INICIAÇÂO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

João Paulo Formiga de Meneses[1], José de Arimatéia Fernandes[2]

RESUMO

Tendo como meta usar técnicas realmente elementares, procuramos estudar o aspecto linear de cada problema, fazendo um estudo introdutório neste aspecto da Matemática de interesse real para aplicações às outras ciências. Selecionamos o problema de pequenas oscilações de uma corda.

Foi utilizado o Método de D'Alembert para encontrar a Equação Diferencial das pequenas oscilações de uma corda, analisando existência e unicidade de soluções e dependência contínua dos dados iniciais. Posteriormente, a solução de D'Alembert foi interpretada e analisamos o domínio de dependência e de influência.

Palavras-chave: Oscilações de uma corda, Método de D'Alembert, Equação Diferencial

INITIATION INTO THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

Having a goal really use elementary techniques, we study the linear aspect of each problem, making an introductory study on this aspect of mathematics of interest to real applications in other sciences. Selected the problem of small oscillations of a string.

We used the method of D'Alembert to find the differential equation of small oscillations of a string, analyzing existence and uniqueness of solutions and dependence on initial data continues. Subsequently, the solution of D'Alembert was interpreted and analyzed the domain of dependence and influence.

Keywords: Oscillations of a string, D'Alembert method, differential equation

INTRODUÇÃO

Muitos problemas nas áreas de Engenharia, Matemática e Física são modelados com o uso da ferramenta de equações diferenciais parciais. Em particular, a Equação da Onda exerce um papel muito importante em aplicações aos aplicações aos problemas relacionados com transporte de energia ou de massa que surgem, por exemplo, na Dinâmica de Fluidos. Daí segue-se a importância de se entender a teoria básica que modela a Equação da Onda e que descreve o comportamento de sua solução.

Neste sentido, deduzimos a Equação da Onda em uma situação particular e estudamos a solução dada pela fórmula de D'Alembert.

[1] Aluno do Curso de Bacharelado em Matemática, Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística, UFCG , Campina Grande , PB, E-mail: jpaulo_cg@hotmail.com

[2] Prof. Doutor, Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística, UFCG, Campina Grande, PB, E-mail: arimat@dme.ufcg.edu.br

METODOLOGIA

Seminários semanais preparados e ministrados pelo aluno e expostos ao orientador.

DISCUSSÃO

1. Equação diferencial para pequenas oscilações de uma corda e de uma membrana

1.1 – MÉTODO DE D'ALEMBERT

1.1.1 – Equação diferencial das pequenas oscilações de uma corda

Suponha-se que, em estado de equilíbrio, uma corda coincida com o eixo das abscissas de um sistema de coordenadas cartesianas com origem num ponto 0 do plano IR^2; limitar-se-á, aqui, ao estudo de pequenas oscilações transversais. Por transversal entende-se a oscilação que se realiza em um plano que contém o eixo dos x e em que cada elemento da corda se desloca perpendicularmente a esse eixo.

Representa-se por $u(x,t)$ o deslocamento de cada ponto x da corda no instante t, a partir de sua posição de equilíbrio. As hipóteses que se seguem são necessárias para a fundamentação das considerações posteriores.

a) Todas as forças de atrito, tanto internas como externas, não serão consideradas.
b) A intensidade das forças gravitacionais é pequena quando comparada com as tensões na corda.
c) As amplitudes $u(x,t)$ das oscilações e suas derivadas são pequenas, de modo que seus quadrados e produtos não são considerados nos cálculos quando comparados com a unidade.

Num instante t fixo, suponha-se que o perfil da corda seja o representado na Fig. 1, onde o segmento x_1x_2 se deformou, devido ao movimento, no arco de curva M_1M_2.

