



PIBIC/CNPq/UFPG-2009

PROCESSOS TERMODINÂMICOS DE GASES NÃO COMUTATIVOS

Luiz Cordeiro Neto¹, Luciano Barosi²

RESUMO

Estudamos aqui elementos de teoria quântica de campos, noções de não-comutatividade e princípios do modelo cosmológico padrão para a compreensão das propriedades de um gás não-comutativo como elemento gerador de inflação. Existem futuros avanços possíveis no estudo desse gás ainda não contemplados no presente trabalho.

Palavras-chave: Teoria Quântica de Campos, não comutatividade, inflação cosmológica.

PROCESSOS TERMODINÂMICOS DE GASES NÃO COMUTATIVOS

ABSTRACT

We study elements of Quantum Field Theory, non-commutativity and principles of standard cosmological model in order to understand some properties of a noncommutative gas as a possible driven force for cosmological inflation. There are some possible future research of this model not pursued in the present work.

Keywords: Quantum Field Theory, non-commutativity, cosmological inflation.

1. INTRODUÇÃO

Abordaremos nesse trabalho conceitos de Teoria Quântica de Campos relativos aos processos termodinâmicos dos gases não comutativos. Para a implementação desse tema necessitamos de conhecimentos prévios de Termodinâmica, Mecânica Estatística, Mecânica Quântica, Física Matemática e Mecânica Clássica.

Consideramos a possibilidade de gases não-comutativos terem sido os causadores da inflação do Universo, com isso estudamos vários cenários que permitem essa possibilidade.

Encontramos as equações de estado do gás fundamentadas em aproximações da Mecânica Estatística Quântica para um campo não comutativo em termos de um gás a alta temperatura.

O gás de campo não comutativo pode desenvolver inflação para um período de tempo que pode ser ajustado a dados observacionais. Serão mostrados alguns cenários que em um determinado tempo a não-comutatividade não mais influencia a termodinâmica e assim a inflação cessa e entra-se na era da radiação, exatamente como deveria ser de acordo com a perspectiva do modelo cosmológico inflacionário.

2. TEORIA DE CAMPOS EM ESPAÇO ALVO NÃO-COMUTATIVOS

Na Teoria de Campos Usual, as coordenadas e momentos conjugados obedecem às relações de quantização usuais de x^a , onde $a = 1, 2$, e os momentos p_a são

¹ Aluno de Curso de Física Licenciatura, Unidade Acadêmica de Educação - UAE, UFPG, Cuité, PB, E-mail: luizneto.fisica@gmail.com

² Aluno de Curso de Física Licenciatura, Unidade Acadêmica de Educação - UAE, UFPG, Cuité, PB, E-mail: luizneto.fisica@gmail.com



PRPG Pró-Reitoria de Pós-Graduação

PIBIC/CNPq/UFPG-2009

$$[x^a, x^b] = 0 \quad (2.1)$$

$$[p^a, p^b] = 0 \quad (2.2)$$

$$[x^a, p_b] = i\delta_b^a \quad (2.3)$$

Essa álgebra nos deixa um problema a ser resolvido em um espaço não comutativo, onde as coordenadas espaciais não comutam. Como solução desse problema, consideremos $\phi^i(\vec{x}, t)$ como as componentes da expansão de Fourier de um campo definido em uma caixa em três dimensões,

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{n}} e^{\frac{2\pi i}{R} \vec{n} \cdot \vec{x}} \phi_{\vec{n}}^i(t), \quad (2.4)$$

onde $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, n_i pertencentes a \mathbb{Z} , e as componentes de Fourier são

$$\phi_{\vec{n}}^i = \frac{1}{R^3} \int d^3x e^{-\frac{2\pi i}{R} \vec{n} \cdot \vec{x}} \phi^i(\vec{x}, t). \quad (2.5)$$

Baseado na seção 2 de [BALACHANDRAN_2007], que trata um campo escalar bosônico não comutativo consideraremos o espaço \mathbb{R}^2 como o espaço não-comutativo, de tal forma que

$$\begin{aligned} \phi : M_3 \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\vec{x}, t) &\rightarrow \phi(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assumindo cada campo do espaço um campo compactado em S^1 com raio R . No limite termodinâmico faremos o limite de volume infinito.

Consideraremos um campo livre e a densidade lagrangeana para esse campo livre pode ser escrita em termos dos modos de Fourier acima definidos:

$$L = \frac{gR^3}{2} \sum_i \left\{ \dot{\phi}_{\vec{n}}^i \dot{\phi}_{-\vec{n}}^i - \left(\frac{2\pi |\vec{n}|}{R} \right)^2 \phi_{\vec{n}}^i \phi_{-\vec{n}}^i \right\}. \quad (2.7)$$

Os momentos associados aos modos de Fourier $\phi_{\vec{n}}^i$ são

$$\pi_{\vec{n}}^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{\vec{n}}^i} = gR^3 \dot{\phi}_{-\vec{n}}^i. \quad (2.8)$$

Podemos realizar uma transformação canônica nos campos e nos momentos. Utilizaremos a transformação canônica denominada *transformação vestida*, definida abaixo.

$$\hat{\phi}^a(\vec{x}, t) = \phi^a(\vec{x}, t) - \frac{1}{2} \epsilon^{ab} \theta \delta \pi_b(\vec{x}, t), \quad (2.9)$$

$$\hat{\pi}^a(\vec{x}, t) = \pi^a(\vec{x}, t), \quad (2.10)$$

θ terá o papel de um parâmetro de não-comutatividade.

