na medida de sua originalidade, precisão e alcance: originais em relação ao seu conteúdo, precisas em relação ao seu objeto e potentes em relação ao seu alcance.

O caminho para a compreensão da *natureza* era aquele mesmo que conduzia para a obtenção das formas necessárias de regulação do próprio pensamento, por meio do estabelecimento desses princípios por vezes lógicos, por vezes ontológicos. Todo o esforço da razão se concentrou na tentativa de exaurir as possibilidades do próprio discurso lógico, até então desconhecido e inexplorado. Assim, a metafísica, a física, a ética e a lógica se tornaram as legítimas herdeiras dessa metamorfose por que passou a concepção originariamente mítica da *natureza* em imagem da Razão reguladora.

Por este mesmo motivo, de início, os pensamentos metafísico, ético, lógico e físico se intercomunicavam livremente e com muita facilidade. Somente com o desenvolvimento dos conceitos próprios a cada um é que seus respectivos territórios puderam ser demarcados, de modo a que um dia pudessem pretender suas devidas emancipações por meio do assentamento de constituições próprias. Mas, desde o princípio, já havia a percepção de que algo era inseparável de quaisquer formulações racionais, a saber, as regras sobre as quais estas deveriam ser soerguidas. Assim, a lógica, como fiel depositária dessas regras, assumiu um lugar de destaque, tornando-se a pedra fundamental do edifício da racionalidade e passando a figurar como ramo específico do conhecimento, ganhando assim identidade e autonomia como objeto de investigação.

E foi no final do século XIX que um pensamento sistematicamente formalizador começou a ser efetivamente constituído a partir dos trabalhos de Frege, dando assim um novo impulso investigativo à lógica. Em meio a esse novo impulso formalizador da lógica, surge, a partir do início do século XX, a inovação introduzida pelo pensamento da oposição e da negatividade do polonês Jan Łukasiewicz e do russo Nicolai Vasiliev com trabalhos que se pautavam pela relativização dos princípios da lógica clássica (aristotélica), dando assim o primeiro passo para a construção das chamadas *lógicas não clássicas*.

De início, essa nova lógica foi chamada por alguns de *Lógica Imaginária*, em referência à *Geometria Imaginária* de Bolyai e Lobachevsky. Mas é importante que se registre que nem Łukasiewicz nem Vasiliev realizaram um trabalho sistemático de formalização de suas novas propostas para a lógica. Este trabalho só teve início com Stanislaw Jaskowski que, em 1948, obteve um sistema no qual a contradição poderia ser aceita em seu interior sem que isso implicasse sua trivialização, isto é, a contradição no sistema de Jaskowski não permitia deduzir todas as proposições da linguagem no próprio sistema. Em suma, essas lógicas ditas *não clássicas* permitiam vislumbrar uma forma de raciocínio na qual a contradição poderia ser incorporada pelos sistemas formais. Elas permitiam considerar de maneira racional e formal teorias que comportavam a contradição sem que, por isso, o sistema viesse a desmoronar como necessariamente ocorre quando tratados pelas lógicas ditas clássicas.

A consequência disso foi uma verdadeira revolução no interior da lógica, uma vez que esta passava então a adotar como válida uma abordagem até então tida como impossível. E foi a partir de 1954 que o brasileiro Newton Carneiro da Costa forneceu uma formalização da lógica paraconsistente (C_1, C_2, ..., C_n), permitindo a sua aplicação em áreas correlatas como a matemática e a computação.

Para sermos mais claros a esse respeito, consideremos os princípios de identidade, de terceiro excluído e de não contradição. O princípio de identidade enuncia que $A \equiv A$ – que se lê "A se, e somente se, A". Isto significa afirmar que toda e qualquer sentença é equivalente a si mesma. O princípio de terceiro excluído enuncia que $A \vee \neg A$ – que se lê "A ou $não - A$". Isto é, dada uma sentença A qualquer, essa sentença é afirmada ou é negada – e se exclui qualquer outra possibilidade. O princípio de não contradição afirma que $\neg(A \wedge \neg A)$ – que se lê "não ocorre A e $não - A$". Isto significa que, dada uma sentença A qualquer, não ocorre de se afirmar e negar A – ao mesmo tempo e sob o mesmo aspecto, como diz Aristóteles.

Em resumo, a Lógica Clássica – tanto a aristotélica quanto a moderna, de origem fregeana – admite a validade irrestrita e simultânea dos três princípios de identidade, de terceiro excluído e de não contradição. As Lógicas Não Clássicas em geral, quando rivais da Lógica Clássica, partem exatamente do enfraquecimento e da restrição a algum ou alguns desses princípios.

Assim, **teorias paraconsistentes** não triviais são aquelas cujo cálculo lógico subjacente comporta a negação da validade irrestrita do Princípio de Não Contradição. **Teorias paracompletas** não triviais são aquelas cujo cálculo lógico subjacente comporta a negação da validade irrestrita do Princípio do Terceiro Excluído. **Teorias não aléticas** não triviais, por fim, são aquelas cujo cálculo lógico subjacente comporta, simultaneamente, a negação da validade irrestrita do Princípio de Não Contradição e a negação da validade irrestrita do Princípio do Terceiro Excluído.

Como acabamos de observar, a exemplo das geometrias não euclidianas que passaram a não assumir sem restrição alguns dos postulados da geometria clássica, as lógicas não clássicas não assumem de maneira irrestrita os princípios fundamentais da lógica clássica. Em termos filosóficos, isso talvez venha a significar que estaríamos diante de uma nova racionalidade que permita a contradição como uma descrição possível para o mundo dos fenômenos e, assim, obter uma imagem da natureza cientificamente mais *complexa* que a que vínhamos obtendo, quando a lógica clássica reinava solitária como único e último parâmetro de comensurabilidade entre natureza e racionalidade.

Referências

ARISTÓTELES. **Metafísica** – texto grego com tradução e comentário de Giovanni Reale. Tradução de Marcelo Perine. 2. ed. v. I – III. São Paulo: Loyola, 2005.

______. **Órganon:** Categorias, Da Interpretação, Analíticos Anteriores, Analíticos Posteriores, Tópicos, Refutações Sofisticas. Tradução, textos adicionais e notas de Edson Bini. 2. ed. Bauru: EDIPRO, 2010.

ARRUDA, A. **Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic**. In: PRIEST; ROUTLEY; NORMAN. 1989: 99-130.

BARNES, J. **Filósofos Pré-Socráticos**. Trad. Julio Fischer. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

CORNFORD, F. M. **Antes e depois de Sócrates**. Trad. Valter Lellis Siqueira. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

D'OTTAVIANO, I. M. L. A lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: ÉVORA, F. (org.). **Século XIX**: O nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Universidade Estadual de Campinas/CLE, v. ll, 1992. p. 65-93. (Coleção CLE)

_____. I. M. L.; FEITOSA, H. de A. **História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas**, Coleção História da Matemática para Professores, Sérgio Nobre (org.), Sociedade Brasileira de História da Matemática (Unesp – Rio Claro). Abril 2003.

DA COSTA, N. C. A. **The Philosophical Import of Paraconsistent Logic**. Journal of Non-Classic Logic 1: 1–19. 1982.

_____. **Logiques classiques et non classiques**. Paris: Masson. 1997.

_____. O ambiente matemático no século XIX e o lógico do século XX. In: ÉVORA. F. (org.). **Século XIX**: O nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Universidade Estadual de Campinas/CLE, v. ll, p. 59-65. (Coleção CLE)

HEIDEGGER, M. **Sobre a essência do fundamento**. Trad. Ernildo Stein. São Paulo: Abril Cultural, 1973. (Col. Os Pensadores)

Sistemas Lógicos Não Aléticos

Uma introdução às lógicas paraconsistentes e paracompletas

PARTE I

Uma Introdução Histórica aos Sistemas Lógicos Não Aléticos

Uma Introdução Histórica aos Sistemas Lógicos Não Aléticos

Teorias paraconsistentes não triviais são aquelas cujo cálculo lógico subjacente comporta a negação da validade irrestrita do Princípio de Não Contradição.

Teorias paracompletas são aquelas cujo cálculo lógico subjacente comporta a negação da validade irrestrita do Princípio do Terceiro Excluído.

Teorias não aléticas são aquelas cujo cálculo lógico subjacente comporta, simultaneamente, a negação da validade irrestrita do Princípio de Não Contradição e a negação da validade irrestrita do Princípio do Terceiro Excluído.

Os sistemas lógicos não aléticos encontram contato histórico com as abordagens de teorias inconsistentes não triviais. Forma possível de situá-los historicamente, portanto, é relacioná-los à história de tais abordagens.

Poderíamos fazer referência a este respeito, sem dúvida, à longa tradição das tematizações da noção de contradição, desde Heráclito até Hegel, Marx e os materialistas dialéticos. É suficiente, no entanto, para os limites deste estudo, remontar a Jan Łukasiewicz (1876-1956) e à linha de pesquisa que dele se originou.

Em artigo intitulado "Sobre o Princípio de Contradição em Aristóteles", publicado em 1910, Łukasiewicz argumenta em dupla direção. Primeiro, ele mostra que são débeis os argumentos aristotélicos em apoio ao Princípio de Não Contradição. De acordo com o que afirma, Aristóteles apresentou para este princípio uma formulação ontológica ("*É impossível que a mesma coisa pertença e não pertença à mesma coisa ao mesmo tempo e sob o mesmo aspecto*"), uma formulação lógica ("*O mais certo de todos os princípios básicos é que propriedades contraditórias não são verdadeiras ao mesmo tempo*") e uma formulação psicológica ("*Não podemos acreditar que a mesma coisa possa ser e não ser*"). "Nenhuma das três formulações do princípio de contradição", diz Łukasiewicz, "é idêntica a uma das outras em significado" e, embora Aristóteles tenha conseguido tornar equivalentes as formulações lógica e ontológica, a estas não conseguiu relacionar adequadamente a formulação psicológica. Numa tentativa involuntária de dar demonstração para este princípio, uma vez que proclamara a sua não demonstrabilidade, Aristóteles empenhou-se em estabelecer, tão somente, "a impossibilidade da suposição segundo a qual todo objeto é contraditório".

Em suma, afirma Łukasiewicz, não existe base lógica para a adoção do Princípio de Não Contradição.

Argumenta:

> 1) O Princípio de Contradição não pode ser provado proclamando-o diretamente evidente. Porque:
>   a) Evidência não parece ser um critério permissível de verdade: isto resulta que proposições falsas igualmente são tidas como evidentes.
>   b) O princípio de contradição sequer parece evidente para todos.
>
> 2) O Princípio de Contradição não pode ser provado por colocação

acima de cada lei natural determinada pela 'organização física' do homem. Porque:

a) É possível determinar proposições falsas por sua organização física.
b) É questionável se o princípio de contradição pode ser validado como uma lei determinada pela organização física do homem.

3) O Princípio de Contradição não pode ser provado sobre a base da definição de sentenças ou negações. Porque:
   a) Se aceitarmos que a negação " A não é B" significa a falsidade da afirmação "A é B", então o princípio de contradição não é daí deduzido.
   b) Naturalmente, prefere-se ao contrário evitar designar uma

> e a mesma proposição por verdadeiro e falso, outra definição de falsidade pode ser estabelecida. A noção básica de falsidade é [...] que proposições falsas correspondem a nada objetivo [...] O princípio de contradição de nenhuma maneira pode ser derivado desta definição de falsidade[1].

Por outro lado, conjectura Łukasiewicz, "uma revisão fundamental das leis básicas da lógica de Aristóteles forçaria talvez a direção para novos sistemas lógicos não aristotélicos". Admite, inclusive, a possibilidade de que teorias contraditórias não triviais sejam verdadeiras.

Desse modo, abre Łukasiewicz caminho para as lógicas não clássicas em geral, tendo, em 1930, introduzido o primeiro sistema lógico polivalente.

---

[1] ŁUKASIEWICZ, Jan. **On the principle of contradiction in Aristotle**. p. 505-506.

Como se põe evidenciado pela exposição precedente, as pesquisas de Łukasiewicz deram origem a algumas vertentes de lógicas não clássicas pelo duplo movimento de revisão fundamental e de crítica à lógica aristotélica. Seu universo e paradigma de conjecturas permanecem, no entanto, claramente aristotélicos.

A partir da década de 1930 e, notadamente, da década de 1940, porém, outra forte motivação põe-se a estimular o desenvolvimento das lógicas não clássicas: o tratamento lógico das contradições, isto é, de teorias inconsistentes, porém não triviais.

O primeiro a tomar a si esse novo objetivo é o russo Bochvar, que, em 1939, introduz um cálculo trivalente para a análise de contradições.

A partir da década de 1940, surgem os cálculos inconsistentes, mas não triviais, no sentido lógico-matemático do termo.

Em 1948-1949, o polonês Stanislaw Jaśkowiski constrói o primeiro sistema lógico paraconsistente. Suas principais motivações, segundo a Prof.ª Ayda Arruda, são:

a) O problema da sistematização de teorias que contêm contradições;

b) O estudo de teorias onde existem contradições causadas pela vaguedade;
c) O estudo direto de algumas teorias empíricas cujos postulados ou pressupostos básicos são contraditórios[2].

Para satisfazer tais motivos, dispõe-se Jaśkowiski a elaborar um cálculo proposicional com as seguintes propriedades:

a) Quando aplicado a sistemas contraditórios, não acarreta a sua trivialização;
b) É suficientemente rico para permitir inferências práticas;
c) Tem uma justificação intuitiva[3].

Propõe, então, como satisfação a tais exigências, o cálculo proposicional D_2, conhecido como lógica discursiva.

---

[2] ARRUDA, A. I. **Aspects of the historical development of paraconsistent logic**, *passim*.
[3] D'OTTAVIANO, I. M. L. **On the development of paraconsistent logic and da Costa's work.** p. 101.

Lógica discursiva, diz a Prof.ª D'Ottaviano, é entendida como uma formalização da lógica do discurso. Os termos vêm deliberar que as teses avançadas por diferentes participantes em uma discussão, contendo inclusive termos cujo significado é vago, são combinadas à maneira de asserções em um sistema dedutivo; suas consequências não refletem uma opinião uniforme e torna-se necessário interpretá-las intuitivamente como se elas fossem precedidas pelo símbolo Pos, que significa "é possível que". Uma fórmula é considerada verdadeira se, e somente se, é verdadeira de acordo com um certo princípio – o participante na discussão[4].

[4] *Idem*, p. 102.

A partir dos anos 50, vêm à luz as reflexões de Newton C. A. da Costa sobre a importância de teorias contraditórias. Teorias contraditórias, afirma da Costa, não podem ser aprioristicamente excluídas, mas, ao contrário, diretamente abordadas e logicamente tratadas, sob a condição de que o faça com base em lógicas diferentes da Lógica Clássica.

É assim que, em 1958, publica o seu artigo "Uma nota sobre o conceito de contradição", em que propõe um Princípio de Tolerância em Matemática: "Dos pontos de vista sintático e semântico, toda teoria é admissível, visto que não é trivial".

Os anos 60 conhecem o início do completo desenvolvimento de suas ideias, com a elaboração e publicação de suas hierarquias-suporte de sistemas inconsistentes não triviais de 1ª Ordem, destinados à abordagem e ao tratamento de teorias contraditórias.

Uma hierarquia de cálculos proposicionais $C_n, 1 \leq n \leq \omega$, inicialmente elaborada, teve como critério a satisfação das seguintes condições:

a) O princípio de contradição, na forma $\neg(A \wedge \neg A)$, não é válido em geral;
b) De duas premissas contraditórias A e não ¬A, deduzimos uma fórmula qualquer B;
c) Os cálculos proposicionais $C_n, 1 \leq n \leq \omega$ contêm os mais importantes esquemas e regras da lógica clássica compatíveis com as condições (a) e (b)[5].

A partir daí, foram obtidas como extensões as hierarquias C_n^*, $C_n^=$ e D_n, $1 \leq n \leq \omega$, de cálculos de predicados de 1ª ordem, cálculos de predicados de 1ª ordem com igualdade e cálculos de descrições, respectivamente.

Tais hierarquias têm encontrado diversas aplicações. Primeiramente, a uma hierarquia de teorias de conjuntos NF_n, $1 \leq n \leq \omega$, inconsistentes mas, ao que diz D'Ottaviano[6], "aparentemente não triviais". Além disso,

---

[5] *Idem*, p. 104.
[6] *Idem*, *passim*.

têm sido aplicadas essas hierarquias de da Costa à obtenção de resultados algébricos, à teoria de modelos e à Ciência da Computação.

A partir dos anos 70-80, as abordagens de teorias inconsistentes não triviais ganham a denominação genérica de **lógicas paraconsistentes**. Além disso, novos sistemas são gerados[7] pela admissão da negação simultânea da validade irrestrita do Princípio de Não Contradição como da validade irrestrita do Princípio do Terceiro Excluído. Para as lógicas paraconsistentes, de um modo geral, dada uma fórmula A, pode ocorrer que A e sua negação sejam ambas verdadeiras; para as lógicas paracompletas, dada uma fórmula A, pode ocorrer que A e sua negação sejam ambas falsas; enquanto que, para os novos sistemas, ditos não aléticos, dada uma fórmula A, pode ocorrer que A e sua negação sejam ambas verdadeiras ou ambas falsas[8].

---

[7] Conf. ARRUDA, A. I. & ALVES, E. H. **Some remarks on the logic of vagueness** e ARRUDA, A. I. & ALVES, E. H. **A semantical study of some systems of vagueness logic**.
[8] Conf. LOPARIC, A. & COSTA, N. C. A. **Paraconsistency, paracompleteness and valuations**.

Trabalhos foram desenvolvidos apresentando sistemas ao mesmo tempo paraconsistentes e paracompletos. Dispensaremos especial atenção, nos limites deste livro, aos artigos "Some remarks on the logic of vagueness" e "A semantical study of some systems of vagueness logic", de Arruda e Alves[9], os quais desenvolvem, em níveis sintático e semântico, sistemas que caracterizam quatro relações possíveis entre a não validade da Não Contradição e a não validade do Terceiro Excluído.

---

[9] Conf. ARRUDA, A. I. & ALVES, E. H. **Some remarks on the logic of vagueness** e ARRUDA, A. I. & ALVES, E. H. **A semantical study of some systems of vagueness logic**.

Parte II

O Cálculo Proposicional Não Alético

1. Introdução

Introduziremos ao cálculo proposicional não alético pela definição de uma linguagem formal $\mathcal{V}$ e por outras definições gerais.

A definição de uma linguagem formal $\mathcal{V}$ se fará pela introdução de símbolos, fórmulas bem formadas, axiomas e uma regra de inferência.

i. Os Símbolos de $\mathcal{V}$

(a) Conectivos primitivos: $\neg$, $\Rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$

(b) Letras sentenciais: $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, ...

As letras sentenciais $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, ... serão metalinguisticamente representadas, no entanto, pelas letras A, B, C, ..., Z_1, Z_2, ..., Z_n.

