USO DA TEORIA DE FILAS NA AVALIAÇÃO DA OPERACIONALIDADE DE UMA INTERSEÇÃO SINALIZADA POR SEMÁFORO

Luz Delicia Castillo Villalobos (UTFPR) luz_delicia@yahoo.com.br

Resumo

O objetivo do presente trabalho é apresentar uma metodologia que permita prever o comportamento do tráfego de veículos motorizados num cruzamento controlado por semáforo. Para tanto, foi utilizado um modelo matemático da teoria de filas do tipo M/M/1. O uso da Teoria de Filas é uma ferramenta útil para avaliar a operacionalidade do sistema, tais como intensidade do tráfego no cruzamento, número médio de veículos aguardando passar a luz verde, tempo de espera de um veículo na fila aguardando a luz verde e outras respostas que permitam informar se a interseção analisada está sob controle. Os resultados obtidos foram satisfatórios com a realidade observada no cruzamento analisado.

Palavras-Chaves: Teoria de filas, Interseção, Semáforo.

1. Introdução

O número de veículos motorizados e a necessidade do transporte estão crescendo significativamente no mundo, tendo como principal consequência os congestionamentos do tráfego nas diferentes vias das cidades, principalmente nas interseções, inclusive as sinalizadas por semáforos.

O presente trabalho tem como objetivo analisar o comportamento de uma interseção controlada por semáforo, a fim de tomar decisões em relação à capacidade que um semáforo pode proporcionar para a otimização do controle do tráfego na interseção analisada. Para tanto, existem modelos matemáticos que ajudam a gerenciar estes inúmeros problemas do tráfego. Estes modelos permitem analisar e dimensionar a capacidade do semáforo de modo que cumpram seu objetivo, ou seja, que seu tempo de ciclo seja adequado à interseção controlada.

É importante considerar segundo Mauricio e Edward (2010) que qualquer pequena anomalia desemboca geralmente em grandes congestionamentos, especialmente em horários de pico. Nestas condições, os volumes de tráfego e as médias das variáveis apresentam alta variabilidade. Assim, para determinar o comportamento do tráfego em condições anormais é necessário um modelo macroscópico e uma simulação de alto custo computacional.

O modelo matemático a ser usado no presente trabalho é um modelo de filas. Segundo Beatriz et al. (2009), este modelo pode ser interpretado da seguinte forma: clientes chegam para serem atendidos, mas quando não há um atendimento imediato, formam-se filas de espera. Os clientes referidos acima podem ser pessoas que aguardam atendimento, mensagens que esperam ser transmitidas pelos canais de comunicação, carros parados num semáforo. Depois que chegam, esperam e são atendidos pelos servidores a partir de alguma disciplina. Se o primeiro a ser atendido for aquele que chegar primeiro, a disciplina é conhecida como FIFO, e caso for aquele que chegar em último, é conhecida como FILO.

O uso da Teoria de Filas é uma ferramenta útil para avaliar a operacionalidade de um sistema. O tratamento dos dados e a análise dos resultados permitem concluir sobre o comportamento dos três componentes do processo: gerência-atendimento-cliente, que têm tendências diferentes e devem ser conciliadas em um resultado final (FLÁVIO; GECIRLEI; TACYANNE, 2011).

As filas de espera geram mal-estar, ineficiência, atraso e outros problemas, originando custos temporais e financeiros. É importante avaliar o equilíbrio entre o nível de serviço e o tamanho das filas de espera. Portanto, é necessário entender a relação entre o número de servidores do sistema ou a eficácia destes e a quantidade de tempo gasto na fila ou de clientes na mesma. Em sistemas de filas simples, se podem identificar as relações analiticamente. Em sistemas mais complexos, podem ser analisados mediante simulação.

Segundo Flávio et al. (2011), um sistema de filas pode ser genericamente catalogado em várias estruturas básicas conforme o seu esquema de prestação de serviço. Nas estruturas das filas, os servidos podem seguir em fila única, filas múltiplas ou numa combinação das duas. A escolha do formato depende parcialmente do volume de clientes atendidos e das restrições impostas pela sequência que define a ordem pela qual o serviço deverá ser realizado.

Segundo Oswaldo (1966), normalmente a fila resulta da falta deliberada ou não de programações, pois se fosse viável organizar as chegadas e os serviços, seria também possível evitar completamente a espera dos clientes e não haveria fila.

No caso do controle de tráfego de veículos, as programações sincronizadas evitariam a formação de filas nas interseções sinalizadas, entretanto os semáforos nas interseções, na maioria dos casos, são programados isoladamente, sendo difícil evitar a formação de filas.