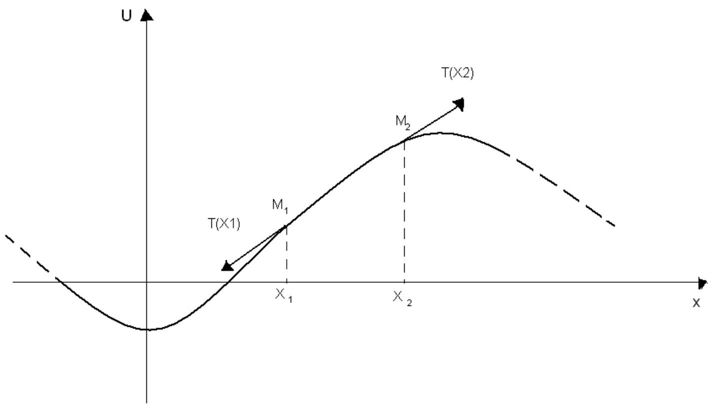


Fig. 1

O comprimento do arco M_1M_2, no instante t, é dado por

$$s = \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx$$

Em virtude da hipótese (c) de pequenas oscilações, obtém-se

$$s \approx x_2 - x_1$$

Desse modo, quando se estudam pequenas oscilações, não há variação do comprimento do segmento x_1x_2. Daí, pela Lei de Hooke, pode-se concluir que a intensidade da tensão T, em cada ponto, não varia com o tempo, ou seja, que a variação da tensão durante o movimento não é levada em conta em presença da tensão de equilíbrio T_0. Aqui, T_0 é a tensão a que está submetido o segmento x_1x_2 na posição de equilíbrio.

É possível mostrar, também, que a tensão T pode ser tomada como independente de x, isto é, pode-se considerá-la igual à tensão T_0. De fato, as forças que atuam sobre o arco de curva M_1M_2 são as seguintes:

a) as tensões em M_1 e M_2 tangenciais à corda;
b) as forças externas, caso existam;
c) as forças de inércia.

Como, por hipótese, o movimento é na direção perpendicular ao eixo dos x e as forças externas e de inércia têm direção também perpendicular a esse eixo, deduz-se que o arco M_1M_2 não possui aceleração na direção x, isto é, a resultante das forças na direção x é nula. Então, representando-se por α o ângulo agudo que a direção T faz com o eixo dos x, no instante t, tem-se

$$T(x_2).cos\alpha(x_2) - T(x_1).cos\alpha(x_1) = 0$$

Da hipótese de serem pequenas oscilações vem

$$cos\alpha(x_2) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1$$

resultando que $T(x_2) \approx (Tx_1)$ quaisquer que sejam x_1 e x_2 da corda. Assim, T não depende de x e será identificada com T_0 para todo x e t.

Vale a pena lembrar o Princípio de D'Alembert, que afirma: "Num sistema material em movimento, as forças nele aplicadas e as forças de inércia se equilibram". A equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda será deduzida como aplicação desse princípio. Para tanto, serão explicitadas as forças que atuam na corda. Viu-se que, devido às condições impostas, as forças responsáveis pelo movimento são as componentes das tensões na direção dos deslocamentos u, as forças externas e as forças de inércia. Calculando-se essas forças, obtém-se:

a) resultante das tensões na direção u:

$$F_1 = T_0[sen\alpha(x_2) - sen\alpha(x_1)]$$

sendo:

$$sen\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

conclui-se que

$$F_1 = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

Portanto, a componente das tensões na direção u é dada por

$$F_1 = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

b) forças externas – represente-se por $p(x,t)$ a distribuição de forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda, na direção u. Resulta que a força externa que atua sobre o arco M_1M_2 será:

$$F_2 = \int_{x_1}^{x_2}p(x,t)dx$$

c) forças de inércia – seja $\rho(x)$ a densidade linear da corda. A massa do segmento Δx da corda é $\rho(x).\Delta x$ e a força de inércia sobre esse segmento será

$$-\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Portanto, a força de inércia F_3 sobre o arco M_1M_2 será dada por

$$F_3 = -\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx.$$

Finalmente, do Princípio de D'Alembert obtém-se

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t)\right]dx = 0$$

quaisquer que sejam x_1, x_2 e $t \geq 0$. Supondo-se o integrando uma função contínua, segue-se que

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t) = 0.$$

Esta última é a equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda flexível, sob a ação de uma força externa $p(x,t)$. Quando $\rho(x)$ é constante (corda uniforme), obtém-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad (1.1)$$

sendo

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \qquad F(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}.$$

Quando não há força externa atuando na corda, a equação se reduz à seguinte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.2)$$

Observação 1 – A constante a possui dimensão de velocidade.

