

PROPOSTA DE UM ALGORITMO DE ENUMERAÇÃO DOS VÉRTICES DE UM POLIEDRO BASEADO NO MÉTODO SIMPLEX

Caio Lopes Assad (UENF) caioassad@outlook.com

Jose Ramon Arica Chavez (UENF) arica@uenf.br

Gudelia Guillermina M. de Arica (UENF) gudelia@uenf.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de algoritmo, baseado no Método Simplex, para resolver o problema de enumeração de vértices de um poliedro. O problema consiste em enumerar os vértices de um poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b, x \geq 0\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, com $m \geq n$. O algoritmo proposto, é ilustrado com um exemplo numérico. Foi possível perceber que o algoritmo proposto conseguiu enumerar todos os vértices do problema proposto realizando poucas iterações em relação ao mapeamento completo do exemplo.

Palavras chave: enumeração de vértices; simplex lexicográfico; vértices de poliedro

1. Introdução

Trabalha-se aqui o problema da enumeração de vértices de um poliedro convexo. O problema de enumeração de vértices de um poliedro é uma questão bastante abordada na literatura, Reimers e Stougie (2016) classificam o problema de enumeração de vértices de um poliedro como um problema famoso para a geometria computacional. Esses problemas são divididos em diversas classificações, como problemas com um tempo de execução limitado polinomialmente pelo tamanho dos dados, para algoritmos baseados em poliedros não degenerados, existem algoritmos que rodam em tempo polinomial.

O problema aqui trabalhado não é um problema novo e diversos autores o têm abordado. Uma breve, mas interessante revisão dos trabalhos relativos à enumeração dos vértices de um poliedro pode encontra-se em Avis e Fukuda (1992). Existem fundamentalmente duas abordagens de métodos: baseados em pivotamento para determinar os vértices e os baseados na “descrição dupla” (*double description*) de um poliedro, que enumera os raios extremos de um cone poliédrico. Na primeira abordagem, uma primeira busca se inicia a partir dum vértice dado, através de pivotamentos simplex. Existe uma dificuldade associada a determinar se um dado vértice já foi o não encontrado, pelo que os vértices se armazenam numa determinada

árvore. Diversas implementações de complexidade polinomial se encontram na literatura (cf. Dyer, 1983). A segunda abordagem, baseia-se no método da “descrição dupla” de Motzkin et al. (1953), na qual o poliedro se constrói sequencialmente, adicionando uma restrição a cada vez e onde os novos vértices produzidos estão no hiperplano definido pela restrição que entra. O objetivo deste trabalho é apresentar outro algoritmo que resolva o problema de enumeração de vértices de um poliedro, baseado em pivotamentos.

A ideia principal do algoritmo proposto é converter o problema original num problema de maximização equivalente, onde, sob a hipótese de conhecer um dado vértice do poliedro, definem-se diversos caminhos compostos por arestas e vértices do poliedro original, que conduzem a um vértice de maximização do problema equivalente. Desde que a proposta pode embutir degeneração de vértices, utiliza-se uma abordagem lexicográfica.

Este trabalho se organiza da seguinte maneira: na Seção 2 são apresentados os conceitos principais para a definição do problema. Na Seção 3 é discutido o problema da enumeração de vértices. Na Seção 4 define-se um problema de programação linear equivalente ao problema abordado. Na seção 5 é introduzido o algoritmo proposto. Na seção 6 ilustra-se a proposta com um exemplo numérico. Por fim, na seção 7 ~~serão~~ são apresentadas as considerações finais.

2. Poliedros

Define-se um poliedro P como o conjunto solução do sistema de m desigualdades lineares em n variáveis não negativas. Assim, $P = \{x \in \mathfrak{R}^n: Ax \leq b, x \geq 0\}$, onde $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathfrak{R}^m$, com $m \geq n$. Aqui vetores se consideram matrizes coluna. Assim, o vetor b é uma matriz coluna e, usando o superíndice T associado a uma matriz para denotar operação de transposição, b^T é uma matriz linha. Para maior discussão sobre as definições e provas introduzidas nesta seção, o leitor pode consultar vários textos de Programação Matemática, por exemplo, Blum e Oettli (1975) e Minoux (1986).

Um vértice do poliedro P é um vetor $x \in P$ que satisfaz, como igualdades, um conjunto linearmente independente de n das $(m + n)$ desigualdades que determinam P . Assume-se, aqui, que se conhece um vértice $x \in P$.

Note que, equivalentemente, x é vértice do poliedro P , se o vetor $\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{n+m}$ satisfaz o sistema:

$$\begin{aligned} [A \quad I] \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} &= b, \\ x \geq 0, s &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

onde $I \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ denota a matriz identidade.