Podemos obter as relações de comutação em tempos iguais para os campos transformados a partir das relações de comutação usuais:



PRPG | Pró-Reitoria de Pós-Graduação

$$\begin{aligned}
 \text{PIBIC/CNPq/UFCA-2009} \\
 [\hat{\phi}^a(\vec{x}, t), \hat{\phi}^b(\vec{y}, t)] &= [\phi^a - \frac{1}{2}\epsilon^{ac}\theta\phi^b, \phi^a - \frac{1}{2}\epsilon^{bd}\theta\phi^c] \\
 &= [\phi^a, \phi^b] - \frac{1}{2}\epsilon^{bd}\theta[\phi^a, \pi^c] - \\
 &\quad - \frac{1}{2}\epsilon^{ac}\theta[\pi^b, \phi^b] + \frac{1}{4}\epsilon^{ac}\theta[\pi^b, \pi^c] \\
 &= -\frac{1}{2}\epsilon^{bd}i\delta^{ad}\delta(\vec{x} - \vec{y}) + \\
 &\quad + \frac{1}{2}\epsilon^{ac}i\delta^{cb}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\
 &= -\frac{1}{2}\theta i\delta(\vec{x} - \vec{y})(\epsilon^{ba} - \epsilon^{ba}) \\
 &= i\theta\epsilon^{abd}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\
 \Rightarrow [\hat{\phi}^a(\vec{x}, t), \hat{\phi}^b(\vec{y}, t)] &= i\epsilon^{ab}\theta\delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

de modo análogo encontramos

$$[\hat{\pi}^a(\vec{x}, t), \hat{\pi}^b(\vec{y}, t)] = 0, \tag{2.12}$$

$$[\hat{\phi}^a(\vec{x}, t), \hat{\pi}^b(\vec{y}, t)] = i\delta_0^a\delta(\vec{x} - \vec{y}), \tag{2.13}$$

Em [BALACHANDRAN_2007] essas relações de comutação são consideradas com uma modificação adicional, onde a função delta das posições, usual em teorias de campos é substituída por uma regularização tipo gaussiana, introduzindo um novo parâmetro σ no modelo, associado à largura da gaussiana.

Essa regularização é dada pela relação:

$$\theta(\sigma) = \frac{\theta}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \exp\left[-\sum_{i=1}^3 \frac{(x_i - y_i)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2.14}$$

ao analisar essa regularização podemos notar que σ é o parâmetro que controla a largura da gaussiana. O limite em que esse parâmetro vai a zero corresponde a função delta usual e o limite em que o parâmetro cresce é uma maneira de recuperar a comutatividade dos campos.



PRPG Pró-Reitoria de Pós-Graduação

PIBIC/CNPq/UFPG-2009

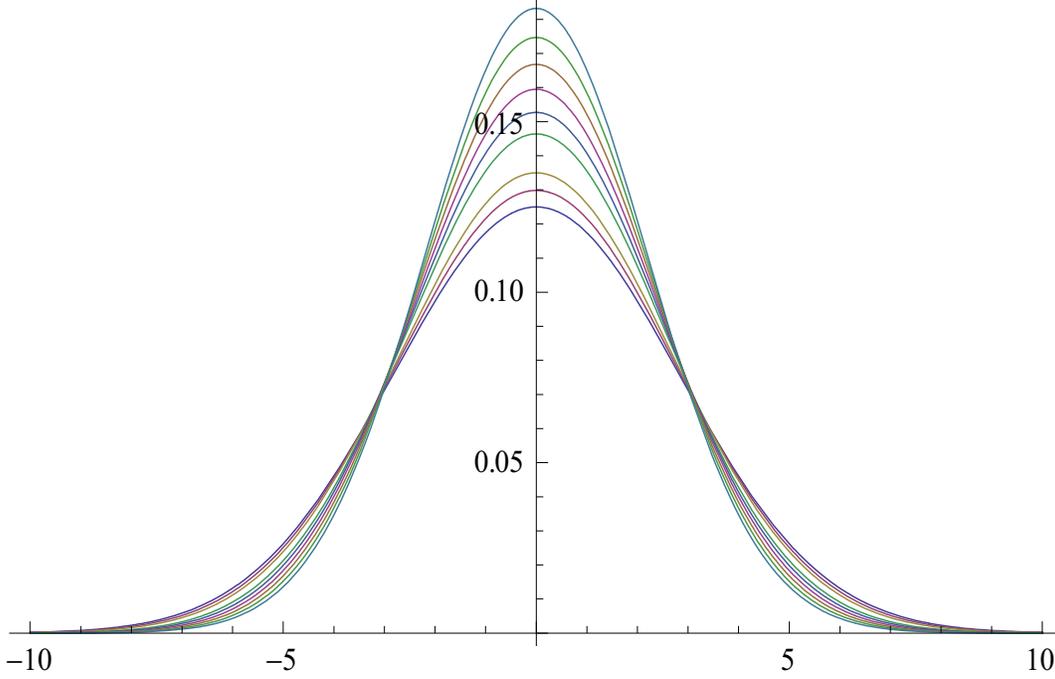


Figura 1: Gráfico da função $\theta(\sigma)$ para diferentes valores de σ . Valores de σ crescentes representam curvas de maior largura.