O objetivo da teoria de filas consiste em identificar o nível ótimo da capacidade do sistema que minimizaria o custo global do mesmo; avaliar o impacto das possíveis modificações da capacidade do sistema em seu custo total; estabelecer um equilíbrio ótimo entre os custos e a qualidade do serviço (MAURICIO; EDWARD, 2010).

No caso do tráfego de veículos, para analisar as filas produzidas numa interseção sinalizada por semáforo é conveniente usar um sistema de filas com um só servidor (semáforo) e uma única fila para cada linha de espera. Esta fila é a média das filas da linha de espera, devido ao fato de que cada fila se comporta de uma forma diferente (filas diferentes em momentos de espera diferentes). O modelo de fila para este tipo de atendimento é o modelo M/M/1. É o modelo mais simples dentre os existentes em teoria de filas, sendo o mais utilizado no nosso dia a dia e mais adequado para analisar o atendimento de um semáforo num cruzamento.

Segundo a notação Kendall, as características do sistema especificados pelo símbolo M/M/1, significa que os M denotam respectivamente as distribuições dos tempos entre as chegadas e as dos serviços. O número 1 denota o número de servidores, que neste caso seriam os semáforos.

Este tipo de fila configura um processo de nascimento e morte, no qual as chegadas em um intervalo de tempo (0, T] seguem uma distribuição de Poisson com taxa λ, e os tempos de serviço seguem uma distribuição exponencial com parâmetro μ.

2. Metodologia

A metodologia apresenta as seguintes etapas:

2.1. Análises do modelo de fila M/M/1

Como foi mencionado no item (1) o sistema de filas a ser usado na presente pesquisa é o modelo M/M/1 (Processo de chegada Poisson/processo de serviço exponencial/um servidor) que, adequado a metodologia proposta, possui as seguintes características:

a) As chegadas é o número de veículos que chegam ao cruzamento e são regidas por um processo de Poisson com razão média constante igual a λ medida em número de veículos por unidade de tempo. As chegadas dos veículos ao cruzamento ocorrem de forma aleatória e independente, condições necessárias para aplicar a distribuição de Poisson;

b) Taxa média de serviço é a capacidade de serviço do semáforo dependente do número de veículos que passam a luz verde por unidade tempo (μ) e os tempos de atendimento de média igual a $1/\mu$ com distribuição exponencial;

c) As unidades são atendidas em ordem de chegadas FIFO (veículos passando durante a luz verde).

Em uma interseção controlada por semáforo, uma fila é formada por todos os veículos presentes, isto é, aqueles que estão sendo atendidos e os veículos que não conseguem ser atendidos pelo semáforo, aqueles que ocasionalmente tem que esperar pela luz verde.

É importante considerar que os veículos que estão em situação de espera não podem abandonar o sistema como em outros casos onde é aplicado este modelo da teoria de filas.

2.2. Características das distribuições de probabilidade das chegadas e dos serviços

Sabe-se o que caracteriza a distribuição de Poisson e a Exponencial é o fato de que, dado um intervalo de tempo dt suficientemente pequeno, as probabilidades de chegada e de saída ficam definidas da seguinte maneira:

- A probabilidade de chegada ou saída de um veículo por término de serviço é proporcional a dt, isto é λdt ou μdt.
- A probabilidade de mais de uma chegada ou saída de veículos em dt é desprezível. Em consequência, num intervalo *dt* só podemos ter uma chegada com probabilidade λdt, ou nenhuma, com probabilidade $1 - \lambda dt$. De igual maneira acontece para o serviço em dt. Ou acontece um serviço (liberando um veículo) com probabilidade μdt, ou não acontece serviço, com probabilidade $1 - \mu dt$.

Nessas condições, probabilidade de que existam *n* (*n>0)* veículos no sistema, no instante

$t + dt$, é formada pelos seguintes eventos:

a) Existem (*n* - *1*) veículos no instante *t,* ter chegada de um veículo no intervalo *dt* e não ter sido liberado nenhum veículo;

b) Existem *n* veículos no instante *t* e não haver chegado nem saído nenhum veículo no intervalo *dt;*

c) Existem *n* veículos no instante *t,* e há uma chegada e uma saída no intervalo *dt;*

d) Existem (*n* + *1*) veículos no instante *t,* não há chegada e há uma saída no intervalo *dt.*

Por exemplo, para *n* igual a zero*,* é suficiente considerar duas situações:

a) Existem *0* veículos no instante *t* e não há chegada no intervalo *dt;*

b) Existe *1* veículo no instante *t,* não há chegada e há uma saída no intervalo *dt.*

