



PRPG | Pró-Reitoria de Pós-Graduação  
PIBIC/CNPq/UFPG-2008

## ***Estudo de geodésicas em buracos negros e seus análogos em matéria condensada***

**Fábio Alves Gomes<sup>1</sup>, Geusa de Araújo Marques<sup>2</sup>**

### **RESUMO**

O estudo de geodésicas é a análise intrínseca do estudo da geometria de espaço-tempo. Neste Projeto, geodésicas tipo-espaço e tipo-tempo são estudadas no caso dos espaço-tempos de Schwarzschild, buracos negros de Reissner-Nordström e Kerr, e seus análogos em matéria condensada. Estes espaço-tempos já foram investigados com alto grau de eficácia em muitos artigos e alguns livros. Porém, há alguns aspectos importantes nessas abordagens que merecem uma melhor análise detalhada, e é nessa perspectiva que iremos trabalhar nesse Projeto de Pesquisa.

**Palavras-chave:** Topologia; Geodésicas; Raio de Schwarzschild.

### **STUDY OF GEODESIC IN BLACK HOLES AND THEIR ANALOGUES IN CONDENSED MATTER**

#### **ABSTRACT**

The study of geodesic is the intrinsic analysis of the study of the geometry of space-time. In this Work, geodesic space-like and time-like are studied in the case of Schwarzschild space-time, Reissner-Nordström and Kerr, and their analogues in condensad matter. These space-times were already investigated with high degree of effectiveness in many papers and some books. However, there are some important aspects in those approaches that deserve a better detailed analysis, and it is in that perspective that we will work in that Project of Research.

**Keywords:** Topologia; Geodesics; Ray of Schwarzschild.

#### **INTRODUÇÃO**

O estudo sobre os aspectos da física do espaço tempo curvo, focalizando nosso interesse em estudar o comportamento de trajetórias de partículas na presença de buracos negros e em seus análogos em matéria condensada.

O fluxo de fluido supersônico pode gerar então um “Buraco mudo”, o análogo acústico de um “buraco negro”, e a analogia pode ser estendida para o estudo da presença da radiação fonônica de Hawking para horizontes acústicos

Como um exemplo das previsões da relatividade geral, podemos mencionar os buracos negros, cuja existência foi prevista pela primeira vez por Oppenheimer e Snyder, em 1939. Segundo a teoria da relatividade geral, quando a densidade de um objeto (uma estrela, por exemplo) é muito grande, a atração gravitacional se torna tão intensa que nada, nem mesmo a luz ou outro tipo de radiação eletromagnética, consegue escapar de uma região em torno do objeto, definida por um raio crítico. Uma propriedade notável de um objeto desse tipo é que nada que acontece nas suas proximidades pode ser transmitida a um observador externo. Efeito semelhante no contexto de ondas sonoras ocorre quando consideramos um fluido com velocidade maior que a do som, o que dá origem aos análogos sônicos dos buracos negros.

---

<sup>1</sup> Aluno do curso de Bacharelado em Física, Depto. De Física, UFPG, Campina Grande, PB, E-mail:

[falves@df.ufcg.edu.br](mailto:falves@df.ufcg.edu.br)

<sup>2</sup> Física, Prof<sup>a</sup>: Doutora, Depto.de Física, UFPG, Campina Grande, PB, E-mail: [gmarques@df.ufcg.edu.br](mailto:gmarques@df.ufcg.edu.br)

Os buracos mudos, “são análogos sônicos dos buracos negros”. Imaginemos um fluido, como a água caindo numa cachoeira, acelerando até ultrapassar a velocidade do som. Agora, imagine que He um ponto, na queda d’água, em que a velocidade ultrapassa a do som. Qualquer sinal sonoro nesta região não escapará. Isto é, o som vai até um certo ponto e depois é vencido pela água. Embora esses buracos mudos tenham suas leis governadas pela hidrodinâmica, e os buracos negros – objetos gerados a partir dos restos de estrelas que são tão compactos que sua gravidade não deixa nem a luz escapar deles, os quais são geridos pela relatividade geral de Einstein. Esta paralelo pode ser útil para realizar estudos sobre buracos negros que em princípio, não poderiam ser feitos com um buraco negro gravitacional.

Como o som se propagaria num meio que apresente um estrutura tipo Schwarzschild como propriedades tais que o raio de Schwarzschild sônico seja maior que o raio da distribuição de matéria que contém um átomo de hidrogênio, por exemplo? Será que teremos um a espécie de buraco negro sonoro (não apresentando colapso de luz no raio de Schwarzschild, e sim colapso do som)?

