

Pêndulo magnético parametricamente forçado

Edmar P. Oliveira e Adriano A. Batista

Unidade Acadêmica de Física

Centro de Ciências e Tecnologia

Universidade Federal de Campina Grande

Campina Grande-PB

CEP: 58109-970

Brazil

(Dated: 05 de agosto de 2009)

Abstract

Neste artigo nós estudamos experimentalmente o comportamento dinâmico de um magneto axialmente magnetizado, com liberdade para girar horizontalmente, na presença de um campo magnético uniforme que varia periodicamente no tempo. Verificamos que as equações do movimento desse ímã são as mesmas equações de um pêndulo parametricamente forçado. A partir de medidas de pequenas oscilações desse ímã calculamos os parâmetros necessários para descrever a dinâmica desse oscilador, tais como a constante de amortecimento, frequência natural de oscilação e a amplitude do campo magnético ac.

In this article we experimentally study the dynamic behavior of an axially magnetized magnet, which is free to rotate horizontally, in the presence of a uniform magnetic field that varies periodically in time. We verify that the equations of motion of this magnet are the same ones of a parametrically-driven pendulum. From the measurement of small oscillations of this magnet we calculate the parameters needed to describe the dynamics of this oscillator, such as damping constant, natural frequency of oscillations, and the amplitude of the ac magnetic field.

I. INTRODUÇÃO

Neste artigo nós investigamos o movimento de uma barra de ímã com momento de dipolo magnético μ , magnetizada axialmente, situada numa região em que o campo magnético varia periodicamente no tempo. A equação do movimento desse ímã podem ser descritas pela equação diferencial de segunda ordem não-autônoma dada por

$$I\ddot{\theta} = -2b\dot{\theta} - \mu(B_0 + B_1 \sin(2\omega t)) \sin(\theta), \quad (1)$$

onde I é o momento de inércia do pêndulo em torno do eixo de rotação, θ é o ângulo entre o eixo do ímã e o campo magnético, $2b$ é o coeficiente de fricção, B_0 é o campo magnético dc, B_1 é a amplitude do campo magnético ac e ω é a frequência do campo ac externo. Reescrevemos a equação acima na forma mais simplificada

$$\ddot{\theta} = -2\gamma\dot{\theta} - (\omega_0^2 + A \sin(2\omega t)) \sin(\theta), \quad (2)$$

onde $\gamma = b/I$, $\omega_0^2 = \mu B_0/I$, e $A = \mu B_1/I$. Assim, precisamos agora determinar apenas 4 parâmetros e não 5 como na Eq. (1). Notamos que essa equação descreve um pêndulo parametricamente forçado [Kim97]. Apesar da aparente simplicidade dessa equação, sob certas condições esse sistema pode apresentar um comportamento dinâmico bastante rico, com bifurcações de dobramento do período, biestabilidade, bifurcações de Hopf e até caos [kim97]. Um dos principais objetivos deste projeto é estudar sistemas físicos não-lineares, especialmente, quando eles estão em uma transição de um comportamento normal e previsível para outro em que o caos determinístico [nay79] ocorre. Com esse experimento, pretendemos chegar a observar fenômenos não-lineares tais como bifurcações de dobramento do período, caos e observar em que condições poderemos chegar a ele. No endereço abaixo está um vídeo do experimento: <http://www.youtube.com/watch?v=XlMFaCdNZTY>.

II. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Neste experimento utilizamos dois pares de bobinas de Helmholtz (veja Fig. 1) para gerar campos magnéticos. O par maior, com duas bobinas formadas por 154 voltas de fios cada, foi utilizado para gerar um campo magnético espacialmente uniforme e constante no tempo. O par menor, formado por duas bobinas de 6 cm de raio, 100 voltas e fio awg 22, disposto concentra-

