VI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

PIBIC/CNPq/UFCG-2009

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAS E A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DIRICHLET

Eraldo Almeida Lima Júnior[1], Marco Aurélio Soares Souto[2]

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o de apresentar os métodos clássicos para a resolução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & em \quad \Omega \\ u = f & em \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.0}$$

Também estudamos o problema de Dirichlet não homogêneo ($\Delta u = g$). A equação de Laplace aparece na formulação de modelos físicos dos mais diversos, como por exemplo: fenômenos eletrostáticos e magnetostáticos, movimento de fluídos e potenciais de campos gravitacionais.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Problema de Dirichlet, Funções Harmônicas.

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THE SOLUTION FOR DIRICHLET PROBLEM

ABSTRACT

The main goal in this article is presenting the classic methods to solve the Dirichlet problem for the Laplace equation (1.0). We also treat the non homogeneous Dirichlet problem. Laplace equation appears in the formulation of several physical models, as: electrostatic and magnetostatic phenomenon, movement of fluids and gravitational field potentials.

Keywords: Partial Differential Equations, Dirichlet Problem, Harmonic Functions.

1 Aluno de Curso de Matemática, Depto. de Matemática e Estatistítica, UFCG, Campina Grande , PB, E-mail: eraldoalj@dme.ufcg.edu.br

2 Matemático, Prof. Doutor, Depto. de Matemática e Estatística, UFCG, Campina Grande, PB, E-mail: marco@dme.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

Nos problemas das principais Ciências, geralmente encontramos modelos com aproximação e redução de dimensões para os resolvermos, no entanto, diversas vezes a simplificação não pode ser feita, dado que todas variáveis são influentes, como temperatura, posição tendo assim que considerarmos modelos mais complexos e completos, incluindo 2, 3 ou mais componentes dimensionais, isto é, a função de nosso modelo pode depender de mais de um parâmetro. Contudo a Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), que foi desenvolvida para o estudo de fenômenos unidimensionais, pode nos munir da instrumentação necessária para resoluções de Equações Diferenciais Parciais (EDP's).

O presente trabalho tem por objetivo garantir a existência da solução para o problema de Dirichlet que será apresentado. Uma vez garantida a existência da solução podemos encontrá-la através de métodos analíticos, numéricos sendo os últimos aproximativos.

PROBLEMA DE DIRICHLET

Uma das principais tarefas em EDP é resolvermos um problema da seguinte forma

$$\begin{cases} \Delta u = g & em \ \ \Omega \\ u = f & em \ \ \partial\Omega \end{cases} \qquad (1.0)$$

Onde f e g são funções contínuas e $\partial\Omega$ é a fronteira do domínio Ω que em nosso caso é um aberto conexo do IR^n. E uma solução deve ser uma função de classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Este problema é conhecido como Problema de Drichlet.

Para garantirmos a unicidade da solução utilizamos a identidade de Green

$$\int_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) dV + \int_{\Omega} u \Delta u dV = \int_{\partial\Omega} u \frac{du}{dn} d\sigma \ .$$

Assim, se u e v são soluções do problema (1.0) temos para a função $u - v$ solução do problema:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & em \ \ \Omega \\ w = 0 & em \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

E daí

$$\int_{\Omega} \left(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2\right) dV = 0$$

Como o integrando é contínuo temos este nulo e daí w deve ser constante e por continuidade deve ser nula, logo $u = v$ provando assim a unicidade da solução do problema de Dirichlet caso esta exista.

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE DIRICHLET VIA MÉTODO DE PERRON

No seguinte método utilizaremos, além de funções subarmônicas, o princípio do Máximo como ferramentas importantes para a construção da Solução do problema de Dirichlet.

O resultado seguirá de alguns Lemas elementares, que serão dados a seguir.