(c) Símbolos auxiliares: (,)

Os parênteses serão eliminados sempre que isto não causar confusão.

Def. 1.1: Qualquer sequência finita de símbolos de $\mathcal{V}$ é uma **expressão** de $\mathcal{V}$.

ii. A Gramática de $\mathcal{V}$

Def. 1.2: O conjunto das fórmulas bem formadas (f.b.f.) de $\mathcal{V}$ é o subconjunto das expressões de $\mathcal{V}$, definido pelas seguintes condições:

(a) Todas as letras sentenciais são f.b.f.;

(b) Se A e B são f.b.f., então $\neg A$, $A \Rightarrow B$, $A \wedge B$ e $A \vee B$ são f.b.f.;

(c) Uma expressão é uma f.b.f. somente se obedece às cláusulas (a) ou (b).

iii. Os Axiomas de $\mathcal{V}$

Def. 1.3: Para cada sistema axiomático formal $\mathcal{V}_o$, $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_o$' e $\mathcal{V}_1$' será selecionado um subconjunto das f.b.f. de $\mathcal{V}$, que é precisamente o conjunto dos **axiomas** de $\mathcal{V}$.

iv. A Regra de Inferência de $\mathcal{V}$

Def. 1.4: Dado um conjunto finito $R_1, ..., R_n$, cada R_i é dito ser uma **regra de inferência** se, e somente se, para cada sequência $< A_1, ..., A_j >$ de fórmulas, ocorre que R_i(

A_1, ..., A_j) é uma (nova) fórmula. Caso isto ocorra, diz-se que essa (nova) fórmula é **consequência direta** do conjunto { A_1, ..., A_j } de fórmulas por força de R_i.

A única regra de inferência de $\mathcal{V}$ é ***modus ponens*** (MP): B é consequência direta de A e A $\Rightarrow$ B. Isto é, A, A $\Rightarrow$ B / B por MP. Observe-se, no entanto, que a regra de inferência nos sistemas axiomáticos formais $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_0'$ e $\mathcal{V}_1'$ será representada pelo Postulado 3.

Def. 1.5: Uma **prova** de uma f.b.f. A é uma sequência $< A_1, ..., A_n >$, em que:

(a) $A_n = A$.

(b) Para cada A_i, onde $1 < i < n$:

1) A_i é um axioma; ou
2) A_i resulta de duas f.b.f. anteriores por força de MP.

Def. 1.6: Um **teorema** é uma f.b.f. que tem uma prova. Se uma f.b.f. A é um teorema, então escrevemos $\vdash$ A.

Def. 1.7: Seja Γ = { B_1, ..., B_n }, em que B_1, ..., B_n são f.b.f. e A é uma f.b.f. qualquer. Dizemos que A é uma consequência de Γ (isto é, que Γ deduz A) se, e somente se, existe uma sequência $< A_1, ..., A_n >$ de f.b.f., tal que:

(a) $A_n = A$

(b) Para cada A_i:

1) A_i é um axioma; ou
2) A_i está em Γ; ou
3) A_i resulta de duas f.b.f. anteriores pela aplicação da regra MP.

Se A é uma consequência de Γ (isto é, Γ deduz A), então escrevemos $\Gamma \vdash A$; cada f.b.f. de Γ é dita ser uma hipótese ou premissa da prova; e a sequência $< A_1, ..., A_n >$ é dita ser uma **dedução** de A a partir de Γ.

Proposição 1.8: As seguintes são propriedades de $\vdash$:
Sejam A e B f.b.f., e Γ e Δ conjuntos de f.b.f. Então:

(a) $A_1, ..., A_n \vdash A_i$, em que $i = 1, ..., n$.

(b) Se A é um axioma, então $\vdash A$.

(c) $\Delta \vdash A$ se, e somente se, $\exists\Gamma$ tal que $\Gamma = \{ A_1, ..., A_n \}$, $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash A$.

(d) Se $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$, então $\Gamma \vdash B$
(Em particular, se $\vdash A$ e $\vdash A \Rightarrow B$, então $\vdash B$).

(e) $\Gamma \vdash A_1, ..., A_n$ e $A_1, ..., A_n \vdash B$, então $\Gamma \vdash B$.

2. Sistema Axiomático Formal $\mathcal{V}_o$

Este é o sistema correspondente ao caso em que a lei do terceiro excluído e a lei de contradição não são válidas, mas também não são equivalentes. Neste capítulo como nos seguintes, a terminologia e a notação adotadas, e a axiomática de C_o referida, são as de Kleene[1].

2.1. Sintaxe de $\mathcal{V}_o$

Def. 2.1: (a) $A^\circ = \neg(A \wedge \neg A)$

(b) $^\circ A = A \vee \neg A$

(c) $A^+ = A \wedge A$

(d) $\neg^* A = A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ)$

Os postulados de $\mathcal{V}_o$ são os seguintes:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $A, A \Rightarrow B \,/\, B$
4. $A \wedge B \Rightarrow A$
5. $A \wedge B \Rightarrow B$

---

[1] KLEENE, S. C. **Mathematical logic**.

6. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B)$

7. $A \Rightarrow A \vee B$

8. $B \Rightarrow A \vee B$

9. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$

10. $°A \wedge B° \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$

11. $A° \wedge B° \Rightarrow (A \Rightarrow B)° \wedge (A \wedge B)° \wedge (A \vee B)°$

12. $°A \wedge °B \Rightarrow °(A \Rightarrow B) \wedge °(A \wedge B) \wedge °(A \vee B)$

13. $A° \Rightarrow (\neg A)°$

14. $°A \Rightarrow °(\neg A)$

15. $\neg^*\neg^* A \Rightarrow A$

Lema 2.2: $\vdash A \Rightarrow A$ para toda f.b.f. A.

Prova:

Conforme demonstração clássica usual[2].

Proposição 2.3 (Teorema da Dedução): Se Γ é um conjunto de f.b.f. e A e B são f.b.f., e $\Gamma, A \vdash B$, então $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$. Em particular, se $A \vdash B$, então $\vdash A \Rightarrow B$.

Prova:

Conforme demonstração clássica usual[3].

---

[2] MENDELSON, **Introduction to mathematical logic**. p. 30.

[3] *Idem*, p. 30-31.

Proposição 2.4: A negação forte de $\mathcal{V}_o$ ($\neg^*$) tem todas as propriedades da negação clássica.

Prova:

- Todas as propriedades da negação clássica podem ser asseguradas, em $\mathcal{V}_o$, por $\neg^*\neg^*A \Rightarrow A$ e $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg^*B) \Rightarrow \neg^*A$.
- Ora, $\neg^*\neg^*A \Rightarrow A$ é um axioma de $\mathcal{V}_o$.
- Portanto, para garantir que a negação forte de $\mathcal{V}_o$ possui todas as propriedades da negação clássica, basta provar que $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg^*B) \Rightarrow \neg^*A$ é um teorema de $\mathcal{V}_o$.
- Assim:

1.	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg^*B)$	Hip.
2.	A	Hip.
3.	$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg^*B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	P4
4.	$A \Rightarrow B$	1,3/P3
5.	$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg^*B)) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg^*B)$	P5
6.	$A \Rightarrow \neg^*B$	1,5/P3
7.	B	2,4/P3
8.	$A \Rightarrow (B \Rightarrow (\neg B \wedge B^\circ))$	6/Def. 2.1(d)

9.	$B \Rightarrow (\neg B \wedge B°)$	2,8/P3
10.	$\neg B \wedge B°$	7,9/P3
11.	$(\neg B \wedge B°) \Rightarrow \neg B$	P4
12.	$\neg B$	10,11/P3
13.	$(\neg B \wedge B°) \Rightarrow B°$	P5
14.	$B°$	10,13/P3
15.	$A \Rightarrow (A \vee \neg A)$	P7
16.	$A \vee \neg A$	2,15/P3
17.	$°A$	16/Def. 2.1(b)
18.	$°A \wedge B° \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$	P10
19.	$\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$	P1
20.	$A \Rightarrow \neg B$	12,19/P3
21.	$°A \Rightarrow (B° \Rightarrow (°A \wedge B°))$	P6
22.	$B° \Rightarrow (°A \wedge B°)$	17,21/P3
23.	$°A \wedge B°$	14,22/P3
24.	$(°A \wedge B°) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((°A \wedge B°) \wedge (A \Rightarrow B)))$	P6
25.	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((°A \wedge B°) \wedge (A \Rightarrow B))$	23,24/P3
26.	$(°A \wedge B°) \wedge (A \Rightarrow B)$	4,25/P3
27.	$((°A \wedge B°) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((°A \wedge B°) \wedge$ $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)))$	P6
28.	$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((°A \wedge B°) \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B))$	26,27/P3
29.	$(°A \wedge B°) \wedge (A \Rightarrow B)) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$	20,28/P3
30.	$\neg A$	18,29/P3
31.	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A))$	P6

32.	$\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A)$	2,31/P3
33.	$A \wedge \neg A$	30,32/P3
34.	$(A \wedge \neg A) \Rightarrow ((A \wedge \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A))$	P7
35.	$(A \wedge \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A)$	33,34/P3
36.	$^\circ(A \wedge \neg A)$	35/Def. 2.1(b)
37.	$^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow B) \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge \neg A)$	P10
38.	$^\circ(A \wedge \neg A) \Rightarrow (B^\circ \Rightarrow (^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ))$	P6
39.	$B^\circ \Rightarrow (^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ)$	36,38/P3
40.	$^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ$	14,39/P3
41.	$(^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ) \Rightarrow (((A \wedge \neg A) \Rightarrow B) \Rightarrow (^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow B)))$	P6
42.	$((A \wedge \neg A) \Rightarrow B) \Rightarrow (^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow B))$	40,41/P3
43.	$B \Rightarrow ((A \wedge \neg A) \Rightarrow B)$	P1
44.	$(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$	7,43/P3
45.	$^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow B)$	42,44/P3
46.	$(^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow B)) \Rightarrow (((A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow B) \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B)))$	P6
47.	$((A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow B) \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B))$	45,46/P3
48.	$\neg B \Rightarrow ((A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B)$	P1
49.	$(A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B$	12,48/P3
50.	$^\circ(A \wedge \neg A) \wedge B^\circ \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow B) \wedge ((A \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B)$	47,49/P3
51.	$\neg(A \wedge \neg A)$	37,50/P3
52.	A°	51/Def. 2.1(a)

53.	$\neg A \Rightarrow (A^\circ \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ))$	P6
54.	$A^\circ \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ)$	30,53/P3
55.	$\neg A \wedge A^\circ$	52,54/P3
56.	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg^* B), A \vdash \neg A \wedge A^\circ$	1-55
57.	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg^* B) \vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ)$	56/Prop. 2.3
58.	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg^* B) \vdash \neg^* A$	57/Def. 2.1(d)
59.	$\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg^* B) \Rightarrow \neg^* A$	58/Prop. 2.3

$\therefore$ A negação forte de $\mathcal{V}_o$ ($\neg^*$) tem todas as propriedades da negação clássica.

Proposição 2.5: Suponha-se que as fórmulas de $\Gamma \cup \{ F \}$ são fórmulas de C_o (o Cálculo Proposicional Clássico), cujas componentes atômicas são $P_1, ..., P_n$. Se $\Gamma \vdash_{C_o} F$, então $P^+_1, ..., P^+_n, \Gamma \vdash_{\mathcal{V}_o} F$.

Prova:

- Admita-se que as fórmulas de $\Gamma \cup \{ F \}$ são fórmulas de C_o (o cálculo proposicional clássico), cujas componentes atômicas são $P_1, ..., P_n$.
- Seja $\Gamma \vdash_{C_o} F$.
- Então existe uma sequência $\gamma_1, ..., \gamma_n$, tal que:

a) $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma$;

b) $\gamma_n = F$;

c) $\forall \gamma_i$, $1 \leq i \leq n$, $\gamma_i \in \Gamma$, ou

γ_i é axioma de $\mathcal{C}_o$, ou

γ_i resulta de linhas anteriores por uma ou mais aplicações de *modus ponens*.

- Provar, então, que $P^+_1, ..., P^+_n, \Gamma \vdash_{\mathcal{V}_o} F$.
- Assim:

(1) Se ocorre que $P^+_1, ..., P^+_n, \Gamma \vdash_{\mathcal{V}_o} F$, então existe uma sequência $< P^+_1, ..., P^+_n, \gamma_1, ..., \gamma_n >$, tal que:

a) $P^+_1, ..., P^+_n, \gamma_1, ..., \gamma_n \in \{ P^+_1, ..., P^+_n, \Gamma \}$;

b) $\gamma_n = F$;

c) $\forall \gamma_i$, $1 < i < n$, $\gamma_i \in \Gamma$, ou

γ_i é axioma de $\mathcal{V}_o$, ou

γ_i resulta de linhas anteriores por uma ou mais aplicações do Postulado 3.

(2) Se $\gamma_i \in \Gamma_{\mathcal{C}o}$, então $\gamma_i \in \Gamma_{\mathcal{V}o}$, uma vez que o conjunto Γ de hipóteses permanece o mesmo.

(3) Se γ_i é um dos axiomas 1-10 de $\mathcal{C}_o$, então γ_i é um dos axiomas 1-9 ou 15 de $\mathcal{V}_o$, uma vez que é um mesmo o subcálculo para $\mathcal{C}_o$ e $\mathcal{V}_o$.

(4) Se γ_i é o axioma 11 de $\mathcal{C}_o$, então γ_i é da forma $A \vee \neg A$. Ora, supondo-se os P^+_i (sequência de hipóteses clássicas), temos que $\vdash_{\mathcal{V}_o} A \vee \neg A$.

Demonstremos, então, por indução sobre fórmulas:

(4.1) A é uma letra sentencial.

Então A é P^+_i e, por enunciação dado P^+_i, tem-se $°P_i \wedge P_i°$.

Portanto:

(4.1.1) P^+_i	Hip.
(4.1.2) $°P_i \wedge P_i°$	4.1.1/Def. 2.1(c)
(4.1.3) $(°P_i \wedge P_i°) \Rightarrow °P_i$	P. 4
(4.1.4) $°P_i$	4.1.2, 4.1.3/P3
(4.1.5) $P_i \vee \neg P_i$	4.1.4/Def. 2.1(b)

Ora, $P_i \vee \neg P_i$ é $A \vee \neg A$.

Portanto, $P^+_1, ..., P^+_n \vdash_{\mathcal{V}_o} A \vee \neg A$.

(4.2) A é da forma $B * C$, em que $*$ é $\Rightarrow$, $\wedge$ ou $\vee$.

Ora, dispondo-se de P^+_1, ..., P^+_n, obtém-se, facilmente, $°P_i \wedge P_i°$ para qualquer $1 < i < n$. Portanto, pelos postulados 11–12, obtém-se $°(B * C)$ e $(B * C)°$ de maneira usual. Ora, por Def. 2.1(b), $°(B * C)$ é $(B * C) \vee \neg(B * C)$.
Isto é, $A \vee \neg A$.
Portanto, $P^+_1, ..., P^+_n \vdash_{\mathcal{V}_o} A \vee \neg A$.

(4.3) A é da forma $\neg B$.
De maneira análoga à anterior, os postulados 13-14 garantem o resultado $°(\neg A)$.
Logo, por Def. 2.1(b), $(\neg A) \vee \neg(\neg A)$.
Isto é, $A \vee \neg A$.
Portanto, $P^+_1, ..., P^+_n \vdash_{\mathcal{V}_o} A \vee \neg A$.

$\therefore$ Em qualquer caso, $P^+_1, ..., P^+_n \vdash_{\mathcal{V}_o} A \vee \neg A$.

(5) Se γ_i resulta de linhas anteriores por uma ou mais aplicações de *modus ponens* em $\mathcal{C}_o$, então γ_i pode igualmente resultar de linhas anteriores por força de uma ou mais aplicações de *modus ponens* em $\mathcal{V}_o$, uma vez que,

em ambos os casos, esta é uma única e mesma regra, definida em $\mathcal{V}_o$ por P3.

$\therefore$ Em qualquer caso, se $\Gamma \vdash_{C_o} F$, então $P^+_1, \ldots, P^+_n, \Gamma \vdash_{\mathcal{V}_o} F$.

Proposição 2.6: Admita-se ser A uma fórmula de C_o e A*, a fórmula obtida de A pela substituição de $\neg$ por $\neg^*$. Se $\vdash_{C_o}$ A, então $\vdash_{\mathcal{V}_o}$ A*.

Prova:

(1) Seja A uma fórmula de C_o, tal que $\vdash_{C_o}$ A.
(isto é, A tem uma prova em C_o.)

(2) Seja A* uma fórmula de $\mathcal{V}_o$, obtida de A pela substituição de todas as ocorrências de $\neg$ por ocorrências de $\neg^*$.

(3) Ora, pela Proposição 2.4, a negação forte de $\mathcal{V}_o$ tem todas as propriedades da negação clássica.

(4) Portanto, de acordo com (1), (2) e (3), A* tem uma prova em $\mathcal{V}_o$.
(isto é, $\vdash_{\mathcal{V}_o}$ A*.)

Proposição 2.7: Se $\vdash$ A na lógica positiva clássica, então $\vdash$ A em $\mathcal{V}_o$.

