V CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

PIBIC/CNPq/UFCG-2008

NOVOS POTENCIAIS UNIDIMENSIONAIS EM MECÂNICA QUÂNTICA

Alberto Silva Pereira[1], Rafael de Lima Rodrigues[2], Aércio Ferreira de Lima[3]

RESUMO

Investigamos e discutimos a técnica da mecânica quântica supersimétrica para determinarmos uma família de potenciais isoespectrais a partir do potencial de Rorsen-Morse em uma dimensão.

Palavras-chave: supersimetria, mecânica quântica, potenciais isoespectrais.

NEW DIMENSIONAL POTENTIALS IN QUANTUM MECHANICS

ABSTRACT

We investigate and discuss the supersymmetric quantum mechanics thecnique to determine a family of isospectral potential from the Rosen-Morse potential in one dimension.

Keywords: supersimetria, mecânica quântica, potenciais isoespectrais.

INTRODUÇÃO

Muitos livros-textos de Mecânica Quântica mostram como alguns problemas podem ser elegantemente resolvidos através de operadores de criação e destruição (veja CBPF-MO-002/04, RODRIGUES), particularmente, para o oscilador harmônico este método é bastante explorado (EISENBERG, MATHEWS, RODRIGUES). A introdução da Supersimetria para estudar sistemas quânticos pode ser entendida como uma generalização do método de fatorização usual (WITTEN, SUKUMAR, DRIGO FILHO, KHARE e SUKHATME, JUNKER, KUMAR BAGCHI).

Supersimetria (SUSY) surgiu no contexto de Física de Partículas e Teoria de Campos e permite relacionar bóson e férmions, isto é, partículas que obedecem à estatística de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac. Em 1981, Witten visando esclarecer as propriedades essenciais desta simetria introduziu a supersimetria em uma Teoria de Campos em (1+0) dimensões, ou seja, a Mecânica Quântica Supersimetrica; onde o tempo t é a coordenada e a posição x(t) é o próprio campo.

A prescrição hierárquica da SUSY foi introduzida por SUKUMAR para resolver o espectro de energia de sistemas quânticos unidimensionais.

Desde que surgiu a Mecânica Quântica Supersimétrica tem sido bastante utilizado em vários contextos. Por sua abrangência e simplicidade, alguns autores de artigos sobre SUSY reforçam a tese de que supersimetria "poderia ser proveitosamente incluída em futuros livros-textos de cursos de Mecânica Quântica (MQ)". A SUSY MQ tem sido aplicada principalmente como técnica de resolução espectral para potenciais invariantes de forma (DUTT et al.), e também, para se construir novos potenciais isoespectrais em uma dimensão (BAGCHI, KOSTELECKY-NIETO, KEUNG-SUKHATME-WANG e NAG-ROYCHOUDHURY).

[1] Aluno de Curso de Bacharelado em Física, Unidade Acadêmica de Física, UFCG, Campina Gande , PB, E-mail: albertoufucg@hotmail.com
[2] Licenciatura em Física, Prof. Doutor, Unidade Acadêmica de Educação, UFCG, Cuité, PB, E-mail: rafael@df.ufcg.edu.br
[3] Bacharelado em Física, Prof. Doutor, Unidade de Física, UFCG, Campina Grande, PB, E-mail: aerlima@df.ufcg.edu.br

I. INTRODUÇÃO A SUPERSIMETRIA. A formulação da SUSY na Mecânica Quântica

A supersimetria (SUSY) em mecânica quântica surgiu do estudo de teoria de campos é uma simetria que gera transformações entre bósons e férmions. Essa técnica traz a possibilidade da descrição unificada entre bósons e férmions que de acord0o com Witten é caracterizada pela existência de operadores de carga, tais operadores obedecem às seguintes relações de anti-comutação e comutação:

$\left[Q_i, Q_j\right]_+ = 2\delta_{ij}$**H, (i, j = 1, 2,..., N) onde** $\delta_{ij} = 1$**, se i = j e** $\delta_{ij} = 0$**, se i**$\neq j$. Assim pegando, um caso particular, i = j = 1, teremos:

$[Q_1, Q_1]_+ = Q_1Q_1 + Q_1Q_1 = Q_1^2 + Q_1^2 = 2Q_1^2 \Rightarrow 2Q_1^2 = 2H \Rightarrow H = Q_1^2$. Podemos constatar que para **i = j = c**, sempre teremos:

$[Q_c, Q_c]_+ = 2Q_c^2 \Rightarrow H = Q_c^2$.