Seja $\mathcal{B} \subseteq \{1, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$ e $y = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{n+m}$. Denotam-se por y_B o subvector de y e por B a submatriz de $[A \quad I]$ que consistem das entradas (de y) e das colunas indexadas (de $[A \quad I]$) por \mathcal{B} . Se $|\mathcal{B}| = m$ e B é não singular, diz-se que a matriz B é uma base de $[A \quad I]$. Desde que, por hipótese, supõe-se conhecido um vértice $x \in P$, assume-se que se conhece uma base B de $[A \quad I]$. Diz-se que o vértice $x \in P$ está associado à base B .

Permutando adequadamente as colunas da matriz de $[A \quad I]$ e os índices do vetor determinado pelo vértice $x \in P$, a base B pode ser decomposta em vetores coluna da matriz A e da matriz I , como $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, com $\mathcal{B}_1 \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{B}_2 \subseteq \{n+1, \dots, n+m\}$, $|\mathcal{B}_1| = n_1 \leq n$, $|\mathcal{B}_2| = n_2 \leq m$ e $n_1 + n_2 = m$, de forma a que $\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ soluciona (1), para $x = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{N_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $s = \begin{pmatrix} s_{N_2} \\ s_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s_{B_2} \end{pmatrix}$, onde x_{N_1} e s_{N_2} são os subvetores de x e s cujos índices não estão em \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 , respectivamente; i.e., $\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$ soluciona o sistema:

$$\begin{aligned} B_1 x_{B_1} + N_1 x_{N_1} + \begin{pmatrix} s_{N_2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s_{B_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{B_1} \\ b_{B_2} \end{pmatrix}, \\ x_{B_1} \geq 0, x_{N_1} \geq 0, s_{N_2} \geq 0, s_{B_2} \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Note que matriz B_1 pode ser decomposta em $\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$, de forma a que $\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ s_{B_2} \end{pmatrix}$ soluciona o sistema:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & I_{B_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ s_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{B_1} \\ b_{B_2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Sendo $B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & I_{B_2} \end{bmatrix}$ não singular, resulta que B_{11} é não singular, e de (3), $x_{B_1} = B_{11}^{-1} b_{B_1} \geq 0$ e $s_{B_2} = b_{B_2} - B_{21} B_{11}^{-1} b_{B_1} \geq 0$, onde $I_{B_2} \in \mathfrak{R}^{n_2 \times n_2}$ é matriz identidade.

É claro que outros vértices do poliedro P podem ser encontrados determinando outras bases da matriz $[A \quad I]$: Se $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}_1 \cup \bar{\mathcal{B}}_2$ denota as colunas da matriz $[A \quad I]$ que formam a base \bar{B} , com $\bar{\mathcal{B}}_1$ para as colunas de A e $\bar{\mathcal{B}}_2$ para as colunas de I na base, então, se a solução básica associada $\begin{pmatrix} x_{\bar{B}_1} \\ s_{\bar{B}_2} \end{pmatrix} \geq 0$, ocorre que $x = \begin{pmatrix} x_{\bar{B}_1} \\ x_{\bar{N}_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\bar{B}_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ é vértice do poliedro P .

3. Enumeração de vértices

As bases da matriz $[A \ I]$ que interessam para determinar vértices do poliedro P podem ser encontradas, considerando o seguinte programa linear, associado à relação (2):

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = \sum_{i \in N_2} s_i \\ & \begin{bmatrix} B_{11} & N_{11} & I_{N_2} & 0 \\ B_{21} & N_{21} & 0 & I_{B_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{N_1} \\ s_{N_2} \\ s_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{B_1} \\ b_{B_2} \end{pmatrix}. \\ & x_{B_1} \geq 0, x_{N_1} \geq 0, s_{N_2} \geq 0, s_{B_2} \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Note que $x = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{N_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} b_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $s = \begin{pmatrix} s_{N_2} \\ s_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{B_2} - B_{21} B_{11}^{-1} b_{B_1} \end{pmatrix}$ é uma solução viável para o programa linear (4), com variáveis básicas $\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ s_{B_2} \end{pmatrix}$, associadas à base $\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & I_{B_2} \end{bmatrix}$.

Assim, a tabela do Método Simplex associada à base $\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & I_{B_2} \end{bmatrix}$ para o programa linear (4) está determinada, permutando as colunas se necessário, pela matriz T :