Proposição 2.8: Em $\mathcal{V}_o$**,** provamos os seguintes esquemas e regras:

(a) $A \wedge B^\circ \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$

(b) Se $\vdash A$, então $\vdash {}^\circ A$

(c) $A^\circ \wedge {}^\circ B, \neg B \Rightarrow \neg A \vdash A \Rightarrow B$

(d) $A^\circ \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$

(e) $A \wedge \neg A \wedge A^\circ \Rightarrow B$

(f) $A^\circ \vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

(g) ${}^\circ A \vdash {}^\circ(A \wedge \neg A)$

(h) $A \vee (A \Rightarrow B)$

(i) $A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$

(j) $A^+ \Rightarrow (A \ \square\ \neg\neg A)$

(k) $A^\circ \Rightarrow (A \wedge \neg A)^\circ$

(l) $A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B \wedge B^\circ) \Rightarrow \neg A$

(m) $A \Rightarrow (\neg A \vee \neg\neg A)$

(n) $A^\circ, A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

(o) $A^\circ \vdash (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$

(p) $(A \vee \neg A) \vee (A \vee \neg\neg A)$

(q) $A \wedge \neg^* A \Rightarrow B$

Prova:

(a)

1. $A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$	Hip.
2. $(A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow A \wedge B$	P. 4
3. $A \wedge B$	1,2/P. 3
4. $(A \wedge B) \Rightarrow A$	P. 4
5. A	3,4/P. 3
6. $(A \wedge B) \Rightarrow B$	P. 5
7. B	3,6/P. 3
8. $(A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B))$	P. 5
9. $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$	1,8/P. 3
10. $A \Rightarrow (A \vee \neg A)$	P. 7
11. $A \vee \neg A$	5,10/P. 3
12. A	11/Def. 2.1(b)
13. $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$	P. 6
14. $B \Rightarrow (A \wedge B)$	12,13/P. 3
15. $A \wedge B$	7,14/P. 3
16. $A \wedge B \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)))$	P. 6
17. $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B))$	15,16/P. 3
18. $A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)$	9, 17/P. 3
19. $A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$	P. 10
20. $\neg A$	18,19/P. 3
21. $A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \vdash \neg A$	1-20
22. $\vdash A \wedge B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$	21/Prop. 2.3

(b)

1.	$\vdash A$	Hip.
2.	$A \Rightarrow (A \vee \neg A)$	P. 7
3.	$\vdash A \Rightarrow (A \vee \neg A)$	2/Prop. 1.8(b)
4.	$\vdash A \vee \neg A$	1,3/P. 3
5.	$\vdash {}^{\circ}A$	4/Def. 2.1(b)

(d)

1.	A°	Hip.
2.	A	Hip.
3.	${}^{\circ}(\neg A) \wedge A^{\circ} \wedge (\neg A \Rightarrow A) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg\neg A$	P. 10
4.	$A \Rightarrow (A \vee \neg A)$	P. 7
5.	$A \vee \neg A$	2,4/P. 3
6.	${}^{\circ}A$	5/Def. 2.1(b)
7.	${}^{\circ}A \Rightarrow {}^{\circ}(\neg A)$	P. 14
8.	${}^{\circ}(\neg A)$	6,7/P. 3
9.	${}^{\circ}(\neg A) \Rightarrow (A^{\circ} \Rightarrow ({}^{\circ}(\neg A) \wedge A^{\circ}))$	P.6
10.	$A^{\circ} \Rightarrow ({}^{\circ}(\neg A) \wedge A^{\circ})$	8,9/P. 3
11.	${}^{\circ}(\neg A) \wedge A^{\circ}$	1,10/P. 3
12.	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)$	P. 1
13.	$\neg A \Rightarrow A$	2,12/P. 3
14.	${}^{\circ}(\neg A) \wedge A^{\circ} \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ({}^{\circ}(\neg A) \wedge A^{\circ} \wedge (\neg A \Rightarrow A)))$	P. 6
15.	$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ({}^{\circ}(\neg A) \wedge A^{\circ} \wedge (\neg A \Rightarrow A))$	11,14/P. 3

16.	$°(\neg A) \wedge A° \wedge (\neg A \Rightarrow A)$	13,15/P. 3
17.	$\neg A \Rightarrow \neg A$	Lema 2.2
18.	$°(\neg A) \wedge A° \wedge (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (°(\neg A) \wedge A° \wedge (\neg A \Rightarrow A) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg A))$	P. 6
19.	$(\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (°(\neg A) \wedge A° \wedge (\neg A \Rightarrow A) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg A))$	16,18/P. 3
20.	$(\neg A) \wedge A° \wedge (\neg A \Rightarrow A) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg A)$	17,19/P. 3
21.	$\neg\neg A$	3,20/P. 3
22.	$A° , A \vdash \neg\neg A$	1-21
23.	$A° \vdash A \Rightarrow \neg\neg A$	22/Prop. 2.3
24.	$\vdash A° \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$	23/Prop. 2.3

(e)

1.	$A \wedge \neg A \wedge A°$	Hip.
2.	$(A \wedge \neg A \wedge A°) \Rightarrow A$	P. 4
3.	A	1,2/P. 3
4.	$(A \wedge \neg A \wedge A°) \Rightarrow (\neg A \wedge A°)$	P. 5
5.	$\neg A \wedge A°$	1,4/P. 3
6.	$\neg A \wedge A° \Rightarrow (A \Rightarrow (\neg A \wedge A°))$	P. 1
7.	$A \Rightarrow (\neg A \wedge A°)$	5,6/P. 3
8.	$\neg^* A$	7/Def. 2.1(d)
9.	$A \Rightarrow (\neg^* B \Rightarrow A)$	P. 1
10.	$\neg^* B \Rightarrow A$	3,9/P. 3
11.	$\neg^* A \Rightarrow (\neg^* B \Rightarrow \neg^* A)$	P. 1
12.	$\neg^* B \Rightarrow \neg^* A$	8,11/P. 3

13.	$(\neg^*B \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg^*B \Rightarrow \neg^*A) \Rightarrow ((\neg^*B \Rightarrow A) \wedge (\neg^*B \Rightarrow \neg^*A)))$	P. 6
14.	$(\neg^*B \Rightarrow \neg^*A) \Rightarrow ((\neg^*B \Rightarrow A) \wedge (\neg^*B \Rightarrow \neg^*A))$	10,13/P. 3
15.	$(\neg^*B \Rightarrow A) \wedge (\neg^*B \Rightarrow \neg^*A)$	12,14/P. 3
16.	$(\neg^*B \Rightarrow A) \wedge (\neg^*B \Rightarrow \neg^*A) \Rightarrow \neg^*\neg^*B$	Prop. 2.4
17.	$\neg^*\neg^*B$	15,16/P. 3
18.	$\neg^*\neg^*B \Rightarrow B$	P. 15
19.	B	17,18/P. 3
20.	$A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \vdash B$	1-19
21.	$\vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$	20/Prop. 2.3

(g)

1.	$^{\circ}A$	Hip.
2.	$^{\circ}A \Rightarrow {}^{\circ}(\neg A)$	P. 14
3.	$^{\circ}(\neg A)$	1,2/P. 3
4.	$^{\circ}A \wedge {}^{\circ}(\neg A) \Rightarrow {}^{\circ}(A \Rightarrow \neg A) \wedge {}^{\circ}(A \wedge 3\ A) \wedge {}^{\circ}(A \vee \neg A)$	P. 12
5.	$^{\circ}A \Rightarrow ({}^{\circ}(\neg A) \Rightarrow ({}^{\circ}A \wedge {}^{\circ}(\neg A)))$	P. 6
6.	$^{\circ}(\neg A) \Rightarrow ({}^{\circ}A \wedge {}^{\circ}(\neg A))$	1,5/P. 3
7.	$^{\circ}A \wedge {}^{\circ}(\neg A)$	3,6/P. 3
8.	$^{\circ}(A \Rightarrow \neg A) \wedge {}^{\circ}(A \wedge \neg A) \wedge {}^{\circ}(A \vee \neg A)$	4,7/P. 3
9.	$({}^{\circ}(A \Rightarrow \neg A) \wedge {}^{\circ}(A \wedge \neg A) \wedge {}^{\circ}(A \vee \neg A)) \Rightarrow ({}^{\circ}(A \Rightarrow \neg A) \wedge {}^{\circ}(A \wedge \neg A))$	P. 4
10.	$^{\circ}(A \Rightarrow \neg A) \wedge {}^{\circ}(A \wedge \neg A)$	8,9/P. 3
11.	$({}^{\circ}(A \Rightarrow \neg A) \wedge {}^{\circ}(A \wedge \neg A)) \Rightarrow {}^{\circ}(A \wedge \neg A)$	P. 5
12.	$^{\circ}(A \wedge \neg A)$	10,11/P. 3

13. $°A \vdash °(A \wedge \neg A)$	1-12

(i)

1. $A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$	P. 1
2. $\vdash A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$	1/Prop. 1.8(b)

(l)

1. $A°$	Hip.
2. $A° \Rightarrow (\neg A)°$	P. 13
3. $(\neg A)°$	1,13/P. 3
4. $A° \wedge (\neg A)° \Rightarrow (A \Rightarrow \neg A)° \wedge (A \wedge \neg A)° \wedge (A \vee \neg A)°$	P. 11
5. $A° \Rightarrow ((\neg A)° \Rightarrow (A° \wedge (\neg A)°))$	P. 6
6. $(\neg A) \Rightarrow (A° \wedge (\neg A))$	1,5/P. 3
7. $A° \wedge (\neg A)°$	3,6/P. 3
8. $(A \Rightarrow \neg A)° \wedge (A \wedge \neg A)° \wedge (A \vee \neg A)°$	4,7/P. 3
9. $((A\Rightarrow\neg A)°\wedge(A\wedge\neg A)°\wedge(A\vee\neg A)°)\Rightarrow((A\Rightarrow\neg A)°\wedge(A\wedge\neg A)°)$	P. 4
10. $(A \Rightarrow \neg A)° \wedge (A \wedge \neg A)°$	8,9/P. 3
11. $(A \Rightarrow \neg A)° \wedge (A \wedge \neg A)° \Rightarrow (A \wedge \neg A)°$	P. 5
12. $(A \wedge \neg A)°$	10,11/P. 3
13. $A° \vdash (A \wedge \neg A)°$	1-12
14. $\vdash A° \Rightarrow (A \wedge \neg A)°$	13/Prop. 2.3

(m)

1. $A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B \wedge B°)$	Hip.
2. $A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B \wedge B°) \Rightarrow A \wedge (A \Rightarrow B)$	P. 4
3. $A \wedge (A \Rightarrow B)$	1,2/P. 3

4. $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow A$	P. 4
5. A	3,4/P. 3
6. $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	P. 5
7. $A \Rightarrow B$	3,6/P. 3
8. B	5,7/P. 3
9. $A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B \wedge B\ ) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B \wedge B°)$	P. 5
10 $A \Rightarrow \neg B \wedge B°$	1,9/P. 3
11 $\neg B \wedge B°$	5,10/P. 3
12 $B \Rightarrow (\neg B \wedge B° \Rightarrow B \wedge \neg B \wedge B°)$	P. 6
13 $\neg B \wedge B° \Rightarrow B \wedge \neg B \wedge B°$	8,12/P. 3
14 $B \wedge \neg B \wedge B°$	11,13/P. 3
15 $B \wedge \neg B \wedge B° \Rightarrow \neg A$	Prop. 2.8(e)
16 $\neg A$	14,15/P. 3
17 $A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B \wedge B°) \vdash \neg A$	1-16
18 $\vdash A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B \wedge B°) \Rightarrow \neg A$	17/Prop. 2.3

(r)

1. $A \wedge \neg^* A$	Hip.
2. $(A \wedge \neg^* A) \Rightarrow A$	P. 4
3. A	1,2/P. 3
4. $(A \wedge \neg^* A) \Rightarrow \neg^* A$	P. 5
5. $\neg^* A$	1,4/P. 3
6. $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A°\ )$	5/Def. 3.1(d)

7. $\neg A \wedge A^\circ$	3,6/P. 3
8. $A \Rightarrow ((\neg A \wedge A^\circ) \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A^\circ))$	P. 6
9. $(\neg A \wedge A^\circ) \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A^\circ$	3,8/P. 3
10$A \wedge \neg A \wedge A^\circ$	7,9/P. 3
11$A \wedge \neg A \wedge A^\circ \Rightarrow B$	Prop. 3.9(c)
12B	10,11/P. 3
13$A \wedge \neg^* A \vdash B$	1-12

Proposição 2.9: $\mathcal{V}_o$ é finitamente trivializável.

Prova:

(1) Admita-se, por hipótese, uma f.b.f. de $\mathcal{V}_o$ que assuma a forma $A \wedge \neg A \wedge A^\circ$.

(2) Por Prop. 2.8(e), $A \wedge \neg A \wedge A^\circ \Rightarrow B$.

(3) Por 1, 2 e P. 3, B.

(4) Logo, de 1-3, $A \wedge \neg A \wedge A^\circ \vdash B$.

(5) Portanto, por 1-4, existe um procedimento finito ao término do qual, em $\mathcal{V}_o$, é possível obter qualquer fórmula (tomando-se a fórmula $A \wedge \neg A \wedge A^\circ$, por exemplo).

(6) Logo, por 5, $\mathcal{V}_o$ é finitamente trivializável.

2.2. A Semântica de $\mathcal{V}_o$

Def. 2.10: Seja $|\mathcal{V}_o|$ o conjunto das f.b.f. de $\mathcal{V}_o$. Seja Γ qualquer subconjunto de $|\mathcal{V}_o|$. O conjunto $\{A \in |\mathcal{V}_o| : \Gamma \vdash A\}$ é denotado por $|\Gamma|$.

Def. 2.11: O conjunto Γ de f.b.f. é dito ser **trivial** em $\mathcal{V}_o$ se $|\mathcal{V}_o| = |\Gamma|$; caso contrário, Γ é dito ser **não trivial**.

Def. 2.12: Γ é um conjunto **maximal não trivial,** se é não trivial e, para todo A, se $A \notin \Gamma$, então $\Gamma \cup \{A\}$ é trivial.

Proposição 2.13: Se Γ é maximal não trivial, então:

(a) $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

(b) $A \in \Gamma \Rightarrow \neg^*A \notin \Gamma$

(c) $\neg^*A \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$

(d) $A \in \Gamma$ ou $\neg^*A \in \Gamma$

(e) $\vdash A \Rightarrow A \in \Gamma$

(f) $A \wedge A^\circ \in \Gamma \Rightarrow \neg A \notin \Gamma$

(g) $\neg A \wedge A^\circ \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$

(h) $A \wedge \neg A \in \Gamma \Rightarrow A^\circ \notin \Gamma$

(i) $A^\circ \in \Gamma \Rightarrow A \wedge \neg A \notin \Gamma$

(j) $A, A \Rightarrow B \in \Gamma \Rightarrow B \in \Gamma$

(k) $A \Rightarrow B \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$

Prova:

(a)

1º lado: $\Gamma \vdash A \Rightarrow A \in \Gamma$.

(1) Por enunciação, Γ é maximal não trivial.

(2) Seja $\Gamma \vdash A$.

(3) Admita-se, por absurdo, que $A \notin \Gamma$.

(4) Então, por 1, 3 e Def. 2.12, $\Gamma \cup \{ A \} \vdash B$.

(5) Por 4, em particular, $\Gamma \cup \{ A \} \vdash \neg^* A$.

(6) Por 5 e Prop. 2.3, $\Gamma \vdash A \Rightarrow \neg^* A$.

(7) Por 2, 6 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg^* A$.

(8) Por 7 e Def. 2.1(d), $\Gamma \vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ)$.

(9) Por 2, 8 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A \wedge A^\circ$.

(10) Por P. 6, $A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^\circ)$.

(11) Por 10 e Prop. 1.8(b), $\vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^\circ)$

(E, consequentemente, $\Gamma \vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^\circ)$).

(12) Por 2, 11 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A \wedge A^\circ \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^\circ$.

(13) Por 9, 12 e e P. 3, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ}$.

(14) Ora, por Prop. 2.8(e), $\vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$

(E, consequentemente, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$).

(15) Logo, por 13, 14 e P. 3, $\Gamma \vdash B$; o que, por 1 e Def. 2.12, é impossível.

(16) Portanto, $A \in \Gamma$.

2º lado: $A \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash A$.

(1) Seja $A \in \Gamma$, em que A é uma f.b.f. de $\mathcal{V}_o$.

(2) Seja $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$, tal que algum $\gamma_i = A$.

(3) Assim, por 2 e Def. 1.8(a), $\gamma_1, ..., \gamma_n \vdash \gamma_i$

(Isto é, $\Gamma \vdash A$).

(b)

(1) Por enunciação, Γ é maximal não trivial.

(2) Seja $A \in \Gamma$.

(3) Seja, por absurdo, $\neg^* A \in \Gamma$.

(4) Então, por 2 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A$.

(5) E, por 3 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash \neg^* A$.

(6) Assim, por 5 e Def. 2.1(d), $\Gamma \vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^{\circ})$.

(7) Por 4, 6 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A \wedge A^{\circ}$.

(8) Por P. 6, $A \Rightarrow (\neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^{\circ})$.

(9) Por 8 e Prop. 1.8(b), $\vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^{\circ})$ (E, consequentemente, $\Gamma \vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^{\circ}))$.

(10) Por 4, 9 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^{\circ}$.

(11) Por 7, 10 e P. 3, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ}$.

(12) Ora, por 2.8(e), $\vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$.

(E, consequentemente, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$).

(13) Logo, por 11, 12 e P. 3, $\Gamma \vdash B$; o que, por 1 e Def. 2.12, é impossível.

(14) Portanto, $\neg^* A \notin \Gamma$.

(d)

(1) Por enunciação, Γ é maximal não trivial.

(2) Suponha-se, por absurdo, que $A \notin \Gamma$ e $\neg^* A \notin \Gamma$.

(3) Assim, por 2, $A \notin \Gamma$.

(4) E, por 2, $\neg^* A \notin \Gamma$.

(5) Por 1, 3 e Def. 2.12, $\Gamma, A \vdash B$.

(6) Por 1, 4 e Def. 2.12, $\Gamma, \neg^* A \vdash B$.

(7) Por 5 e Prop. 2.3, $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$.

(8) Por 6 e Prop. 2.3, $\Gamma \vdash \neg^* A \Rightarrow B$.

(9) Por P. 9, $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg^* A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee \neg^* A \Rightarrow B))$.

(10) Por 9 e Def. 1.8(b), $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg^*A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee \neg^*A \Rightarrow B))$.

(E, consequentemente, $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg^*A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee \neg^*A \Rightarrow B))$.)

(11) Por 7, 10 e P. 3, $\Gamma \vdash (\neg^*A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee \neg^*A \Rightarrow B)$.

(12) Por 8, 11 e P. 3, $\Gamma \vdash A \vee \neg^*A \Rightarrow B$.

(13) Por 12 e Def. 2.1(d), $\Gamma \vdash A \vee (A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ)) \Rightarrow B$.

(14) Por Prop. 2.8(h), $\vdash A \vee (A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ))$.

(E, consequentemente, $\Gamma \vdash A \vee (A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ))$.)

(15) Por 13, 14 e P. 3, $\Gamma \vdash B$; o que, por 1 e Def. 2.12, é impossível.

(16) Portanto, não ocorre que $A \notin \Gamma$ e $\neg^*A \notin \Gamma$

(Isto é, $A \in \Gamma$ ou $\neg^*A \in \Gamma$).

(f)

(1) Por enunciação, Γ é maximal não trivial.

(2) Seja $A \wedge A^\circ \in \Gamma$.

(3) Admita-se, por absurdo, que $\neg A \in \Gamma$.

(4) Assim, por 2 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A \wedge A^\circ$.

(5) Por 3 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash \neg A$.

(6) Por P. 4, $A \wedge A^\circ \Rightarrow A$.

(7) Por 6 e Prop. 1.8(b), $\vdash A \wedge A^\circ \Rightarrow A$

(E, por conseguinte, $\Gamma \vdash A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A$.)

(8) Por 4, 7 e P. 3, $\Gamma \vdash A$.

(9) Por P. 5, $A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A^{\circ}$.

(10) Por 9 e Prop. 1.8(b), $\vdash A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A^{\circ}$

(E, claramente, $\Gamma \vdash A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A^{\circ}$.)

(11) Por 4, 10 e P. 3, $\Gamma \vdash A^{\circ}$.

(12) Por P. 6, $\neg A \Rightarrow (A^{\circ} \Rightarrow \neg A \wedge A^{\circ})$.