2.3. Cálculo das probabilidades do número de veículos no sistema (P_n)

Para o caso de *n* igual a *0,* de outro modo o sistema estar vazio, existem duas situações conforme mencionadas acima, portanto, a probabilidade P_0 está representada como:

$$P_0 = P_0(t)(1 - \lambda\, dt) + P_1(t).\mu dt. \tag{1}$$

Generalizando, a probabilidade de *n* veículos no sistema (P_n) é:

$$P_n(t + dt) = P_{n-1}(t).\lambda dt.(1 - \mu dt) + P_n(t).(1 - \lambda dt).(1 - \mu dt) + P_n(t).\lambda dt.\mu d + P_{n+1}(t).(1 - \lambda dt)\,.\,\mu dt. \tag{2}$$

Considerando que a derivada da probabilidade P_n é igual a zero por ser independente do tempo, então:

$$P(t)' = \lim_{dt \to 0} \frac{P_n(t+dt) - P_n(t)}{dt} = 0 \tag{3}$$

Portanto, aplicando esta derivada com relação ao tempo nas equações (1) e (2) se tem:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda P_{n-1} - (\lambda + \mu)P_n + \mu P_{n+1} = 0, \quad n > 0 \tag{5}$$

Utilizando os sistemas (4) e (5) temos os valores para P_n para $n>0$, isto é:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \tag{6}$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \tag{7}$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 \tag{8}$$

Assim sucessivamente até:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \tag{9}$$

P_0, que é a probabilidade de haver zero veículos no sistema, será calculada usando a propriedade de probabilidades que diz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \tag{10}$$

Logo,

$$[P_0 + P_1 + P_2 + \cdots .. + P_n + \cdots] = 1 \tag{11}$$

$$\left[P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \cdots\right] = 1 \tag{12}$$

$$P_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \dots . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \dots\right] = 1 \tag{13}$$

Dentro do colchete temos uma progressão geométrica de razão $\frac{\lambda}{\mu}$ então,

$$P_0 = \frac{1}{1+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\ldots\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\ldots} \tag{14}$$

Se $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ a progressão geométrica apresenta soma finita e é igual a:

$$\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \tag{15}$$

Portanto, se tem que

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{16}$$

Onde, $\frac{\lambda}{\mu}$ mede o fator de utilização do sistema e se representa por:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{17}$$

Logo a probabilidade de o sistema estar vazia também pode ser expressada por:

$$P_0 = 1 - \rho \tag{18}$$

Em consequência, a probabilidade de *n* veículos no sistema em função de ρ é calculada também segundo a expressão:

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \tag{19}$$

Com base nas expressões anteriores, se pode dar resposta à seguinte pergunta: “qual é a probabilidade de ter o número de veículos maior que *n* registrado na interseção. Neste caso *n* é o número limite de veículos que ocasiona certos congestionamentos” A resposta pode ser dada por:

$$P(N > n) = \sum_{n+1}^{\infty} P_n = (1-\rho)(\rho^{n+1} + \rho^{n+2} + \cdots) = (1-\rho)\rho^{n+1}(1 + \rho + \rho^2 + \cdots) \tag{20}$$

Calculando se tem,

$$P(N > n) = \rho^{n+1} \tag{21}$$

Usando a expressão (21) também pode ser determinada a probabilidade de ter a interseção ocupada, ou seja *N>0*, isto é:

$$P(N > 0) = \rho^{0+1} = \rho. \tag{22}$$

A expressão (22) justifica a denominação do fator de utilização ρ. Esta medida expressa a intensidade do tráfego. A condição de estabilidade do sistema está sobre controle se: $\rho < 1$.

Usando a propriedade de complemento das probabilidades, P_0 é o complemento de ρ como é mostrado na expressão (18).

2.4. Cálculo do número médio de veículos aguardando passar a luz verde (*F*)

O número médio de veículos aguardando passar a luz verde ou tamanho da fila é dado pela expressão:

$$F = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{23}$$

2.5. Cálculo do tempo médio de espera de um veículo no cruzamento (W_q)

É o tempo que um veículo precisa esperar para passar a luz verde, é dado por:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{F}{\lambda} \tag{24}$$

As formulações desenvolvidas neste item serão utilizadas para atender as questões plantadas no objetivo proposto, em relação ao comportamento do tráfego da interseção analisada como consequência da programação do semáforo.