$$T = [T_{ij}]_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n+m}} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{0^T} & \overline{0^T} & \overline{0^T} & \overline{-1 \dots -1} \\ B_{11}^{-1} b_{B_1} & I_{B_1} & 0 & B_{11}^{-1} N_{11} & B_{11}^{-1} \\ b_{B_2} - B_{21} B_{11}^{-1} b_{B_1} & 0 & I_{B_2} & N_{21} - B_{21} B_{11}^{-1} N_{11} & -B_{21} B_{11}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d_0^T \\ d_1^T \\ \vdots \\ d_m^T \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Na parte superior da matriz T , (5), a partir da segunda coluna, mostra-se a associação das colunas com as variáveis básicas (x_{B_1} e s_{B_2}) e não básicas (x_{N_1} e s_{N_2}) correspondentes a x e a s , respectivamente. Note que a primeira coluna de T , $[T_{i0}]_{0 \leq i \leq m}$, corresponde, respectivamente, ao valor da função objetivo do programa linear (4), $T_{00} = z = 0$, avaliada na solução atual, $\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$, e às variáveis básicas, $[T_{i0}]_{i \in B_1} = x_{B_1} = B_{11}^{-1} b_{B_1} \geq 0$ e $[T_{i0}]_{i \in B_2} = s_{B_2} = b_{B_2} - B_{21} B_{11}^{-1} b_{B_1} \geq 0$. As entradas da primeira linha de T , a partir da segunda componente, $[T_{0j}]_{1 \leq j \leq n+m}$, correspondem aos custos reduzidos das variáveis básicas e não básicas associados à base atual de (4).

A tabela T é viável, mas não é ótima para o programa linear (4). Pode-se, portanto, eventualmente, melhorar o valor da função objetivo mudando a base atual, substituindo uma das variáveis básicas por outra não básica. Dado que pode existir degeneração na tabela T , a mudança de base pode ser realizada usando regras que asseguram a terminação finita do Método Simplex, como, por exemplo, o critério lexicográfico (cf. Blum e Oetli, 1975,

Capítulo 2) ou a regra de Bland (Bland, 1977). Assim, a geração de novas bases, a partir da matriz T , determinará novos vértices do poliedro P .

Ambas as regras citadas para a terminação finita do Método Simplex (critério lexicográfico e regra de Bland) são usadas na literature para tratar da degeneração, possuindo vantagens e desvantagens: “Bland’s Rule ... drawback is that its choice of incoming column may not be a very good one” (Dantzing e Thapa, 1997, p. 160); “The first and widely used such tool [to ensure finite termination of simplex methods] is lexicographic simplex rule” (Terlaky, 2001); “Although [Bland’s Rule] is much simpler than the lexicographic rule, it also usually takes a lot longer for the Simplex algorithm to converge using this rule” (Lewis, 2008, p. 37). Neste trabalho será usado o método lexicográfico. Para uma maior discussão das definições e provas aqui estabelecidas o leitor pode procurar por Blum e Oettli (1975, Capítulo 2).

Definição 1. Dados $d, f \in \mathfrak{R}^n$, tem-se que:

- (i) d é lexicograficamente positivo, denotado por $d \succ 0$, se $d \neq 0$ e a primeira componente não nula for positiva;
- (ii) $d \succcurlyeq 0$, se $d \succ 0$ ou $d = 0$;
- (iii) $d \succ f$, se $d - f \succ 0$.

Desde que $(\mathfrak{R}^n, \succcurlyeq)$ é um conjunto totalmente ordenado, tem-se como consequência que qualquer conjunto finito $\{d_i\}_{i \in J} \subset \mathfrak{R}^n$, com todos os elementos diferentes, tem um único elemento d_{i_0} , tal que $d_{i_0} < d_i, \forall i \in J$; d_{i_0} é chamado mínimo lexicográfico de $\{d_i\}_{i \in J}$, denotado por $d_{i_0} = \min \text{lex} \{d_i, i \in J\}$.

Note que as linhas da matriz T , da segunda em diante, são lexicograficamente positivas (i.e., $d_i^T \succ 0, 1 \leq i \leq m$), pois $[T_{i0}]_{1 \leq i \leq m} = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ s_{B_2} \end{pmatrix} \geq 0$.

Desde que as variáveis básicas atuais correspondem as variáveis $\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ s_{B_2} \end{pmatrix}$, que na matriz T constituem o vetor $[T_{i0}]_{1 \leq i \leq m}$, e os custos reduzidos das variáveis não básicas correspondem a x_{N_1} e s_{N_2} , que na matriz T_0 fazem parte do vetor $[T_{0j}]_{m+1 \leq j \leq m+n}$, o pivotamento lexicográfico está determinado da seguinte forma:

(PivLex1) Regra para determinar a variável não básica que entra na base: Considere como variável não básica que entra na base qualquer índice p , do vetor $[T_{0j}]_{n+1 \leq j \leq n+m-n_2}$ (correspondente a uma das variáveis não básicas s_{N_2}).

(PivLex2) Regra para determinar a variável básica que sai da base: Sai da base o índice q determinado pelo pivotamentos lexicográfico, dado por:

$$\frac{d_q^T}{T_{qp}} = \min \text{lex} \left\{ \frac{d_i^T}{T_{ip}} : T_{ip} > 0, 1 \leq i \leq m \right\}. \quad (6)$$

Gera-se, assim, uma nova matriz, \bar{T} , que se diferencia unicamente num variável básica da matriz T . Denotando o conjunto de índices básicos associados à tabela \bar{T} por $\bar{\mathcal{B}}$, tem-se que $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}_1 \cup \bar{\mathcal{B}}_2 = \mathcal{B} \cup \{p\} \setminus \{q\}$, onde $\bar{\mathcal{B}}_1$ corresponde às colunas de A e $\bar{\mathcal{B}}_2$ às colunas de I na base. Aplicando, sucessivamente, as regras do pivotamento lexicográfico ao programa linear (4), assegura-se que o método simplex é finito (mesmo no caso de degeneração).