Alem disso $\theta(\sigma)$ pode ser escrito em termos dos modos de Fourier

$$\theta(\vec{n}) = \theta e^{-\frac{2\pi^2\sigma^2}{R^2}|\vec{n}|^2}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\phi}_n^a = \phi_n^a - \frac{1}{2R^3} \epsilon^{ab} \theta(n) \pi_{-n}^b. \quad (2.16)$$

Análogo a (2.11), encontramos a relação das componentes de Fourier

$$[\hat{\phi}_n^a, \hat{\phi}_m^b] = \frac{i\epsilon^{ab}\theta(n)}{R^3} \delta_{n+m,0}, \quad (2.17)$$

$$[\hat{\pi}_n^a, \hat{\pi}_m^b] = 0, \quad (2.18)$$

$$[\hat{\phi}_n^a, \hat{\pi}_m^b] = i\delta^{ab} \delta_{mn}, \quad (2.19)$$

e escrevemos a hamiltoniana da forma a seguir:

$$H = H_0 + \sum_{i,n} \left(\frac{\Omega_{\vec{n}}^2}{2gR^3} \pi_{\vec{n}}^i \pi_{-\vec{n}}^i + \frac{gR^3}{2} \omega_{\vec{n}}^i \phi_{\vec{n}}^i \phi_{-\vec{n}}^i - \frac{g}{2} \omega_{\vec{n}}^2 \theta(n) \epsilon_{ik} \phi_{\vec{n}}^i \pi_{\vec{n}}^k \right) \quad (2.20)$$

onde

$$\Omega_{\vec{n}}^2 = 1 + \left(\frac{\pi g |\vec{n}| \theta(n)}{R} \right)^2 \quad (2.21)$$



PIBIC/CNPq/UFPG-2009

e

$$\omega_{\vec{n}} = \frac{2\pi|\vec{n}|}{R}. \quad (2.22)$$

Esta Hamiltoniana pode ser diagonalizada introduzindo operadores de aniquilação e criação $A_{\vec{n}}^i$'s e $A_{\vec{n}}^{i\dagger}$'s onde $i = 1, 2$, análogos ao caso usual do Oscilador Harmônico Quântico Simples, de forma que a Hamiltoniana, pode ser escrito como

$$H = \sum_{\vec{n} \neq 0} \omega_{\vec{n}} \{ \Lambda_{\vec{n}}^1 A_{\vec{n}}^{1\dagger} A_{\vec{n}}^1 + \Lambda_{\vec{n}}^2 A_{\vec{n}}^{2\dagger} A_{\vec{n}}^2 \} \quad (2.23)$$

onde

$$\Lambda_{\vec{n}}^1 = \Omega_{\vec{n}} + \frac{\pi|\vec{n}|g\theta(n)}{R} \quad (2.24)$$

$$\Lambda_{\vec{n}}^2 = \Omega_{\vec{n}} - \frac{\pi|\vec{n}|g\theta(n)}{R} \quad (2.25)$$

Nós observamos que foram modificadas as relações de dispersão destes bósons. Porém, se nós levamos o limite $\theta \rightarrow 0$, então nós recuperamos as relações de dispersão habituais. Além disso, vemos que aparece um divisor dos níveis de energia dos osciladores. Isto é associado com a propriedade de **birrefringência** da radiação de campo.

3. TERMODINÂMICA DO GÁS NÃO-COMUTATIVO

Em [Barosi, 2008] utiliza-se o formalismo gran-canônico da Mecânica Estatística para estudar as propriedades termodinâmicas de um gás composto dos campos não-comutativos da seção anterior. O Gran-potencial termodinâmico está associado a energia e ao número de partículas e a partir desse obtêm-se as demais variáveis termodinâmicas de interesse, em particular a pressão, temperatura, densidade de partículas e entropia.

O ensemble grande canônico esta associado com um sistema em contato com um reservatório térmico com temperatura fixa e de partículas com potencial químico fixo.