## MÉTODOS

Dando início ao trabalho fez-se um estudo preliminar de Física Moderna, analisando as limitações da física clássica e dando maior enfoque na teoria de Schrödinger; Mecânica Quântica, para entender as leis que rege o mundo microscópico; e Álgebra Tensorial, tomando como base os estudos feitos na bibliografia indicada. Em seguida houve um estudo básico sobre Relatividade Geral, que tal conteúdo forneceu subsídios para avançar bastante na pesquisa.

Os conhecimentos atuais da física nos sugerem que o Universo primitivo sofreu uma série de mudanças, conhecidas como transições de fase, nas quais devem ter surgido os defeitos topológicos, dentre os quais o mais conhecido e estudado, é a corda cósmica (defeito linear), os monopolos (defeito pontual), e os buracos negros. A importância de tais defeitos topológicos é na formação de estruturas, tais como, formação de galáxias, aglomerados, entre outros.

Uma das previsões da relatividade geral, pode-se mencionar os buracos negros, cuja existência foi prevista pela primeira vez por Oppenheimer e Snyder, em 1939. Segundo a teoria da relatividade geral, quando a densidade de um objeto (uma estrela, por exemplo) é muito grande, a atração gravitacional se torna tão intensa que nada, nem mesmo a luz ou outro tipo de radiação eletromagnética, consegue escapar de uma região em torno do objeto, definida por um raio crítico. Imagine um fluido, como a água caindo numa cachoeira, acelerando até ultrapassar a velocidade do som. Agora, imagine que há um ponto, na queda d’água, em que a velocidade da água ultrapassa a do som; qualquer sinal sonoro nesta região não escapará, o som vai até um certo ponto e depois é vencido pela água, estes são os chamados de buracos sônicos, são os análogos sônicos dos buracos negros. Embora esses buracos sônicos tenham suas leis governadas pela hidrodinâmica, e os buracos negros objetos gerados a partir dos restos de estrelas que são tão compactos que sua gravidade não deixa nem a luz escapar. Este paralelo pode ser útil para realizar estudos sobre buracos negros que jamais poderiam ser feitos com um buraco negro gravitacional.

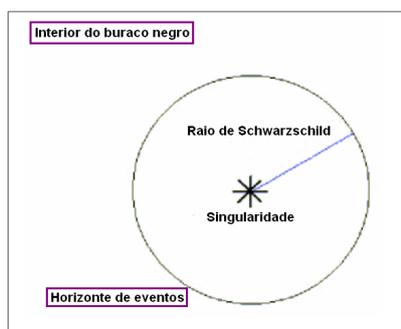


Figura 1. Representação de um Buraco Negro

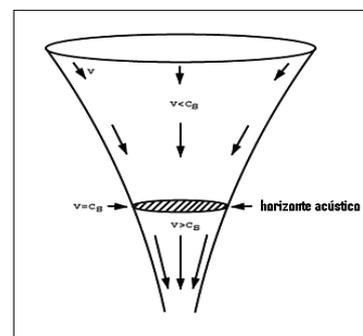


Figura 2. Representação de um Buraco Sônico

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nos estudo dos buracos sônicos (análogos sônicos dos buracos negros), teve que considerar para um fluido irrotacional , onde se obteve o seguinte elemento de linha (VISSER, 2004)

$$ds^2 = -\left(v_s^2 - v_f^2\right) dt^2 - 2\vec{v}_f \cdot \vec{a} \vec{x} dt + \vec{a} \vec{x} \cdot \vec{a} \vec{x} \quad (1)$$

$$\phi(r, \theta) = A \ln(r/a) - B(\theta) \quad \vec{v}_f = -\nabla \phi = \left( \frac{A \hat{r} + B \hat{\theta}}{r} \right) \quad (2)$$

$$ds^2 = -\left(v_s^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2}\right) dt^2 - 2 \frac{A}{r} dr dt - 2B d\theta dt + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (3)$$

Nos estudos dos buracos negros sônicos ( Análogos sônicos dos buracos negros ), consideramos um fluido irrotacional, onde se obtém o seguinte elemento de linha.

$$s^2 = \left(v_s^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2}\right) (\dot{t})^2 + 2 \frac{A}{r} \dot{r} \dot{t} + 2B \dot{\theta} \dot{t} - (\dot{r})^2 - r^2 (\dot{\theta})^2 - (\dot{z})^2 \quad (4)$$