Nestas equações H e Q_i são funções do número de bóson e férmion, denotado pelos respectivos operadores de levantamento e abaixamento, a_i^-, a_i^+**(i = 1,2,...,N**$_b$**) e** b_i^-, b_i^+**i(i = 1,2,...,N**$_f$**)**, que obedece às relações de (anti-)comutação:

$\left[a_i^-, a_j^+\right]_- = \delta_{ij}, \left[b_i^-, b_{j^+}\right]_+ = \delta_{ij}$

Este método algébrico é conhecido como álgebra graduada de Lie. Os casos que iremos analisar é o de **N =** N_b **=** N_f **= 1**, baseado no formalismo lagrangeano, como também N = $N_b = N_f$ = 2, sendo estes casos conhecidos respectivamente como supersimetria simples e supersimetria estendida respectivamente. Que corresponde à descrição do movimento de uma partícula com um spin$\frac{1}{2}$ em uma dimensão.

Considerando os operadores de carga não-hermitiano mutuamente adjunto $Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 \pm iQ_2)$, a álgebra da Mecânica Quântica supersimétrica torna-se:

$Q_+^2 = Q_-^2 = 0, \ [Q_\mp, H]_- = 0, \quad [Q_+, Q_-]_+ = H.$

Agora vemos que os operadores de carga e o hamiltoniano SUSY é função de a^-, a^+ e b^-, b^+. Para podermos ver isso melhor vamos considerar o exemplo do oscilador harmônico para a SUSY simples. Para o hamiltoniano bosónico do oscilador temos que $H_b = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2)$. Note que podemos expressá-lo na forma de um operador $[a^+, a^-]_+$. Considerando $\hbar = 1 = m, -i\frac{d}{dx} = p_x$ e tomando,

$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2\omega_b}}(\pm ip_x - \omega_b x) = \left(a^\mp\right)^\dagger$. Teremos que,

$$\begin{aligned}
a^-a^+\psi &= \frac{1}{2\omega_b}(-ip_x - \omega_b x)(ip_x - \omega_b x)\psi \\
&= \frac{1}{2\omega_b}(-ip_x - \omega_b x)(ip_x\psi - \omega_b x\psi) \\
&= \frac{1}{2\omega_b}(p_x^2\psi + ip_x\omega_b x\psi - \omega_b xip_x\psi + \omega_b^2 x^2\psi) \\
&= \frac{1}{2\omega_b}(p_x^2\psi + ip_x\omega_b\psi + \omega_b xip_x\psi - \omega_b xip_x\psi + \omega_b^2 x^2\psi) \\
&= \frac{1}{2\omega_b}(p_x^2\psi + ip_x\omega_b\psi + \omega_b^2 x^2\psi) = \frac{1}{2\omega_b}(p_x^2 + ip_x\omega_b + \omega_b^2 x^2)\psi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^-a^+ = \frac{1}{2\omega_b}(p_x^2 + ip_x\omega_b + \omega_b^2 x^2).$$

De forma análoga obtemos $a^+a^- = \frac{1}{2\omega_b}(p_x^2 - ip_x\omega_b + \omega_b^2 x^2)$.

Sabemos que o operador $[a^+, a^-]_+ = a^+a^- + a^-a^+$. Logo,

$$[a^+,a^-]_+ = \frac{1}{2\omega_b}(p_x^2 - ip_x\omega_b + \omega_b^2x^2) + \frac{1}{2\omega_b}(p_x^2 + ip_x\omega_b + \omega_b^2x^2)$$

$= \frac{1}{2\omega_b}(2p_x^2 + 2\omega_b^2x^2) = \frac{1}{\omega_b}(p_x^2 + \omega_b^2x^2)$. Vemos que o hamiltoniano torna-se:

$$H_b = \frac{1}{2}(p_x^2 + \omega_b^2x^2) = \frac{\omega_b}{2}[a^+,a^-]_+ = \omega_b\left(N_b + \frac{1}{2}\right), N_b = a^+a^-.$$

Sabemos que $[a^-,a^+]_- = 1$, assim podemos mostrar que $[H_b,a^\pm]_- = \pm\omega_b a^\pm$.

$[H_b,a^-]_- = \frac{\omega_b}{2}[(a^+a^- + a^-a^+,a^-)]_- = \frac{\omega_b}{2}a^-[a^+,a^-]_- = -\omega_b a^-$

Desse modo podemos construir os autovalores de energia, $E_b = \omega_b\left(n_b + \frac{1}{2}\right), n = 1, 2, \dots$, onde n_b indica os autovalores do operador N_b.