Considerando o sistema inicial do Universo S como um reservatório R de energia térmica E_0 e um número total de partículas N_0 , com base no postulado fundamental da mecânica estatística, a probabilidade de encontrarmos o nosso sistema em um estado microscópico particular j , com energia E_j e o número de partículas N_j , pode ser escrito na forma

$$P_i = c\Omega_R(E_0 - E_j, N_0 - N_j) \quad (3.1)$$

onde c é uma constante e $\Omega_R(E, N)$ é o numero de estados microscópios possíveis. Escrevendo a expansão de Taylor temos

$$\ln P_j = \text{constante} + \left(\frac{\partial \ln \Omega_R}{\partial E} \right)_{E_0, N_0} (-E_j) + \left(\frac{\partial \ln \Omega_R}{\partial N} \right)_{E_0, N_0} + (-N_j) \dots \quad (3.2)$$

Usando a definição de entropia proporcionada pelo segundo postulado da mecânica estatística, temos



PRPG Pró-Reitoria de Pós-Graduação

PIBIC/CNPq/UFCA-2009

$$\frac{\partial \ln \Omega_R}{\partial E} = \frac{1}{\kappa_B T} \quad e \quad \frac{\partial \ln \Omega_R}{\partial N} = -\frac{\mu}{\kappa_B T}, \quad (3.3)$$

onde T e μ são a temperatura e o potencial químico do Universo primordial. Neste caso, por conta de nosso reservatório ser suficientemente grande, podemos abandonar os termos de segunda ordem na expansão (3.2). Assim, temos

$$\ln P_j = \text{constante} - \frac{E_j}{\kappa_B T} + \frac{\mu N_j}{\kappa_B T}, \quad (3.4)$$

ou seja,

$$P_j = \frac{1}{\Xi} \exp(-\beta E_j + \beta \mu N_j) \quad (3.5)$$

Onde a grande função Ξ de partição é dada por

$$\Xi = \sum_j \exp(-\beta E_j + \beta \mu N_j) \quad (3.6)$$

Substituindo em termos do hamiltoniano (2.23), temos

$$\begin{aligned} \Xi &= \prod_{k \neq 0} \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-\beta(\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1 - \mu)n} e^{-\beta(\omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2 - \mu)m} \\ &= \prod_{k \neq 0} \left(\frac{1}{1 - z e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1}} \right) \left(\frac{1}{1 - z e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2}} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde o modo zero é desconsiderado (Esta associado apenas aos modos translacionais rígidos do sistema). Note que definimos a fugacidade $z = e^{\beta \mu}$, sendo μ o potencial químico.

As grandezas termodinâmicas estão todas associadas a seguinte grandeza:

$$\ln \Xi = - \sum_{k \neq 0} [\ln(1 - z e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1}) + \ln(1 - z e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2})]. \quad (3.8)$$

Os objetos de interesse relativos à nossa investigação são a energia interna U , o número de partículas N e a pressão P dados por

$$U = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi(\beta, V, z), \quad (3.9)$$

$$p = \frac{1}{\beta V} \ln \Xi(\beta, V, z), \quad (3.10)$$

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi(\beta, V, z), \quad (3.11)$$

sendo a densidade de energia definida como $\rho = U/V$. A equação de estado $\rho(p)$ e a equação de Friedmann descrevem a evolução do Universo preenchido por um gás.

No limite termodinâmico os somatórios se transformam em integrais e a natureza extremamente complexa das relações de dispersão codificadas na hamiltoniana tornam o problema analítico intratável. Considera-se assim o limite de altas temperaturas e gás diluído ($z \ll 1$). Nesse limite reescrevemos a equação (3.9) expandida em séries de potência da seguinte forma:



PRPG Pró-Reitoria de Pós-Graduação

PIBIC/CNPq/UFCA-2009

$$\ln \Xi = z \sum_{k \neq 0} (e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1} + e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2}). \quad (3.12)$$

Em nosso trabalho estamos considerando um campo de gases não comutativos composto por N osciladores contidos no $V \sim R^3$. No limite termodinâmico $V \rightarrow \infty$ ($R \rightarrow \infty$) o limite somatório é substituído por uma integral, assim temos

$$\sum_{k \neq 0} \rightarrow V \int \frac{d^3 \kappa}{(2\pi)^3}, \quad (3.13)$$

portanto

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= zV \int \frac{d^3 \kappa}{(2\pi)^3} (e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^1} + e^{-\beta \omega_{\vec{k}} \Lambda_{\vec{k}}^2}) \\ &= \frac{zV}{2\pi^2} \int_0^\infty d\kappa \kappa^2 (e^{-\beta \omega \kappa \Lambda^1(\kappa)} + e^{-\beta \omega \kappa \Lambda^2(\kappa)}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde

$$\Lambda^1(k) = \sqrt{1 + \left(\frac{k\theta(k)}{8\pi}\right)^2} + \frac{k\theta(k)}{8\pi}, \quad (3.15)$$

$$\Lambda^2(k) = \sqrt{1 + \left(\frac{k\theta(k)}{8\pi}\right)^2} - \frac{k\theta(k)}{8\pi}, \quad (3.16)$$

$$\theta(k) = \theta e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}. \quad (3.17)$$

A integral (3.14) ainda é difícil de calcular, tendo-se em vista a dependência não trivial de $\Lambda^1(k)$ em k e no parâmetro θ . Mas, se expandirmos essa integral em series de potência de θ e β , podemos prosseguir nossa investigação com cálculos analíticos até alguns níveis de aproximação.