Uma equação como a (1.1), que envolve uma função incógnita u, suas derivadas parciais e um termo F que depende apenas das coordenadas, denomina-se equação diferencial parcial. Ela está incluída em um tipo amplo de equações diferenciais parciais denominado equação de ondas. De fato, o símbolo de derivação $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, que opera em funções $u(x,y,z,t)$, denomina-se operador de Laplace tridimensional. Define-se analogamente o operador de Laplace unidimensional, bidimensional e de dimensão maior que três. No caso da Eq. (1.1) aparece Δ de dimensão um. Assim, ma equação de ondas de dimensão três é, por definição, uma equação diferencial parcial da forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + F$$

sendo a uma constante, Δ o operador de Laplace tridimensional e F uma função que depende de (x, y, z, t). Define-se analogamente equação de onda unidimensional, bidimensional ou de dimensão maior que três. A equação (1.1), interpretada como descrevendo as pequenas oscilações de uma corda, é um exemplo de equação de ondas de dimensão um. O termo F denomina-se termo independente. Quando $F = 0$, a equação se diz homogênea. Denomina-se solução da equação de ondas em um aberto Ω do IR^3 a uma função $u(x, y, z, t)$ definida em Ω com valores reais tal que satisfaz a equação pontualmente em $\Omega x R^+$. Evidentemente, a mesma definição é valida para as equações de onda de dimensão diferente de três.

Obtida uma equação diferencial parcial descrevendo determinado fenômeno, surge o problema de saber se existe solução da equação e se essa solução é única. Outra questão levantada pelas aplicações é a que se denomina dependência contínua das condições iniciais, que consiste em saber se as soluções do problema variarão pouco quando os dados iniciais sofrerem pequenas modificações. No caso da corda, por exemplo, condições iniciais seriam a posição da corda $u_0(x)$ no instante inicial $t = 0$. A dependência contínua seria, então, o problema de saber se, observadas duas posições iniciais u_0 e v_0, assim como duas velocidades iniciais u_1 e v_1, sendo u_0 próxima de u_1 e v_0 próxima de v_1, resulta que a solução u obtida de u_0, u_1 e a solução v decorrente de v_0, v_1 são próximas. Com o objetivo de analisar a Eq. (1.2) sob o aspecto de existência, unicidade e dependência contínua, propõe-se o problema de Cauchy, ou problema de valores iniciais. Esse problema consiste em, conhecidas as funções u_0, u_1, para $-\infty < x < +\infty, t \geq 0$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad para - \infty < x < +\infty, t \geq 0 \qquad (1.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad (1.4)$$

$$u_1(x, 0) = u_1(x) \qquad (1.5)$$

Diz-se que o problema de Cauchy para (1.3), (1.4) e (1.5), é bem proposto ou corretamente proposto quando as seguintes condições são satisfeitas:

a) existe solução;
b) há unicidade de soluções;
c) há dependência contínua dos dados iniciais u_0 e u_1.

Para provar que o problema de Cauchy é bem proposto, usaremos certas hipóteses naturais sobre u_0 e u_1. Tal método baseia-se em uma mudança de variáveis para simplificar a forma da equação. Com o objetivo de encontrar essa mudança, considere-se a função linear $(x, t) \to (\xi, \eta)$ do IR^2 no IR^2 definida por

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t \end{cases}$$

sendo $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Tem-se pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta\frac{\partial u}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \delta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Daí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\beta^2 - a^2\alpha^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2(\beta\delta - a^2\alpha\gamma)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + (\delta^2 - a^2\gamma^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Supondo-se $\beta^2 - a^2\alpha^2 = 0 = \delta^2 - a^2\gamma^2$, a equação em ξ e η se simplifica desde que $\beta\delta - a^2\alpha\gamma \neq 0$. Assim, se for tomado

$$\beta = +a\alpha \qquad \delta = -a\gamma$$

obter-se-á

$$\beta\delta - a^2\alpha\gamma = -a^2\alpha\gamma - a^2\alpha\gamma = -2a^2\alpha\gamma$$

por hipótese, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ e tem-se que

$$0 \neq \alpha\delta - \beta\gamma = -a\alpha\gamma - a\alpha\gamma = -2a\alpha\gamma$$

o que implica $\alpha\gamma \neq 0$, uma vez que $a \neq 0$. Resulta que uma boa mudança de coordenadas é

