



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Benildo Virginio de Souza

Problemas do 2º grau: Uma proposta de sequências didáticas sob a perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas

Campina Grande - PB

Junho/2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



Benildo Virginio de Souza

Problemas do 2º grau: Uma proposta de sequências didáticas sob a perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo

Campina Grande - PB
Junho/2023

S729p

Souza, Benildo Virginio de.

Problemas do 2º grau: uma proposta de sequências didáticas sob a perspectiva da metodologia de resolução de problemas / Benildo Virginio de Souza. – Campina Grande, 2023.

142 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação: Prof. Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo".

Referências.

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Resolução de Problemas. 3. Problemas do 2º Grau. 4. Sequências Didáticas. I. Bernardo, Leomaques Francisco Silva. II. Título.

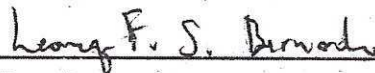
CDU 51(07)(043)

Benildo Virginio de Souza

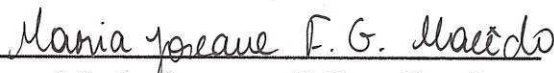
Problemas do 2º grau: Uma proposta de sequências didáticas sob a perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

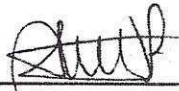
Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 16 de junho de 2023:



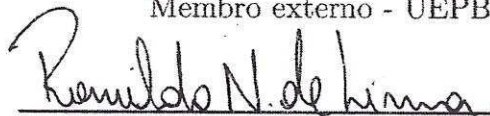
**Dr. Leomaques Francisco Silva
Bernardo**
Orientador



**Dra. Maria Joseane Felipe Guedes
Macêdo**
Membro externo - UFERSA



Dr. Roger Ruben Huaman Huanca
Membro externo - UEPB



Dr. Romildo Nascimento de Lima
Membro interno - UFCG

Campina Grande - PB
Junho/2023

Dedico esse trabalho a minha amada esposa Fabiosmara de Aguiar Silva por me apoiar durante toda essa caminhada, sua bondade, companherismo e amor foram fundamentais nessa jornada. Dedico também a minha mãe Josineide Maria de Araújo Sousa por sempre me incetivar a estudar, e por vezes, não desistir nos momentos de dificuldade.

Agradecimentos

Ao criador, pelo dom da vida, a quem eu devo tudo que sou.

A minha família, por me apoiar nessa dura jornada, em particular, minha esposa Fabiosmara, minha mãe Josineide, meu pai Beltrano e meus irmãos Bárbara e Bruno, por entenderem e compreenderem meus momentos de ausência. Sem o apoio de vocês seria impossível conciliar as obrigações do cotidiano.

Aos meus amigos da turma (PROFMAT - UFCG - 2021), pela amizade construída ao longo curso, onde a nossa união foi de suma importância para conseguirmos vencer toda essa jornada. Expresso meu apreço aos amigos: André Macedo, Andreson Alquino, Carlos Gonzaga, Cláudio Teodista, Eli Azevedo, Érico Andrade, Erivan Barbosa, Gilmar Veríssimo, Gilvandro Melo, Idalice Santiago, João Evayr, Rafael Macedo e Wirander Rosa. Agradecer de modo especial ao presidente da turma, Cláudio Teodista, por sempre organizar e redatar os grupos de estudo online quase todos os dias, e aos meus amigos de viagem Andreson Alquino e Alexandre Nário.

Quero agradecer também ao corpo docente do PROFMAT - UFCG, aos professores Doutores José de Arimateia Fernandes, Marcelo Carvalho, Fernando Aires, Jaime Alves, Daniel Cordeiro, Deise Mara, Luiz Antônio e Rodrigo Cohen.

De maneira muito especial, agradeço ao Prof. Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo, pela orientação, competência, paciência, profissionalismo e amizade durante toda a orientação. Muito obrigado por confiar e me incentivar nos momentos de dúvidas e incertezas.

Estendo os agradecimentos ao coordenador do curso Dr. Romildo Nascimento e à secretária do PROFMAT, Isabela Souza, por ser solícita nos momento que precisamos.

Aos membros da banca examinadora, Dr. Romildo Nascimento de Lima, Dra. Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo e Dr. Roger Ruben Huaman Huanca que gentilmente aceitaram participar e colaborar com esse trabalho de pesquisa.

Aos meus professores do Ensino Fundamental e Médio que plantaram a sementinha, sempre me incentivando a estudar. Destaco meus professores Leonaldo Manoel e Tiago Farias.

A equipe gestora e professores da EREM André Cordeiro pela parceria e apoio durante essa jornada, em particular, agradeço a dona Mercêis Vieira, em nome da equipe gestora, e ao meu amigo e compadre José Henrique de Almeida Costa, em nome de todos os professores.

A equipe gestora e professores da Escola José Inácio Cavalcanti da Silva por todo apoio nessa jornada, de modo especial a Valmir Nascimento, Virgínia Maria, Vilma Maria e Prycilla Medeiros.