3.1 As equações de Estado

Nessa seção estudaremos as equações de estado $p = \omega \rho$, na qual podemos encontrar possíveis cenários inflacionários. Com isso, encontraremos as quantidades termodinâmicas da densidade de energia ρ e a pressão p definidas em (3.9) e (3.10), respectivamente. Usando a definição (3.14) expandida como série de potência dos parâmetros θ e β até a quarta ordem nós obtemos

$$\rho = z \left(\frac{12}{\beta^4} - \frac{3\theta^4}{262144\pi^4\sigma^8} - \frac{15\beta\theta^2}{256\pi^{\frac{3}{2}}\sigma^7} + \frac{\theta^2}{64\pi^2\sigma^6} \right), \quad (3.18)$$

$$p = z \left[\frac{4}{\beta^4} + \theta \left(\frac{15\beta}{512\pi^{\frac{3}{2}}\sigma^7} - \frac{1}{64\pi^2\sigma^6} \right) \right], \quad (3.19)$$

Também utilizaremos a densidade de partículas $n = N/V$, definida anteriormente em (3.11) e a entropia molar s escritas como



PRPG Pró-Reitoria de Pós-Graduação

PIBIC/CNPq/UFPG-2009

$$n = z \left[\frac{4}{\beta^3} + \theta^2 \left(\frac{15\beta^2}{512\pi^{\frac{3}{2}}\sigma^7} - \frac{\beta}{64\pi^2\sigma^6} \right) \right], \quad (3.20)$$

$$s = \frac{160\beta^8\theta^2 - 105\sqrt{\pi}\beta^7\theta^2\sigma + 144\beta^6\theta^2\sigma^2 - 30\sqrt{\pi}\beta^5\theta^2\sigma^3 + 2^{14}\pi^2\sigma^{10}}{30\sqrt{\pi}\beta^9\theta^2\sigma^3 - 16\beta^8\theta^2\sigma^4 + 2^{12}\pi^2\beta^4\sigma^{10}}. \quad (3.21)$$

Com essa aproximação encontramos a quantidade $\omega(\sigma, \theta, \beta) = p/\rho$ como sendo

$$\omega(\sigma, \theta, \beta) = \frac{1}{3} + \frac{\beta^4}{3} \left(\frac{\theta^4}{2^{20}\pi^4\sigma^8} - \frac{\theta^2}{2^6 3\pi^2\sigma^6} \right). \quad (3.22)$$

Podemos notar que para σ suficientemente grande e para θ e β suficientemente pequeno encontramos $\omega(\sigma, \theta, \beta) = 1/3$, que corresponde ao regime usual de um gás de radiação. Com o sinal de menos que aparece na frente do terceiro termo lado direito da equação (3.22) podemos encontrar regiões de parâmetros onde $-1 \leq \omega < -1/3$, que corresponde a uma expansão inflacionária de um Universo preenchido por um gás não comutativo.

4. INFLAÇÃO COSMOLÓGICA

No ano de 1981 Alan Guth propôs a inflação do Universo. O termo inflação é definido como um período no qual o Universo expandiu de forma extremamente acelerada (exponencial) em um intervalo de tempo relativamente curto.

$$\text{INFLAÇÃO} \iff \ddot{a}(t) > 0. \quad (4.1)$$

Isto corresponde a uma expansão muito rápida do Universo.
A equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (4.2)$$

mostra que $\rho + 3p < 0$ é necessário para a condição de inflação. Se assumirmos uma densidade positiva, necessariamente a pressão tem que ser negativa. Essa equação é consequência da Relatividade geral, como exposto a abaixo.

A relatividade geral nos mostrou que a geometria do espaço-tempo é determinada pelo conteúdo de matéria. Essa relação é exposta pelo a ação de Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{g} R \quad (4.3)$$

onde R é o escalar de curvatura obtida pela a contração do tensor de Riemann. As equações de movimento desta ação são as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi\sigma T_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

$T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia da matéria.

Impondo o principio cosmológico, de que o Universo é isotrópico e homogêneo, temos que a métrica de Friedmann-Robertson-Walker governa a evolução do Universo

$$ds^2 = -dt + a(t)[dr^2 + r^2 d\Omega^2]. \quad (4.5)$$



PIBIC/CNPq/UFCA-2009

As equações de Einstein fornecem uma equação dinâmica para $a(t)$ e uma equação de continuidade para a métrica.

Desta forma a equação de Friedmann é escrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (4.6)$$

onde

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = H, \quad (4.7)$$

e a equação de continuidade como

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\rho + 3p). \quad (4.8)$$

As equações (4.5) e (4.7) são as equações básicas para a cosmologia e acarretam a condição $p < -\frac{\rho}{3}$ para o universo inflacionário.

5. INFLAÇÃO POR MATÉRIA NÃO COMUTATIVA

Nesta parte do artigo iremos propor possíveis cenários inflacionários para o Universo. Para tais proposituras, consideraremos um Universo primordial constituído por um gás não comutativo, que siga as propriedades descritas na seção 3 do presente artigo, embasadas pela equação de Friedmann, descrita na seção 4, como sendo a governante de todo processo inflacionário do Universo em um tempo remoto.