(13) Por 12 e Prop. 1.8(b), $\vdash \neg A \Rightarrow (A^{\circ} \Rightarrow \neg A \wedge A^{\circ})$

(E, consequentemente, $\Gamma \vdash \neg A \Rightarrow (A^{\circ} \Rightarrow \neg A \wedge A^{\circ})$.)

(14) Por 5, 13 e P. 3, $\Gamma \vdash A^{\circ} \Rightarrow \neg A \wedge A^{\circ}$.

(15) Por 11, 14 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A \wedge A^{\circ}$.

(16) Por P. 6, $A \Rightarrow (\neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^{\circ})$.

(17) Por 16 e Prop. 1.8(b), $\vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^{\circ})$

(Consequentemente, $\Gamma \vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^{\circ})$.)

(18) Por 8, 17 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^{\circ}$.

(19) Por 15, 18 e P. 3, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ}$.

(20) Ora, por Prop. 2.8(e), $\vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$.

(E, consequentemente, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$.)

(21) Portanto, por 19, 20 e P. 3, $\Gamma \vdash B$; o que, por 1 e Def. 2.12, é impossível.

(22) Assim, $\neg A \notin \Gamma$.

(h)

(1) Por enunciação, Γ é maximal não trivial.

(2) Seja $A \wedge \neg A \in \Gamma$.

(3) Seja, por absurdo, $A° \in \Gamma$.

(4) Por 2 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A \wedge \neg A$.

(5) Por 3 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A°$.

(6) Por P. 6, $(A \wedge \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A)$.

(7) Por 6 e Prop. 1.8(b), $\vdash (A \wedge \neg A) \Rightarrow (A° \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A°))$

(Logo, $\Gamma \vdash (A \wedge \neg A) \Rightarrow (A° \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A°)))$.

(8) Por 4, 7 e P. 3, $\Gamma \vdash A° \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A°)$.

(9) Por 5, 8 e P. 3, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A°$.

(10) Ora, Por Prop. 2.8(e), $\vdash A \wedge \neg A \wedge A° \Rightarrow B$.

(Logo, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A)$.

(11) Por 9, 10 e P. 3, $\Gamma \vdash B$; o que, por 1 e Def. 2.12, é impossível.

(12) Portanto, por 1-11, $A \notin \Gamma$.

(i)

(1) Por enunciação, Γ é maximal não trivial.

(2) Seja $A° \in \Gamma$.

(3) Seja, por absurdo, $A \wedge \neg A \in \Gamma$.

(4) Por 2 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A°$.

(5) Por 3 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A \wedge \neg A$.

(6) Por P. 6, $(A \wedge \neg A) \Rightarrow (A° \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A°))$.

(7) Por 6 e Def. 1.8(b), $\vdash (A \wedge \neg A) \Rightarrow (A° \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A°))$ (E, consequentemente, $\Gamma \vdash (A \wedge \neg A) \Rightarrow (A° \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A°)))$

(8) Por 5, 7 e P. 3, $\Gamma \vdash A° \Rightarrow (A \wedge \neg A \wedge A°)$.

(9) Por 4 e 8, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A°$.

(10) Ora, por Prop. 2.8(e), $\vdash A \wedge \neg A \wedge A° \Rightarrow B$. (E, consequentemente, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A° \Rightarrow B$).

(11) Logo, por 9, 10 e P. 3, $\Gamma \vdash B$; o que, por 1 e Def. 2.12, é impossível.

(12) Portanto, por 1-11, $A \wedge \neg A \notin \Gamma$.

(j)

(1) Seja $A, A \Rightarrow B \in \Gamma$.

(2) Assim, por 1, $A \in \Gamma$.

(3) E, por 1, $A \Rightarrow B \in \Gamma$.

(4) Por 2 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A$.

(5) Por 3 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$.

(6) Por 4, 5 e P. 3, $\Gamma \vdash B$.

(7) Logo, por 6 e Prop. 2.13(a), $B \in \Gamma$.

(l)

(1) Por enunciação, Γ é maximal não trivial.

(2) Seja $A \Rightarrow B \in \Gamma$.

(3) Seja, por absurdo, $A \in \Gamma$ e $B \notin \Gamma$; isto é:

(3.1) $A \in \Gamma$, e

(3.2) $B \notin \Gamma$.

(4) Por 2 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$.

(5) Por 3.1 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A$.

(6) Por 4, 5 e P. 3, $\Gamma \vdash B$.

(7) Por 3.2 e Def. 2.12, $\Gamma, B \vdash \neg^*B$.

(8) Por 7 e Prop. 2.3, $\Gamma \vdash B \Rightarrow \neg^*B$.

(9) Por 6, 8 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg^*B$.

(10) Por 6, $B \Rightarrow (\neg^*B \Rightarrow (B \wedge \neg^*B)$.

(11) Por 10 e Prop. 1.8(b), $\vdash B \Rightarrow (\neg^*B \Rightarrow (B \wedge \neg^*B))$

(E, consequentemente, $\Gamma \vdash B \Rightarrow (\neg^*B \Rightarrow (B \wedge \neg^*B))$.

(12) Por 6, 11 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg^*B \Rightarrow (B \wedge \neg^*B)$.

(13) Por 9, 12 e P. 3, $\Gamma \vdash B \wedge \neg^*B$.

(14) Ora, por Prop. 2.8(r), $\vdash B \wedge \neg^*B \Rightarrow C$

(E, consequentemente, $\Gamma \vdash B \Rightarrow \neg^*B \Rightarrow C$).

(15) Logo, por 13, 14 e P. 3, $\Gamma \vdash C$; o que, por 1 e Def. 2.12 é impossível.

(16) Logo, $A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$.

Def. 2.14: Uma valoração de $\mathcal{V}_o$ uma função ν: $|\mathcal{V}_o| \to \{0, 1\}$, tal que:

1. $\nu(A \Rightarrow B) = 1 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$ ou $\nu(B) = 1$
2. $\nu(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \nu(A) = \nu(B) = 1$
3. $\nu(A \vee B) = 1$ 5$\Leftrightarrow \nu(A) = 1$ ou $\nu(B) = 1$
4. $\nu(A^\circ) = \nu(B^\circ) = 1 \Rightarrow \nu((A \Rightarrow B)^\circ) = \nu((A \wedge B)^\circ) = \nu((A \vee B)^\circ) = 1$
5. $\nu(^\circ A) = \nu(^\circ B) = 1 \Rightarrow \nu(^\circ(A \Rightarrow B)) = \nu(^\circ(A \wedge B)) = \nu(^\circ(A \vee B)) = 1$
6. $\nu(A^\circ) = 1 \Rightarrow \nu((\neg A)^\circ) = 1$
7. $\nu(^\circ A) = 1 \Rightarrow \nu(^\circ(\neg A)) = 1$
8. $\nu(A) = \nu(\neg A) = 1 \Rightarrow \nu(A^\circ) = 0$.

Lema 2.15: Se ν é uma valoração para $\mathcal{V}_o$, então $\nu(A) = 1 \Leftrightarrow \nu(\neg^* A) = 0$.

Prova:

1º lado:

(1) Seja ν uma valoração para $\mathcal{V}_o$.

(2) Seja $\nu(A) = 1$.

(3) Seja, por absurdo, $\mathcal{v}(\neg^*A) = 1$.

(4) Por 3 e Def. 2.1(d), $\mathcal{v}(A \Rightarrow \neg A \wedge A°) = 1$.

(5) Por 4 e Def. 2.14(1), $\mathcal{v}(A) = 0$ ou $\mathcal{v}(\neg A \wedge A°) =1$.

(6) Por 5 e Def. 2.14(2), $\mathcal{v}(A) = 0$ ou $\mathcal{v}(\neg A) = \mathcal{v}(A°) = 1$.

(7) Por 6 e Distribuição, $\mathcal{v}(A) = 0$ e $\mathcal{v}(\neg A) = 1$ ou $\mathcal{v}(A) = 0$ e $\mathcal{v}(A°) = 1$.

(8) Ora, em ambos os casos $\mathcal{v}(A) = 0$, e isto contraria 2; o que, por 1, é impossível.

(9) Portanto, $\mathcal{v}(\neg^*A) = 0$.

2º lado:

(1) Seja $\mathcal{v}$ uma valoração para $\mathcal{V}_o$.

(2) Seja $\mathcal{v}(\neg^*A) = 0$.

(3) Seja, por absurdo, $\mathcal{v}(A) = 0$.

(4) Por 2 e Def. 2.1(d), $\mathcal{v}(A \Rightarrow \neg A \wedge A°) = 0$.

(5) Por 4 e Def. 2.14(1), $\mathcal{v}(A) = 1$ e $\mathcal{v}(\neg A \wedge A°) = 0$.

(6) Por 5 e Eliminação de Conjunção, $\mathcal{v}(A) = 1$.

(7) Ora, 6 contraria 3; o que, por 1, é impossível.

(8) Logo, $\mathcal{v}(A) = 1$.

Def. 2.16: Uma f.b.f. A é dita ser válida em $\mathcal{V}_o$ se, para cada valoração ν, ν(A) = 1. Uma valoração ν é um modelo do conjunto Γ se ν(A) = 1 para toda f.b.f. A $\in \Gamma$. Se cada modelo de Γ é um modelo de {A}, então escrevemos $\Gamma \models$ A. Em particular, $\models$ A significa que A é válida.

Lema 2.17: Se ν é uma valoração para $\mathcal{V}_o$ então, se ν(A) = ν(A $\Rightarrow$ B) = 1, então ν(B) = 1.

Prova:

(1) Seja ν uma valoração para $\mathcal{V}_o$.

(2) Seja ν(A) = ν(A $\Rightarrow$ B) = 1.

(3) Por 2 e Def. 2.14(1), ν(A) = 0 ou ν(B) = 1.

(4) Ora, por 2, ν(A) $\neq$ 0.

(5) Logo, por 1, 3 e 4, ν(B) = 1.

Lema 2.18: Se ν é uma valoração para $\mathcal{V}_o$ então, se A é um axioma de $\mathcal{V}_o$ então ν(A) = 1.

Prova:

(1) Seja ν uma valoração para $\mathcal{V}_o$.

(2) Seja A um axioma de $\mathcal{V}_o$.

(3) Consideremos, então, os seguintes casos:

Caso 1: A é um dos axiomas 1-9 de $\mathcal{V}_o$.

1. Os axiomas de $\mathcal{V}_o$ são os mesmos axiomas que os do Cálculo proposicional clássico.
2. Além disso, a valoração atribuída às f.b.f. de $\mathcal{V}_o$, quando referida aos conectivos $\Rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$, é clássica. Então, claramente, $\nu(A) = 1$ se A assume a forma de algum dos axiomas 1-9 de $\mathcal{V}_o$.

Caso 2: A é da forma $°A \wedge B° \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$.

1. Seja $\nu(°A \wedge B° \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A) = 0$.
2. Por Def. 2.14(1), $\nu(°A \wedge B° \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B)) = 1$ e $\nu(\neg A) = 0$.
3. Por 2 e Def. 2.14(2), $\nu(°A) = \nu(B°) = \nu(A \Rightarrow B) = \nu(A \Rightarrow \neg B) = 1$ e $\nu(\neg A) = 0$.
4. Se $\nu(°A) = 1$, então $\nu(A \vee \neg A) = 1$; isto é, $\nu(A) = 1$ ou $\nu(\neg A) = 1$.

5. Ora, como se tem fixado que $\mathcal{V}(\neg A) = 0$, então $\mathcal{V}(A) = 1$.
6. Se $\mathcal{V}(A) = 1$ e $\mathcal{V}(A \Rightarrow B) = 1$, então, por Lema 2.17, $\mathcal{V}(B) = 1$.
7. Se $\mathcal{V}(A) = 1$ e $\mathcal{V}(A \Rightarrow \neg B) = 1$, então, por Lema 2.17, $\mathcal{V}(\neg B) = 1$.
8. Ora, por 6, 7 e 3, $\mathcal{V}(B) = \mathcal{V}(\neg B) = \mathcal{V}(B^\circ) = 1$; o que contraria a cláusula 8 da Def. 2.14.
9. Por 8 e Def. 2.16, $\mathcal{V}$ não é uma valoração para $\mathcal{V}_o$; o que é impossível, uma vez que contraria a hipótese geral 1.
10. Logo, por 1-9, $\mathcal{V}({}^\circ A \wedge B^\circ \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A) = 1$.

Caso 3: A é da forma $A^\circ \wedge B^\circ \Rightarrow (A \wedge B)^\circ \wedge (A \wedge B) \wedge (A \vee B)$

1. Seja $\mathcal{V}((A^\circ \wedge B^\circ) \Rightarrow ((A \Rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ)) = 0$.
2. Por 1 e Def. 2.14(1), $\mathcal{V}(A^\circ \wedge B^\circ) = 1$ e $\mathcal{V}((A \Rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \ \ (A \vee B)^\circ) = 0$.

3. Por 2 e Def. 2.14(3) e (4), $\mathcal{V}(A°) = \mathcal{V}(B°) = 1$ e $\mathcal{V}(A \Rightarrow B)° = 0$ ou $\mathcal{V}(A \wedge B)° = 0$ ou $\mathcal{V}(A \vee B)° = 0$; o que, por Def. 2.14(4) é impossível.
4. Logo, $\mathcal{V}((A° \wedge B°) \Rightarrow ((A \Rightarrow B)° \wedge (A \wedge B)° \wedge (A \vee B)°)) \neq 0$.

   (Isto é, $\mathcal{V}((A° \wedge B°) \Rightarrow ((A \Rightarrow B)° \wedge (A \wedge B)° \wedge (A \vee B)°)) = 1$).

Caso 4: A é da forma $°A \Rightarrow °(\neg A)$.

1. Seja $\mathcal{V}(°A \Rightarrow °(\neg A)) = 0$.
2. Por 1 e Def. 2.14(1), $\mathcal{V}(°A) = 1$ e $\mathcal{V}(°(\neg A)) = 0$; o que, por Def. 2.14(7), é impossível.
3. Portanto, por 2 e Def. 2.14, $\mathcal{V}(°A \Rightarrow °(\neg A)) \neq 0$.

   (Isto é, $\mathcal{V}(°A \Rightarrow °(\neg A)) = 1$).

Caso 5: A é da forma $\neg^*\neg^*A \Rightarrow A$.

1. Seja $\mathcal{V}(\neg^*\neg^*A \Rightarrow A) = 0$.
2. Por 5.1 e Def. 2.14(1), $\mathcal{V}(\neg^*\neg^*A) = 1$ e $\mathcal{V}(A) = 0$.
3. Por 5.2 e Def. 2.1(d), $\mathcal{V}(\neg^*(A \Rightarrow \neg A \wedge A°)) = 1$ e $\mathcal{V}(A) = 0$.

4. Por 5.3 e Def. 2.1(d), $\mathcal{V}((A \Rightarrow \neg A \wedge A°) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg A \wedge A°) \wedge (A \Rightarrow \neg A \wedge A)) = 1$ e $\mathcal{V}(A) = 0$.
5. Por 5.4 e Def. 2.14(1), $\mathcal{V}((A \Rightarrow \neg A \wedge A°) = 0$ ou $\mathcal{V}(\neg(A \Rightarrow \neg A \wedge A°) \wedge (A \Rightarrow \neg A \wedge A°)°) = 1$, e $\mathcal{V}(A) = 0$.
6. Por 5.5 e Def. 2.14(2), $\mathcal{V}(A \Rightarrow \neg A \wedge A°) = 0$ ou $\mathcal{V}(\neg(A \Rightarrow \neg A \wedge A°)) = \mathcal{V}((A \Rightarrow \neg A \wedge A°)°) = 1$, e $\mathcal{V}(A) = 0$.
7. Ora, sendo $\mathcal{V}(A) = 0$, então, por Def. 2.14(1), $\mathcal{V}(A \Rightarrow \neg A \wedge A°) \neq 0$.
8. Por 5.6 e 5.7, então, $\mathcal{V}(\neg(A \Rightarrow \neg A \wedge A°)) = 1$ e $\mathcal{V}((A \Rightarrow \neg A \wedge A°)°) = 1$; o que contraria a cláusula 8 da Def. 2.14.
9. Logo, por 8 e Def. 2.16 $\mathcal{V}$ não é uma valoração para $\mathcal{V}_o$; o que, pela hipótese geral 1, é impossível.
10. Assim, por 1-9, $\mathcal{V}(\neg^*\neg^*A \Rightarrow A) = 1$.

(4) Portanto, $\mathcal{V}(A) = 1$.

Proposição 2.19 (Teorema da Correção): Se A é uma consequência de Γ, então cada modelo de Γ é um modelo de {A}.

Prova:

(1) Seja A uma consequência (sintática) de Γ.

(2) Seja uma valoração ν um modelo do conjunto Γ.

(3) Por 1 e Def. 1.17, existe uma sequência $< A_1 , ..., A_n >$ de f.b.f., tal que:

(3.1) $A_n = A$.

(3.2) Para cada A_i, $1 < i < n$:

(3.2.1) A_i é um axioma; ou

(3.2.2) A_i pertence a Γ; ou

(3.2.3) A_i resulta de duas f.b.f. anteriores pela aplicação de P. 3.

(4) Consideremos, então, os seguintes casos:

(4.1) A_i é um axioma de $\mathcal{V}_o$.

Então, por 4.1 e Lema 2.17, $\nu(A_i) = 1$.

(4.2) $A_i \in \Gamma$.

Então, por 2, 4.2 e Def. 2.16, $\nu(A_i) = 1$.

(4.3) A_i resulta de duas f.b.f. anteriores, A_j e $A_j \Rightarrow A_i$, pela aplicação de P. 3.

Então, por 4.3 e Lema 2.18, $\nu(A_i) = 1$.

(5) Logo, em qualquer caso, $\nu(A_i) = 1$.

(6) Portanto, por 2 e 5, cada modelo de Γ é um modelo de { A }.

Def. 2.20: Um conjunto Γ é dito ser enumerável se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca entre Γ e ⌋ = {1, 2, 3, ...}.

Lema 2.21: O conjunto das fórmulas de $\mathcal{V}_o$ é enumerável.

Prova:

(1) Seja atribuído um número inteiro positivo $f(u)$ para cada símbolo u de $\mathcal{V}_o$, como segue: $f(() = 3$, $f()) = 5$, $f(\neg) = 7$, $f(\Rightarrow) = 9$, $f(\wedge) = 11$, $f(\vee) = 13$, $f(A_k) = 7 + 8k$, $k \geq 1$.

(2) Então, a cada fórmula $u_1u_2u_3...u_n$ de $\mathcal{V}_o$ associa-se o número $f(u_1u_2u_3...u_n) = 2^{f(u_1)} . 3^{f(u_2)} . 5^{f(u_3)} . ... . P_j^{f(u_j)}$, em que P_j é o j-ésimo número primo, a partir de $P_0 = 2$.

(3) Logo, enumeram-se todas as fórmulas na ordem de seus números associados.

(4) Existe, assim, uma correspondência biunívoca entre o conjunto das fórmulas de $\mathcal{V}_o$ e o conjunto dos números $f(u_1u_2u_3...u_n)$.