A tabela

$$\bar{T} = [\bar{T}_{ij}]_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n+m}} = \begin{bmatrix} \bar{d}_0^T \\ \bar{d}_1^T \\ \vdots \\ \bar{d}_n^T \end{bmatrix}, \quad (7)$$

obtida da tabela T tem o seguinte formato

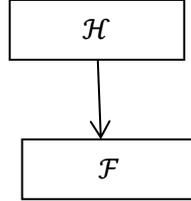
$$\begin{aligned} \bar{d}_i^T &= d_i^T - \frac{T_{ip}}{T_{qp}} d_q^T, i \neq q \\ \bar{d}_q^T &= \frac{1}{T_{qp}} d_q^T \end{aligned}, \quad (8)$$

Note que, como na matriz T , $\bar{d}_i^T > 0, 1 \leq i \leq m$; i.e., \bar{T} também é uma tabela viável para o programa linear (4) e o vértice do poliedro P associado a ela é $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_{\bar{\mathcal{B}}_1} \\ x_{\bar{\mathcal{N}}_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [T_{i0}]_{i \in \bar{\mathcal{B}}_1} \\ 0 \end{pmatrix}$, com $z = \bar{d}_{00} \geq 0$.

4. Grafo Dirigido associado aos vértices do programa linear

Nesta seção se introduz um conceito de associação entre vértices de um poliedro que será útil para o algoritmo a ser apresentado mais adiante. Considere-se um grafo dirigido cujos vértices são as bases viáveis do programa linear (4) que se diferenciam apenas de um único índice, onde a direção das arestas está determinada no sentido em que a função objetivo associada às soluções respectivas cresce. Assim, se as bases \mathcal{H} e \mathcal{F} se diferenciam apenas num único índice e o valor da função objetivo é $z_{\mathcal{H}}$ e $z_{\mathcal{F}}$, respectivamente, com $z_{\mathcal{H}} > z_{\mathcal{F}}$, então essas bases aparecem no grafo como na Figura 1.

Figura 1 - Vértices definidos pelas bases \mathcal{H} e \mathcal{F} do programa linear (4), onde $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \{p\} \setminus \{q\}$ e $z_{\mathcal{H}} > z_{\mathcal{F}}$



Fonte: Próprios autores

Analogamente, se $z_{\mathcal{H}} = z_{\mathcal{F}}$, a relação está ilustrada na Figura 2.

Figura 2 - Vértices definidos pelas bases \mathcal{H} e \mathcal{F} do programa linear (4), onde $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cup \{p\} \setminus \{q\}$ e $z_{\mathcal{H}} = z_{\mathcal{F}}$



Fonte: Próprios autores

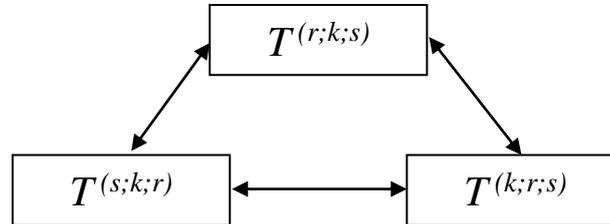
Note, em relação à Fig. 1, que todas as bases viáveis de (4) (e os respectivos vértices associados do poliedro P), obtidas a partir da base \mathcal{F} são obtidas a partir da base \mathcal{H} .

Considere a tabela viável degenerada $T^{(r;k,s)}$, onde $(r;k,s)$ indica que a variável r é não básica e as variáveis k e s são variáveis básicas que causam degeneração quando substituídas pela primeira. A relação (9) mostra o formato de $T^{(r;k,s)}$, onde se destacam as colunas básicas k e s e a coluna não básica r .

$$T^{(r;k,s)} = \begin{pmatrix} & & k & r & s \\ T_{00}^{(r;k,s)} & 0 & T_{0r}^{(r;k,s)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{0k}^{(r;k,s)} & 1 & T_{kr}^{(r;k,s)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{0s}^{(r;k,s)} & 0 & T_{sr}^{(r;k,s)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (9)$$

Se $T_{kr}^{(r;k,s)} > 0$ e $T_{sr}^{(r;k,s)} > 0$, contas simples mostram que introduzindo a variável não básica r na base e tirando da base as variáveis k e s , respectivamente, na tabela $T^{(r;k,s)}$, geram-se as tabelas viáveis degeneradas $T^{(k;r,s)}$ e $T^{(s;k,r)}$. Além disso, é possível gerar, a partir de $T^{(k;r,s)}$ a tabela $T^{(s;k,r)}$ e vice-versa. Portanto, pode se obter uma das três tabelas a partir de qualquer outra. Note que em todos os casos o valor da função objetivo é o mesmo. A Figura 3 ilustra a participação no grafo das tabelas (bases) indicadas.