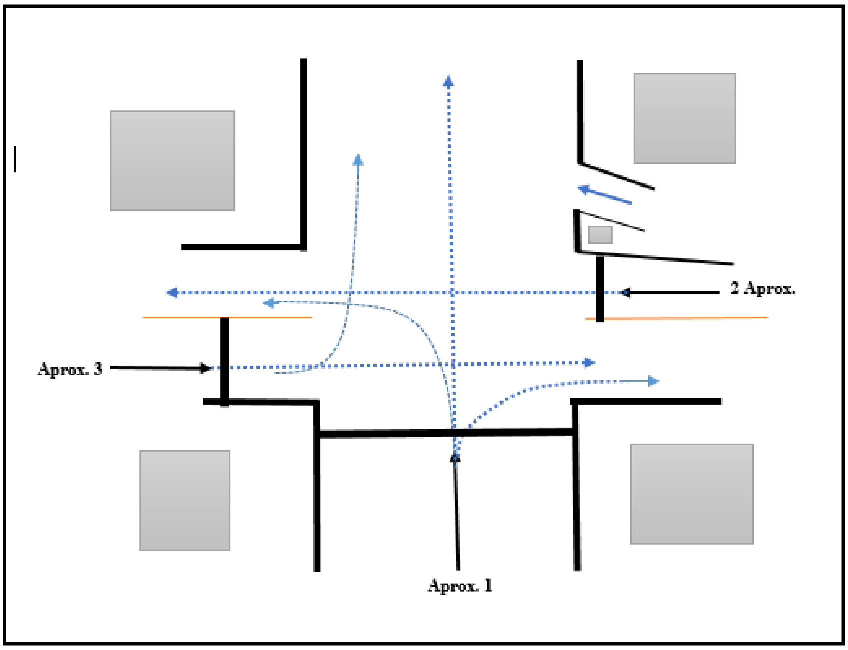
Maiores informações sobre teoria de filas podem ser encontradas em Novaes (1975) e Bronson (1985).

3. Aplicação da metodologia

A metodologia foi aplicada em uma interseção localizada entre a rua Prof. Pedro Viriato Parigot de Souza e a rua Paulo Gorski em Curitiba. As observações foram feitas nos horários de pico das 17:30 às 18:00, em um dia típico da semana.

O cruzamento é composto por duas vias, sendo uma de mão dupla e a outra de mão única; três aproximações e seis movimentos como mostra a figura 2**.** Também pode se observar os movimentos conflitantes, movimentos convergentes e movimentos divergentes.

Figura 1 – Esquema da interseção analisada



Fonte: Próprio autor

As observações das características do semáforo em operação da interseção selecionada foram feitas na aproximação 1, onde o estágio do semáforo apresenta os tempos de verde e vermelho iguais a 30 e 31 segundos, respectivamente, e 2 segundos de amarelo para cada fase. Portanto, o tempo de ciclo é de 61 segundos. A taxa média de serviço, ou em outras palavras, veículos passando pela luz verde na aproximação analisada (μ) é de 102 veículos/minuto, e a taxa média de chegada (λ) é de 95,25 veículos/minuto.

Para obter as informações, foi usado um cronômetro e um contador de veículos, ambos manuais.

Quanto as características das filas observadas no cruzamento, ocasionadas pela programação do semáforo, registrou-se uma fila máxima de 14 veículos esperando passar a luz verde nesse intervalo de tempo.

4. Resultados estimados da aplicação do modelo proposto

Os resultados obtidos com a metodologia proposta foram:

a) A intensidade do tráfego no cruzamento analisado, representado por ρ e estimado segundo o modelo proposto é igual a 0,933824. Este valor de ρ expressa uma interseção com tráfego intenso;

b) Probabilidade de a interseção estar ocupada, o seja $P(n > 0)$ é igual à ρ que representa o "fator de utilização". Como ρ é igual a 0,933824, então se tem uma alta probabilidade de que a interseção este ocupada no horário em que foi feita as observações;

c) Probabilidade de a interseção estar vazia, representado por P_0, durante o intervalo de tempo observado é igual a 0,066176. A probabilidade P_0 é muito pequena cujo valor explica que é pouco provável ter a interseção vazia nesse intervalo de tempo;

d) Número médio de veículos em espera, ou seja, número médio de veículos aguardando passar a luz verde que também expressa o tamanho da fila representado por F é igual a 13 veículos. Todo o sistema pode ser considerado composto por uma fila média de tamanho igual a 13 veículos no intervalo de tempo considerado, já que quando aberto o semáforo todos os carros partem de uma só a vez;

e) Probabilidade de ter uma fila maior a média estimada $P(N>F)$. Esta probabilidade de ter um número superior ao número médio de veículos na fila é estimada segundo o modelo utilizado durante o intervalo de tempo observado, pela a seguinte expressão:

$$P(N > 13) = \rho^{13+1} = 0{,}933824^{14} = 0{,}38345.$$

A probabilidade $P(N>F)$ indica ser inferior a 50% de se ter uma fila maior de 13 veículos nesse intervalo de tempo. Isto explica as observações feitas no cruzamento, cuja fila máxima observada foi de 14 veículos, valor muito próximo a média em que a probabilidade é baixa.