mente e coaxialmente com o par maior, foi utilizado para gerar um campo magnético oscilante. No centro das bobinas foi colocado um ímã permanente de neodímio em forma de bastão com magnetização axial. O ímã estava preso pelo seu centro a um eixo com liberdade para girar no plano horizontal. Quando as bobinas maiores são energizadas com corrente contínua, gerada por uma fonte de tensão variável de 2 a 14V (Phywe mod. 13533.93), o ímã se alinha com o campo magnético externo. Ao aplicarmos uma corrente ac senoidal, gerada por um gerador de funções (Agilent mod. 33220A), às bobinas internas, podemos controlar a amplitude e a frequência do campo magnético ac gerado pela bobina de Helmholtz interna. Com isso, observamos que o pêndulo magnético movimenta-se como um pêndulo parametricamente forçado [kim97]. A rotação do ímã é detectada por um sensor óptico de rotação de um mouse de bola (PS2). Para isso um disco de plástico transparente codificado com 180 marcas, alternadas entre preto e transparente, é lido pelo sensor quando o disco gira. Os sinais captados pelo sensor do mouse são enviados para o computador através da porta PS2 e convertidos em pixels, em seguida, utilizando um programa desenvolvido em C, é feita a conversão de pixels para graus e a série temporal dos ângulos de rotação do pêndulo é armazenada na memória do computador.

Inicialmente, fizemos experimentos somente com o campo magnético constante aplicado ao pêndulo. Nesses experimentos, o pêndulo é tirado da posição de equilíbrio em $t = 0$ e em seguida, as oscilações transientes são medidas. O objetivo foi o de medir os parâmetros γ e ω_0 da Eq. (2) linearizada. Tais medidas são feitas fitando-se a série temporal $\theta(t)$ para pequenas oscilações não forçadas e amortecidas do pêndulo, ou seja, pela função $x(t) = Ce^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t + \phi)$, onde $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, e C e ϕ dependem dos valores iniciais de θ e $\dot{\theta}$. Com essas medidas obtemos o valor da frequência natural ω_0 e da constante de amortecimento γ da Eq. (2).

Para calcular o valor do campo magnético gerado pela corrente contínua nas bobinas externas, a tensão nos terminais das bobinas e a resistência são medidas. Em seguida, a corrente nas bobinas é medida através da lei de Ohm, $I = V/R$, onde I é a corrente, V a tensão nos terminais de entrada das bobinas em paralelo e R é a resistência das bobinas. O campo magnético gerado pelas bobinas de Helmholtz é dado por

$$B = \frac{8\mu_0 NI}{5^{3/2} R_1}, \quad (3)$$

onde B é o campo magnético, N o número de espiras das bobinas e R_1 é o raio.

Para calcular o parâmetro A da Eq. (2), energizam-se as bobinas internas com tensão ac de sinal senoidal e as bobinas externas com tensão dc. Liga-se o gerador de funções, ajusta-se a tensão e a frequência do sinal e executa-se o programa de captura de dados para guardar a série temporal