Para encontrarmos algumas características da solução, considere que já temos a função *w* que satisfaz o problema de Dirichlet $\Delta w = 0$ em Ω tal que $w = f$ em $\partial\Omega$. Considere *u* alguma função subarmônica com $u \le f$ em $\partial\Omega$ implicando que a função *u-w* também é subarmônica, e *u-w*≤0 em $\partial\Omega$ pelo princípio do Máximo, temos *u-w*≤0 em Ω. Mostrando que a solução é "maior" que qualquer função subarmônica "menor" que *f,* isto é, *u*≤*w* em Ω*,* $\forall u$ subarmônica com $u \le f$ em $\partial\Omega$, esta propriedade é essencial para soluções do problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & em \ \ \Omega \\ u = f & em \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

Pois como veremos a seguir tal propriedade caracteriza a solução.

Iremos agora construir a solução de tal problema com funções subarmônicas cumprindo a propriedade $u \le f$ em $\partial\Omega$.

No que segue denotaremos por:

$$M_u(\xi,\rho) = \frac{\rho^{1-n}}{w_n}\int_{S(\xi,\rho)} u(x)d\sigma_x$$

Onde w_n é a área da esfera unitária de IR^n, S^{n-1} e $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Dizemos que $M_u(\xi,\rho)$ é a **Média Aritmética** de *u* em $S(\xi,\rho)$.

De acordo com as definições anteriores dizemos que uma função é subarmônica se para ρ suficientemente pequeno tivermos

$u(\xi) \le M_u(\xi,\rho)$ (esta definição é mais abrangente aqui supomos apenas que a função é contínua).

Denotemos por $\varsigma(\Omega)$ o conjunto de todas as funções subarmônicas em Ω.

Lema I: *Seja* $u \in \varsigma(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ então temos

$$\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração:

Segue direto do Princípio do Máximo $\max\limits_{\Omega} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$ ■

Note que na demonstração do Princípio do Máximo utilizamos apenas a desigualdade que caracteriza as funções subarmônicas contínuas.

Definição1: *Seja* $u \in C^0(\Omega)$ e $\overline{B(\xi,\rho)} \subset \Omega$ então definimos

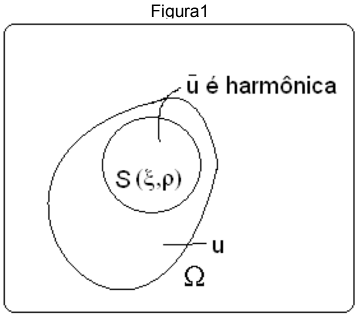
$u_{\xi,\rho} : \Omega \to IR$ da seguinte forma

$u_{\xi,\rho}(x) = u(x)$ para $x \in \Omega, x \notin B(\xi,\rho)$ e

$\Delta_x u_{\xi,\rho}(x) = 0$ para $x \in B(\xi,\rho)$.

A existência de $u_{\xi,\rho}$ é garantida utilizando-se da função de Green composta com uma translação de 0 para ξ. Esta definição é bem ilustrada na figura1.

Figura1



Lema II: Para *u* $\in \varsigma(\Omega)$ e $\overline{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$ temos

$$u(x) \le u_{\xi,\rho}(x) \quad \forall x \in \Omega \qquad \text{(a)}$$

$$u_{\xi,\rho} \in \varsigma(\Omega) \qquad \text{(b)}$$

Demonstração:

a) É evidente que $u \le u_{\xi,\rho}$ em $B^c(\xi,\rho)$, aqui na verdade ocorre a igualdade, já para $B(\xi,\rho)$, observemos que $u - u_{\xi,\rho} = 0$ em $S(\xi,\rho)$ e temos $u - u_{\xi,\rho}$ subarmônica em $B(\xi,\rho)$ e assim $u - u_{\xi,\rho} \le 0$ em $B(\xi,\rho)$ e consequentemente $u \le u_{\xi,\rho}$ em todo Ω.

b) Já temos $u_{\xi,\rho}$ subarmônica em $B(\xi,\rho)$, e em $\overline{B}^c(\xi,\rho)$. Mostremos assim que u é subarmônica em $S(\xi,\rho)$. Ora se $x \in S(\xi,\rho)$ temos

$$u_{\xi,\rho}(x) = u(x) \leq M_u(x,r) \leq M_{u_{\xi,\rho}}(x,r)$$

Para *r* suficientemente pequeno. ■

Lema III. Para $u \in \varsigma(\Omega)$ vale a inequação

$$u(\xi) \leq M_u(\xi,\rho), \forall \rho; \overline{B}(\xi,\rho) \subset \Omega.$$

Antes de provarmos o Lema III note que para $u \in \varsigma(\Omega)$ teremos a inequação somente para ρ suficientemente pequeno, enquanto o lema acima garante a inequação desde que $\overline{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$.