Agradeço também aos meus alunos que vivenciaram toda essa jornada comigo, acreditando sempre nas minhas propostas e ideias para potencializar as aulas de Matemática.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pela oferta deste Curso em Rede Nacional, permitindo que professores da rede pública potencializem sua formação inicial.

Resumo

Neste trabalho, pretendeu-se apresentar um estudo referente às contribuições das sequências didáticas para a resolução de problemas do 2º grau. A motivação do estudo partiu da inquietação, enquanto professor da rede pública, em que, percebeu-se notoriamente o processo de memorização dos alunos para resolverem problemas de diferentes naturezas. Deste modo, propomos como questão de investigação: Como as sequências didáticas, envolvendo a metodologia de Resolução de Problemas, podem contribuir para a aprendizagem de problemas do 2º grau? Delimitou-se como objetivo principal, desenvolver uma proposta de sequências didáticas buscando fortalecer as estratégias para resolução de situações-problema em turmas do 1º ano do Ensino Médio. Buscou-se, concomitantemente, realizar um levantamento histórico e bibliográfico, propondo sequências didáticas que evidenciassem as diversas abordagens de resolução de situações-problema do 2º grau e as desenvolvendo; como também, identificar e discutir acerca de suas contribuições. Espera-se que a vivência das sequências didáticas tenda a favorecer uma aprendizagem significativa, promovendo a compreensão dos conteúdos abordados. Assim, podendo contribuir com o ensino de matemática, bem como, com outras futuras investigações.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Problemas do 2º grau. Sequências Didáticas.

Abstract

In this work will go through a study on the contributions of didactic sequences for solving 2^{nd} -degree problems. The research motivation came from the concern, as a public school teacher, in which, it was noticed the students' memorization process to solve problems of different kinds. Therefore, we propose a research question: How can didactic sequences, involving the Problem-Solving methodology, contribute to the learning of 2^{nd} -grade problems? The main objective was to develop a proposal of didactic sequences seeking to strengthen the strategies for solving problem situations in 1st-year high school classes. At the same time, a historical and bibliographical survey was carried out, proposing didactic sequences that would show the distinctive approaches to solving 2^{nd} -degree problem-solving situations and developing them, as well as identifying and discussing their contributions. It is expected that the experience of the didactic sequences tends to favor significant learning, promoting the understanding of the content covered. As has been noted, it can contribute to the teaching of mathematics, a long with to other future investigations.

Keywords: Problem Solving. problems of the 2^{nd} -degree. didactic sequences.

Lista de Quadros

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Ensino-Aprendizagem-Avaliação | 31 |
| 2.2 | Evolução do roteiro em sala de aula de Onuchic e Allevato | 33 |
| 3.1 | Quadro resumo da notação árabe | 46 |
| 3.2 | Quadro comparativo da solução de Al-Khwarizmi com o procedimento que utilizamos atualmente | 47 |
| 4.1 | Habilidades que remetem aos problemas do 2º grau no Ensino Médio | 54 |
| 6.1 | Quadro de Habilidades BNCC - Problema Gerador I | 90 |

Lista de ilustrações

| | |
|---|-----|
| Figura 1 – Etapas da resolução de problemas proposta por Polya | 21 |
| Figura 2 – Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação | 31 |
| Figura 3 – Etapas da Metodologia proposta por Allevato e Onuchic | 34 |
| Figura 4 – Equação na Grécia apresentada em linguagem moderna | 41 |
| Figura 5 – Equação que remete a proposição 28 - Livro VI de Euclides | 42 |
| Figura 6 – Habilidade EM13MAT405 - Detalhamento do código | 53 |
| Figura 7 – Competências e habilidades do ENEM referentes a resolução de pro- blemas | 55 |
| Figura 8 – Tabela e gráfico associados ao Exemplo 5 | 65 |
| Figura 9 – Tabela e gráfico associados ao Exemplo 6 | 65 |
| Figura 10 – Tabela e gráfico associados ao Exemplo 7 | 66 |
| Figura 11 – Gráfico associado ao Exemplo 8 | 67 |
| Figura 12 – Resolução do Problema Gerador I - Grupo B5 - Sequência Didática I | 92 |
| Figura 13 – Resolução do Problema Gerador I - Grupo C1 - Sequência Didática I | 92 |
| Figura 14 – Resolução do Problema Gerador I - Grupo A2 - Sequência Didática I | 93 |
| Figura 15 – Aplicação dos Novos Problemas - Sequência didática I | 94 |
| Figura 16 – Resolução do Problema 02 - Grupo A1 - Sequência Didática I | 96 |
| Figura 17 – Resolução do Problema 02 - Grupo B8 - Sequência Didática I | 97 |
| Figura 18 – Resolução do Problema 02 - Grupo B9 - Sequência Didática I | 98 |
| Figura 19 – Resolução do Problema 04 - Grupo A1 - Sequência Didática I | 100 |
| Figura 20 – Resolução do Problema 04 - Grupo B8 - Sequência Didática I | 101 |
| Figura 21 – Resolução do Problema 04 - Grupo B9 - Sequência Didática I | 102 |
| Figura 22 – Resolução do Problema 05 - Grupo A1 - Sequência Didática I | 104 |
| Figura 23 – Resolução do Problema 05 - Grupo B8 - Sequência Didática I | 105 |
| Figura 24 – Resolução do Problema 05 - Grupo B9 - Sequência Didática I | 106 |
| Figura 25 – Gráfico referente a Tabela 1 - Resultados da aplicação dos novos problemas | 108 |
| Figura 26 – Gráfico referente a Tabela 2 - Resultados da aplicação dos novos problemas | 109 |
| Figura 27 – Gráfico referente a Tabela 3 - Resultados da aplicação dos novos problemas | 110 |
| Figura 28 – Resolução do Problema Gerador II - Grupo C5 - Sequência Didática II | 114 |
| Figura 29 – Resolução do Problema Gerador II - Grupo B2 - Sequência Didática II | 115 |
| Figura 30 – Resolução do Problema Gerador II - Grupo B7 - Sequência Didática II | 116 |
| Figura 31 – Resolução do Problema Gerador II - Grupo A4 - Sequência Didática II | 117 |