Como observação, em intervalos maiores de tempo este número de veículos na fila pode aumentar;

f) Cálculo do tempo médio de espera de um veículo na fila (W_q). É importante determinar o tempo médio de espera de um veículo na fila aguardando a luz verde e é dado em minutos. Este valor é igual a 0,1386 min.

Estes resultados são apresentados no quadro (1) a seguir:

Quadro 1 - Resultados da metodologia apresentada

Características da interseção analisada	Valores estimados
Intensidade do tráfego no cruzamento analisado	$\rho = 0{,}933824$
Probabilidade de a interseção estar ocupada	$P(n > 0)$= 0,933824
Probabilidade de a interseção estar vazia	P_0=0,066176
Número médio de veículos em espera	F=13
Probabilidade de ter uma fila maior à média estimada	$P(N>F)$= $P(N>13)$= 0,38345
Cálculo do tempo médio de espera de um veículo na fila	W_q=0,1386 min

5. Considerações finais

O uso da teoria de filas foi uma ferramenta muito útil para avaliar o comportamento da interseção cujo tráfego é controlado por semáforo.

A teoria de filas permitiu estimar que a intensidade de tráfego está sobre controle, medido por ρ cujo valor é menor que 1 ($\rho = 0{,}933824$). O valor de ρ explica que o tráfego no cruzamento analisado é intenso, mas por ser menor que 1 o sistema se estabiliza.

Foi possível estimar as demoras sofridas pelos veículos que passam pelo cruzamento devido aos tempos de verde, vermelho e amarelo do semáforo, que é em média de 0,1386 minutos (W_q).

Também foi calculada a probabilidade de que a interseção esteja vazia no intervalo observado, cujo resultado é muito pequeno, sendo igual a 0,066176 (P_0). Este valor explica que é muito pouco provável que a interseção esteja vazia no horário observado.

O tamanho de fila estimado é em média 13 veículos (*F*), com uma probabilidade pequena igual a 0,38345 de que a fila seja maior que este valor, o que explica a observação feita na interseção onde se observou uma fila máxima de 14 veículos.

Pelos resultados obtidos na análises pode-se concluir que a interseção analisada apresenta um tráfego intenso, com muito baixa probabilidade de permanecer vazia nesse horário. Mas o tráfego no cruzamento tende a estabilizar-se já que o valor do fator de intensidade do tráfego é menor a 1. Entende-se por estabilizar o tráfego o fato de que nesse intervalo de tempo o tráfego flui normalmente, e em casos de espera a tolerância dos motoristas esteja entre os limites aceitáveis.

Os resultados alcançados pela metodologia apresentada são satisfatórios, permitiu estimar o comportamento da intensidade dos fluxos veiculares e as características do tráfego de veículos na interseção, no intervalo de tempo observado devido a programação do semáforo.

REFERÊNCIAS

ANTONIO, Novaes. **Pesquisa Operacional e Transporte: Modelos Probabilísticos**. Ed. McGraw-Hill do Brasil, LTDA, 1975.

BEATRIZ, Castro Dias Cuyabano, KAREN, Maria Jung, NANCY, Lopes Garcia. **Teoria de Filas**. 35 p. Trabalho da Disciplina de Processos Estocásticos. Departamento de Estatística - IMECC/UNICAMP 2009.

BRONSON, Richard. **Pesquisa Operacional.** Ed. McGraw-Hill Ltda. São Paulo, 1985.

FLÁVIO, Gomes de Moraes, GECIRLEI, Francisco da Silva, TACYANNE, Assis Rezende. **Introdução à Teoria das Fila**s, Universidade Federal do Mato grosso, Cuiabá-MT, nov. 201. P.18-31.

MAURICIO, González Restrepo, EDWARD, Jovan Sepulveda Abalo. **Aplicación de Teoría de Colas en los semáforos para mejorar la movilidad en la carrera 7 entre calles 15 y 20 de la ciudad de Pereira**. Universidad Tecnológica de Pereira, 111p. Trabajo de grado (Ingeniero)-Facultad de Ingeniería Industrial Pereira, Risaralda, nov. de 2010.

OSWALDO, Fadigas Tôrres, **Elementos da teoria das filas**. RAE-Revista de Administração de Empresas, vol. 6, n. 20, p. 111-128, jul/set 1966.