Demonstração: Ora temos

$$u(\xi) \leq u_{\xi,\rho}(\xi) = M_{u_{\xi,\rho}}(\xi,\rho) = M_u(\xi,\rho).$$

Lema IV. Temos u harmônica em Ω se, e somente se , *u* e *–u* $\in \varsigma(\Omega)$.

Demonstração: A parte do somente se é provada através da Lei do valor Médio de Gauss. Já a recíproca se temos *u* e *-u* $\in \varsigma(\Omega)$ ocorre $u(x) \leq u_{\xi,\rho}(x)$ e $-u(x) \leq -u_{\xi,\rho}(x)$ ocasionando $u = u_{\xi,\rho}$, então *u* é harmônica em $B(\xi,\rho)$, que implica *u* harmônica em Ω.

Lema IVa. Se $u \in C^0(\Omega)$ e para $\xi \in \Omega$ temos $u(\xi) = M_u(\xi,\rho)$ com ρ suficientemente pequeno. Então *u* é harmônica.

Note que esta nova versão do Lema IV, exige apenas que a equação ocorra apenas para ρ suficientemente pequeno para garantirmos a harmonia da função *u* em todo Ω, que apenas contínua.

Definição2: Seja f contínua em $\partial\Omega$, defina

$\varsigma_f(\overline{\Omega}) = \{u \mid u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \varsigma(\Omega), u \leq f \quad em \quad \partial\Omega\}$

E definimos

$$w_f(x) = \sup_{u \in \varsigma_f(\overline{\Omega})} u(x) \text{ para } x \in \Omega .$$

Para mostrarmos a boa definição de $w_f(x)$, basta vermos que o conjunto $\varsigma_f(\overline{\Omega})$ é não vazio e que estamos tomando o supremo em conjunto limitado, o que de fato ocorre, pois *m*= inf *f*$\in$ $\varsigma_f(\overline{\Omega})$ e mais ainda pelo Lema I temos

$u(x) \leq M$=max f, $\forall u \in \varsigma_f(\overline{\Omega})$ e $x \in \overline{\Omega}$.

Lema V. Se $u_1,...,u_k \in \varsigma_f(\overline{\Omega})$ e $v = \max(u_1,...,u_k)$ então $v \in \varsigma_f(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Facilmente $v \in C^0(\overline{\Omega})$. E para ρ suficientemente pequeno temos

$v(\xi) = \max(u_1(\xi),...,u_k(\xi)) \leq \max(M_{u_1}(\xi,\rho),...,M_{u_2}(\xi,\rho)) \leq M_v(\xi,\rho)$.

Daí v é subarmônica e por

$u_1,...,u_k \leq f$ em $\partial\Omega$ devemos ter $v \leq f$ em $\partial\Omega$ ■

Lema VI. w_f é harmônica em Ω.

Demonstração: Sejam $\overline{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$, $x^1,...,x^n,...$ uma seqüência em $\overline{B}(\xi,\rho')$ com $\rho' < \rho$. De acordo com a definição de w_f existe para cada *j* uma $u_k^j \in \varsigma_f(\overline{\Omega})$, *k=1 , 2 ,...* , tais que

$$\lim_{j\to\infty} u_k^j(x^k) = w_f(x^k).$$

Defina a sequência u^j tal que

$u^j(x) = \max(u_1^j, u_2^j, ..., u_j^j)$ assim pelo Lema V temos $u^j \in \varsigma_f(\overline{\Omega})$ e $u^j \geq u_k^j$, desde que $k \leq j$. E assim