Então para a métrica acima, a Lagrangiana fica:

$$L = \frac{M}{2} \left[ \left(v_s^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2}\right) (\dot{t})^2 + 2 \frac{A}{r} \dot{r} \dot{t} + 2B \dot{\theta} \dot{t} - (\dot{r})^2 - r^2 (\dot{\theta})^2 - (\dot{z})^2 \right] \quad (5)$$

Onde o ponto ( $\dot{\phantom{x}}$ ) denota a diferencial com respeito a  $\tau$  , aplicando as eqs de Euler-Lagrange, teremos :

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (6)$$

Desta forma obteremos:

$$\left[ \left( v_s^2 - \frac{A^2 + B^2}{r^2} \right) \ddot{t} + \frac{A^2 + B^2}{r^3} 2\dot{t}\dot{r} + \frac{A(rr - r^2)}{r^2} + B\ddot{\theta} \right] = 0 \quad (7)$$

$$\left[ \frac{A\ddot{t}}{r} - \dot{r} - \frac{A^2 + B^2}{r^3} \dot{t} - r\dot{\theta}^2 \right] = 0 \quad (8)$$

$$\left[ B\ddot{t} - (2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\dot{r} \right] = 0 \quad (9)$$

$$\ddot{z} = 0 \quad (10)$$

Onde a eq (10) representa a eq de uma reta,

$$z = At + B \quad (11)$$

A e B são constantes de integração.

No espaço – tempo de Schwarzschild, temos:

$$(\dot{s})^2 = v_s^2 \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) (\dot{t})^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} (\dot{r})^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta \dot{\varphi}^2) \quad (12)$$

A lagrangiana fica:

$$L = \frac{M}{2} \left[ v_s^2 \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) (\dot{t})^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} (\dot{r})^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta \dot{\varphi}^2) \right] \quad (13)$$

Os correspondentes momentos canônicos são:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = M \left[ \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) (ct) \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = M \left[ \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \dot{r} \right] \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M \left[ r^2 \dot{\theta} \right] \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M \left[ r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \right] \quad (17)$$

Fixando um valor para  $\theta$ , tal que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , simplificaremos as eqs (14) e (15) em:

$$p_{\theta} = 0 \quad \text{e} \quad p_{\varphi} = Mr^2 \dot{\varphi} = l \quad (18)$$

Onde  $l$  representa o momento angular sobre o eixo normal.

Da eq (12), teremos:

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = M \left[ \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) (c \dot{t}) \right] = E \quad (19)$$

onde  $E$  é a energia cinética.

Usando as relações (16) e (17), podemos reescrever a lagrangiana da seguinte forma:

$$L = \frac{M}{2} \left[ \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) M^{-2} \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-2} \frac{E^2}{v_s^2} - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} (\dot{r})^2 - r^2 \frac{l^2}{M^2 r^4} \right] = 0 \quad (20)$$

e obter

$$\frac{E^2}{(M v_s)^2} = \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{l^2}{M^2 r^2} \quad (21)$$

Considerando  $r$  como uma função de  $\varphi$  e substituindo  $r$  por  $u = r^{-1}$ , como uma variável independente, teremos:

$$\left( \frac{E}{v_s l} \right)^2 = \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - 2mu^3 \quad (22)$$

Considere  $D = \frac{v_s l}{E}$ , assim:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2mu^3 - u^2 + \frac{1}{D^2} = f(u) \quad (23)$$

Da eq (21), observamos que a eq radial para  $\varphi = const$ , então:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \Rightarrow l = 0 \quad (24)$$

Assim,

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = \frac{E}{Mv_s} \quad (25)$$

Daí, de (19):

$$M\left(1 - \frac{2m}{r}\right)v_s \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{v_s} \quad \text{ou} \quad M\left(1 - \frac{2m}{r}\right)v_s dt = \frac{E}{v_s} d\tau \quad (26)$$

Integrando (26), obteremos as eqs para  $(r)$  e  $(t)$ :

$$r_0 = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \quad \text{e} \quad t = r_0 + c \quad (27)$$

Onde  $c$  é uma constante de integração.