(5) Ora, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números $f(u_1u_2u_3...u_n)$ e o conjunto $\rfloor$.

(6) Logo, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das fórmulas de $\mathcal{V}_o$ e o conjunto $\rfloor$.

(7) Portanto, por 6 e Def. 2.20, o conjunto das fórmulas de $\mathcal{V}_o$ é enumerável.

Lema 2.22 (Lema de Lindenbaum): Se Γ é não trivial, então Γ está contido em um conjunto maximal não trivial.

Prova:

(1) Por Lema 2.21, seja A_1, A_2, ... uma enumeração de todas as fórmulas de $\mathcal{V}_o$.

(2) Seja Δ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{V}_o$.

(3) Seja Γ_0, Γ_1, ... uma sequência de conjuntos não triviais do seguinte modo, por indução, definidos:

(a) $\Gamma_0 = \Delta$.

(b) Admita-se como dado Γ_n, $n \geq 0$. Se não ocorre que $\Gamma_n \vdash \neg A_{n+1}$, então $\Gamma_{n+1} = \Gamma \cup \{A_{n+1}\}$. Se $\Gamma \cup \{A_{n+1}\}$ é trivial, então $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$.

(4) Seja, por fim, $\Gamma = \cup \Gamma_i$, em que $0 < i < n$.

(5) Provar, então:

(5.1) $\Delta \subseteq \Gamma$;

(5.2) Γ é não trivial;

(5.3) Γ é maximal.

(5.1)

(5.1.1) Por 4, cada $\Gamma_i \in \Gamma$.

(5.1.2) Por 3(a), $\Gamma_0 = \Delta$.

(5.1.3) Logo, por 1 e 2, $\Delta \in \Gamma$.

(5.2)

(5.2.1) Suponha-se que Γ é trivial.

(Isto é, $\Gamma \vdash B$.)

(5.2.2) Então, por 5.2.1 e Prop. 1.8(d), $\exists\Gamma_i$ tal que $\Gamma_i = \{ A_1, ..., A_n \}$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_i \vdash B$.

(5.2.3) Ora, isto contradiz 3.

(5.2.4) Logo, Γ é não trivial.

(5.3)

(5.3.1) Suponha-se que Γ não é maximal.

(5.3.2) Por 5.3.1 e Def. 2.12, existe uma fórmula B pertencente à enumeração de todas as fórmulas de $\mathcal{V}_o$, conforme definida em 1, tal que, se B ∉ Γ, então Γ ∪ { B } é não trivial.

(5.3.3) Por 5.3.2, existe Γ_i tal que $\Gamma_i \cup \{ B \}$ é não trivial.

(5.3.4) Por 5.3.3 e 3(b), $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{ B \}$ e B ∈ Γ. O que contradiz 5.3.2 (isto é, não existe B ∉ Γ tal que Γ ∪ { B } é não trivial.

(5.3.5) Logo, Γ é maximal.

Lema 2.23: Todo conjunto maximal não trivial de fórmulas tem um modelo.

Prova:

(1) Seja Γ um conjunto de f.b.f. de $\mathcal{V}_o$, tal que Γ é maximal não trivial.

(2) Então, por 1 e Def. 2.12:

(2.1) Γ é não trivial; e

(2.2) ∀A, se A ∉ Γ, então Γ ∪ { A } é trivial.

(3) Logo, por 2.1 e 2.2, uma valoração para o conjunto Γ é construída por uma função f: $|\mathcal{V}_o| \rightarrow \{0, 1\}$, tal que, para cada f.b.f. A de $\mathcal{V}_o$:

(3.a) A $\in$ Γ se, e somente se, f(A) = 1;

(3.b) A $\notin$ Γ se, e somente se, f(A) = 0.

(Provar, então, que a função f é uma valoração para um conjunto qualquer Γ de $\mathcal{V}_o$.)

(3.1) A função f é uma valoração para um conjunto qualquer de fórmulas de $\mathcal{V}_o$ e satisfaz às mesmas condições que a função ν, conforme esta é especificada na Def. 2.14. Considerem-se, assim, os seguintes casos:

Caso 1:

(3.1.1) Seja f(A $\Rightarrow$ B) = 1.

(3.1.2) Então, por 3.1.1 e 3.a, A $\Rightarrow$ B $\in$ Γ.

(3.1.3) Por 3.1.2 e Prop. 2.13(l), A $\notin$ Γ ou B $\in$ Γ.

(3.1.4) Por 3.1.3 e 3.b, f(A) = 0 ou B $\in$ Γ.

(3.1.5) Por 3.1.4 e 3.a, f(A) = 0 ou f(B) = 1.

(O que satisfaz ν.)

Caso 2:

(3.2.1) Seja $f(A^\circ) = (B^\circ) = 1$.

(3.2.2) Então, por 3.2.1 e 3.a, $A^\circ \in \Gamma$ e $B^\circ \in \Gamma$.

(3.2.3) Por 3.2.2 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A^\circ$ e $\Gamma \vdash B^\circ$.

(3.2.4) Ora, por P. 6, $A^\circ \Rightarrow (B^\circ \Rightarrow (A^\circ \wedge B^\circ))$.

(3.2.5) Por 3.2.4 e Prop. 1.8(b), $\vdash A^\circ \Rightarrow (B^\circ \Rightarrow (A^\circ \wedge B^\circ))$

(E, claramente, $\Gamma \vdash A^\circ \Rightarrow (B^\circ \Rightarrow (A^\circ \wedge B^\circ))$.

(3.2.6) Por 3.2.3, 3.2.5 e P. 3, $\Gamma \vdash B^\circ \Rightarrow (A^\circ \wedge B^\circ)$.

(3.2.7) Por 3.2.3, 3.2.$\Rightarrow$ e P. 3, $\Gamma \vdash A^\circ \wedge B^\circ$.

(3.2.8) Ora, por P. 11, $(A^\circ \wedge B^\circ) \Rightarrow ((A \Rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ)$.

(3.2.9) Por 3.2.8 e Prop. 1.8(b), $\vdash (A^\circ \wedge B^\circ) \Rightarrow ((A \Rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ)$.

(E, claramente, $\Gamma \vdash (A^\circ \wedge B^\circ) \Rightarrow ((A \Rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ)$.

(3.2.10) Por 3.2.7, 3.2.9 e P. 3, $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ$.

(3.2.11) Por 3.2.10 e repetidas aplicações de P. 4, P. 5 e P. 3, $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B)^\circ$, $\Gamma \vdash (A \wedge B)^\circ$ e $\Gamma \vdash (A \vee B)^\circ$.

(3.2.12) Por 3.2.11 e Prop. 3.13(a), $(A \Rightarrow B)^\circ \in \Gamma$, $(A \wedge B)^\circ \in \Gamma$ e $(A \vee B)^\circ \in \Gamma$.

(3.2.13) Por 3.2.12 e 3.a, $f((A \Rightarrow B)^\circ) = f((A \wedge B)^\circ) = f((A \vee B)^\circ) = 1$.

(O que satisfaz ν.)

Caso 3:

(3.3.1) Seja $f(^\circ(A)) = 1$.

(3.3.2) Por 3.3.1 e 3.a, $^\circ A \in \Gamma$.

(3.3.3) Por 3.3.2 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash {^\circ A}$.

(3.3.4) Por P. 14, $A \Rightarrow (^\circ(\neg A))$.

(3.3.5) Por 3.3.4 e Prop. 1.8(b), $\vdash A \Rightarrow (^\circ(\neg A))$

(E, claramente, $\Gamma \vdash A \Rightarrow (^\circ(\neg A))$).

(3.3.6) Por 3.3.3, 3.3.5 e P. 3, $\Gamma \vdash {^\circ(\neg A)}$.

(3.3.7) Por 3.3.6 e Prop. 3.13(a), $^\circ(\neg A) \in \Gamma$.

(3.3.8) Logo, por 3.3.7 e 3.a, $f(^\circ(\neg A)) = 1$.

(O que satisfaz ν.)

Caso 4:

(3.4.1) Seja $f(A) = f(\neg A) = 1$.

(3.4.2) Por 3.4.1 e 3.a, $A \in \Gamma$ e $\neg A \in \Gamma$.

(3.4.3) Por 3.4.2 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash \neg A$.

(3.4.4) Ora, por P. 6, $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A))$.

(3.4.5) Por 3.4.4 e Prop. 1.8(b), $\vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A))$.

(E, claramente, $\Gamma \vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A))$.

(3.4.6) Por 3.4.3, 3.4.5 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A \Rightarrow (A \wedge \neg A)$.

(3.4.7) Por 3.4.3, 3.4.6 e P. 3, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A$.

(3.4.8) Por 3.4.7 e Prop. 2.13(a), $A \wedge \neg A \in \Gamma$.

(3.4.9) Por 3.4.8 e Prop. 2.13(h), $A^\circ \notin \Gamma$.

(3.4.10) Por 3.4.9 e 3.b, $f(A^\circ) = 0$.

(O que satisfaz ν.)

$\therefore$ A função f satisfaz a todas as condições estipuladas para a função ν da Def. 2.14. Logo, f é uma valoração para qualquer Γ. Portanto, f é uma valoração para $|\mathcal{V}_o|$.

(4) Por 3, tem-se assegurado que, para toda f.b.f. A de Γ, $f(A) = 1$.

(5) Assim, por 4 e Def. 2.16, f define uma valoração que é um modelo para Γ.

(Isto é, o conjunto Γ tem um modelo.)

(6) Portanto, por 1-5, todo conjunto maximal não trivial de f.b.f. de $\mathcal{V}_o$ tem um modelo.

Proposição 2.24 (Teorema da Completude): Se cada modelo de Γ é um modelo de { A }, então A é uma consequência de Γ.

Prova:

(1) Admita-se que cada modelo de Γ é um modelo de { A }.

(2) Seja ν uma valoração que é um modelo de Γ, construída ao modo da função f do Lema 2.23.

(3) Então, por 1 e 2, ν é um modelo de { A }.

(4) Por 3 e Def. 2.16, $\nu(A) = 1$.

(5) Por 4 e Def. 2.16, $A \in \Gamma$.

(6) Por 5 e Prop. 2.13(a), $\Gamma \vdash A$.

Proposição 2.25: Em $\mathcal{V}_o$, os seguintes esquemas (entre outros) não são válidos.

(a) $(A \vee \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A)$

(b) $°A \vee (A \wedge \neg A)$

(c) $A \vee \neg A$

(d) $A \vee A°$

(e) $\neg(A \wedge \neg A)$

(f) $\neg A \vee A°$

(g) $°A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$

(h) $°A \wedge A°$

Prova:

(a)

(1) Seja $\mathcal{v}((A \vee \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A)) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 2.14(3), $\mathcal{v}(A \vee \neg A) = 0$ e $\mathcal{v}(\neg(A \wedge \neg A)) = 0$.

(3) Por 2 e Def. 2.1(a), $\mathcal{v}(A \vee \neg A) = 0$ e $\mathcal{v}(A°) = 0$.

(4) Por 3 e Def. 2.14(3), $\mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(\neg A) = \mathcal{v}(A°) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 2.14.

(5) Assim, por 1-4 e Def. 2.16, $(A \vee \neg A) \vee \neg(A \Rightarrow \neg A)$ não é válido em $\mathcal{V}_o$.

(b)

(1) Seja $\mathcal{v}(°A \vee (A \wedge \neg A)) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 2.1(b), $\mathcal{v}((A \vee \neg A) \vee (A \wedge \neg A)) = 0$.

(3) Por 2 e Def. 2.14(3), $\mathcal{v}(A \vee \neg A) = \mathcal{v}(A \wedge \neg A) = 0$.

(4) Por 3 e Def. 2.14(3), $\mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(\neg A) = \mathcal{v}(A \wedge \neg A) = 0$.

(5) Por 4 e Def. 2.14(2), $\mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(\neg A)= 0$ e, ou $\mathcal{v}(A) = 0$ ou $\mathcal{v}(\neg A) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 2.14.

(6) Logo, por 1-5 e Def. 2.16, $°A \vee (A \wedge \neg A)$ não é válido em $\mathcal{V}_o$.

(c)

(1) Seja $\nu(A \vee \neg A) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 2.14(3), $\nu(A) = \nu(\neg A) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 2.14.

(3) Portanto, por 1-2 e Def. 2.16, $A \vee \neg A$ não é válido em $\mathcal{V}_o$.

(d)

(1) Seja $\nu(A \vee A°) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 2.14(3), $\nu(A) = \nu(A°) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 2.14.

(3) Portanto, por 1-2 e Def. 2.16, $A \vee A°$ não é válido em $\mathcal{V}_o$.

(e)

(1) Seja $\nu(\neg(A \wedge \neg A)) = 0$.

(2) Seja ν, então, de modo que $\nu(A) = \nu(\neg A) = 1$.

(3) Ora, 2 não contraria nenhuma das cláusulas da Def. 2.14.

(4) Logo, por 1-3 e Def. 2.16, $\neg(A \Rightarrow \neg A)$ não é válido em $\mathcal{V}_o$.

(f)

(1) Seja $\nu(\neg A \vee A°) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 2.14(3), $\nu(\neg A) = \nu(A°) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 2.14.

(3) Logo, por 1-2 e Def. 2.16, $\neg A \vee A°$ não é válido em $\mathcal{V}_o$.

(g)

(1) Seja $\nu(°A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 2.14(1), $\nu(°A) = 1$ e $\nu(\neg\neg A \Rightarrow A) = 0$.

(3) Por 2 e Def. 2.14(1), $\nu(°A) = \nu(\neg\neg A) = 1$ e $\nu(A) = 0$.

(4) Por 3 e Def. 2.1(b), $\nu(A \vee \neg A) = \nu(3\neg A) = 1$ e $\nu(A) = 0$.

(5) Por 4 e Def. 2.14(3), $\nu(A) = 1$ ou $\nu(\neg A) = 1$, e $\nu(\neg\neg A) = 1$ e $\nu(A) = 0$.

(6) Ora, está desde (3) fixado que $\nu(A) \neq 1$.

(7) Logo, por 5 e 6, $\nu(\neg A) = \nu(\neg\neg A) = 1$ e $\nu(A) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 2.14.

(8) Portanto, por 1-7 e Def. 2.16, $°A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$ não é $\mathcal{V}$álido em $\mathcal{V}_o$.

(h)

(1) Seja $\mathcal{V}(°A \wedge A°) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 2.14(2), $\mathcal{V}(°A) = 0$ ou $\mathcal{V}(A°) = 0$.

(3) Por 2 e Def. 2.14(b), $\mathcal{V}(A \vee \neg A) = 0$ ou $\mathcal{V}(A°) = 0$.

(4) Por 3 e Def. 2.14(3), $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(\neg A) = 0$ ou $\mathcal{V}(A°) = 0$.

(5) De 4, por Distribuição, $\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(A°) = 0$ ou $\mathcal{V}(\neg A) = \mathcal{V}(A°) = 0$.

(6) Logo, por 1-6 e Def. 2.16, $°A \wedge A°$ não é válido em $\mathcal{V}_o$

3. O Sistema Axiomático Formal $\mathcal{V}_1$

Este é o sistema correspondente ao caso em que, para cada fórmula, a lei do terceiro excluído ou a lei de contradição não é válida, mas não ambas. Neste capítulo, como no anterior, a terminologia, notação e referência a C_o adotadas são as de Kleene[1].

3.1. A Sintaxe de $\mathcal{V}_1$

Def. 3.1: (a) $A° =_{\text{Def}} \neg(A \wedge \neg A)$

(b) $°A =_{\text{Def}} A \vee \neg A$

(c) $A^+ =_{\text{Def}} °A \wedge A°$

(d) $\neg^* A =_{\text{Def}} A° \wedge (A \Rightarrow \neg A)$

Os postulados de $\mathcal{V}_1$ são os seguintes:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $A, A \Rightarrow B \,/\, B$
4. $A \wedge B \Rightarrow A$
5. $A \wedge B \Rightarrow B$

---

[1] KLEENE, S. C. **Mathematical logic**.

6. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B)$

7. $A \Rightarrow A \vee B$

8. $B \Rightarrow A \vee B$

9. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$

10. $°A \wedge B° \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$

11. $A° \wedge B° \Rightarrow (A \Rightarrow B)° \wedge (A \wedge B)° \wedge (A \vee B)°$

12. $°A \wedge °B \Rightarrow °(A \Rightarrow B) \wedge °(A \wedge B) \wedge °(A \vee B)$

13. $A° \Rightarrow (\neg A)°$

14. $°A \Rightarrow °(\neg A)$

15. $\neg^*\neg^*A \Rightarrow A$

16. $A \vee \neg^*A$

Lema 3.2: $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ para toda f.b.f. $\mathcal{A}$.

Prova:

Conforme demonstração clássica usual[2].

Proposição 3.3 (Teorema da Dedução): Se Γ é um conjunto de f.b.f. e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são f.b.f., e $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Em particular, se $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, então $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

---

[2] MENDELSON, **Introduction to mathematical logic**. p. 30.

Prova:

Conforme demonstração clássica usual[3].

Proposição 3.4: $\mathcal{V}_o$ um subsistema próprio de $\mathcal{V}_1$.

Proposição 3.5: A negação forte de $\mathcal{V}_1$ ($\neg^*$) tem todas as propriedades da negação clássica.

Proposição 3.6: Suponha-se que as fórmulas de $\Gamma \cup \{ F \}$ são fórmulas de C_o (o Cálculo Proposicional Clássico), cujas componentes atômicas são $P_1, ..., P_n$. Se $\Gamma \vdash_{Co} F$, então $P_1^+, ..., P_n^+, \Gamma \vdash_{\mathcal{V}_1} F$.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.5.

Proposição 3.7: Admita-se ser A uma fórmula de C_o e A* a fórmula obtida de A pela substituição de $\neg$ por $\neg^*$. Se $\vdash_{Co} A$, então $\vdash_{\mathcal{V}_1} A^*$.

---

[3] *Idem*, pp. 30-31.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.6.

Proposição 3.8: Se $\vdash$ A na lógica positiva clássica, então $\vdash$ A em $\mathcal{V}_1$.

Proposição 3.9: Além dos esquemas e das regras da Proposição 2.8, provamos em $\mathcal{V}_1$ entre outros, os seguintes esquemas.

(a) $°A \vee (A \wedge \neg A)$
(b) $A \Rightarrow (3\neg A \Rightarrow A)$
(c) $A \wedge \neg A \wedge A° \Rightarrow B$
(d) $A \vee A°$
(e) $°A \vee A°$

Proposição 3.10: $\mathcal{V}_1$ finitamente trivializável.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.9.

3.2. A Semântica de $\mathcal{V}_1$

Def. 3.11: Seja $|\mathcal{V}_1|$ o conjunto das f.b.f de $\mathcal{V}_1$. Seja Γ qualquer subconjunto de $|\mathcal{V}_1|$. O conjunto $\{ A \in |\mathcal{V}_1| : \Gamma \vdash A \}$ é denotado por $|\Gamma|$.