$$u_k^j(x^k) \leq u^j(x^k) \leq w_f(x^k)$$

E daí

$$\lim_{j\to\infty} u^j(x^k) = w_f(x^k),\ \forall k \in IN.$$

Note que a equação acima é verdadeira sempre que substituirmos $u_k^j(x^k)$ por alguma função $u(x^k)$ cumprindo

$$u_k^j(x^k) \leq u(x^k) \leq w_f(x^k).$$

Então trocando, se necessário, u^j por $\max(u^j, m)$ podemos ver que

$m \leq u^j(x) \leq M$ para *x* em Ω. Se utilizarmos $u_{\xi,\rho}^j$ no lugar de u^j e utilizarmos ainda a notação u^j, teremos estas funções harmônicas na bola , e assim a sequência u^j converge, no subconjunto compacto $\overline{B}(\xi,\rho') \subset B(\xi,\rho) \subset \Omega$, a menos de subseqüência. (Pois a sequência u^j é limitada e harmônica em $B(\xi,\rho) \subset \Omega$)

Seja *w* tal que $u^j \to w$ em $B(\xi,\rho')$. Assim temos $w_f(x^k)$=*w*(x^k) em $B(\xi,\rho')$. Escolhendo uma sequência $x^k \to x$, com $x^1 = x$ em $B(\xi,\rho')$, e assim concluímos da continuidade de *w* que

$w(x^k) \to w(x)$ pois

$$\lim_{k\to\infty} w_f(x^k) = \lim_{k\to\infty} w(x^k) = w(x^1) = w_f(x^1) = w_f(x)$$

E assim w_f é contínua em $B(\xi,\rho')$ e escolhendo uma sequência densa em $B(\xi,\rho')$ temos w_f coincidindo com *w* em toda a bola $B(\xi,\rho')$ e daí w_f é harmônica numa vizinhança de ξ e por este ser arbitrário temos w_f harmônica em todo o Ω .■

Para mostrar que w_f coincide com *f* na fronteira devemos impor uma condição sobre esta. Que será a existência da função de Barreira.

Condição de Barreira: Se para cada $\eta \in \partial\Omega$ existe uma função (função de barreira) $Q_\eta \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \varsigma(\Omega)$ com $Q_\eta(\eta)$=0 e $Q_\eta(\eta)$<0 para $x \in \partial\Omega$ e $x \neq \eta$ dizemos que $\partial\Omega$ cumpre a condição de Barreira.

Lema VII: Para $\partial\Omega$ satisfazendo a condição de Barreira e $\eta \in \partial\Omega$ temos

$$\liminf_{\substack{x\in\Omega \\ x\to\eta}} w_f(x) \geq f(\eta).$$

Demonstração:

Sejam ε e *K* positivos e seja

$$u(x) = f(\eta) - \varepsilon + KQ_\eta(x)$$

temos $u \in \varsigma(\Omega)$ e $u(x) \leq f(\eta) - \varepsilon$, para $x \in \partial\Omega$ e $u(\eta) = f(\eta) - \varepsilon$, como *f* é contínua existe um $\delta(\varepsilon)$, tal que $f(x) > f(\eta) - \varepsilon$ para $|x-\eta| < \delta$. E assim $u(x) \leq f(\eta) - \varepsilon < f(x)$. Para $x \in \partial\Omega$ e $|x-\eta| < \delta(\varepsilon)$. Como $Q_\eta(x) < -\varepsilon_0$ quando $|x-\eta| \geq \delta(\varepsilon)$ temos *K*=*K*(ε) suficientemente grande que $u(x) \leq f(x)$ e assim temos para $|x-\eta| \geq \delta$

$u(x) \leq w_f(x)$ para $x \in \Omega$.