Podemos obter as equações das geodésicas também através da métrica para uma despiração obtida por Katanaev e Volovich, dada por:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2 \quad (28)$$

Escrevendo a métrica em coordenadas espaciais e levando em conta além da declinação a "torção", teremos:

$$ds^2 = -c^2 (dt + \alpha d\theta)^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2 + (dz + \beta d\theta)^2 \quad (29)$$

Montando a lagrangiana e usando a relação de Euler-Lagrange, como nos casos anteriores, obteremos as seguintes eqs:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{2\beta}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \alpha^2 r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0 \quad (31)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (32)$$

Assim substituindo (32) em (30), teremos:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \beta \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \quad (33)$$

Integrando a eq (33), obteremos:

$$z + \beta \theta = At + B \quad (34)$$

Onde A e B são constantes de integração.

Fazendo uma manipulação nas eqs (31) e (32), ficaremos:

$$\alpha^2 r^2 \frac{d\theta}{dt} = C \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{2\alpha^2 r^2} = E \quad (35)$$

Onde C e E são constantes de integração.

Assim com simples manipulações dessas equações, podemos obter as equações das geodésicas:

$$r(t) = \sqrt{\frac{C^2}{E\alpha^2} + 2E(t+D)^2} \quad (36)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{2E\alpha(t+D)}{C}\right) + \frac{F}{\alpha} \quad (37)$$

$$z(t) = At - \frac{\beta}{\alpha} \arctan\left(\frac{2E\alpha(t+D)}{C}\right) - \frac{\beta F}{\alpha} + B \quad (38)$$

Onde F é uma constante de integração.

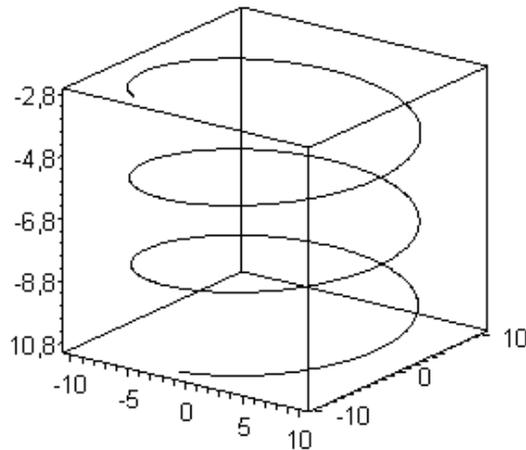


Fig.1. Gráfico da Geodésica com os parâmetros de declinação  $\alpha = \frac{1}{10}$  e de torção  $\beta = 0$ .

## CONCLUSÕES

O estudo de geodésicas foi feito com base a uma análise intrínseca do estudo da geometria de espaço-tempo. Neste Projeto, geodésicas tipo-espaço e tipo-tempo foram estudadas no caso dos espaços-tempos de Schwarzschild e Katanaev e Volovich, e seus análogos em matéria condensada. Estes espaços-tempo já foram investigados com alto grau de eficácia em muitos artigos e alguns livros. Porém, havia alguns aspectos significativos nestes tratamentos que mereciam uma melhor análise detalhada.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, a minha Orientadora e ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DOWKER, J. S. Nuovo Cim. **B52** (1967), 129; BEZERRA, V. Barbosa. Gravitational analogue of the Aharonov-Bohm effect in four and three dimensions. **Physical Review**. Estados Unidos, v. 2, n. 6, p. 2031-2058, 1987.
- VILENKIN, Alexander. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. **Physical Review**. Estados Unidos, v. 8, n. 7, p. 852-970, 1980.
- MARQUES, Geusa de A., **Alguns resultados sobre os efeitos da geometria e da topologia sobre níveis quânticos**, 2003. Tese de Doutorado em Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.
- TIPLER, P. A., **Física Moderna**, Rio de Janeiro, LTC Editora, 2001. 515p.
- BASAK. **General Relativity and Quantum Cosmology**. Disponível em <<http://arXiv.org/abs/gr-qc/0501097>> Acesso em 15 de fevereiro de 2006.
- VISSER, M., and Weinfurtner, S.E.C.. Vortex analogue for the equatorial geometry of the Kerr black hole. **Clássica and Quantum Gravity**, Inglaterra. v. 12, n. 9, p. 2493-2581, 2004.
- UNRUH, W. G., Sonic analogue of black holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation. **Physical Review**. Estados Unidos, v. 51, n. 6, p. 51-70, 1995.
- MORAES, FERNANDO. Geodesics around line defects in elastic solids. **Physical Review**. Estados Unidos A 238 (1998) 153 – 158.