$$\begin{cases} \xi = \alpha(x + at) \\ \eta = \gamma(x - at) \end{cases}$$

sendo α e γ números reais quaisquer, não nulos. Fazendo-se $\alpha = \gamma = 1$, conclui-se que a Eq. (1.2), nas coordenadas ξ e η, se escreve sob a forma

$$-4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0$$

que pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0.$$

Logo, $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \theta(\xi)$, isto é,

$$u(\xi,\eta) = \int_0^{\xi}\theta(s)\,ds + g(\eta)$$

ou ainda

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

sendo f e g funções de classe C^2 arbitrarias. A solução de D'Alembert escreve-se, então,

$$u(x,t) = f(x + at) + g(x - at) \qquad (1.6)$$

Utilizar-se-ão as condições iniciais para determinar as funções f e g, supondo-se u_0 de classe C^2 e u_1 de classe C^1 em $-\infty < x < +\infty$. Obtém-se

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = af'(x) - ag'(x) = u_1(x) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x) \\ f(x) - g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x u_1(s)ds + c \end{cases}$$

Resolvendo-se esse sistema, encontra-se

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(s)ds + \frac{c}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(s)ds - \frac{c}{2}$$

Portanto,

$$f(x+at) = \frac{1}{2}u_0(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} u_1(s)ds + \frac{c}{2}$$

$$g(x-at) = \frac{1}{2}u_0(x-at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^0 u_1(s)ds - \frac{c}{2}$$

Substituindo-se na Eq. (1.6), vem

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(s)ds \qquad (1.7)$$

com u_0 de classe C^2 e u_1 de classe C^1, que é conhecida como fórmula de D'Alembert.

Assim, mostra-se que a solução existe exibindo-se uma solução. Que a solução é única e também imediata, pois, se pensarmos em outra solução $v(x,t)$ obtida com as mesmas condições iniciais u_0 e u_1, então $v(x,t)$ será igual ao segundo membro da Eq. (1.7), isto é $v = u$.

Pode-se mostrar que a solução depende continuamente dos dados iniciais. Sejam u_0, u_1 e v_0, v_1 dois pares de dados iniciais, aos quais correspondem as soluções $u(x,t)$ e $v(x,t)$. Da fórmula de D'Alembert obtém-se

$$|u(x,t) - v(x,t)| \leq \frac{1}{2}|u_0(x+at) - v_0(x+at)| +$$
$$+\frac{1}{2}|u_0(x-at) - v_0(x-at)| + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |u_1(s) - v_1(s)|ds$$

Dado $\varepsilon > 0$ e fazendo-se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+T}$, tem-se que

$$|u(x,t) - v(x,t)| < \varepsilon$$

para todo x pertencente aos reais e 0 ≤ t ≤ T desde que

$$|u_i(x,t) - v_i(x,t)| < \delta \qquad i = 0,1,$$

o que mostra ser contínua a dependência da solução em relação aos dados iniciais.

Exemplo 1 – Calcular no ponto (2,10) o valor da solução do problema $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u_0(x) = x^2$; $u_1(x) = 2$, supondo-se $a = 1$.

Solução – Usando-se a Eq. (1.7), obtém-se

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x+t)^2 + (x-t)^2] + \frac{1}{2a}\int_{x-t}^{x+t} 2ds = x^2 + t^2 + 2t.$$

Isto é, $u(x,t) = x^2 + t^2 + 2t$ ou $u(2,10) = 4 + 100 + 20 = 124$.

1.1.2 – Interpretação da solução de D'Alembert

Imaginando-se uma fotografia da perturbação (onda) no instante $t = 0$, essa fotografia será o gráfico da função $u_0(x)$, daí esta função ser chamada perfil da onda.