Def. 3.12: O conjunto Γ de fórmulas é dito ser trivial em $\mathcal{V}_1$ se $\mathbb{F} = |\Gamma|$; caso contrário, Γ é chamado não trivial.

Def. 3.13: Γ é um conjunto maximal não trivial; se é não trivial e, para todo A, se $A \notin \Gamma$, então $\Gamma \cup \{ A \}$ é trivial.

Proposição 3.14: Se Γ é maximal não trivial, então:

(a) $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

(b) $A \in \Gamma \Rightarrow \neg^*A \notin \Gamma$

(c) $\neg^*A \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$

(d) $A \in \Gamma$ ou $\neg^*A \in \Gamma$

(e) $\vdash A \Rightarrow A \in \Gamma$

(f) $A \wedge A^\circ \in \Gamma \Rightarrow \neg A \notin \Gamma$

(g) $\neg A \wedge A^\circ \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$

(h) $A \wedge \neg A \in \Gamma \Rightarrow A^\circ \notin \Gamma$

(i) $A^\circ \in \Gamma \Rightarrow A \wedge \neg A \notin \Gamma$

(j) $A, A \Rightarrow B \in \Gamma \Rightarrow B \in \Gamma$

(l) $A \Rightarrow B \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$

Prova:

(b)

(1) Por enunciação, Γ é maximal não trivial.

(2) Seja $A \in \Gamma$.

(3) Seja, por absurdo, $\neg^* A \in \Gamma$.

(4) Então, por 2 e Prop. 3.14(a), $\Gamma \vdash A$.

(5) Por 3 e Prop. 3.14(a), $\Gamma \vdash \neg^* A$.

(6) Por 5 e Def. 3.1(d), $\Gamma \vdash A° \wedge (A \Rightarrow \neg A)$.

(7) Oras, por P. 4, $A° \wedge (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A°$.

(8) Logo, por 7 e Prop. 1.8(b), $\vdash A° \wedge (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A°$.

(Consequentemente, $\Gamma \vdash A° \wedge (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A°$).

(9) Por 6, 8 e P. 3, $\Gamma \vdash A°$.

(10) Por P. 5, $A° \wedge (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg A)$.

(11) Por 10 e Prop. 1.8(b), $\vdash A° \wedge (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg A)$

(Consequentemente, $\Gamma \vdash A° \wedge (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg A)$).

(12) Por 6, 11 e P. 3, $\Gamma \vdash A \Rightarrow \neg A$.

(13) Por 4, 12 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A$.

(14) Por P. 6, $\neg A \Rightarrow (A° \Rightarrow \neg A \wedge A°)$.

(15) Por 14 e Prop. 1.8(b), $\Gamma \vdash \neg A \Rightarrow (A° \Rightarrow \neg A \wedge A°)$

(Consequentemente, $\Gamma \vdash \neg A \Rightarrow (A° \Rightarrow \neg A \wedge A°)$).

(16) Por 13, 15 e P.3, $\Gamma \vdash A^\circ \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ$.

(17) Por 9, 16 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A \wedge A^\circ$.

(18) Por P.6, $A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^\circ)$.

(19) Por 18 e Prop. 1.8(b), $\vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^\circ)$

(Consequentemente, $\Gamma \vdash A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^\circ)$).

(20) Por 4, 19 e P. 3, $\Gamma \vdash \neg A \wedge A^\circ \Rightarrow A \wedge \neg A \wedge A^\circ$.

(21) Por 17, 20 e P. 3, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A^\circ$.

(22) Ora, por Prop. 3.9(c), $\vdash A \wedge \neg A \wedge A^\circ \Rightarrow B$

(Consequentemente, $\Gamma \vdash A \wedge \neg A \wedge A^\circ \Rightarrow B$).

(23) Então, por 21, 22 e P. 3, $\Gamma \vdash B$; o que, por 1 e Def. 3.13, é impossível.

(24) Portanto, $\neg^* A \notin \Gamma$.

(d)

(1) Por enunciação, Γ é maximal não trivial.

(2) Suponha-se, por absurdo, que $A \notin \Gamma$ e $\neg^* A \notin \Gamma$.

(3) Assim, por 2, $A \notin \Gamma$.

(4) E, também por 2, $\neg^* A \notin \Gamma$.

(5) Por 1, 3 e Def. 3.13, $\Gamma, A \vdash B$.

(6) Por 1, 4 e Def. 3.13, $\Gamma, \neg * A \vdash B$.

(7) Por 5 e Prop. 3.3, $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$.

(8) Por 6 e Prop. 3.3, $\Gamma \vdash \neg * A \Rightarrow B$.

(9) Por P. 9, $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg * A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee \neg * A) \Rightarrow B))$.

(10) Por 9 e Prop. 1.8(b), $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg * A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee \neg * A) \Rightarrow B))$

(Consequentemente, $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg * A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee \neg * A) \Rightarrow B))$).

(11) Logo, por 7, 10 e P. 3, $\Gamma \vdash (\neg * A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \vee \neg * A) \Rightarrow B)$.

(12) Por 8, 11 e P. 3, $\Gamma \vdash (A \vee \neg * A) \Rightarrow B$.

(13) Ora, por P. 16, $A \vee \neg * A$.

(14) Por 13 e Prop. 1.8(b), $\vdash A \vee \neg * A$

(Consequentemente, $\Gamma \vdash A \vee \neg * A$).

(15) Por 12, 14 e P. 3, $\Gamma \vdash B$; o que, por 1 e Def. 3.13, é impossível.

(16) Portanto, $A \in \Gamma$ ou $\neg * A \in \Gamma$.

Def. 3.15: Uma **valoração** de $|\mathcal{V}_1|$ uma função ν: $|\mathcal{V}_1| \to \{0, 1\}$, tal que:

1. $\mathcal{v}(A \Rightarrow B) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{v}(A) = 0$ ou $\mathcal{v}(B) = 1$

2. $\mathcal{v}(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(B) = 1$

3. $\mathcal{v}(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{v}(A) = 1$ ou $\mathcal{v}(B) = 1$

4. $\mathcal{v}(A^\circ) = \mathcal{v}(B^\circ) = 1 \Rightarrow \mathcal{v}((A \Rightarrow B)^\circ) = \mathcal{v}((A \wedge B)^\circ) = = \mathcal{v}((A \vee B)^\circ) = 1$

5. $\mathcal{v}(^\circ A) = \mathcal{v}(^\circ B) = 1 \Rightarrow \mathcal{v}(^\circ(A \Rightarrow B)) = \mathcal{v}(^\circ(A \wedge B)) = = \mathcal{v}(^\circ(A \vee B)) = 1$

6. $\mathcal{v}(A^\circ) = 1 \Rightarrow \mathcal{v}((\neg A)^\circ) = 1$

7. $\mathcal{v}(^\circ A) = 1 \Rightarrow \mathcal{v}(^\circ(\neg A)) = 1$

8. $\mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(\neg A) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{v}(A^\circ) = 0$.

Lema 3.16: Se $\mathcal{v}$ é uma valoração para $\mathcal{V}_I$, então $\mathcal{v}(A) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{v}(\neg{*}A) = 0$.

Prova:

1º lado:

(1) Seja $\mathcal{v}$ uma valoração para $\mathcal{V}_I$.

(2) Seja $\mathcal{v}(A) = 1$.

(3) Seja, por absurdo, $\mathcal{v}(\neg{*}A) = 1$.

(4) Por 3 e Def. 3.1(d), $\mathcal{v}(A^\circ \wedge A \Rightarrow \neg A) = 1$.

(5) Por 4 e Def. 3.15(2), $\mathcal{v}(A^\circ) = 1$ e $\mathcal{v}(A \Rightarrow \neg A) = 1$.

(6) Por 4 e Def. 3.15(1), $\mathcal{v}(A^\circ) = 1$ e $\mathcal{v}(A) = 0$ ou $\mathcal{v}(\neg A) = 1$.

(7) Ora, como está fixado em 2 que $\mathcal{v}(A) = 1$, então, por 2 e 6, tem-se que $\mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(\neg A) = \mathcal{v}(A^\circ) = 1$; o que contraria a cláusula 8 da Def. 3.15.

(8) Por 7, $\mathcal{v}$ não é uma valoração para $\mathcal{V}_1$; o que, por 1, é impossível.

(9) Logo, por 1-8, $\mathcal{v}(\neg{*}A) = 0$.

2º lado:

(1) Seja $\mathcal{v}$ uma valoração para $\mathcal{V}_1$.

(2) Seja $\mathcal{v}(\neg{*}A) = 0$.

(3) Seja, por absurdo, $\mathcal{v}(A) = 0$.

(4) Por 2 e Def. 3.1(d), $\mathcal{v}(A^\circ \wedge (A \Rightarrow \neg A)) = 0$.

(5) Por 4 e Def. 3.15(2), $\mathcal{v}(A^\circ) = 0$ ou $\mathcal{v}(A \Rightarrow \neg A) = 0$.

(6) Por 5 Def. 3.15(1), $\mathcal{v}(A^\circ) = 0$, ou $\mathcal{v}(A) = 1$ e $\mathcal{v}(\neg A) = 0$.

(7) Ora, como está fixado em 3 que $\mathcal{v}(A) = 0$, então, por 3 e 6, tem-se que $\mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(A^\circ) = 0$; o que contraria a cláusula 8 da Def. 3.15.

(8) Por 7, ν não é uma valoração para $\mathcal{V}_1$ o que, por 1, é impossível.

(9) Logo, por 1-8, $\nu(A) = 1$.

Def. 3.17: Uma f.b.f. A é dita ser válida em $\mathcal{V}_1$ se, para cada valoração ν, $\nu(A) = 1$. Uma valoração ν é um modelo do conjunto Γ se $\nu(A) = 1$ para toda f.b.f. $A \in \Gamma$. Se cada modelo de Γ é um modelo de $\{A\}$, então escrevemos $\Gamma \models A$. Em particular, $\models A$ significa que A é válida.

Lema 3.18: Se ν é uma valoração para $\mathcal{V}_1$, então, se $\nu(A) = \nu(A \Rightarrow B) = 1$, então $\nu(B) = 1$.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.17.

Lema 3.19: Se ν é uma valoração para $\mathcal{V}_1$ então, se A é um axioma de $\mathcal{V}_1$ então $\nu(A) = 1$.

Prova:

(1) Seja ν uma valoração para $\mathcal{V}_1$.

(2) Seja A um axioma de $\mathcal{V}_1$.

(3) Consideremos, então, os seguintes casos:

Caso 1: A é um dos axiomas 1-9 de $\mathcal{V}_1$.

(Demonstração análoga ao Caso 1 do Lema 2.18.)

Caso 2: A é da forma °A ∧ B° ∧ (A ⇒ B) ∧ (A ⇒ ¬B) ⇒ ¬A.

(Demonstração análoga ao Caso 2 do Lema 2.18.)

Caso 3: A é da forma (A° ∧ B°) ⇒ ((A ⇒ B)° ∧ (A ∧ B)° ∧ (A ∨ B)°).

(Demonstração análoga ao Caso 3 do Lema 2.18.)

Caso 4: A é da forma °A ⇒ °(¬A).

(Demonstração análoga ao Caso 4 do Lema 2.18.)

Caso 5: A é da forma ¬∗¬∗A ⇒ A.

(5.1) Seja ν(¬∗¬∗A ⇒ A) = 0.

(5.2) Por 5.1 e Def. 3.15(1), ν(¬∗¬∗A) = 1 e ν(A) = 0.

(5.2.1) Por 5.2, $\mathcal{V}(\neg*\neg*A) = 1$, e

(5.2.2) Por 5.2, $\mathcal{V}(A) = 0$.

(5.3) Por 5.2.1 e Def. 3.1(d), $\mathcal{V}(\neg*(A° \wedge (A \wedge \neg A)) = 1$.

(5.4) Por 5.3 e Def. 3.1(d), $\mathcal{V}((A° \wedge (A \Rightarrow \neg A))° \wedge ((A° \wedge (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg(A° \wedge (A \Rightarrow \neg A)))) = 1$.

(5.5) Por 5.4 e Def. 3.15(2), $\mathcal{V}((A° \wedge (A \Rightarrow \neg A))°) = 1$ e $\mathcal{V}((A° \wedge (A \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg(A° \wedge (A \Rightarrow \neg A))) = 1$.

(5.6) Por 5.5 e Def. 3.15(1), $\mathcal{V}((A° \wedge (A \Rightarrow \neg A))°) = 1$, e $\mathcal{V}(A° \wedge (A \Rightarrow \neg A)) = 0$ ou $\mathcal{V}(\neg(A° \wedge (A \Rightarrow \neg A))) = 1$.

(5.7) Ora, sendo, por 5.2.2, $\mathcal{V}(A) = 0$, então:

(5.7.1) Por Def. 3.15(8), $\mathcal{V}(A°) \neq 0$; isto é, $\mathcal{V}(A°) = 1$;

(5.7.2) Por Def. 3.15(1), $\mathcal{V}(A \Rightarrow \neg A) \neq 0$; isto é, $\mathcal{V}(A \Rightarrow \neg A) = 1$.

(5.8) Logo, por 5.7, $\mathcal{V}(A° \wedge (A \Rightarrow \neg A)) \neq 0$.

(5.9) Assim, por 5.6 e 5.8, $\mathcal{V}((A° \wedge (A \Rightarrow \neg A))°) = \mathcal{V}(\neg(A° \wedge (A \Rightarrow \neg A))) = 1$; o que contraria a Def. 3.15(8).

(5.10) Por 5.9 e Def. 3.17, $\mathcal{v}$ não é uma valoração para $\mathcal{V}_1$ o que, por 1, é impossível.

(5.11) Portanto, por 5.1-5.10, $\mathcal{v}(\neg*\neg*A \Rightarrow A) = 1$.

(4) Portanto, $\mathcal{v}(A) = 1$.

Proposição 3.20 (Teorema da Correção): Se A é uma consequência de Γ, então cada modelo de Γ é um modelo de {A}.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.19.

Def. 3.21: Um conjunto Γ é dito ser enumerável se, e somente se, existir uma correspondência biunívoca entre Γ e ⌋ = {1, 2, 3, ...}.

Lema 3.22: O conjunto das fórmulas de $\mathcal{V}_1$ é enumerável.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.21.

Lema 3.23 (Lema de Lindenbaum): Se Γ é não trivial, então Γ está contido em um conjunto maximal não trivial.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.22.

Lema 3.24: Todo conjunto maximal não trivial de fórmulas tem um modelo.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.23. Observe-se, no entanto, a necessidade de adaptação da função f (de modo a satisfazer à modificação na cláusula 8 da Def. 3.15) para uma valoração de $\mathcal{V}_1$.

Proposição 3.25 (Teorema da Completude): Se cada modelo de Γ é um modelo de {A}, então A é uma consequência de Γ.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.24.

Proposição 3.26: Em $\mathcal{V}_1$, os seguintes esquemas (entre outros) não são válidos.

(a) $A \Rightarrow \neg\neg A$

(b) $\neg\neg A \Rightarrow A$

(c) $A \vee \neg A$

(d) $\neg(A \wedge \neg A)$

Prova:

(a)

(1) Seja $\nu(A \Rightarrow \neg\neg A) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 3.15(1), $\nu(A) = 1$ e $\nu(\neg\neg A) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 3.15.

(3) Logo, por 1-2, $A \Rightarrow \neg\neg A$ não é válido em $\mathcal{V}_1$.

(b)

(1) Seja $\nu(\neg\neg A \Rightarrow A) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 3.15(1), $\nu(\neg\neg A) = 1$ e $\nu(A) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 3.15.

(3) Logo, por 1-2, $\neg\neg A \Rightarrow A$ não é válido em $\mathcal{V}_1$.

(c)

(1) Seja $\mathcal{V}(A \vee \neg A) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 3.15(3), $\mathcal{V}(A) = 0$ e $\mathcal{V}(\neg A) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 3.15.

(3) Logo, por 1-2, $A \vee \neg A$ não é válido em $\mathcal{V}_1$.

(d)

(1) Seja $\mathcal{V}(\neg(A \wedge \neg A)) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 3.1(a), $\mathcal{V}(A^\circ) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 3.15.

(3) Logo, por 1-2, $\neg(A \wedge \neg A)$ não é válido em $\mathcal{V}_1$.

Proposição 3.27: $\mathcal{V}_o$ um subsistema próprio de $\mathcal{V}_1$.

Prova:

- Mostrar que todos os resultados que são válidos em $\mathcal{V}_o$ são válidos em $\mathcal{V}_1$; mas que, ao contrário, nem todos os resultados válidos em $\mathcal{V}_1$ o são em $\mathcal{V}_o$.

- Isto significa mostrar que todos os resultados de $\mathcal{V}_1$, ou são postulados de $\mathcal{V}_1$, ou podem ser mostrados válidos a partir da valoração ν atribuída a $\mathcal{V}_1$.
- Ora, por construção de $\mathcal{V}_1$, os postulados 1-14 de $\mathcal{V}_0$ são postulados de $\mathcal{V}_1$. Assim, por Lema 3.19 e Def. 3.17, os postulados 1-14 de $\mathcal{V}_0$ são válidos em $\mathcal{V}_1$.
- O postulado 15 de $\mathcal{V}_0$, no entanto, não é postulado de $\mathcal{V}_1$.
- Provar, então: (a) que o postulado 15 de $\mathcal{V}_0$ é válido em $\mathcal{V}_1$; e, (b) além disso, que ao menos uma f.b.f. válida em $\mathcal{V}_1$ não é válida em $\mathcal{V}_0$.

(a) $\neg{*}\neg{*}A \Rightarrow A$, em que $\neg{*}A =_{\mathrm{Def}} A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ$ é válida em $\mathcal{V}_1$.

(1) Seja ν uma valoração para $\mathcal{V}_1$.

(2) Seja $\nu(\neg{*}\neg{*}A \Rightarrow A) = 0$, em que $\neg{*}A =_{\mathrm{Def}} A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ$.

(3) Por 2, $\nu(\neg{*}(A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ) \Rightarrow A) = 0$.

(4) Por 3, $\mathcal{V}(((A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ) \wedge (A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ)^\circ) \Rightarrow A) = 0$.

(5) Por 4 e Def. 3.15(1), $\mathcal{V}(((A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ) \wedge (A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ)^\circ) = 1$ e $\mathcal{V}(A) = 0$.

(6) Por 5 e Def. 3.15(1), $\mathcal{V}(A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ) = 0$ ou $\mathcal{V}(\neg(A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ) \wedge (A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ)^\circ) = 1$, e $\mathcal{V}(A) = 0$.

(7) Ora, se $\mathcal{V}(A) = 0$, então, por Def. 3.15(1), $\mathcal{V}(A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ) \neq 0$.

(8) Por 6 e 7, então, $\mathcal{V}(\neg(A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ)) = \mathcal{V}((A \Rightarrow \neg A \wedge A^\circ)^\circ) = 1$; o que contraria a cláusula 8 da Def. 3.15.