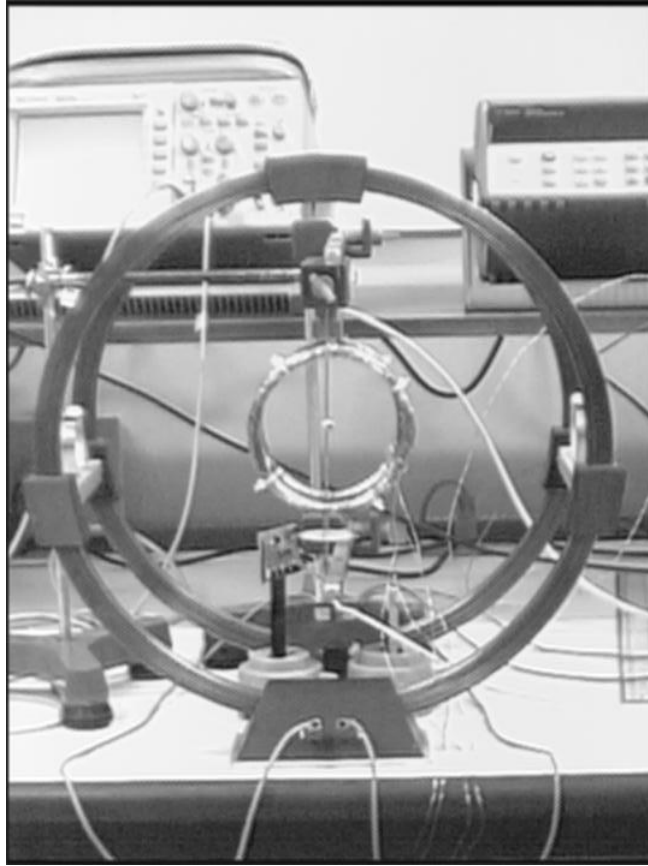


Figure 1: Bobinas de Helmholtz do experimento.

de rotação do pêndulo. Neste experimento, ajusta-se a tensão ac do gerador de funções para variar de 1 em 1V de pico a pico e com o valor de resistência equivalente medida, $1,6\Omega$, da associação das bobinas em paralelo, calcula-se a corrente I_{ac} através da lei de Ohm $I_{ac} = V_{ac}/R_2$, onde R_2 é a resistência em paralelo das bobinas internas. Com isso calcula-se o valor do campo magnético oscilante através da Eq.(3) para o campo gerado por uma bobina de Helmholtz.

III. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Como as bobinas estão dispostas em paralelo, de modo que a corrente que as atravessa é a mesma, a resistência equivalente medida é de $1,7\Omega$. Assim, a corrente é calculada através da lei de Ohm. Na tabela I, a primeira coluna está representando os valores de tensão medidos nos terminais das bobinas com um multímetro digital, a segunda representa a corrente calculada, a terceira o campo magnético calculado pela Eq. (3) e a quarta, o campo magnético medido com o teslômetro (Phywe mod.13610.93).

Tensão (V)	Corrente (A)	Campo magnetico (mT)	Campo magnético com o teslômetro (mT)
0,34	0,20	0,14	0,07
1,87	1,10	0,76	0,57
3,35	1,97	1,36	1,03
4,81	2,83	1,96	1,47
6,18	3,64	2,52	1,84
7,39	4,35	3,01	2,21
8,40	4,94	3,42	2,50

Table I: Medida do campo magnético DC

Período(s)	γ (rad/s)	$\tilde{\omega}$ (rad/s)	ω_0 (rad/s)
0,81	0,18	7,73	7,73
0,32	0,08	19,56	19,57
0,24	0,07	26,66	26,66
0,20	0,06	32,04	32,04
0,17	0,08	36,17	36,17
0,16	0,06	39,65	39,65
0,15	0,09	41,84	41,84

Table II: Medida da frequência natural

A resposta do pêndulo as esses valores de tensão, corrente e campo magnético estão anotados na tabela II, onde a primeira coluna representa o período de oscilação do pêndulo, a segunda, a constante γ de amortecimento, a terceira, a frequência angular de oscilação com o amortecimento e a quarta, a frequência angular natural de oscilação.

A Fig. 2 abaixo mostra a comparação entre os dados experimentais e a função de ajuste teórica. A linha com marcas representa o gráfico dos dados da terceira coluna da tabela I e da quarta coluna da tabela II. A função de ajuste é dada por $\omega_0(x) = 22,74\sqrt{x}$, onde x representa o campo magnético em mT.