E também

$$f(\eta)-\varepsilon=\lim_{x\to\eta}u(x)=\lim_{x\to\eta}\inf u(x)\le \lim_{\substack{x\in\Omega\\ x\to\eta}}\inf w_f(x)$$

Fazendo $\varepsilon\to 0$ obtemos o que desejamos■

Lema VIII: Se $\eta\in\partial\Omega$

$$\lim_{\substack{x\in\Omega\\ x\to\eta}} w_f(x)=f(\eta)$$

Demonstração:
Com o lema VII basta mostrar que
$\lim_{\substack{x\in\Omega\\ x\to\eta}}\sup w_f(x)\le f(\eta)$

Considere a função $-w_{-f}$ definida em Ω por $-w_{-f}(x)=-\sup u(x)$, $u\in\varsigma_{-f}(\overline{\Omega})$, escrevendo $U=-u$ temos

$$-w_{-f}(x)=\inf U(x)$$

Onde $-U\in C^0(\overline{\Omega})\cap\varsigma(\Omega)$ e $-U\le -f$ em $\partial\Omega$.

Então para qualquer $u\in\varsigma_f(\overline{\Omega})$ então *u-U*≤ 0 ou *u*$\le$*U* em $\partial\Omega$ e em Ω pelo Lema I. Note que por propriedades de supremo temos $w_f(x)\le -w_{-f}(x)$, pelo Lema VII (aplicado a $w_{-f}(x)$) obtemos:

$$\lim_{\substack{x\in\Omega\\ x\to\eta}}\sup w_f(x)\le \lim_{\substack{x\in\Omega\\ x\to\eta}}\sup(-w_{-f}(x))=-\lim_{\substack{x\in\Omega\\ x\to\eta}}\inf w_{-f}(x)\le f(\eta)$$ ■

Teorema : Se o domínio Ω tem fronteira satisfazendo a condição de Barreira, então existe a solução única para o problema de Dirichlet para qualquer função contínua como dado inicial no problema:

$$\begin{cases}\Delta u=0 & em \quad \Omega\\ u=f & em \quad \partial\Omega\end{cases}$$

A demonstração segue obviamente dos lemas anteriores.

Exemplos de domínios cumprindo a condição de Barreira, são conjuntos convexos como se pode verificar através de separação *via* hiperplanos.

FUNÇÕES HÖLDER CONTÍNUAS E O PROBLEMA DE DIRICHLET

Funções Hölder contínuas

Se Ω é um domínio aberto, limitado e conexo do IR^n dizemos que $u:\Omega\to IR$ é *Hölder contínua* no ponto x_0 com expoente $1>\alpha>0$ se tivermos o seguinte supremo finito

$$\sup_{x\in\Omega}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha}$$

Para Ω limitado dizemos que a f Hölder contínua quando o é em todos os pontos do domínio. A função é dita Hölder contínua, quando Ω não for limitado, se suas restrições o forem em cada parte limitada de Ω, com o mesmo α.

O potencial Newtoniano de *f* definimos como sendo a função $w:\Omega \to IR$, tal que

$$w(x) = \int_{\Omega} K(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

Onde *K* é a solução Fundamental.

Lema 1:Seja *f* limitada e integrável em Ω, e seja *w* o potencial Newtoniano de *f*. Então $w \in C^1(IR^n)$ e para todo $x \in \Omega$ temos

$$D_i(x) = \int_{\Omega} D_i K(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

Onde a diferenciação é com relação à primeira variável.

Dem:

Por causa das propriedades da solução Fundamental temos a função $v(x) = \int D_i K(x,\xi) f(\xi) d\xi$

Bem definida.

Mostremos que v=$D_i w$. Fixemos uma função $\eta \in C^1(IR)$ com $0 \le \eta \le 1$ e $0 \le \eta' \le 2$ cumprindo $\eta(t) = 0$, para $t \le 1$, e $\eta(t) = 1$, $t \ge 2$ assim defina para $\varepsilon > 0$ um função η pode ser arbitrária, $w_\varepsilon(x) = \int K \eta_\varepsilon f(\xi) d\xi$.