(9) Logo, por 8 e Def. 3.17, $\mathcal{V}$ não é uma valoração para $\mathcal{V}_I$; o que, por 1, é impossível.

(10) Logo, por 1-9, $\mathcal{V}(\neg{*}\neg{*}A \Rightarrow A) = 1$.

(b)

Caso 1:

(1.1) Seja $\mathcal{V}$ uma valoração para $\mathcal{V}_o$.

(1.2) Seja $\mathcal{V}(^\circ A \vee (A \wedge \neg A)) = 0$.

(1.3) Por 1.2 e Def. 2.14(3), $\mathcal{V}(^\circ A) = 0$ e $\mathcal{V}(A \wedge \neg A) = 0$.

(1.4) Por 1.3 e Def. 2.1(b), $\nu(A \vee \neg A) = 0$ e $\nu(A \wedge \neg A) = 0$.

(1.5) Por 1.4 e Def. 2.14(3), $\nu(A) = \nu(\neg A) = 0$ e $\nu(A \wedge \neg A) = 0$.

(1.6) Por 1.4 e Def. 2.14(2), $\nu(A) = \nu(\neg A) = 0$ e $\nu(A) = 0$ ou $\nu(\neg A) = 0$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 2.14 de valoração em $\mathcal{V}_o$.

Caso 2:

(2.1) Seja ν' uma valoração para $\mathcal{V}_1$.

(2.2) Seja $\nu'(°A \vee (A \wedge \neg A)) = 1$.

(2.3) Por 2.2 e Def. 3.15(3), $\nu'(°A) = 1$ ou $\nu'(A \wedge \neg A) = 1$.

(2.4) Por 2.3 e Def. 3.1(b), $\nu'(A \vee \neg A) = 1$ ou $\nu'(A \wedge \neg A) = 1$.

(2.5) Por 2.4 e 3.15(3), $\nu'(A) = 1$ ou $\nu'(\neg A) = 1$, ou $\nu'(A) = \nu'(\neg A) = 1$; o que não contraria nenhuma cláusula da Def. 3.15 de valoração em $\mathcal{V}_1$.

$\therefore$ A f.b.f. $°A \vee (A \wedge \neg A)$ é válida em $\mathcal{V}_1$, mas não é válida em $\mathcal{V}_o$.

$\therefore$ Como todos os axiomas de $\mathcal{V}_o$ são válidos em $\mathcal{V}_1$, então, por Prop. 3.25, todos os axiomas de $\mathcal{V}_o$ são demonstráveis em $\mathcal{V}_1$. Além disso, nem todos os resultados válidos em $\mathcal{V}_o$ são válidos em $\mathcal{V}_1$. Logo, $\mathcal{V}_o$ um subsistema próprio de $\mathcal{V}_1$.

4. *O Sistema Axiomático Formal* $\mathcal{V}_o$'

Este é o sistema correspondente ao caso em que a lei do terceiro excluído e a lei de contradição não são válidas, mas também não são equivalentes. É, na verdade, uma versão mais "elegante" do Sistema Axiomático Formal $\mathcal{V}_o$. Neste capítulo, como nos anteriores, a terminologia, a notação e as referências a C_o adotadas são as de Kleene[1].

4.1. A sintaxe de $\mathcal{V}_o$'

Def. 4.1: (a) $A^\circ =_{\text{Def}} \neg(A \wedge \neg A)$

(b) $A^* =_{\text{Def}} A \vee \neg A$

(c) $\neg^*A =_{\text{Def}} A \Rightarrow (\neg A \wedge A^\circ)$

Os postulados de $\mathcal{V}_o$' são os seguintes:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $A, A \Rightarrow B / B$

---

[1] KLEENE, S. C. **Mathematical logic**.

4. $A \wedge B \Rightarrow A$

5. $A \wedge B \Rightarrow B$

6. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B)$

7. $A \Rightarrow A \vee B$

8. $B \Rightarrow A \vee B$

9. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$

10. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

11. $A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$

12. $A^{\circ} \wedge B^{\circ} \Rightarrow (\neg A)^{\circ} \wedge (A \Rightarrow B)^{\circ} \wedge (A \wedge B)^{\circ} \wedge (A \vee B)^{\circ}$

13. $A^{*} \wedge B^{*} \Rightarrow (\neg A)^{*} \wedge (A \Rightarrow B)^{*} \wedge (A \wedge B)^{*} \wedge (A \vee B)^{*}$

Lema 4.2: $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ para toda f.b.f. $\mathcal{A}$.

Prova:

Conforme demonstração clássica usual[2].

Proposição 4.3 (Teorema da Dedução): Se Γ é um conjunto de f.b.f. e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são f.b.f., e $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Em particular, se $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, então $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

---

[2] MENDELSON, **Introduction to mathematical logic.** p. 30.

Prova:

Conforme demonstração clássica usual[3].

Proposição 4.4: $\mathcal{V}_o$' é equivalente a $\mathcal{V}_o$.

Proposição 4.5: A negação forte de $\mathcal{V}_o$' ($\neg^*$) tem todas as propriedades da negação clássica.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.4.

Proposição 4.6: Suponha-se que as fórmulas de $\Gamma \cup \{ F \}$ são fórmulas de C_o (o Cálculo Proposicional Clássico), cujas componentes atômicas são $P_1, ..., P_n$. Se $\Gamma \vdash_{Co} F$, então $P^+_1, ..., P^+_n, \Gamma \vdash F$.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.5.

[3] *Idem*, pp. 30-31.

Proposição 4.7: Admita-se ser A uma fórmula de C_o e A* a fórmula obtida de A pela substituição de $\neg$ por $\neg^*$. Se $\vdash_{C_o}$ A, então $\vdash_{\mathcal{V}_o'}$ A*.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.6.

Proposição 4.8: Se $\vdash$ A na lógica positiva clássica, então $\vdash$ A em $\mathcal{V}_o$'.

Proposição 4.9: Em $\mathcal{V}_o$', provamos os seguintes esquemas e regras:

(a) $A \wedge B^\circ \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$

(b) Se $\vdash A$, então $\vdash {}^\circ A$

(c) $A^\circ \wedge {}^\circ B, \neg B \Rightarrow \neg A \vdash A \Rightarrow B$

(d) $A^\circ \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$

(e) $A \wedge \neg A \wedge A^\circ \Rightarrow B$

(f) $A^\circ \vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

(g) ${}^\circ A \vdash {}^\circ(A \wedge \neg A)$

(h) $A \vee (A \Rightarrow B)$

(i) $A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$

(j) $A^+ \Rightarrow (A \equiv \neg\neg A)$

(l) $A^\circ \Rightarrow (A \wedge \neg A)^\circ$

(m) $A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B \wedge B^\circ) \Rightarrow \neg A$

(n) $A \Rightarrow (\neg A \vee \neg\neg A)$

(o) $A^\circ, A \Rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

(p) $A^\circ \vdash (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$

(q) $(A \vee \neg A) \vee (A \vee \neg\neg A)$

(r) $A \wedge \neg^* A \vdash B$

Proposição 4.10: $\mathcal{V}_o$' é finitamente trivializável.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.9. (Tome-se, como exemplo, a fórmula $A \wedge \neg^* A \Rightarrow B$.)

4.2. A Semântica de $\mathcal{V}_o$'

Def. 4.11: Seja $|\mathcal{V}_o'|$ o conjunto das f.b.f. de $\mathcal{V}_o$'. Seja Γ qualquer subconjunto de $|\mathcal{V}_o'|$. O conjunto $\{A \in |\mathcal{V}_o'| : \Gamma \vdash A\}$ é denotado por $|\Gamma|$.

Def. 4.12: O conjunto Γ de f.b.f. é dito ser trivial em $\mathcal{V}_o$' se $|\mathcal{V}_o'| = |\Gamma|$; caso contrário, Γ é dito ser não trivial.

Def. 4.13: Γ é um conjunto maximal não trivial; se é não trivial e, para todo $\mathcal{A}$, se $\mathcal{A} \notin \Gamma$, então $\Gamma \cup \{A\}$ é trivial.

Proposição 4.14: Se Γ é maximal não trivial, então:

(a) $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

(b) $A \in \Gamma \Rightarrow \neg^*A \notin \Gamma$

(c) $\neg^*A \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$

(d) $A \in \Gamma$ ou $\neg^*A \in \Gamma$

(e) $\vdash A \Rightarrow A \in \Gamma$

(f) $A \wedge A^\circ \in \Gamma \Rightarrow \neg A \notin \Gamma$

(g) $\neg A \wedge A^\circ \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$

(h) $A \wedge \neg A \in \Gamma \Rightarrow A^\circ \notin \Gamma$

(i) $A^\circ \in \Gamma \Rightarrow A \wedge \neg A \notin \Gamma$

(j) $A, A \Rightarrow B \in \Gamma \Rightarrow B \in \Gamma$

(l) $A \Rightarrow B \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$

Def. 4.15: Uma valoração de $\mathcal{V}_o$' é uma função ν: $|\mathcal{V}_o'| \rightarrow \{0, 1\}$, tal que:

1. $\nu(A \Rightarrow B) = 1 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$ ou $\nu(B) = 1$

2. $\nu(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \nu(A) = \nu(B) = 1$

3. $\nu(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow \nu(A) = 1$ ou $\nu(B) = 1$

4. $\mathcal{v}(A\ ) = \mathcal{v}(B\ ) = 1 \Rightarrow \mathcal{v}((\neg A)\ ) = \mathcal{v}((A \Rightarrow B)\ ) = \mathcal{v}((A \wedge B)\ ) = \mathcal{v}((A \vee B)\ ) = 1$

5. $\mathcal{v}(\ A) = \mathcal{v}(\ B) = 1 \Rightarrow \mathcal{v}(°(\neg A)) = \mathcal{v}(°(A \Rightarrow B)) = \mathcal{v}(°(A \wedge B)) = \mathcal{v}(°(A \vee B)) = 1$

6. $\mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(\neg A) = 1 \Rightarrow \mathcal{v}(A\ ) = 0$.

Lema 4.16: Se $\mathcal{v}$ é uma valoração para $\mathcal{V}_o$', então $\mathcal{v}(A) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{v}(\neg^* A) = 0$.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.15.

Def. 4.17: Uma f.b.f. A é dita ser válida em $\mathcal{V}_o$' se, para cada valoração $\mathcal{v}$, $\mathcal{v}(A) = 1$. Uma valoração $\mathcal{v}$ é um modelo do conjunto Γ se $\mathcal{v}(A) = 1$ para toda f.b.f. $A \in \Gamma$. Se cada modelo de Γ é um modelo de {A}, então escrevemos $\Gamma \models A$. Em particular, $\models A$ significa que A é válida.

Lema 4.18: Se $\mathcal{v}$ é uma valoração para $\mathcal{V}_o$' então, se $\mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(A \Rightarrow B) = 1$, então $\mathcal{v}(B) = 1$.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.17.

Lema 4.19: Se $\mathcal{v}$ é uma valoração para $\mathcal{V}_o$' então; se A é um axioma de $\mathcal{V}_o$', então $\mathcal{v}$(A) = 1.

Prova:

(1) Seja $\mathcal{v}$ uma valoração para $\mathcal{V}_o$'.

(2) Seja A um axioma de $\mathcal{V}_o$'.

(3) Consideremos, então, os seguintes casos:

Caso 1: A é um dos axiomas 1-9 de $\mathcal{V}_o$'.

(1.1) Os axiomas 1-9 de $\mathcal{V}_o$' são os mesmos axiomas que os do Cálculo Proposicional Clássico.

(1.2) Além disso, a valoração atribuída às f.b.f. de $\mathcal{V}_o$', quando referida aos conectivos $\Rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$, é clássica. Então, claramente, $\mathcal{v}$(A) = 1 se A assume a forma de algum dos axiomas 1-9 de $\mathcal{V}_o$'.

Caso 2: A é da forma $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$.

(2.1) Seja $\mathcal{v}(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) = 0$.

(2.2) Por 2.1 e Def. 4.15(1), $\nu((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) = 1$ e $\nu(A) = 0$.

(2.3) Por 2.2 e Def. 4.15(1), $\nu(A \Rightarrow B) = 0$ ou $\nu(A) = 1$, e $\nu(A) = 0$.

(2.4) Ora, tem-se fixado que $\nu(A) \neq 1$.

(2.5) Logo, por 2.3 e 2.4, $\nu(A \Rightarrow B) = 0$ e $\nu(A) = 0$.

(2.6) Por 2.5 e Def. 4.15(1), $\nu(A) = 1$, $\nu(B) = 0$ e $\nu(A) = 0$.

(2.7) Ora, em 2.6 tem-se que $\nu(A) = 1$ e $\nu(A) \neq 1$, ou, alternativamente, que $\nu(A) = 0$ e $\nu(A) \neq 0$; o que é claramente impossível.

(2.8) Logo, por 2.1-2.7, $\nu(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) = 1$.

Caso 3: A é da forma $A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$.

(3.1) Seja $\nu(A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B) = 0$.

(3.2) Por 3.1 e Def. 4.15(1), $\nu(A \wedge \neg A \wedge A^{\circ}) = 1$ e $\nu(B) = 0$.

(3.3) Por 3.2 e Def. 4.15(2), $\nu(A) = \nu(\neg A) = \nu(A^{\circ}) = 1$; o que, por Def. 4.15(6), é impossível.

(3.4) Logo, por 3.3, ν não é uma valoração para $\mathcal{V}_o$'; o que, por 1, é impossível.

(3.5) Portanto, $\nu(A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B) = 1$.

Caso 4: A é da forma $A° \wedge B° \Rightarrow (\neg A)° \wedge (A \Rightarrow B)° \wedge (A \wedge B)° \wedge (A \vee B)°$.

(4.1) Seja $\mathcal{v}(A° \wedge B° \Rightarrow (\neg A)° \wedge (A \Rightarrow B)° \wedge (A \wedge B)° \wedge (A \vee B)°) = 0$.

(4.2) Por 4.1 e Def. 4.15(1), $\mathcal{v}(A° \wedge B°) = 1$ e $\mathcal{v}((\neg A)° \wedge (A \Rightarrow B)° \wedge (A \wedge B)° \wedge (A \vee B)°) = 0$.

(4.3) Por 4.2 e Def.4.15(2), $\mathcal{v}(A°) = \mathcal{v}(B°) = 1$ e $\mathcal{v}((\neg A)°) \wedge (A \Rightarrow B)° \wedge (A \wedge B)° \wedge (A \vee B)°) = 0$.

(4.4) Por 4.3 e Def. 4.15(2), $\mathcal{v}(A°) = \mathcal{v}(B°) = 1$ e $\mathcal{v}((\neg A)°) = 0$ ou $\mathcal{v}(A \Rightarrow B)° = 0$ ou $\mathcal{v}(A \wedge B)° = 0$ ou $\mathcal{v}(A \vee B)° = 0$; o que, por Def. 4.15(4), é impossível.

(4.5) Então, por 4.4, $\mathcal{v}$ não é uma valoração para $\mathcal{V}_o$'; o que, por 1, é impossível.

(4.6) Logo, por 4.1-4.5, $\mathcal{v}(A° \wedge B° \Rightarrow (\neg A)° \wedge (A \Rightarrow B)° \wedge (A \wedge B)° \wedge (A \vee B)°) = 1$.

(4) Portanto, $\mathcal{v}(A) = 1$.

Proposição 4.20 (Teorema da Correção): Se A é uma consequência de Γ, então cada modelo de Γ é um modelo de {A}.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.19.

Def. 4.21: Um conjunto Γ é dito ser enumerável se, e somente se, existir uma correspondência biunívoca entre Γ e $\rfloor = \{1, 2, 3, ...\}$.

Lema 2.22: O conjunto das fórmulas de $\mathcal{V}_o$' é enumerável.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.21.

Lema 4.23 (Lema de Lindenbaum): Se Γ é não trivial, então Γ está contido em um conjunto maximal não trivial.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.22.

Lema 4.24: Todo conjunto maximal não trivial de fórmulas tem um modelo.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.23. Observe-se que inclusive a função f definida para o Lema 2.23 aplica-se ao presente caso.

Proposição 4.25 (Teorema da Completude): Se cada modelo de Γ é um modelo de $\{\mathcal{A}\}$, então $\mathcal{A}$ é uma consequência de Γ.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.24.

Proposição 4.26: Em $\mathcal{V}_o$', os seguintes esquemas (entre outros) não são válidos.

(a) $(A \vee \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A)$

(b) $°A \vee (A \wedge \neg A)$

(c) $A \vee \neg A$

(d) $A \vee A°$

(e) $\neg(A \wedge \neg A)$

(f) $\neg A \vee A°$

(g) $°A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$

(h) $°A \wedge A°$

Prova:

Análogas às provas da Prop. 2.25.

5. O Sistema Axiomático Formal $\mathcal{V}_1'$

Este é o sistema correspondente ao caso em que, para cada fórmula, a lei do terceiro excluído ou a lei de contradição não é válida, mas não ambas. É, na verdade, uma versão mais "elegante" de $\mathcal{V}_1$. Neste capítulo, como nos anteriores, a terminologia, a notação e a referência a C_o adotadas são as de Kleene[1].

5.1. A Sintaxe de $\mathcal{V}_1'$

Def. 5.1: (a) $A° =_{\text{Def}} \neg(A \wedge \neg A)$

(b) $A^* =_{\text{Def}} A \vee \neg A$

(c) $\neg\, A =_{\text{Def}} A \Rightarrow (\neg A \wedge A°)$

Os postulados de $\mathcal{V}_1'$ são os seguintes:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $A,\ A \Rightarrow B\ /\ B$
4. $A \wedge B \Rightarrow A$

---

[1] KLEENE, S. C. **Mathematical logic**.

5. $A \wedge B \Rightarrow B$

6. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B)$

7. $A \Rightarrow A \vee B$

8. $B \Rightarrow A \vee B$

9. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$

10. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

11. $A \wedge \neg A \wedge A^{\circ} \Rightarrow B$

12. $A^{\circ} \wedge B^{\circ} \Rightarrow (\neg A)^{\circ} \wedge (A \Rightarrow B)^{\circ} \wedge (A \wedge B)^{\circ} \wedge (A \vee B)^{\circ}$

13. $A^* \wedge B^* \Rightarrow (\neg A)^* \wedge (A \Rightarrow B)^* \wedge (A \wedge B)^* \wedge (A \vee B)^*$

14. $A \vee A^{\circ}$

Lema 5.2: $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ para toda f.b.f. $\mathcal{A}$.

Prova:

Conforme demonstração clássica usual[2].

Proposição 5.3 (Teorema da Dedução): Se Γ é um conjunto de f.b.f. e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são f.b.f., e $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, então $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Em particular, se $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, então $\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

---

[2] MENDELSON, **Introduction to mathematical logic.** p. 30.

Prova:

Conforme demonstração clássica usual[3].

Proposição 5.4: $\mathcal{V}_1$' é equivalente a $\mathcal{V}_1$.