Os cenários inflacionários a ser considerados aqui devem possuir algumas características e algumas exigências especiais. A primeira exigência a ser considerada é ver se o gás pode obedecer ao regime $-1 \leq \omega < -1/3$.

No Universo constituído por esse gás diluído a uma temperatura extremamente alta descrito pela a quantidade $\omega(\sigma, \theta, \beta)$ dado pela equação (3.22), notamos se tratar de um gás não comutativo, em virtude de três parâmetros i.e., σ , θ e β , que podem ser fixos ou variáveis. Estes parâmetros, para haver inflação, devem estar de forma a $\omega < -1/3$. Também vamos impor a condição $-1 \leq \omega$ eliminando a possibilidade de cosmologias tipo Phantom devido à sua não-unitariedade.

Nessa parte da seção iremos descrever os parâmetros θ , σ e β .

Primeiramente, o parâmetro θ está relacionado a não comutatividade do gás de forma diretamente proporcional. Com isso queremos dizer que quanto maior for nossa estimativa para esse parâmetro maior será a intensidade da não-comutatividade. O parâmetro σ está associado ao alcance da não-comutatividade. O limite desse parâmetro grande retoma o caso comutativo usual.

Agora podemos observar que θ e σ são dinâmicos, com isso iremos buscar soluções dinâmicas para essa teoria que descrevam esses objetos físicos. Fazendo uma pequena ressalva, anunciamos que embora esses parâmetros sejam variáveis dinâmicas, a nossa teoria não descreve essa dinâmica.

O parâmetro β é correlacionado ao inverso da temperatura do gás não comutativo.

Em posse dessas informações, procederemos a nossa engenharia a respeito de alguns cenários inflacionários

5.1 Cenário inflacionário decorrente de θ

Nesta parte da seção consideraremos o parâmetro de não comutatividade fixo, permanentemente presos a pequenas distâncias físicas e assim, consideraremos os possíveis cenários inflacionários em consequência de β e σ . Com esse enredo podemos encontrar a era da radiação clássica com $\sigma \rightarrow \infty$. Foram analisados dois possíveis casos para esses cenários. Primeiramente analisamos o caso de β constante, em seguida consideramos β variando em uma expansão adiabática.



PIBIC/CNPq/UFPG-2009

5.1.1 Temperatura constante

Agora iremos assumir β fixo, de forma que

$$\sigma \sim \frac{1}{\rho^{\frac{1}{6}}} \tag{5.1}$$

(veja a equação 3.18). Assim, a densidade de energia ρ será muito alta nos primórdios do Universo, as combinações de um campo não comutativo terão uma influência a comutatividade muito grande devido a o alcance de σ ser muito pequeno. A medida em que o Universo expande a densidade de energia ρ diminui a medida que ocorre as passagens de do gás pelo estado denominado de radiação $\omega(\sigma, \theta, \beta) = 1/3$. Depois disso o gás entra no regime acelerado, como pode ser visto na curva mais baixa que delimita a região sombreada descrita no painel esquerdo da figura 2. Finalmente, o gás alcança o regime denominado de radiação novamente quando σ se torna suficientemente grande – veja a equação (3.22). Além disso a não comutatividade se torna desprezível com o aumento de σ . Este é o cenário esperado que deveria acontecer em qualquer modelo inflacionário. Entretanto, existe uma diferença fundamental no enredo descrito acima: é o fato de tanto a temperatura ($1/\beta$), quanto σ se encontrar fixos.

Este enredo mostra não claramente as mudanças de temperatura decorrentes nas mudanças de fase no Universo inflacionário, porem, isso é uma característica de uma inflação morna descrita em [Berera, 1995] e [Berera, 2006].

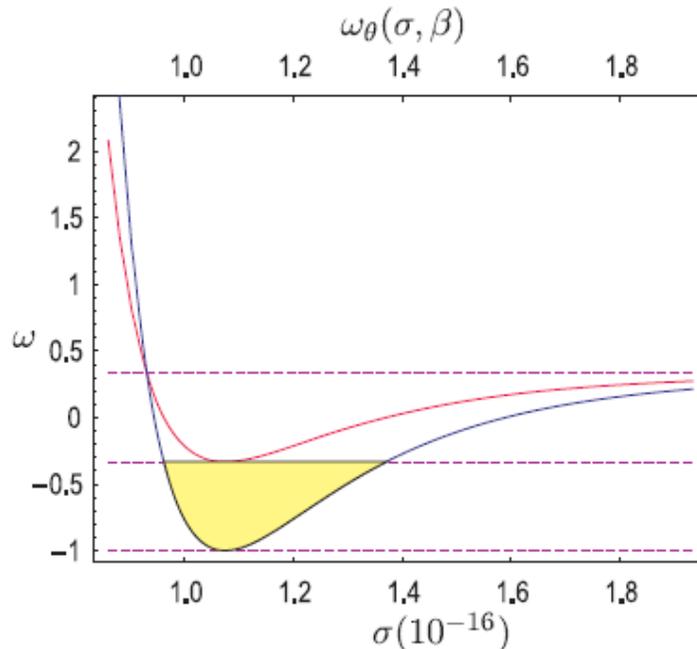


Figura 2: as linhas horizontais coloridas são $\omega = -1, -1/3, 1/3$. $\theta = 2, 2 \cdot 10^{-14}$, e são escolhidos valores para β localizando o mínimo de ω nas linhas -1 e $-1/3$. As linhas inferiores graficadas são para $\beta = \frac{3^{1/4}}{64\sqrt{2\pi}} = 10^{-16}$ e as linhas superiores graficadas são para $\beta = \frac{3^{1/4}\theta}{64 \cdot 2^{3/4}\pi} = 0, 8 \cdot 10^{-16}$.