Figura 3 - Obtenção das tabelas $T^{(r;k,s)}$, $T^{(k;r,s)}$ e $T^{(s;k,r)}$, por mudança de bases, umas a partir das outras, por uma única variável.



Fonte: Próprios autores

Como consequência, o conjunto de vértices do poliedro P , obtidos a partir da base $T^{(k;r,s)}$ ou da base $T^{(s;k,r)}$ são iguais. Portanto, para a determinação dos vértices do poliedro P é suficiente considerar no grafo unicamente uma das sequencias $T^{(r;k,s)}$ e $T^{(k;r,s)}$ ou $T^{(r;k,s)}$ e $T^{(s;k,r)}$.

5. Metodologia

O algoritmo proposto foi programado em MatLab. Para ilustrar o algoritmo foi usado um exemplo de Campêlo e Scheimberg (2005), mostrado na Seção 6. Uma característica importante para a escolha deste exemplo é que possui diversas degenerações, o que ilustra convenientemente o algoritmo lexicográfico proposto.

Inicialmente, a maneira de ilustração, foi realizado um mapeamento completo, sem a aplicação do algoritmo lexicográfico. Foi possível perceber um grande número de degenerações, e por conta delas, um grande número de iterações desnecessárias. Esse mapeamento pode ser visto no Anexo 1. O resultado do algoritmo proposto é ilustrado na Figura 5.

5.1. Algoritmo proposto para enumeração de vértices

O algoritmo proposto para a enumeração dos vértices do poliedro $P = \{x \in \mathfrak{R}^n: Ax \leq b, x \geq 0\}$ trabalha em relação ao programa linear (4) e, como indicado na Seção 2, assume-se conhecido um vértice $x = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{N_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1} b_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ do poliedro, associado à base $\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & I_{B_2} \end{bmatrix}$ da matriz $[A \quad I]$. Sendo $\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$, com $s = \begin{pmatrix} s_{N_2} \\ s_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{B_2} - B_{21} B_{11}^{-1} b_{B_1} \end{pmatrix}$, solução de (4). Para efeitos de desenvolvimento do algoritmo, trabalha-se coma a matriz T , da relação (5).

Observação: Aqui, conjuntos de índices básicos e não básicos associados aos vértices do poliedro P são tratados como vetores linha ordenados de forma crescente. Entretanto, para facilitar a exposição, usa-se, sem lugar a confusão, a mesma notação para o conjunto e o vetor correspondente. Se M é uma matriz, a expressão $M = \emptyset$ significa que a matriz M não tem elementos; $M \setminus \{r\}$ significa que se retira a linha r da matriz M (ou componente r do vetor M , se M for definida originalmente como vetor); para o conjunto de índices M (todos diferentes), onde $r \in M$, $s \notin M$, o vetor correspondente a $M \cup \{s\} \setminus \{r\}$ é o que se obtém de substituir a componente r pelo valor s .

Algoritmo: Enumeração dos vértices do poliedro P

Passo 0.

Fazer

$k := 1; x_k := x;$

$Vértices := \{x_k\};$

$\mathcal{B} := \{\text{índices básicos determinados pelo vértice } x_k\}$

$T :=$ tabela associada ao vértice x_k , dada em (5);

$\mathfrak{N}_2 := \{\text{índices não básicos da variável } s\};$

$\widehat{\mathcal{B}} := \mathcal{B}; \widehat{\mathfrak{N}}_2 := \mathfrak{N}_2; \text{Bases} := \{\widehat{\mathcal{B}}\}; \text{EntraBase} := 0; \mathcal{M} := \emptyset.$

Passo 1. (Determinação da variável não básica $s_{\widehat{p}}$ que entra na base)

Se $\widehat{\mathfrak{N}}_2 = \emptyset$, PARAR;

caso contrário, escolher o índice que entra na base $p := \widehat{\mathfrak{N}}_2(1); k := k + 1; \widehat{\mathfrak{N}}_2 := \widehat{\mathfrak{N}}_2 \setminus \{p\};$

Passo 2. (Determinação da variável básica de índice q que sai da base – Determinação de um novo vértice)

Aplicar a regra de pivotamento lexicográfico (PivLex2) para determinar a variável q que sai da base.