Com

$$K = K(x,\xi) \text{ e } \eta_\varepsilon = \eta(|x-\xi|/\varepsilon).$$

Claramente $w_\varepsilon \in C^1(IR^n)$ e

$$v(x) - D_i w_\varepsilon(x) = \int_{|x-\xi| \le 2\varepsilon} D_i((1-\eta_\varepsilon)K) f(\xi) d\xi$$

Daí

$$|v(x) - D_i w_\varepsilon(x)| \le \sup|f| \int_{|x-\xi|\le 2\varepsilon} \left((|D_i K|) + \frac{2}{\varepsilon}|K| \right) d\xi$$

$$\le \sup|f| \begin{cases} \dfrac{2n\varepsilon}{n-2} & para \quad n > 2 \\ 4\varepsilon(1+|\ln 2\varepsilon) & para \quad n = 2 \end{cases}$$

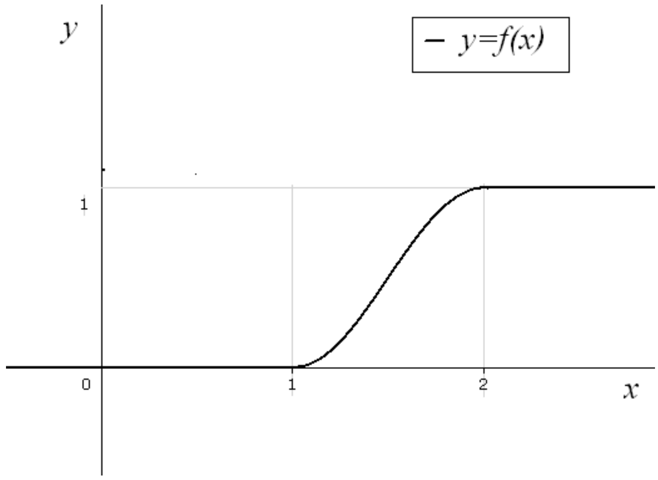
Em todo caso temos w_ε e $D_i w_\varepsilon$ convergindo, em subconjuntos compactos de IR^n, para *w* e *v* respectivamente quando $\varepsilon \to 0$, e daí $w \in C^1(IR^n)$ e $D_i w = v$ ■

A função η

Apesar de poder ser outra função, uma função pode dada como a seguinte função específica $f : IR \to IR$ tal que

$$f(x)=\begin{cases} 0 & se \quad x\le 1 \\ \frac{1}{2}(1+sen(\pi x+\frac{1}{2}\pi) & se \quad 1<x<2 \\ 1 & se \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Cujo gráfico está abaixo

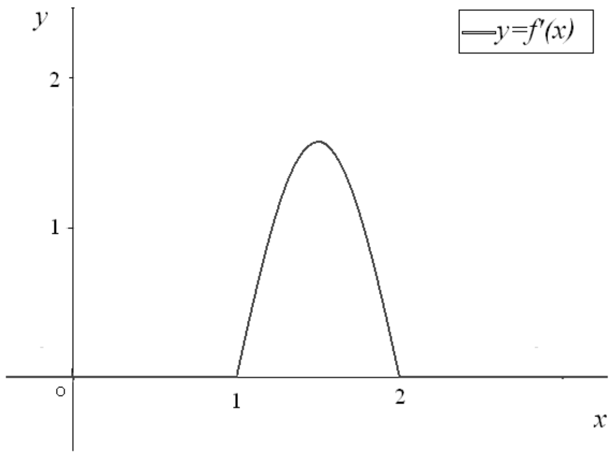


E a função derivada

$$f':IR\to IR$$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & se \quad x\le 1 \\ \frac{1}{2}\pi\cos(\pi x+\frac{1}{2}\pi) & se \quad 1<x<2 \\ 1 & se \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Que cumpre as condições que queremos e tem gráfico



Lema2: Seja $f:\Omega\to IR$ limitada e Hölder contínua localmente, então o potencial Newtoniano w de *f* cumpre $w\in C^2(\Omega)$ e $\Delta w=f$ em Ω e mais para cada $x\in\Omega$

$$D_{ij}(x)=\int_{\Omega_0} D_{ij}K(x,\xi)(f(\xi)-f(x))d\xi-f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_iK(x,\xi)n_j(\xi)d\sigma_\xi$$

onde Ω_0 é algum domínio contendo Ω cumprindo as hipóteses do teorema da divergência de Gauss e $f(x)=0, x \in \Omega_0 \setminus \Omega$. E $n_j(\xi)$ é a *j*-ésima coordenada do vetor normal unitário exterior a Ω_0.