PRPG Pró-Reitoria de Pós-Graduação

PIBIC/CNPq/UFCA-2009

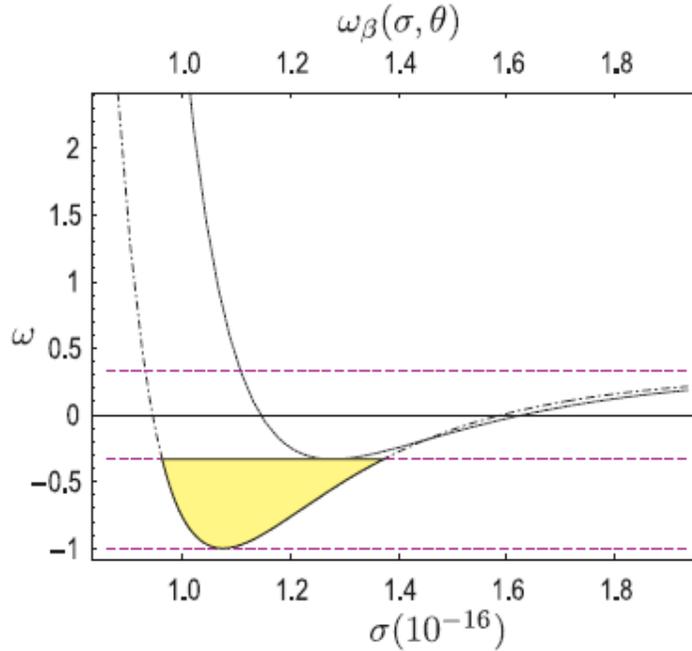


Figura 3: as linhas horizontais coloridas são $\beta = 10^{-16}$, e são escolhido valores para θ a fim de localizar o mínimo para ω nas linhas -1 e $-1/3$. As linhas inferiores do gráfico descrevem $\theta = \frac{64\sqrt{2}\pi\beta}{3^{1/4}} = 2, 2 \cdot 10^{-14}$ e as linhas superiores do gráfico são para $\theta = \frac{64 \cdot 2^{3/4}\pi\beta}{3^{1/4}} = 1, 1 \cdot 10^{-16}$. O mínimo encontrado é para $\sigma_c = \frac{\theta}{32\pi}$.

Os pontos críticos (*i.e.*, $\omega = -1$), $\theta_c = 64\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\sigma$ da função (3.22) assume o mínimo em

$$\omega_{min}(\sigma; \beta) = \frac{1}{3} - \frac{64\beta^4}{27\sigma^4}. \quad (5.2)$$

5.1.2 Adiabática

Antes de iniciarmos nossa discussão devemos ressaltar que ao encontro desse enredo vem uma grande dificuldade em descrevê-lo analiticamente e por isso tivemos que utilizar apenas cálculos numéricos.

Agora assumiremos β como variável. Nesse caso podemos ter variações distintas de temperatura. Em particular uma possibilidade interessante para nossa análise é uma expansão adiabática do Universo. Sendo assim, a entropia molar (3.21) é constante.

Nesse enredo o Universo amplia adiabaticamente, e com isso, sua temperatura inicialmente aumenta, como pode ser constatado analisando a figura 4.



PRPG Pró-Reitoria de Pós-Graduação

PIBIC/CNPq/UFCA-2009

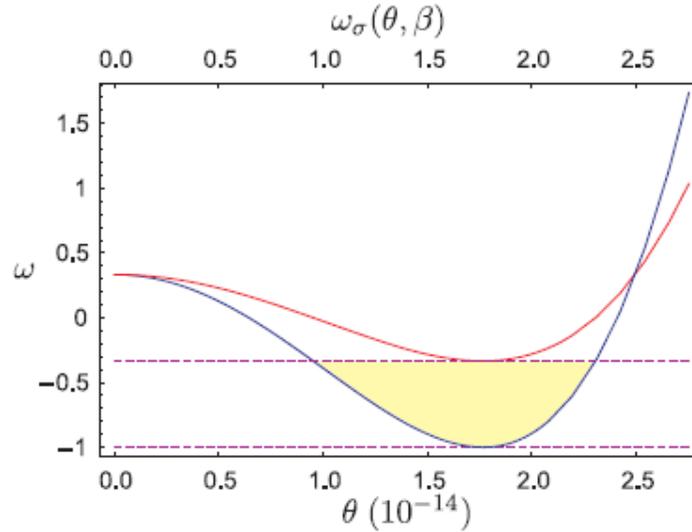


Figura 4: temos a temperatura fixa $\beta = 10^{16}$, para as curvas. As curvas são descritas para $\sigma_{min} = 2\beta/\sqrt{3}$, (para $\omega = -1$) e $\sigma_{max} = 22^{1/4}\beta/\sqrt{3}$ (para $\omega = -1/3$).