Fazer $\overline{\mathcal{B}} := \widehat{\mathcal{B}} \cup \{p\} \setminus \{q\}$. Se a base $\overline{\mathcal{B}} \in \text{Bases}$, ir ao Passo 3;

caso contrário, fazer $\text{Bases} := \text{Bases} \cup \overline{\mathcal{B}}$;

gerar a tabela \overline{T} associada à base $\overline{\mathcal{B}}$; gerar o vértice x_k associado à base $\overline{\mathcal{B}}$.

Se $x_k \notin Vértices$, fazer $Vértices := Vértices \cup \{x_k\}$ e $k := k + 1$;

caso contrário, continuar.

Gerar $\overline{\mathfrak{N}}$ (índices não básicos associados à base $\overline{\mathcal{B}}$) e $\overline{\mathfrak{N}}_- := \{j \in \overline{\mathfrak{N}}: \overline{T}_{0j} \leq 0\}$.

Se $|\overline{\mathfrak{N}}_-| \geq 2$, fazer $\text{EntraBase} := \text{EntraBase} + 1; \mathcal{M}_{\text{EntraBase}} := \overline{\mathfrak{N}}_-; \mathcal{M} := \mathcal{M} \cup \mathcal{M}_{\text{EntraBase}}$.

Passo 3. Se $\mathcal{M}_{\text{EntraBase}} = \emptyset$, fazer $\text{EntraBase} := \text{EntraBase} - 1$.

Se $\mathcal{M} = \emptyset$, ir ao Passo 1; caso contrário, fazer $p := \mathcal{M}_{\text{EntraBase}}(1)$; $\mathcal{M}_{\text{EntraBase}} := \mathcal{M}_{\text{EntraBase}} \setminus \{p\}$.

Ir ao Passo 2.

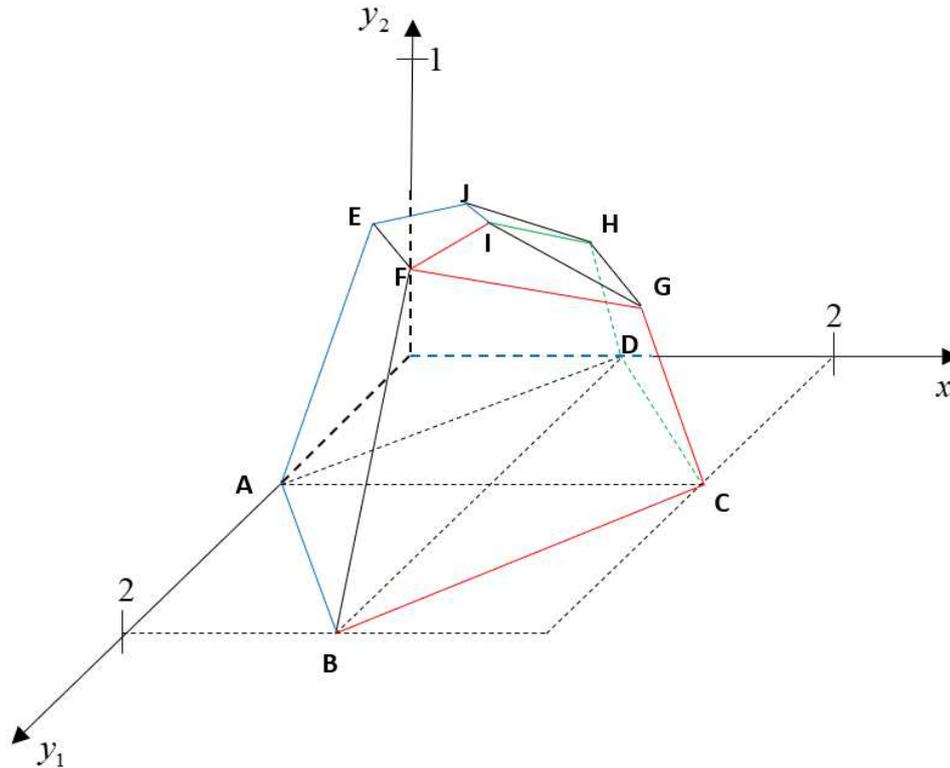
6. Exemplo numérico

Este exemplo foi retirado de Campêlo e Scheimberg (2005). O exemplo original consiste de um problema de dois níveis linear, onde a função do líder é $F_L(x, y_1, y_2) = x - 2y_1 + 20y_2$, do qual foi tomado o conjunto de restrições do seguidor para compor o poliedro do qual se buscam todos os vértices. O poliedro consiste, das restrições indicadas, às quais se adicionou mais uma, correspondente ao semiespaço determinado pelos níveis maiores que o plano originado pela função do líder no ponto $I = (1, 1, 0,45)$; i.e., $F_L(x, y_1, y_2) \geq F_L(I)$. Assim, o poliedro $P \subset \mathfrak{R}^3$ está dado pelo conjunto de desigualdades mostrado em (10) (onde a última restrição corresponde à restrição $F_L(x, y_1, y_2) \geq F_L(I)$). A Figura 4 ilustra o poliedro P , seus vértices e a sequencia de vértices encontrada pelo algoritmo, iniciando no ponto I , onde são gerados três caminhos (indicados pelas cores vermelha, azul e verde), correspondentes às variáveis não básicas do ponto I , que sequencialmente irão entrar na base. Naturalmente, aqui se supõe conhecido o vértice I .