Dem:

Seja

$$u(x)=\int_{\Omega_0} D_{ij}K(x,\xi)(f(\xi)-f(x))d\xi - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_iK(x,\xi)n_j(\xi)d\sigma_\xi$$

está é bem definida. Seja $v = D_i w$ e para $\varepsilon > 0$

$v_\varepsilon(x)=\int_\Omega D_iK\eta_\varepsilon f(\xi)d\xi$, onde η_ε é a função do lema anterior. Temos $v_\varepsilon \in C^1(\Omega)$ e derivando temos:

$$D_j(v_\varepsilon(x))=\int_\Omega D_j(D_iK(x,\xi)\eta_\varepsilon f(\xi)d\xi$$

$$D_j(v_\varepsilon(x))=\int_{\Omega_0} D_j(D_iK\eta_\varepsilon)(f(\xi)-f(x))d\xi + f(x)\int_{\Omega_0} D_j\left(D_iK\eta_\varepsilon\right)d\xi$$

$$=\int_{\Omega_0} D_j(D_iK\eta_\varepsilon)(f(\xi)-f(x))d\xi - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_iKn_jd\sigma_\xi$$

Mostremos que

$$\int_{\Omega_0} D_j\left(D_iK\eta_\varepsilon\right)d\xi = -\int_{\partial\Omega_0} D_iKn_jd\sigma_\xi$$

Para ε suficientemente pequeno
De fato, temos

$$D_j(D_iK\eta_\varepsilon)=D_{ij}K\eta_\varepsilon + D_iKD_j\eta_\varepsilon$$

E também

$D_j\eta_\varepsilon = \eta'(|x-\xi|/\varepsilon).\dfrac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|}=0$ para $|x-\xi|/\varepsilon \geq 2$ ou $|x-\xi|\leq\varepsilon$ e assim para todo $\varepsilon>0$

Logo

$$\int_{\Omega_0} D_iKD_j\eta_\varepsilon d\xi$$

é bem definida e como também

$$\int_{\Omega_0} D_{ij}K\eta_\varepsilon d\xi$$

É finita podemos usar o teorema da divergência de Gauss, portanto:

$$\int_{\Omega_0} D_j(D_iK\eta_\varepsilon)d\xi = \int_{\partial\Omega_0} D_iK\eta_\varepsilon n_jd\sigma_\xi$$

Mas para $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2}d(x,\partial\Omega_0)$ temos

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}|x-\xi| \Rightarrow \eta_\varepsilon \equiv 1$$

e daí obtemos

$$\int_{\Omega_0} D_j\left(D_iK\eta_\varepsilon\right)d\xi = -\int_{\partial\Omega_0} D_iKn_jd\sigma_\xi$$

Como queríamos demonstrar.

De onde podemos observar

$$| u(x) - D_j v_\varepsilon(x) | = | \int_{|x-\xi|\le 2\varepsilon} D_j \{(1-\eta_\varepsilon) D_i K\}(f(\xi) - f(x)) d\xi |$$

$$\le [f]_{\alpha:x} \int_{|x-\xi|\le 2\varepsilon} \left(| D_{ij} K | + \frac{2}{\varepsilon} | D_i K | \right) | x - \xi |^\alpha \, d\xi$$

$$\le \left(\frac{n}{2} + 4 \right) [f]_{\alpha:x} (2\varepsilon)^\alpha$$

Onde $[f]_{\alpha:x}$ representa

$$\sup_{\xi\in\Omega} \frac{| f(x) - f(\xi) |}{| x - \xi |^\alpha}$$

Daí temos $D_j v_\varepsilon$ convergindo para *u* uniformemente em qualquer subconjunto compacto de Ω e por $v_\varepsilon \to v = D_i w$, mostramos que $w \in C^2(\Omega)$ e $u = D_{ij} w$. Se tomarmos $\Omega_0 = B(x,R)$ com *R* suficientemente grande vamos obter

$$\Delta w(x) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} f(x) \int_{|x-\xi|=R} \sum_{i=1}^{n} n_i(\xi) n_i(\xi) d\sigma_\xi = f(x)$$