Dar-se-á a seguir uma visão geométrica da solução de D'Alembert. Considerar-se-á o caso particular em que $u_1(x) = 0$, isto é, a velocidade inicial é nula. Neste caso, a solução da Eq. (1.7) se reduz a

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)].$$

Note-se primeiramente, que o gráfico de $u_0(x-at)$ é obtido do gráfico de $u_0(x)$ fazendo-se uma translação de at no sentido positivo do eixo dos x. Do mesmo modo, o gráfico de $u_0(x+at)$ é o transladado do gráfico de $u_0(x)$ no sentido negativo do eixo dos x. A solução $u_0(x-at)$ é, então, uma onda com perfil $u_0(x)$ propagando-se no sentido positivo do eixo dos x com velocidade de propagação igual a a. Essa onda chama-se onda progressiva ou onda do futuro. Analogamente, $u_0(x+at)$ é um sinal que se propaga com a mesma velocidade, porém em sentido oposto; recebe o nome de onda do passado ou onda regressiva. A solução $u(x,t)$ será a composição dos dois movimentos, ou seja, a soma da onda do futuro com a onda do passado. Embora, de acordo com o que foi visto, a onda-solução seja representada por uma função de classe C^2, para facilitar o traçado do gráfico tomar-se-á para exemplo, uma função apenas contínua.

Seja, então, uma onda cujo perfil ou configuração inicial é representado por

$$u_0(x) = \begin{cases} x + c\,,\, se\ -c \le x \le 0 \\ -x + c\ ,\, se\ 0 \le x \le c \\ 0\,,\, se\ x < -c\ ou\ x > c \end{cases} \qquad c = constante$$

Então

$$u_0(x+at) = \begin{cases} x + at + c\,,\, se - c - at \le x \le -at \\ -x - at + c\ ,\, se\ -at \le x \le c - at \\ 0\,,\, se\ x < -c - at\ ou\ x > c - at \end{cases}$$

e

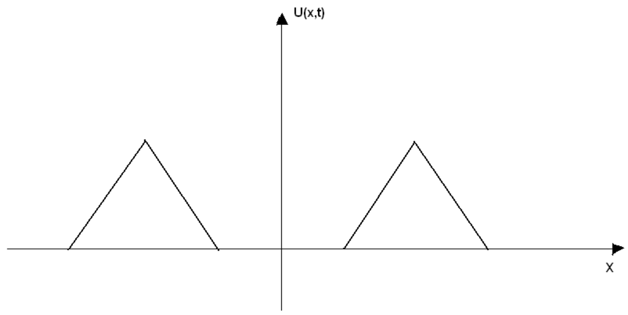
$$u_0(x-at) = \begin{cases} x - at + c\,,\, se - c + at \le x \le at \\ -x + at + c\ ,\, se\ at \le x \le c + at \\ 0\,,\, se\ x < -c + at\ ou\ x > c + at \end{cases}$$

Fazendo-se, agora, $t = t_n = \frac{nc}{2a}$, $n = 0,1,2,3,\ldots$, obtém-se para $n = 0$ que

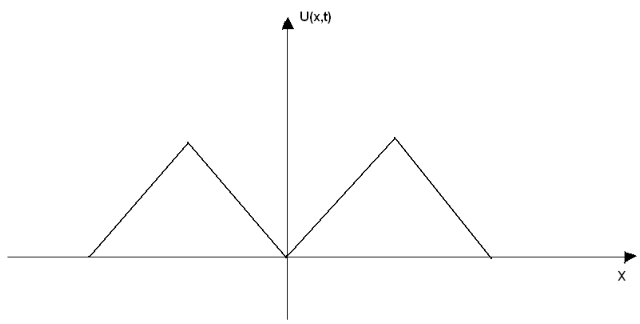
$$u_0(x) = \begin{cases} x + c\,,se\ \ -c \leq x \leq 0 \\ -x + c\ \ ,se\ 0 \leq x \leq c \\ 0\,,se\ x < -c\ ou\ x > c \end{cases}$$

Fazendo-se o gráfico de $u(x,t_n)$ para n = 0,1,2,3,..., obtém-se uma visão clara de que $u_0(x - at)$ é progressiva e $u_0(x + at)$ é regressiva. Para n = 0 a representação é $u_0(x)$, ao invés de $u(x,t)$. A Fig. 2 dá uma idéia da propagação do sinal $u_0(x)$ quando $c = 1$ e $a = 1$.