$$\begin{aligned}
 x + y_1 + y_2 &\leq 3 \\
 x + y_1 - y_2 &\geq 1 \\
 -x + y_1 + y_2 &\leq 1 \\
 x - y_1 + y_2 &\leq 1 \\
 16x - 6y_1 + 60y_2 &\leq 37 \\
 6x - 16y_1 + 60y_2 &\leq 17 \\
 6x - 6y_1 + 60y_2 &\leq 27 \\
 16x - 16y_1 + 60y_2 &\leq 27 \\
 x - 2y_1 + 20y_2 &\leq 8 \\
 x \geq 0, y &\geq 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Para efeitos da aplicação do algoritmo, considera-se o poliedro P , acima, dado como um conjunto de igualdades com variáveis positivas (acrescentando as respectivas variáveis de folga). Assim, o poliedro dado resulta um conjunto determinado por 9 restrições de desigualdade do tipo \leq e 12 variáveis não negativas, onde as primeiras 3 variáveis correspondem a x, y_1 e y_2 e as últimas 9 às variáveis de folga das respectivas desigualdades: s_1, \dots, s_9 .

Figura 4 - Ilustração do poliedro (10), mostrando os vértices do poliedro, o vértice inicial I e as sequencias de vértices encontrados pelo algoritmo



Fonte: Adaptado de Campêlo e Scheimberg (2005)

Para ilustrar como o algoritmo percorre os vértices do poliedro (a partir do vértice D), são apresentadas, na Figura 5, as variáveis não básicas, o vértice do poliedro que corresponde à respectiva base e o valor da função objetivo do programa linear (4) nesse vértice. Assim, por exemplo, $I^0 = \{9, 11, 12\}$ significa que nas variáveis não básicas $\{9, 11, 12\}$ (que determinam a base $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$), o ponto determinado é o vértice I e que $z = \sum_{i \in N_2} s_i = 0$.

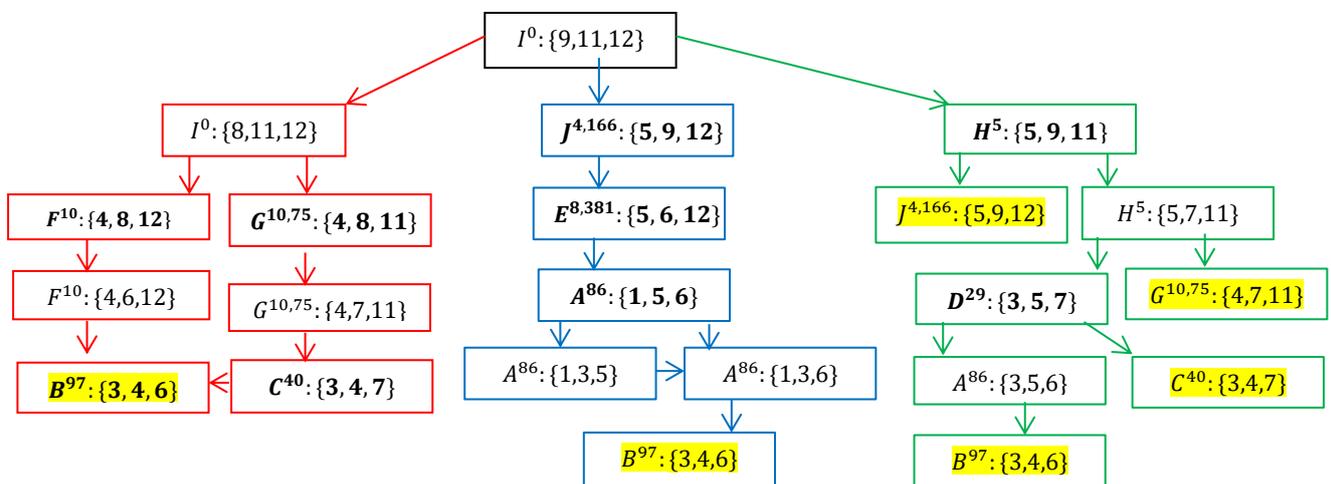
A partir das variáveis não básicas, aplica-se o algoritmo simplex lexicográfico para executar mudanças de base, mudando de vértice (ou não, caso esteja degenerado).