De fato pois para *R* suficientemente grande temos $\Omega \subset \Omega_0 = B(x,R)$ e assim

$$w_{ii}(x) = \int_{\Omega_0} D_{ii} K(x,\xi)(f(\xi) - f(x)) d\xi - f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i K(x,\xi) n_i(\xi) d\sigma_\xi$$

E assim

$$\Delta w(x) = \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{n} D_{ii} K(x,\xi)(f(\xi) - f(x)) d\xi - f(x) \int_{|x-\xi|=R} \sum_{i=1}^{n} D_i K(x,\xi) n_i(\xi) d\sigma_\xi$$

Que nos dá

$$\Delta w(x) = \int_{\Omega_0} \Delta K(x,\xi)(f(\xi) - f(x)) d\xi - f(x) \int_{|x-\xi|=R} \sum_{i=1}^{n} \psi'(R) \frac{1}{R} (x_i - \xi_i) . n_i(\xi) d\sigma_\xi$$

Logo usando que temos ΔK =0 em $\Omega_0 \setminus \{x\}$

$$\Delta w(x) = -f(x) \int_{|x-\xi|=R} \sum_{i=1}^{n} \psi'(R) \frac{1}{R} (x_i - \xi_i) . n_i(\xi) d\sigma_\xi$$

$$= -f(x) \int_{|x-\xi|=R} \sum_{i=1}^{n} \psi'(R)(-n_i(\xi)) . n_i(\xi) d\sigma_\xi$$

$$= f(x) \frac{R^{1-n}}{w_n} \int_{|x-\xi|=R} d\sigma_\xi = f(x).$$

Considerando agora o problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & em \quad \Omega \\ u = g & em \quad \partial\Omega \end{cases} \qquad (1.1)$$

Que é conhecido classicamente como problema de Dirichlet, como já dissemos, E este possui uma única solução u quando *f* e *g* e Ω cumprirem certas condições especificadas no seguinte teorema.

Teorema 1:

Seja Ω limitado cumprindo a condição de barreira, e cada ponto de $\partial\Omega$ regulares quanto a Δu. E *f* limitada e localmente Hölder contínua em Ω e *g* contínua, então o problema de Dirichlet (1.1) tem única solução.

Demonstração:

Seja *w* o potencial Newtoniano de *f* e seja *v=u-w,* nosso problema se torna em encontrar soluções de $\Delta v = 0$ em Ω e $v = g - w$ em $\partial\Omega$ mas este problema tem única solução pelo método de Perron ◙.

CONCLUSÃO

O problema de Dirichlet é o início para os estudos das Equações Diferenciais Parciais (EDP's). E que funções subarmônicas constituem uma das principais ferramentas para a construção da solução do problema de Dirichlet. Onde impomos certas condições sobre o domínio e com isto garantimos a existência e a unicidade da solução de tal problema. A respeito do Método de Perron, de acordo com nossos estudos inferimos que este garante a existência, apesar de não nos informar qual é a solução este nos dá uma caracterização das soluções que podem ser utilizadas para a construção de modelos com métodos numéricos quando a solução analítica não puder ser encontrada. Já o potencial Newtoniano aliado ao método de Perron nos dá a solução geral do problema de Dirichlet quando o domínio Ω satisfaz a condição de Barreira.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GILBARG, David; TRUDINGER, Niels: **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Berlin: Springer-Verlag, 2001

IÓRIO, Rafael José; IÓRIO, Valéria. **Equações Diferenciais Parciais**: *Uma introdução*. Rio de Janeiro - RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988

JOHN, Fritz. **Partial Differential Equations**, 4 Ed, Nova York-NY, Springer-Verlag, 1982

LEITHOLD, Louis .**O Cálculo com Geometria Analítica**. Traduzido por: Cyro de Carvalho Patarra, Vol. 2, 3 Ed., São Paulo-SP: HARBRA,1994

TUFANO, Douglas. **Guia Prático da Nova Ortografia.** São Paulo-SP: MELHORAMENTOS, 2008