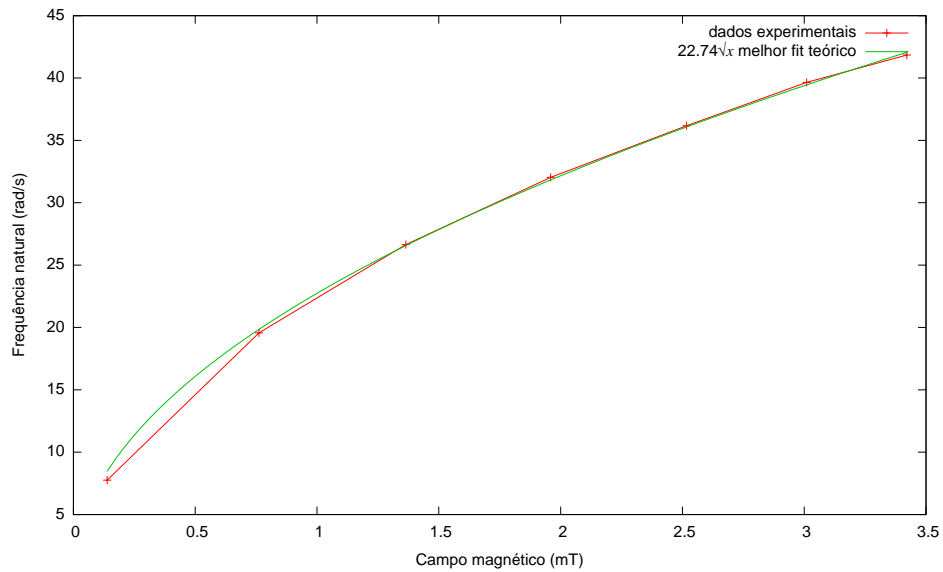


Figure 2: Ajuste dos dados numéricos da frequência natural do pêndulo em função do campo magnético. A linha com marcações vermelha representa os dados experimentais e a linha contínua de cor verde, o melhor ajuste seguindo a função $\omega_0 = \sqrt{\mu B/I}$. O excelente ajuste indica que o campo B está sendo medido corretamente e que a razão $\mu/I = 51,71 G^{-1} s^{-2}$. Neste caso não consideramos a influência do campo magnético da terra, devido a isso há uma discrepância entre o ajuste numérico e o menor valor de frequência medido.

A tabela III mostra as tensões medidas nos terminais das bobinas, a corrente calculada, o campo magnético calculado e o parâmetro A da Eq. (2).

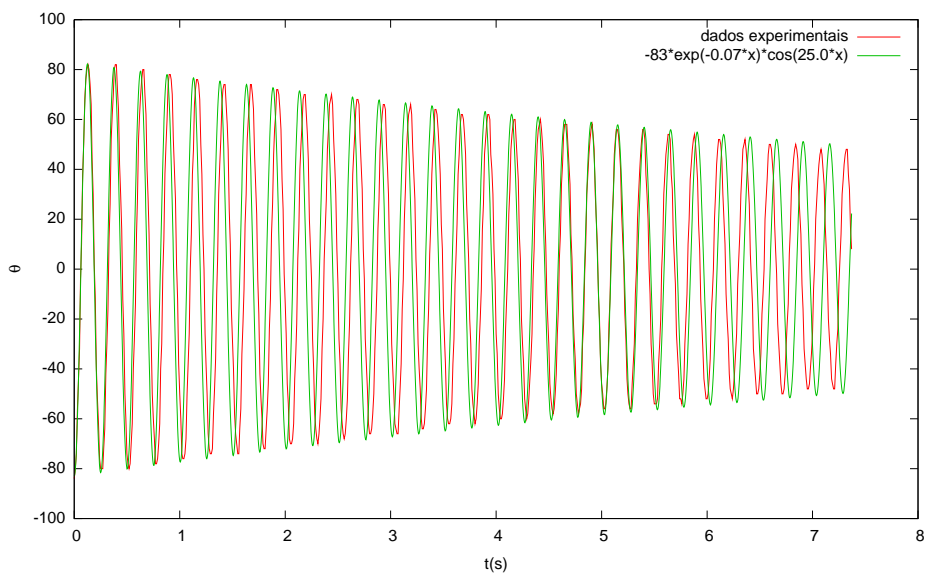


Figure 3: Ajuste dos dados numéricos do ângulo de rotação do pêndulo em função do tempo . A linha de cor vermelho representa os dados experimentais e a linha de cor verde, o ajuste numérico com parâmetros $\omega_0 = 25,0 \text{ rad/s}$ e $\gamma = 0,07 \text{ rad/s}$. Esta é a resposta apresentada pelo pêndulo quando submetido a um campo magnético de $1,36 \text{ mT}$.