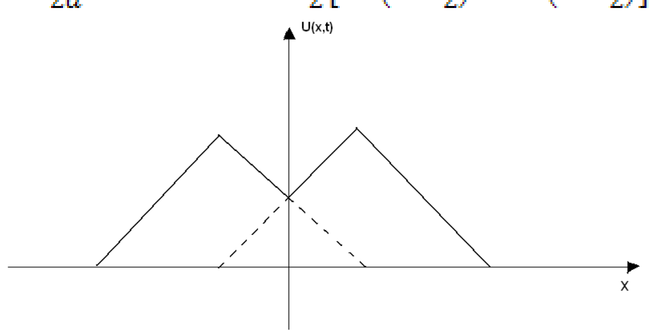
$$t = \frac{3}{2a} \qquad u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0\left(x + \frac{3}{2}\right) + u_0\left(x - \frac{3}{2}\right)\right]$$



$$t = \frac{1}{a} \qquad u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x + 1) + u_0(x - 1)]$$



$$t = \frac{1}{2a} \qquad u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0\left(x + \frac{1}{2}\right) + u_0\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$$



$t = 0 \qquad\qquad u(x,t) = u_0(x)$

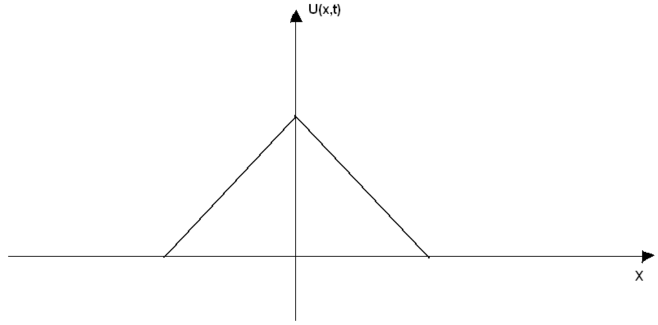


Fig. 2

Observação 2 – O objetivo da Fig. 2 é apenas dar ao leitor uma visão geométrica do movimento das ondas progressivas e regressivas. Observa-se que, ao se deduzir a fórmula de D'Alembert, supôs-se u_0 com duas derivadas contínuas em $-\infty < x < +\infty$. Isso não é verdade para o u_0 escolhido para compor a Fig. 2.

1.1.3 – Domínios de dependência e influência

A Eq. (1.7), que dá a solução do problema de valores iniciais para a equação de pequenas oscilações de uma corda, mostra que, no ponto (ξ, t_0), a solução só depende dos dados iniciais, u_0 e u_1, no intervalo $\xi - at_0 \leq x \leq \xi + at_0$. Mais especificamente, a solução $u(x,t)$ no ponto (ξ, t_0) depende:

a) dos valores de u_0 nos extremos do intervalo $[\xi - at_0, \xi + at_0]$;

b) dos valores de u_1 no intervalo $[\xi - at_0, \xi + at_0]$.

Daí, qualquer mudança no deslocamento inicial u_0 e na velocidade u_1 fora do intervalo $[\xi - at_0, \xi + at_0]$ não altera a solução no ponto (ξ, t_0), pois ela só depende dos valores de u_0 e u_1 nesse intervalo. Por essa razão, o intervalo

$$D(u; \xi, t_0) = \{x: \xi - at_0 \leq x \leq \xi + at_0\}$$

é chamado domínio de dependência do ponto (ξ, t_0). (Fig. 3)