Agora fazemos o mesmo para o oscilador harmônico fermiônico,

$H_f = \frac{\omega_f}{2}[b^+,b^-]_+ = \omega_f\left(N_f - \frac{1}{2}\right), N_f = b^+b^-.$

$[b^-,b^+]_+ = 1, (b^-)^2 = 0 = (b^+)^2, [H_f,b^\pm]_- = \pm\omega_f b^\pm.$

Os autovalores de energia fermiônico,

$E_f = \omega_f\left(n_f - \frac{1}{2}\right), n_f = 0, 1.$

Os autovalores $n_f = 0, 1$ se dá pelo fato de que $n_f^2 = n_f$.

Considerando agora o hamiltoniano como sendo a combinação dos sistemas bosônico e fermiônico do oscilador com as seguintes relações $\omega_b = \omega_f = \omega$, teremos:

$H = H_b + H_f = \omega\left(N_b + \frac{1}{2} + N_f - \frac{1}{2}\right) = \omega(N_b + N_f)$ e os autovalores de energia E do sistema são dados pela soma de $E_b + E_f = \omega(n_f + n_b) = \omega n$. Vemos que a simetria do hamiltoniano leva a uma dupla degeneração que está no fato da supersimetria que associa a destruição simultânea de um quantum bosônico e criação de um quantum fermiônico ou vice-versa. Portanto, definimos os seguintes geradores da SUSY, conhecidos como supercarga

$Q_+ = \sqrt{\omega}a^+b^-, \; Q_- = \sqrt{\omega}a^-b^+.$

Note que o modelo de Witten (1981) é caracterizado pela generalização da construção do modelo de um oscilador harmônico simples supersimétrico, com as seguintes relações:

$\sqrt{\omega}a^- \Rightarrow A^-$ e $\sqrt{\omega}a^+ \Rightarrow A^+$, onde:

$A^\mp = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp ip_x - W(x)) = (A^\pm)^\dagger$, sendo o W(x) chamado de superpotencial por ser uma função arbitraria da posição.

Aqui definiremos: $H_- = A^+A^- = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + W^2(x) - \frac{d}{dx}W(x)\right)$

$$H_+ = A^-A^+ = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + W^2(x) + \frac{d}{dx}W(x)\right)$$

II. Hierarquia de Hamiltoniano Supersimétricos

O método desenvolvido por Sukumar (1985) consiste em construir uma hierarquia de hamiltonianos que possibilita o cálculo das autofunções e autovalores de energia de um hamiltoniano H_1. O método baseia-se na supersimetria que o hamiltoniano H_1 possui.

Considere:

$H_1 = H_- + E_1^{(0)}$ e $H_2 = H_+ + E_1^{(0)}$, teremos que :

$H_1 = A_1^+A_1^- + E_1^{(0)}$, com $A^{(-)} = \psi_1^{(0)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{\psi_1^{(0)}} = (A_1^+)^\dagger$, onde seu companheiro supersimetrico é dado por:

$H_2 = A_1^-A_1^+ + E_1^{(0)}$, sendo seu potencial calculado relacionando H_1 e H_2 da seguinte forma:

$$H_2 = A_1^- A_1^+ + E_1^{(0)} + A_1^+ A_1^- - A_1^+ A_1^- = A_1^+ A_1^- + E_1^0 + [A_1^-, A_1^+]_- = H_1 + H_+ - H_-$$
$$= H_1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^2}{dx^2} + V_+\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^2}{dx^2} + V_-\right) = H_1 + (V_+ - V_-)$$
$$= H_1 + \left(\frac{1}{2}(W^2(x) - W'(x) - W^2(x) - W'(x))\right) = H_1 - W'(x)$$

onde $W(x) = \frac{d}{dx}\ln\psi_1^{(0)}$, então $V_2(x) = V_1(x) - \frac{d^2}{dx^2}\ln\psi_1^{(0)}$.

Já o espectro de energia de H_1 *e* H_2 satisfaz a seguinte relação:

$E_2^n = E_1^{(n+1)}$, para n = 0, 1, 2,....

Com suas autofunções relacionadas por,

$\psi_1^{(n+1)} \propto A_1^+ \psi_2^{(n)}$. Isto significa que se ψ_1 é normalizável então ψ_2 não o é e vice-versa.

Fatorando H_2 em termos de sua função de onda no estado fundamental $\psi_2^{(0)}$, obtém-se: $H_2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) = A_2^+ A_2^- E_2^{(0)}$, $A_2^{(-)} = \psi_2^{(0)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\right) 1/\psi_2^{(0)}$.