Proposição 5.5: A negação forte de $\mathcal{V}_1$ ($\neg*$) tem todas as propriedades da negação clássica.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.4.

Proposição 5.6: Suponha-se que as fórmulas de $\Gamma \cup \{ F \}$ são fórmulas de C_o (o Cálculo Proposicional Clássico), cujas componentes atômicas são $P_1, ..., P_n$. Se $\Gamma \vdash_{Co} F$, então $P^+_1, ..., P^+_n, \Gamma \vdash F$.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.5.

---

3 *Idem*, pp. 30-31.

Proposição 5.7: Admita-se ser A uma fórmula de C_o e A*, a fórmula obtida de A pela substituição de ¬ por ¬*. Se $\vdash_{Co}$ A, então $\vdash_{\mathcal{V}_1'}$ A*.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.6.

Proposição 5.8: Se $\vdash$ A na lógica positiva clássica, então $\vdash$ A em $\mathcal{V}_1$'.

Proposição 5.9: Em $\mathcal{V}_1$', provamos os seguintes esquemas e regras:

(a) $°A \vee (A \wedge \neg A)$

(b) $A \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$

(c) $A \wedge \neg A \wedge A° \Rightarrow B$

(d) $°A \vee A°$

Prova:

Análogas às provas exibidas em Prop. 3.9.

Proposição 5.10: $\mathcal{V}_1$' é finitamente trivializável.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.9.

5.2. A Semântica de $\mathcal{V}_1$'

Def. 5.11: Seja $|\mathcal{V}_1'|$ o conjunto das f.b.f. de $\mathcal{V}_1'$. Seja Γ qualquer subconjunto de $|\mathcal{V}_1'|$. O conjunto $\{\mathcal{A} \in |\mathcal{V}_1'|: \Gamma \vdash \mathcal{A}\}$ é denotado por $|\Gamma|$.

Def. 5.12: O conjunto Γ de f.b.f. é dito ser trivial em $\mathcal{V}_1'$ se $|\mathcal{V}_1'| = |\Gamma|$; caso contrário, Γ é dito ser não trivial.

Def. 5.13: Γ é um conjunto maximal não trivial; se é não trivial e, para todo $\mathcal{A}$, se $A \notin \Gamma$, então $\Gamma \cup \{A\}$ é trivial.

Proposição 5.14: Se Γ é maximal não trivial, então:

(a) $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$

(b) $A \in \Gamma \Rightarrow \neg^*A \notin \Gamma$

(c) $\neg^*A \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$

(d) $A \in \Gamma$ ou $\neg^*A \in \Gamma$

(e) $\vdash A \Rightarrow A \in \Gamma$

(f) $A \wedge A^{\circ} \in \Gamma \Rightarrow \neg A \notin \Gamma$

(g) $\neg A \wedge A^{\circ} \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$

(h) $A \wedge \neg A \in \Gamma \Rightarrow A^{\circ} \notin \Gamma$

(i) $A^{\circ} \in \Gamma \Rightarrow A \wedge \neg A \notin \Gamma$

(j) $A, A \Rightarrow B \in \Gamma \Rightarrow B \in \Gamma$

(l) $A \Rightarrow B \in \Gamma \Rightarrow A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$

Prova:

Análogas às provas exibidas em Prop. 2.13.

Def. 5.15: Uma valoração de $\mathcal{V}_1'$ é uma função ν: $|\mathcal{V}_1'| \rightarrow \{0, 1\}$, tal que:

1. $\nu(A \Rightarrow B) = 1 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$ ou $\nu(B) = 1$

2. $\nu(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow \nu(A) = \nu(B) = 1$

3. $\nu(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow \nu(A) = 1$ ou $\nu(B) = 1$

4. $\nu(A^{\circ}) = \nu(B^{\circ}) = 1 \Rightarrow \nu((\neg A)^{\circ}) = \nu((A \Rightarrow B)^{\circ}) = \nu((A \wedge B)^{\circ}) = \nu((A \vee B)^{\circ}) = 1$

5. $\nu(^{\circ}A) = \nu(^{\circ}B) = 1 \Rightarrow \nu(^{\circ}(\neg A)) = \nu(^{\circ}(A \Rightarrow B)) = \nu(^{\circ}(A \wedge B)) = \nu(^{\circ}(A \vee B)) = 1.$

6. $\nu(A) = \nu(\neg A) = 1 \Leftrightarrow \nu(A^{\circ}) = 0.$

Lema 5.16: Se ν é uma valoração para $\mathcal{V}_1$', então ν(A) = 1 $\Leftrightarrow$ ν($\neg$*A) = 0.

Prova:

Análoga à prova do Lema 3.16.

Def. 5.17: Uma f.b.f. A é dita ser válida em $\mathcal{V}_1$' se, para cada valoração ν, ν(A) = 1. Uma valoração ν é um modelo do conjunto Γ se ν(A) = 1 para toda f.b.f. A $\in \Gamma$. Se cada modelo de Γ é um modelo de {A}, então escrevemos $\Gamma \models$ A. Em particular, $\models$ A significa que A é válida.

Lema 5.18: Se ν é uma valoração para $\mathcal{V}_1$' então, se ν(A) = ν(A $\Rightarrow$ B) = 1, então ν(B) = 1.

Prova:

Análoga à prova do Lema 2.17.

Lema 5.19: Se ν é uma valoração para $\mathcal{V}_1$' então; se A é um axioma de $\mathcal{V}_1$' então ν(A) = 1.

Prova:

Análoga à prova do Lema 4.19, exceto pelo axioma 14. Demonstremos, então, que $\mathcal{v}(A \vee A^\circ) = 1$.

(1) Seja $\mathcal{v}(A \vee A^\circ) = 0$.

(2) Por 1 e Def. 5.15(3), $\mathcal{v}(A) = \mathcal{v}(A^\circ) = 0$; o que, por Def. 5.15(6), é impossível.

(3) Logo, por 2, $\mathcal{v}$ não é uma valoração para $\mathcal{V}_1$'; o que, por 1, é impossível.

(4) Portanto, por 1-3, $\mathcal{v}(A \vee A^\circ) = 1$.

∴ Se $\mathcal{v}$ é uma valoração para $\mathcal{V}_1$' e A é um axioma de $\mathcal{V}_1$', então $\mathcal{v}(A) = 1$.

Proposição 5.20 (Teorema da Correção): Se A é uma consequência de Γ, então cada modelo de Γ é um modelo de {A}.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.19.

Def. 5.21: Um conjunto Γ é dito ser enumerável se, e somente se, existir uma correspondência biunívoca entre Γ e ⌋ = {1, 2, 3, ...}.

Lema 5.22: O conjunto das fórmulas de $\mathcal{V}_1$' é enumerável.

Prova:
Análoga à prova do Lema 2.21.

Lema 5.23 (Lema de Lindenbaum): Se Γ é não trivial, então Γ está contido em um conjunto maximal não trivial.

Prova:
Análoga à prova do Lema 2.22.

Lema 5.24: Todo conjunto maximal não trivial de fórmulas tem um modelo.

Prova:
Análoga à prova do Lema 3.24. Observe-se que inclusive a função f definida para aquele Lema, com uma pequena adaptação, aplica-se ao presente caso.

Proposição 5.25 (Teorema da Completude): Se cada modelo de Γ é um modelo de $\{\mathcal{A}\}$, então $\mathcal{A}$ é uma consequência de Γ.

Prova:

Análoga à prova da Prop. 2.24.

Proposição 5.26: Em $\mathcal{V}_1$', os seguintes esquemas (entre outros) não são válidos.

(a) $A \Rightarrow \neg\neg A$

(b) $\neg\neg A \Rightarrow A$

(c) $A \vee \neg A$

(d) $\neg(A \wedge \neg A)$

Prova:

Análoga à prova para a Prop. 3.26.

Posfácio

por Paulo Filipe Alves de Vasconcelos
Universidad de Salamanca
Salamanca, España

O livro que aqui termina não encerra o tema. É, antes, um primeiro convite, uma primeira aproximação. É importante, por esse motivo, terminá-lo com uma provocação, com perguntas por responder em outros lugares, cabendo a nós ser voluntariamente incompletos: a introdução está feita e sabemos que uma introdução não pode nem deve resumir, se não que se posicionar como referência, um facilitador do porvir. São 50 anos de produção paraconsistente, não lhes faltará tema.

Contudo, antes de provocá-los, é preciso dizer que nós, os curiosos que aqui estamos, trazemos conosco uma larga história intelectual marcada pela busca da verdade. O século XX, por outro lado, parece ter deixado vários legados que, ao mesmo tempo em que se multiplicaram em diversos frontes essa busca, esvaziaram de sentido a procura por uma raiz única ou geral, seja esta epistemológica, ontológica ou lógica, que justifique as demais. Se na Antiguidade, pelo menos desde Sócrates, o desejo pela certeza marca uma dicotomia entre o bom, verdadeiro e belo *versus* a pluralidade errônea que se opõe, hoje buscamos e desenvolvemos instrumentos que, sem dever nada em rigor, são capazes de nos guiar dentro das múltiplas formas de atuação possíveis, abertas por esta e desde esta mesma preocupação e produção intelectual e material. Apaga-se o conceito de correto e ganha evidência o de adequado; o de êxito e confiabilidade substitui o de certeza, sem que com isso caiamos nos fossos da arbitrariedade ou do acaso. O avanço teórico e tecnológico que é símbolo de nosso tempo leva consigo essa flexibilização, essa busca pelos matizes que se incorporam e se incluem aos meios não necessariamente dicotômicos e binários, mas sem que nesse trânsito se coloque uma justificativa desde um sentimento ou ideal estético de relativização, tão comum nas últimas décadas.

A necessidade por esse novo tipo de formalização se impõe desde os próprios objetos, problemas e sistemas com os quais nos deparamos. Se os gregos se viram impelidos a buscar o fundamento e a origem do que "é" diante do aparente caos, suas regras para o pensar refletem essa necessidade e projeto de centralização teórica; no nosso universo científico e epistemológico, já existe sensação de confiança e controle o suficiente para que façamos a passagem desde esse recorte do controlável, imutável, seguro e uno, para aquelas outras partes do mundo cuja complexidade não permite tal redutibilidade e onde esse tipo de pensamento é simplesmente insuficiente.

Não por acaso, essas novas regras para o pensar, especificamente as lógicas paraconsistentes e paracompletas, são tão úteis e aplicáveis nos mais novos sistemas e tecnologias, notadamente na informática, justamente atendendo à crescente necessidade de algoritmos e grafos capazes de tomar decisões diante de informações contraditórias, incompletas e/ou imprecisas, sejam essas decisões em sistemas de inteligência artificial, sejam em sistemas robóticos, de computação neural, prospecção de informação de banco de dados ou até mesmo em sistemas de controle de tráfego em grandes cidades.

Em economia, também podemos encontrar aplicações em modelos de teoria dos jogos e em análise de finanças. Na área de engenharia, para além da informática e robótica, temos processadores de imagem e som, controladores de processos de automação e de distribuição/produção de energia elétrica, além do que não podemos esquecer a possibilidade de aplicação em campos da física teórica (principalmente quântica).

Nenhum desses campos de atividade e conhecimento é fundamentalmente dependente dessas lógicas para que realizem suas respectivas funções ou para lograr suas explicações, se não que estas desempenham papel de otimização e aprimoramento: se traduzem em vantagens teóricas e em ganhos de eficiência, eficácia ou precisão. O que todos mantêm em comum é a tendência pela parametrização do vago, difuso ou incerto, pela automatização (normatização) da decisão em situações que antes, desde a forma clássica de pensar, consideraríamos aporias.

Se antes houve a promessa de provocação, é porque o "estado da arte" requer ser provocado, não apenas desde a compreensão, o uso e o domínio do tema neste livro introduzido, mas também desde suas implicações dentro desses usos, tanto teóricos quanto práticos, dentro e fora do âmbito acadêmico. Entendo que *Sistemas lógicos não aléticos* caminha nessa direção, contribuindo à formalização dessa nova explícita, científica e técnica forma de pensar os novos desafios e objetivos de nossa civilização e ciência (como parte integrante dessa civilização). A provocação que deixamos não poderia, desse modo, ser uma que colocasse a possibilidade aqui introduzida como uma continuação inequívoca da tradição que a precede, mas como uma fértil possibilidade, dentre outras, de produzir novidade através do esforço analítico e normalizador, seja dentro da própria lógica seja no desenho de um chip ou um robô. Aprimorando nossos sistemas e máquinas de pensar, quiçá possamos aprender nós mesmos a pensar melhor.

Referências

ABAR, C. A. A. P.; YAMASHITA, M. *et al*. On non-alethic logic: Advances in Intelligent Computing. In: INTERNA-

TIONAL CONFERENCE ON INFORMATION PROCESSING AND MANAGEMENT OF UNCERTAINTY IN KNOWLEDGE-BASED SYSTEMS, 5, 1994, Paris. **Selected Papers...** Berlin; Heidelberg; New York: Springer Nature, 1995. p. 339-347.

ABE, J. M. (Org.). **Tópicos de sistemas inteligentes baseados em lógicas não clássicas**. São Paulo: Instituto de Estudos Avançados, 2016.

ABE, J. M.; BRUNSTEIN, I.; CARVALHO, F. R. Um estudo de tomada de decisão baseado em Lógica paraconsistente anotada: Avaliação do projeto de uma fábrica. **Revista Pesquisa & Desenvolvimento Engenharia de Produção**, Itajubá, n. 1, p. 47-62, dez. 2003.

AKAMA, S. (Org.). **Towards Paraconsistent Engineering**. Basel: Springer AG, 2016.

BÉZIAU, Jean-Yves. The Future of Paraconsistent Logic. **Logical Studies**, 2, p. 1-23, 1999.

DILL, R.; DA COSTA JR, N.; SANTOS, A. A. P. Corporate profitability analysis: A novel application for paraconsistent logic. **Applied Mathematical Sciences**, v. 8, n. 26, p. 1271-1288, 2014.

SILVESTRE, R. S. Ambiguidades indutivas, paraconsistência, paracompletude e as duas abordagens da indução. **Manuscrito**, Campinas, v. 30, n. 1, p. 101-134, fev. 2016.

Bibliografia

Bibliografia

ALVES, E. H. **Lógica e Inconsistência:** um estudo dos cálculos C_n, $1 \leq n \leq \omega$. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, 1976.

ANGELOTTI, Elaini S. **Utilização da lógica paraconsistente na implementação de um sistema multiagente**. Curitiba: PPGIA/Pontifícia Universidade Católica do Paraná (Dissertação de Mestrado), 2001.

ARISTIZÁBAL, Manuel Sierra. **Lógica básica paraconsistente y paracompleta y algunas de sus extensiones**. Revista Universidad EAFIT, v. 39, n. 132, 2003. p. 60-105.

ARRUDA, A. I. & ALVES, E. H. **A semantical study of some systems of vagueness logic**. Bull. Sec. of Logic, Polish Acad. of Sc., 8: 139-144, 1979.

ARRUDA, A. I. & ALVES, E. H. **Some remarks on the logic of vagueness**. Bull. Sec. of Logic, Polish Acad. Sc., 8: 133-138, 1979.

ARRUDA, A. I. A survey of paraconsistent logic. In: ARRUDA, A. I.; CHUAQUI, R. & COSTA, N. C. A. da (ed.). **Mathematical Logic in Latin America**. s/l, North-Holland, 1980, p. 1-41.

ARRUDA, A. I. Aspects of the historical development of paraconsistent logic. In: PRIEST, G.; ROUTLEY, R. & NORMAN, J. (ed.). **Paraconsistent logic**, Essays on the inconsistent. s/l, Philosofia Verlag, 1989.

CARVALHO, F. R.; BRUNSTEIN, I.; ABE, J. M. **Um estudo de tomada de decisão baseado em lógica paraconsistente anotada:** avaliação do projeto de uma fábrica. Revista Pesquisa e Desenvolvimento em Engenharia de Produção, n.1, p.47-62, dez. 2003.

COSTA, N. C. A. da. **Sistemas formais inconsistentes**. Curitiba: Editora UFPR, 1993.

COSTA, N. C. A. da. **A importância filosófica da lógica paraconsistente**. Trad. Décio Krause. Bol. Soc. Paran. Mat. (2ª série), [Curitiba], II (2): 91-113, 1990.

COSTA, N. C. A. da. **Sistemas Formais Inconsistentes**. Curitiba: Editora da UFPR, 1994.

COSTA, N. C. A. da.; KRAUSE, Décio; BUENO, Otávio. **Paraconsistent Logics and Paraconsistency**: Technical and Philosophical Development. Campinas: Unicamp/CLE – Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp, 2004.

D'OTTAVIANO, I. M. L. & EPSTEIN, R. L. **A many-valued paraconsistent logic**. Reports on Mathematical Logic, 22: 89-103, 1988.

D'OTTAVIANO, I. M. L. **On the development of paraconsistent logic and da Costa's work**. The Journal of Non-Classical Logic, Campinas, 7 (1/2): 89-152, maio-nov., 1990.

FERNANDES, Cláudio L. M. **Lógica paraconsistente aplicada em sistemas de automação e controle**. Santos: PPGEM/Universidade Santa Cecília (Dissertação de Mestrado), 2012.

GODOY, Saul G. M. de. **Estudos sobre a lógica paraconsistente DL e aplicações em Direito**. São Paulo: FFLCH/USP (Dissertação de Mestrado), 2009.

KLEENE, S. C. **Mathematical logic**. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2002.

LOPARIC, A. & ALVES, E. H. The semantics of the systems C_n of da Costa. In: ARRUDA, A. I.; COSTA, N. C. A. da & SETTE, A. M. (ed.). **Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic**. São Paulo, Sociedade Brasileira de Lógica, 1980. p. 161-172.

LOPARIC, A. & COSTA, N. C. A. **Paraconsistency, paracompleteness and valuations**. Logique et Analyse, 106: 119-131, 1984.

ŁUKASIEWICZ, Jan. **On the principle of contradiction in Aristotle**. In: Review of Metaphysics, XXIV: 485-509, 1971.

MENDELSON, Elliott. **Introduction to mathematical logic**. 3 ed. Monterey, Wadsworth & Brooks, s/d.

SENKO Luiz G. M. **Um método baseado em lógica paraconsistente para detecção de inconsistências em classificadores à base de regras**. Curitiba: PPGIA/Pontifícia Universidade Católica do Paraná (Dissertação de Mestrado), 2006.

SILVA FILHO, João I.; ABE, J. Minoro. **Fundamentos das redes neurais artificiais paraconsistentes** – destacando aplicações em Neurocomputação. São Paulo: Arte & Ciência, 2001.

VARELA, Diego A. **Lógica paraconsistente**: lógicas da inconsistência formal e dialeteísmo. Campinas: Fundamento v. 1, n. 1, set./dez. 2010.

VASIL'ÉV, Nicolaj A. Imaginary (non-aristotelian) logic. In: **Atti dei V Congresso Internazionale di Filosofia.** Nápoles, 1925, p. 107-109.

EDUFCG