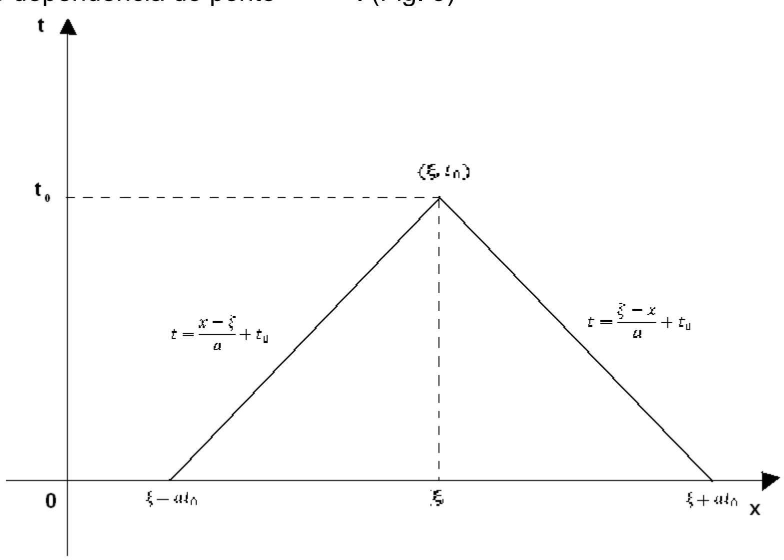


Fig. 3

Suponha-se, agora, que ξ seja um ponto fixo no eixo dos x e que se queira saber quais os pontos (x,t) do plano $x0t$ em que a solução u se modifica quando se alteram os valores de u_0 e u_1 em ξ. Isso equivale a perguntar quais são os pontos (x,t) do plano $x0t$ tais que ξ pertence ao seu domínio de dependência. O conjunto de pontos (x,t) que satisfaz a essa condição chama-se domínio de influência de $(\xi,0)$; observando-se a Fig. 3, conclui-se que ele é constituído pelos pontos do ângulo no semiplano $t \geq 0$, com vértice em $(\xi,0)$ e lados $t = \pm\frac{1}{a}(x-\xi)$, como na Fig. 4. O domínio de influência de $(\xi,0)$ é, então,

$$I(u,\xi) = \{(s,t): \xi - at \leq s \leq \xi + at, 0 \leq t < +\infty\}.$$

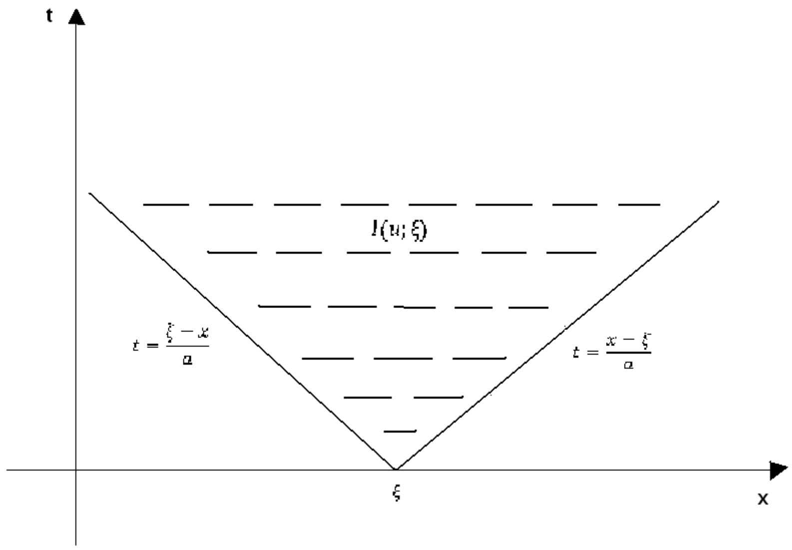


Fig.4

O par de retas $x + at = \xi + at_0$ e $x - at = \xi - at_0$ chama-se características da Eq. (1.2) e os triângulos limitados por elas e o eixo x chamam-se triângulos característicos.

Exemplo 2 – No problema de Cauchy do Ex. 1, o domínio de dependência do ponto $(3,2)$ é o intervalo $1 \leq x \leq 5$. As características por esse ponto são $t = x - 1$, $t = 5 - x$ e o domínio de influência é o ângulo fechado com vértice em $(3,0)$, limitado pelas retas $t = x - 3$, $t = 3 - x$, pois $a = 1$. Resumindo, se perturbarmos u_0 e u_1 em $(\xi,0)$, essa perturbação será observada no ângulo mencionado acima.

O domínio de influência de um intervalo $[x_1, x_2]$ é a reunião dos domínios de influência de cada ponto do intervalo $[x_1, x_2]$, como na Fig. 5.