A Figura 5 mostra o mapeamento realizado pelo algoritmo. O primeiro ponto encontrado é o ponto I^0 , com as variáveis não básicas $\{9, 11, 12\}$. Na tabela simplex desse vértice é possível realizar a mudança de base em qualquer uma das 3 variáveis fora da base, pois todos tem o mesmo valor (-1.0000). Logo, teremos 3 caminhos iniciais diferentes: o primeiro, quando a variável 9 entra na base; o segundo, quando a variável 11 entra na base; e o terceiro, quando a variável 12 entra na base. Cada caminho encontra pontos diferentes, como mostra a figura do

mapeamento. O algoritmo lexicográfico programado no MatLab identifica a melhor variável a sair e entrar na base, realizando a sua troca.

Representam-se em vermelho as variáveis que vão entrar na base seguindo o caminho da variável não básica 9, ou seja, ela irá entrar na base e a variável básica 8 passará a ser uma não básica, enquanto a variável 9 passa a ser básica. Já em azul é ilustrado o caminho que a variável 11 entra na base, e finalmente o caminho verde, o qual a variável 12 entra na base primeiro. Na Figura 5 cada caminho realizado na Figura 4 está ilustrado com as suas respectivas cores. Em negrito os novos vértices encontrados. Destacado em amarelo o último vértice da respectiva sequência.

Figura 5 – Sequencias de vértices do poliedro (10) encontradas pelo algoritmo



Fonte: Próprios autores

Observando a figura acima é possível perceber que todos os vértices do problema foram encontrados.

7. Considerações finais

A partir do que pode ser visto, o algoritmo conseguiu cumprir os objetivos propostos, a enumeração dos vértices de um poliedro. Em comparação ao mapeamento completo do Anexo 1 é possível perceber que o algoritmo conseguiu encontrar todos os vértices do poliedro do exemplo, porém realizando muito menos iterações. Além disso foi possível perceber que o algoritmo lexicográfico evitou muitas das degenerações que foram encontradas no mapeamento completo do problema.

Outro ponto positivo a ser mencionado é que o algoritmo seguiu os menores caminhos até encontrar a solução do programa linear (4). No mapeamento completo é possível perceber que

existem caminhos que iriam precisar de mais de 7 iterações. Enquanto isso o algoritmo conseguiu realizar o mapeamento completo com caminhos menores do que 6 iterações até o ponto ótimo. Isso se dá ao fato do algoritmo lexicográfico conseguir trabalhar em bases degeneradas e escolher o melhor caminho para a solução.

É importante ressaltar que o exemplo testado é de um poliedro tridimensional, que é possível a visualização de sua forma, o que facilita observar os caminhos percorridos pelas iterações. Para esse caso o algoritmo obteve ótimos resultados. Atualmente trabalha-se no cálculo da complexidade do algoritmo, mas pode-se adiantar que na medida em que os passos do algoritmo apresentado são análogos a os do algoritmo de Avis e Fukuda (1992), conjectura-se que a complexidade seja não maior do que $O(m^2nv)$, onde m é o numero de desigualdades, n é a dimensão do poliedro e v é o numero de vértices do poliedro.

REFERENCIAS

AVIS, David; FUKUDA, Komei. A Pivoting for Convex Hulls and Vertex Enumeration of Arrangements and Polyhedra. **Discrete & Computational Geometry**, 8, p. 295-313, 1992

BLAND, Robert G. New finite pivoting rules for the simplex method. **Mathematics of Operations Research**, pp. 103–107, maio de 1977.

BLUM, Eugen; OETTLI, Werner. Mathematische Optimierung. Grundlagen und Verfahren. **Ökonometrie und Unternehmensforschung**, 20. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

CAMPÊLO, Manoel; SCHEIMBERG, Susana. A Simplex Approach for Finding Local Solutions of a Linear Bilevel Program by Equilibrium Points. **Annals of Operations Research** v. 138, n. 1, p. 143–157 , set. 2005.

DANTZIG, George; THAPA, Mukund. Linear Programming 2: Theory and Extensions. **Springer Series in Operations Research and Financial Engineering**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.

DYER, Martin E.: The Complexity of Vertex Enumeration Methods. **Mathematics of Operations Research** 8(3):381-402, August 1983.

LEWIS, Catherine. **Linear Programming: Theory and Application**. Whitman College, 2008.

MINOUX, Michel. **Mathematical Programming: Theory and Algorithms**. John Wiley, New York, 1986.

MOTZKIN, T. S.; RAIFFA, H.; THOMPSON, G. L.; THRALL, R. M.: The double description method, in: Contributions to the Theory of Games, Vol. If, H. W. Kuhn and A. W. Tacker (eds). **Princeton University Press**, Princeton, N.J., pp. 51-73, 1953.

REIMERS, Arne; STOUGIE, Leen. **Polynomial time vertex enumeration of convex polytopes of bounded branch-width**, Jul 2016.

TERLAKY, Tamás. Lexicographic Pivoting Rules. In: Floudas C.A., Pardalos P.M. (eds) **Encyclopedia of Optimization**. Springer, Boston, MA., 2001.

ANEXO 1

Mapeamento completo do poliedro