O companheiro supersimétrico de H_2 é dado por:

$H_3 = A_2^- A_2^+ + E_2^{(0)}$, sendo o potencial de $V_3(x) = V_2(x) - \frac{d^2}{dx^2}\ln\psi_1^{(0)}$, definido de forma análoga a $V_2(x)$.

O espectro de H_2 *e* H_3 satisfaz a condição:

$E_3^{(n)} = E_2^{(n+1)}$, n = 0, 1, 2... e suas autofunções relacionadas por

$\psi_2^{(n+1)} \propto A_2^+ \psi_3^{(n)}$, n = 0, 1, 2...

Podemos fazer uma generalização deste procedimento observando os resultados obtidos com várias aplicações sucessivas, ficando da seguinte forma:

$H_n = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x) = A_n^+ A_n^- + E_n^{(0)} = A_{n-1}^- A_{n-1}^+ + E_{n-1}^{(0)}$,

$A_n^- = \psi_n^{(0)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{\psi_n^{(0)}}$, e $V_n(x) = V_{n-1}(x) - \frac{d^2}{dx^2}\ln\psi_{n-1}^{(0)}$

O espectro fica da seguinte forma

$E_1^{(n-1)} = E_2^{n-2} = \dots = E_n^{(0)}$, n = 0, 1, 2, ..., M.

Sendo M o numero de estados ligados ao hamiltoniano H_1. Logo a função do (n-1)_ésimo estado excitado de H_1 é dado por:

$\psi_1^{n-1} \propto A_1^+ A_2^+ \dots A_{n-1}^+ \psi_n^{(0)}$

Esta é uma ferramenta poderosa na resolução da equação de Schrödinger porque nos permite conhecer a autofunção de onda no estado n-ésimo estado excitado, nos dando condições de construir todo espectro de energia, bastando para isso aplicar sucessivamente os operadores de levantamento e abaixamento.

III. Novos Potenciais Isoespectrais

Agora mudaremos um pouco a notação e, inclusive, numeraremos as equações. A álgebra SUSY em Mecânica Quântica é uma álgebra de Lie graduada: possui anti-comutador (AB+BA) e comutador (AB-BA)

$$\boldsymbol{H_{SUSY} = [Q_-, Q_+]_+ \qquad [H_{SUSY}, Q_+]_- = 0 \qquad Q_-^2 = 0 = Q_+^2.} \qquad (1)$$

Considere $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A^{(+)}}$ os operadores mutuamente adjuntos expressos da seguinte forma

$$\boldsymbol{A^{(+)} = -\frac{d}{dx} + W(x) \qquad A = \frac{d}{dx} + W(x)} \qquad (2m=1). \qquad (3)$$

Neste caso o hamiltoniano SUSY possui os companheiros SUSY bosônico (H_-) e fermiônico (H_+) definidos por

$$H_- = A^\dagger A = -\frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \tag{4}$$

$$H_+ = AA^\dagger = -\frac{d^2}{dx^2} + V_+(x), \tag{5}$$

onde no modelo SUSY de WIitten $V_\pm$ são dados por

$$V_\pm = W^2(x) \pm \frac{d}{dx}W(x) \text{ (equações de Ricatti).} \tag{6}$$

O potencial do sistema quântico que queremos resolver será identificado com o setor bosônico. Se a energia do estado fundamental for diferente de zero a SUSY é dita quebrada. Quando não ocorrer quebra da SUSY os autoestados do potencial $V_\pm$ são relacionados pelo mapeamento dos níveis dados por

$$E_{n+1}^{(-)} = E_n^{(+)} \qquad (n = 0,1,2,\ldots,\infty) \tag{7}$$

e a partir da condição de aniquilação do setor bosônico, Aobtemos as seguintes relações das autofunções entrelaçadas

$$\psi_n^{(+)} = \frac{A\psi_{n+1}^{(-)}}{\sqrt{E_n^{(+)}}} \qquad \psi_{n+1}^{(-)} = \frac{A^{(+)}\psi_n^{(+)}}{\sqrt{E_n^{(+)}}} \tag{8}$$

sendo que A e $A^{(+)}$ são operadores mutuamente adjuntos expressos. Também podemos relacionar $W(x)$ com a autofunção do estado fundamental da seguinte maneira

$$W(x) = -\frac{d}{dx}[\ln \Psi_0(x)] \tag{10}$$

Identificando O potencial com o sinal positivo na Eq. (6) com V_0 e o setor bosônico com o sinal negativo, $V_- = V_1$, podemos relacioná-los como segue:

$$V_1 = V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln[\Psi_0(x)] \tag{11}$$