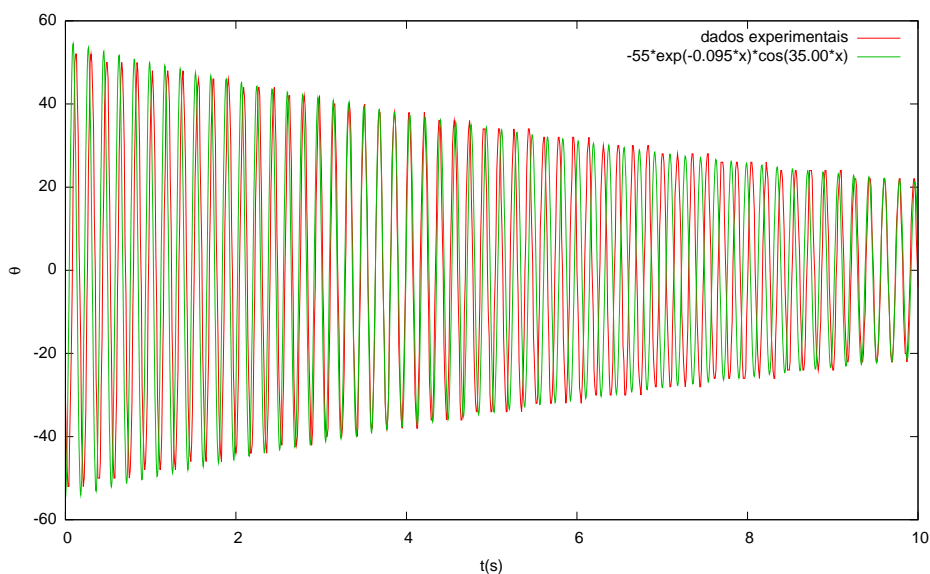


Figure 4: Ajuste dos dados numéricos do ângulo de rotação do pêndulo em função do tempo. A linha de cor vermelho representa os dados experimentais e a linha de cor verde, o ajuste numérico com parâmetros $\omega_0 = 35,00 \text{ rad/s}$ e $\gamma = 0,09 \text{ rad/s}$. Esta é a resposta apresentada pelo pêndulo quando submetido a um campo magnético de $2,52 \text{ mT}$.

Tensão ac (V)	Corrente (A)	Campo magnético ac B_1 (0.1 G)	amplitude A (rad/s)
0,1548	0,0968	4,6152	74,98
0,1578	0,0986	4,7047	76,43
0,1618	0,1011	4,8239	78,37
0,1669	0,1043	4,9760	80,84
0,1723	0,1077	5,1370	83,45
0,1796	0,1123	5,3546	86,99
0,1887	0,1179	5,6259	91,39
0,1975	0,1234	5,8883	95,66

Table III: Medidas do Campo B_1 e da constante A

IV. CONCLUSÃO

Diante dos resultados obtidos neste experimento, onde se analisou o comportamento do pêndulo magnético quando submetido a diversos valores de campo magnético, concluiu-se que: O modelo exponencial do ângulo de rotação do pêndulo para o caso subamortecido ajustou-se bem aos dados experimentais. Para as tensões de 0,34V a 8,40V medidas nas bobinas externas o coeficiente de amortecimento γ variou de 0,184 a 0,087rad/s. A frequência natural do pêndulo apresentou comportamento dado pela expressão $\omega_0 = 22,74\sqrt{x}$, ajustando-se bem ao modelo teórico. O campo magnético oscilante variou pouco sua amplitude quando os vários valores de tensão ac eram aplicadas às bobinas internas. A constante A da eq.2 varia linearmente com o campo magnético oscilante e apresentou valores de 74,98 a 95,66rad/s.

V. BIBLIOGRAFIA

[kim97] S.Kim et al., Phys. Rev. B V56, 6613 (1997).

[Nay79] Ali H. Nayfeh and D. T. Mook, Nonlinear Oscillations (Wiley, New York, 1979).