Então dependendo do valor de θ , entramos em um regime inflacionário ($\omega < -1/3$). Nesse regime o universo continua esfriando até que alcance um valor mínimo para ω . Depois começa a aquecer até deixar o regime de inflação, assim, logo após o regime de inflação o Universo está quente.

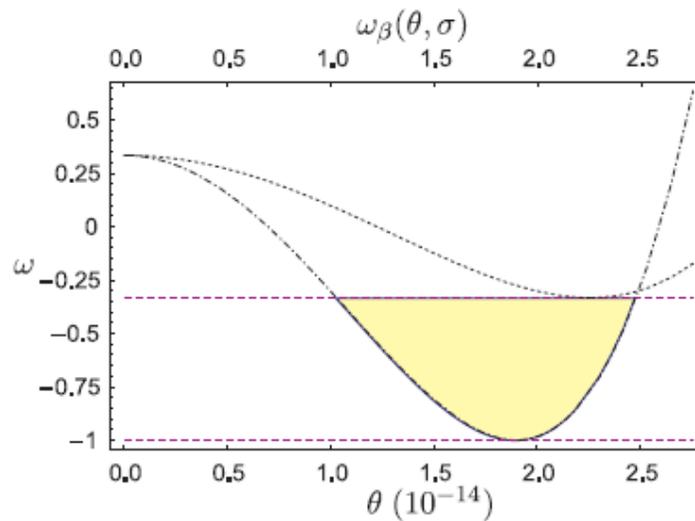


Figura 5: o parâmetro σ é fixo, $\sigma = \sigma_c$, para as curvas. As curvas são descritas para $\beta_{min} = \sigma_c\sqrt{3}/2$ e $\beta_{max} = \sqrt{3}\sigma_c/22^{1/4}$, onde σ_c é definido como $\theta_c = 64\sqrt{2/3}\pi\sigma_c$, e σ_c é o ponto que minimiza ω .



PIBIC/CNPq/UFPG-2009

Outra observação a ser considerada é que após todo o regime de inflação o Universo resfria gradativamente, mais uma vez. Assim como no caso anterior, em algum ponto a não comutatividade passa a ser desprezível, visto que ω está aumentando e β está fixo.

A característica mais interessante desse cenário é que o Universo ora está resfriando, ora está reaquecendo, o que equivale dizer que ρ vai diminuindo gradativamente.

Uma característica pertencente a ambos os cenários é que o θ crescente move o mínimo da função ω para maiores valores de σ . O tempo da inflação é profundamente conectado à posição desse mínimo e poderia fornecer indicativos para encontrar a era inflacionária se temos uma dinâmica associada aos parâmetros.

CONCLUSÃO

Neste artigo usamos campos de não comutatividade para achar cenários que podem ter sido os causadores da inflação do Universo. Consideramos um campo de gás bosônico não comutativo, apresentando varias propriedades interessantes, observadas por meio de sua equação de estado no limite de altas temperaturas e alta diluição.

Devemos considerar que o fato de não estarmos considerando bósons altamente relativísticos, trabalhamos em nossas considerações basicamente massas pequenas, as relações aproximadas entre energia e momento são válidas. Isso é consistente com a formulação de bósons livres com pequena massa com a não comutatividade sendo no espaço-alvo previamente designado. O formalismo canônico usual pode ser utilizado sendo a teoria uma perturbação da teoria de campos livres.

Por fim, o gás de campo não comutativo pode desenvolver inflação para um período de tempo que pode ser ajustado a dados observacionais. Nós mostramos alguns cenários que em um determinado tempo cessam a inflação e entra na era da radiação, exatamente como deveria ser de acordo com a perspectiva do modelo cosmológico inflacionário.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAROSI, L., BRITO, F. A., QUEIROZ, A. R.; Noncommutative field gas driven inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**. 2008. 16P.

BALACHANDRAN, A.P., QUEIROZ, A. R., TEOTONIO-SOBRINHO, P. Quantum Fields With Noncomutative Target Spaces, 2007.

BUTKOV, E.; **Física Matemática**. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1988.725Pp.

SALINAS, R. A. S.; **Introdução à Física Estatística**. Editora da Universidade de São Paulo, 2005. 464p.

PRIGOGINE, I., KONDEPUDI, D.; **TERMODINÂMICA: Dos Motores Térmicos às Estruturas Dissipativas**. 414p.

T. THORNTON, S., B. Marion, J.; **Classical Dynamics – Of Particles And Systems**; Fifth Edition; Editora Thomson.

Barcelos Neto; J.; **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**; 1ª edição; Editora Livraria da Física.