0

O estado fundamental Ψ_1 para o potencial V_1 é associado com a energia E_0. Isto pode ser estendido até o potencial V_n onde não haverá mais estados ligados. A função $\frac{1}{\Psi_0}$ satisfaz a equação de Schrödinger com potencial V_1 e energia E_0. Para formarmos o espaço vetorial completo precisamos de outra solução linearmente independente expressa da seguinte maneira:

$$\Phi_0(\lambda_0) = \frac{(\rho_0 + \lambda_0)}{\psi_0} \tag{12}$$

onde

$$\rho_i = \int_{-\infty}^{c} \psi_i^2(x)dx\,. \tag{13}$$

Agora iniciamos com o potencial V_1, usando a solução geral $\Phi_0(\lambda_0)$ para podermos adicionar o autovalor de energia E_0 (KHARE et al. e KEUNG et al.)

$$\tilde{V}_0(\lambda_0) = V_1 - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln[\Phi_0(\lambda_0)] \qquad (14)$$

A função $\frac{1}{\phi_0(\lambda_0)}$ é a autofunção de onda de $V_0(\lambda_0)$ normalizável no estado fundamental.

A autofunção de onda do estado fundamental de $\tilde{V}_0(\lambda_0)$ é a seguinte solução geral da equação de Schrödinger independente do tempo

$$\tilde{\Psi}_0(x) = \frac{\sqrt{\lambda(1+\lambda)}\Psi_0(x)}{[\rho_0(x)+\lambda]}, \qquad (15)$$

que λ_0 não está contido no intervalo $-1 \le \lambda_0 \le 0$. Assim, nós encontramos uma família de parâmetros do potencial $\tilde{V}_0(\lambda_0)$ isoespectral com o potencial V_0, para $\lambda_0 > 0$ ou $\lambda_0 < -1$:

$$\tilde{V}_0(\lambda_0) = V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln[\psi_0\Phi_0(\lambda_0)] = V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(\rho_0 + \lambda_0). \qquad (16)$$

Para procedermos nesta ordem com duas famílias de parâmetro de potenciais isoespectrais, devemos ir de V_0 para V_1 para V_2 deletando sucessivamente os menores estados de V_0 e depois readicionamos os dois estados E_0 e E_1 via a transformação SUSY. Generalizando, definimos o operador A_i que relaciona as soluções de V_i e V_{i+1}:

$$A_i = \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}\ln\psi_i. \qquad (17)$$

Agora encontraremos uma família de parâmetros isoespectral do potencial $\tilde{V}_1(\lambda_0)$.

$$\tilde{V}_1(\lambda_1) = V_1 - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(\rho_1 + \lambda_0) \qquad (18)$$

Relacionamos as soluções da equação de Schrödinger para os potenciais V_2 e $\tilde{V}_1(\lambda_1)$ pelo novo operador SUSY:

$$A_1^+(\lambda_1) = -\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}[\ln\Phi_1(\lambda_1)] \qquad (19)$$

assim, a solução $\Phi_0(\lambda_0,\lambda_1)$ para E_0 do potencial $\tilde{V}_1(\lambda_1)$ é:

$$\Phi_0(\lambda_0,\lambda_1) = A_1^+(\lambda_1)A_1\Phi_0(\lambda_0) \qquad (20)$$

A autofunção normalizável $\dfrac{1}{\Phi_0(\lambda_0,\lambda_1)}$ pertence ao estado fundamental associada ao autovalor de energia E_0 para um novo potencial, que resulta em duas famílias de parâmetros isoespectrais do sistema $\tilde{V}_0(\lambda_0,\lambda_1)$, então:

$$\tilde{V}_0(\lambda_0,\lambda_1) = V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2}[\ln(\psi_0\psi_1\Phi_1(\lambda_1)\Phi_0(\lambda_0,\lambda_1)] = \\ = V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2}[\ln(\psi_0(\rho_1+\lambda_1)\Phi_0(\lambda_0,\lambda_1)] \tag{21}$$

para $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i < -1$.