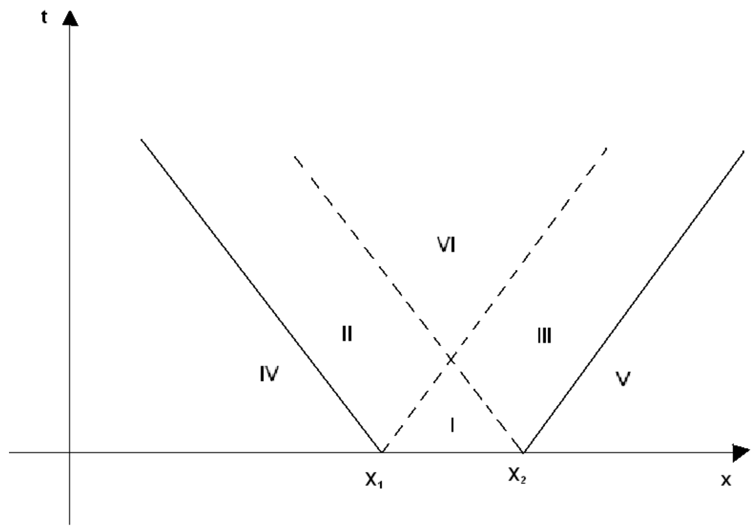


Fig. 5

Considere-se o ponto (ξ, τ) do plano $x0t$. Da fórmula de D'Alembert tem-se

$$u(\xi,\tau) = \frac{1}{2}u_0(\xi - a\tau) - \frac{1}{2a}\int_0^{\xi - a\tau} u_1(s)ds + \frac{1}{2}u_0(\xi + a\tau) + \frac{1}{2a}\int_0^{\xi + a\tau} u_1(s)ds$$

ou

$$u(\xi,\tau) = \psi(\xi + a\tau) + \phi(\xi - a\tau)$$

sendo

$$\psi(\xi + a\tau) = \frac{1}{2}u_0(\xi + a\tau) + \frac{1}{2a}\int_0^{\xi + a\tau} u_1(s)ds$$

$$\phi(\xi - a\tau) = \frac{1}{2}u_0(\xi - a\tau) - \frac{1}{2a}\int_0^{\xi - a\tau} u_1(s)ds$$

Logo, $\phi(x - at)$ é constante ao longo da característica $x - at = \xi - a\tau$, isto é, a onda do futuro possui deslocamento constante sobre essa característica. Do mesmo modo, a onda do passado possui deslocamento constante sobre a característica $x + at = \xi + a\tau$, pois sobre ela $\psi(x + at)$ é constante.

Na Fig. 5 as características por x_1 e x_2 dividiram o semiplano t ≥ 0 em seis regiões. Na região I tem-se a composição de $\phi(\xi - a\tau)$ progressiva e $\psi(\xi + a\tau)$ regressiva, isto é, os pontos de I são afetados pelas ondas do futuro e do passado que tiveram inicio em pontos do intervalo $[x_1, x_2]$. Na região II os pontos são perturbados apenas pelas ondas regressivas e, na região III, somente pelas ondas do futuro. Os pontos de IV e V são tais que seus domínios de dependência não interceptam o intervalo $[x_1, x_2]$, ou seja, os pontos dessas regiões não são afetados pela perturbação inicial. Na região VI, considere-se o ponto (ξ, τ). Tem-se

$$u(\xi,\tau) = \frac{1}{2}[u_0(\xi + a\tau) + u_0(\xi - a\tau)] + \frac{1}{2a}\int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} u_1(s)ds.$$

Mas, nessas condições, $u_0(x) = 0$. Logo, no ponto (ξ, τ) da região VI resta apenas

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x_2} u_1(s) ds$$

e pode-se afirmar que nesses pontos o sinal já passou, deixando apenas o efeito ou o indício de sua passagem, que é o deslocamento constante

$$\frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x_2} u_1(s) ds$$

CONCLUSÕES

Mediante estudos realizados, pode se concluir que:

- A equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda é deduzida através do Princípio de D'Alembert.
- As forças responsáveis pelo movimento da corda são as componentes das tensões na direção dos deslocamentos u, as forças externas e as forças de inércia.
- O problema de Cauchy para ser bem proposto, depende de algumas condições.
- O intervalo $D(u; \xi, t_0) = \{x: \xi - at_0 \le x \le \xi + at_0\}$ é chamado domínio de dependência do ponto (ξ, t_0).
- O domínio de influência de $(\xi, 0)$ é $I(u, \xi) = \{(s, t): \xi - at \le s \le \xi + at, 0 \le t < +\infty\}$.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MEDEIROS, L. D.; ANDRADE, N. G.**, Iniciação às equações diferenciais parciais.** LTC**,** Rio de Janeiro, 1978

FIGUEIREDO, D. G.**, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** SBM/IMPA, Rio de Janeiro, 2007