Nós podemos generalizar o procedimento de construir famílias de n-parâmetros de potenciais isoespectrais com n estados ligados da seguinte maneira:

$$\Phi_i(\lambda_i) = \frac{(\rho_i + \lambda_i)}{\psi_i} \qquad (\,i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{22}$$

$$A_i = \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}\ln\psi_i \tag{23}$$

$$A_i^+(\lambda_i,\ldots,\lambda_{n-1}) = -\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}[\ln\Phi_i(\lambda_i,\ldots,\lambda_{n-1})] \tag{24}$$

$$\Phi_i(\lambda_i,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_{n-1}) = A^+{}_{i+1}(\lambda_{i+1},\lambda_{i+2},\ldots,\lambda_{n-1})A^+{}_{i+2}(\lambda_{i+2},\lambda_{i+3},\ldots,\lambda_{n-1}) \\ \ldots A^+{}_{n-1}(\lambda_{n-1})A_{n-1}A_{n-2}\ldots A_{i+1}\Phi_i(\lambda_i) \tag{25}$$

$$\tilde{V}_0(\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}) = V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2}[\ln(\psi_0\psi_1\ldots\psi_{n-1}\Phi_{n-1}(\lambda_{n-1})\ldots\Phi_0(\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1})] \tag{26}$$

APLICAÇÃO

O potencial que estudaremos e discutiremos será o de Rosen-Morse, que apresenta-se na forma geral como segue (todos os cálculos realizados, foram feitos com o auxílio do programa Maple 12):

$$V_0 = A^2 + \frac{B^2}{A^2} + 2B\tanh(ax) - A(A+a)\operatorname{sech}^2(ax) \tag{27}$$

onde A, B e a são constantes arbitrárias.

Resolvendo a equação de Ricatti temos que o superpotencial para V_0 é

$$W(X) = A\tanh(ax) + \frac{B}{A}, \tag{28}$$

a autofunção de onda Ψ_0 é dada por

$$\Psi_0 = \operatorname{sech}(ax)^{\frac{A}{a}} e^{-\left(\frac{Bx}{A}\right)} \tag{29}$$

e os níveis de energia tornam-se

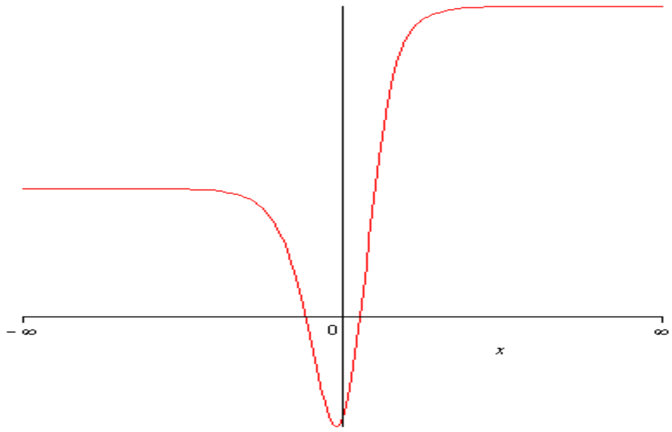
$$E_n = A^2 - (A - na)^2 + B\left[\frac{1}{A^2} - \frac{1}{(A-na)^2}\right] \tag{30}$$

por simplificação faremos α =B=1 e A=2, assim temos

$$V_0 = \frac{17}{4} + 2\tanh(x) - 6\,\mathrm{sech}^2(x) \tag{31}$$

$$\Psi_0 = \mathrm{sech}(x)^2 e^{-\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{32}$$

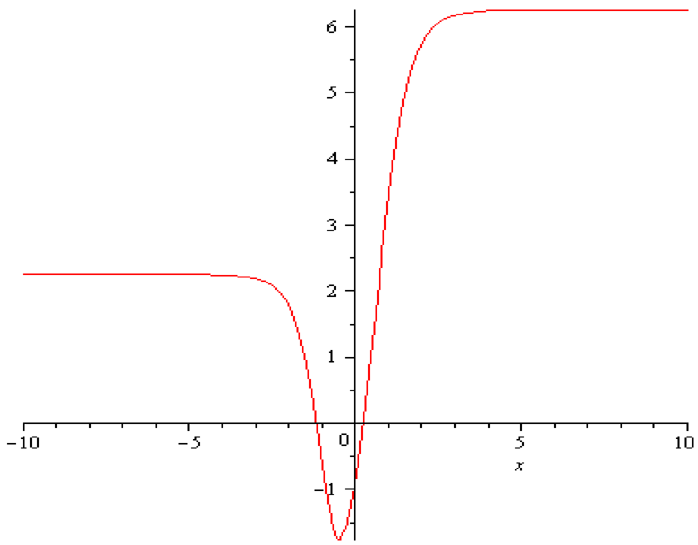
O gráfico de V_0 apresenta-se da seguinte forma:



Portanto, um novo potencial isoespectral a partir de V_0, torma-se:

$$\tilde{V}_0(\lambda_0, x) = V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(\rho_0 + \lambda_0) = \frac{17}{4} + 2\tanh(x) - 6\,\mathrm{sech}^2(x)$$
$$-2\frac{d^2}{dx^2}\ln\frac{(3\mathrm{senh}(x)\cosh(x) + 6\arctan(e^x)\cosh^3(x) + 2 + 6\lambda_0\cosh(x)^3)}{6\cosh(x)^3} \tag{33}$$

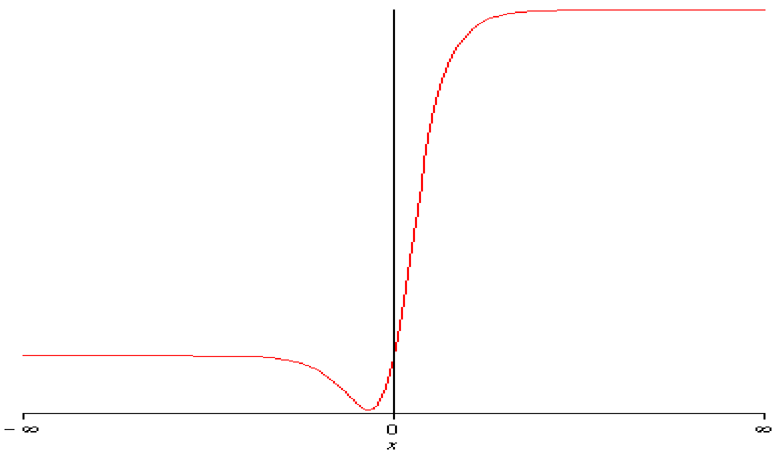
Agora plotando $\tilde{V}_0(\lambda_0, x)$ para λ_0 =2 versus x, temos



O parceiro supersimétrico de V_0 é dado por:

$$V_1 = V_0 - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln[\Psi_0(x)] = \frac{17}{4} + 2\tanh(x) - 6\,\mathrm{sech}^2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln[\mathrm{sech}^2(x)e^{-\frac{x}{2}}] \qquad (34)$$

o qual tem o seguinte gráfico



Note que podemos definir um novo potencial isoespectral a partir do parceiro supersimétrico de V_0 pelas seguintes relações:

$$\tilde{V}_1(\lambda_1) = V_1 - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(\rho_1 + \lambda_1) \qquad (35)$$

onde

$$\rho_1 = \int_{-\infty}^{c} \psi_1{}^2(x)dx\,. \qquad (36)$$

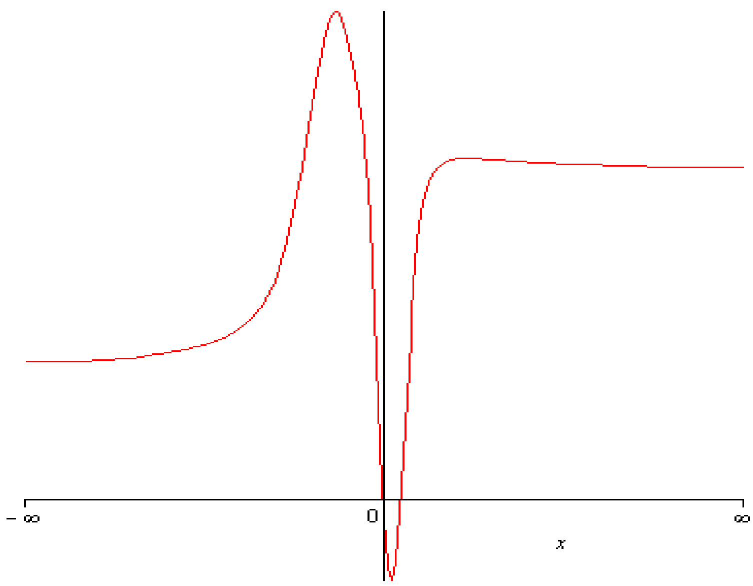
A autofunção de energia do estado fundamental de V_1,

$$\psi_1^{(-)} = \frac{A^{(+)}\psi_0^{(+)}}{\sqrt{E_0^{(+)}}} = \frac{2}{3}\mathrm{sech}(x)\tanh(x)e^{-x} + \frac{4}{3}\tanh(x) + \frac{1}{3}\,. \qquad (37)$$

portanto,

$$\rho_1 = \int_{-\infty}^{c} \psi_1{}^2(x)dx = \\ = \frac{4}{3}\tanh^2(x) - \frac{4}{3}\ln(\cosh(x)) + \frac{4}{27}\tanh(x)\mathrm{sech}^2(x) - \frac{112}{27}\tanh(x) + \frac{37}{9}x + \lambda_1 \qquad (38)$$

logo, substituindo esses valores na expressão de $\tilde{V}_1(\lambda_1)$ e usando o valor de λ_1=1, temos o seguinte gráfico:



Nós observamos que ao fazermos a constante de integração λ variar para mais infinito ou menos infinito o gráfico modifica-se gradualmente até chegar ao gráfico do potencial dado inicialmente. Esta propriedade garante que o potencial estudado possua a mesma reflexão e amplitude de transmissão.

CONCLUSÃO

Neste artigo estudamos o modelo da supersimetria em mecânica quântica proposto por Witten e aplicamos para a construção de novos potenciais isoespectrais via o método de potencial isoespectral desenvolvido por Sukumar. Nós mostramos como construir uma família de n-parâmetros de potenciais isoespectrais com o potencial conhecido de Rosen-Morse, partindo de um potencial solúvel (ou quase), este procedimento nos levará a uma nova classe de potenciais isoespectrais, também solúveis.

Basicamente, mostramos com esses resultados que dado um potencial solúvel é possível construir uma nova família de potenciais isoespectrais exatamente solúveis, a partir de transformações supersimétricas sucessivas. Sendo que no processo de deletar os menores estados e depois adicioná-los é que os tornam com o mesmo espectro, expandindo assim a classe de potenciais quânticos com solução exata da equação de Schrödinger.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador professor Rafael Rodrigues por ter me orientado no andamento desse projeto e pelas sugestões na elaboração deste artigo, ao professor Aércio Ferreira por estar sempre disposto a esclarecer as minhas dúvidas e ao CNPq por apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

DE LIMA RODRIGUES, Rafael. **Supersimetria: da Mecânica Clássica à Mecânica Quântica.** CBPF-MO-002/04, páginas (359-389) (Veja as referências desta monografia, www.cbpf.br).

EISBERg, Robert; RESNICK, Robert. **Física Quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas**. Editora Campus. Edição 1979.

MATHEWS, P. M.; VENKATESAN, K.. **A textbook of Quantum Mechanics**. 1986.

DE LIMA RODRIGUES, Rafael. **Mecânica Quântica na descrição de Schrödinger**. Revista Brasileira de Ensino de Física, volume 9, pág. 68, março, 1997.

WITTEN, E..**Nucl. Phys. B185** (1981) 513. COOPER, F e FREEDMAN, B. Ann. Phys., NY **146** 262.

SUKUMAR. C. V.. **Supersymmetry, Factorisation of the Schrödinger equation and a Hamiltonian Hierarchy**, J. Phys. A. Math. Gen. **18** (1985) L57-61. Printed in Great Britain.

DRIGO FILHO, Elso. **Supersimetria em Mecânica Quântica**. Revista Brasileira de Ensino de Física, volume 19, pág. 152, março, 1997.

KHARE, Avinash e SUKATME, Uday. **Phase-equivalent potentials obtained from supersymmetry,** J. Phys. A: Math. and Gen., **22** (1989) L2847-2860.

JUNKER, Georg. **Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics**. Texts and Monographs in Physics, 1996.

KUMAR BAGCHI, Bijan. **Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics**. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Editora Chapman & Hall/CRC.

ALAN KOSTELECKY, V.; MARTIN NIETO, MICHAEL. **Evidence for a Phenomenological Supersymmtry in Atomic Physics**. Volume 53, número 24, dezembro de 1984;

KEUNG, Wai-Yee, SUKHATME, Uday P, WANG, Qinmou e IMBO, Tom D. **Families of Strictly Isospectral Potentials.** J. Phys. A: Math.Gen. **22** (1989) L987-992.

NAG, Nivedita, ROYCHOUDURY, Rajkumar, **Some observations on Daboux's theroema, isospectral Halmitians and Supersimmetry,** J. Phys. A: Math. Gen. **22** (1995) 3525-3532.

DUTT,Ranabir, KHARE, Avinash e P. SUKHATME, Uday. Supersymmetry, **Shape Invariance, and Exactly Solvable Potentials**, Am. J. Phys. **56** (2). February 1988.

SUKUMAR, C.V.. **Supersymmetric quantum mechanics**, J Phys. A: Math. Gen 18 (1985) 291-2936;