Lista de tabelas

| | |
|--|-----|
| Tabela 1 – Quantidade de acertos por problema sequência didática I - Turma A | 107 |
| Tabela 2 – Quantidade de acertos por problema sequência didática I - Turma B | 108 |
| Tabela 3 – Quantidade de acertos por problema sequência didática I - Turma C | 109 |

Sumário

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 1.1 | Objetivos | 16 |
| 1.1.1 | Objetivo Geral | 16 |
| 1.1.2 | Objetivos Específicos | 16 |
| 1.2 | Organização do trabalho | 17 |
| 2 | METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS | 19 |
| 2.1 | Resolução de Problemas: comentários e alguns recortes históricos | 19 |
| 2.2 | Concepções sobre Resolução de Problema | 25 |
| 2.2.1 | Ensinar sobre Resolução de Problemas | 25 |
| 2.2.2 | Ensinar para a Resolução de Problemas | 26 |
| 2.2.3 | Ensinar através da Resolução de Problemas | 26 |
| 2.3 | A relevância da Resolução de Problemas no Ensino da Matemática | 27 |
| 2.4 | A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas | 29 |
| 3 | PROBLEMAS DO 2º GRAU: ALGUNS RECORTES NO CONTEXTO DAS DIVERSAS SOCIEDADES | 36 |
| 3.1 | Babilônia | 36 |
| 3.2 | Egito | 38 |
| 3.3 | Grécia | 40 |
| 3.4 | Índia e a fórmula que não é de Bhaskara | 42 |
| 3.5 | Os árabes e a casa da sabedoria | 45 |
| 3.6 | Europa ocidental e as contribuições de Viète | 48 |
| 3.7 | Problemas do 2º grau no cotidiano | 50 |
| 4 | PROBLEMAS DO 2º GRAU: DOS DOCUMENTOS NORTE-AMERICANOS E FORMALIZAÇÃO DOS CONCEITOS | 52 |
| 4.1 | Apontamentos à luz dos documentos norte-americanos | 52 |
| 4.2 | Equação do 2º grau e função polinomial do 2º grau | 56 |
| 4.3 | Equação do 2º grau | 56 |
| 4.3.1 | Completando quadrados: representação algébrica | 57 |
| 4.3.2 | Generalização da fórmula de equação do 2º grau: método algébrico | 59 |
| 4.3.3 | Generalização da fórmula de equação do 2º grau: método geométrico | 60 |
| 4.3.4 | Soma e produto das raízes | 63 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 4.3.5 | Forma fatorada | 63 |
| 4.4 | Função polinomial do 2º grau | 64 |
| 4.4.1 | Gráfico | 64 |
| 4.4.2 | Coordenadas do vértice da parábola | 68 |
| 4.4.3 | A função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e a influência dos seus parâmetros no gráfico | 71 |
| 4.4.4 | Construção da parábola sem o auxílio da tabela | 73 |
| 5 | SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS | 75 |
| 5.1 | Sequências didáticas: o que diz a literatura | 75 |
| 5.2 | Sequência didática I: estudo de equação do 2º grau e suas técnicas de resolução | 76 |
| 5.3 | Sequência didática II: estudo da função polinomial do 2º grau ou função quadrática | 82 |
| 6 | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 89 |
| 6.1 | Apresentação e aplicação do problema gerador I | 89 |
| 6.1.1 | Problemas propostos na sequência didática I e alguns recortes | 94 |
| 6.2 | Apresentação e aplicação do problema gerador II | 111 |
| 6.2.1 | Resolução do problema gerador II pelos grupos | 113 |
| 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 119 |
| | REFERÊNCIAS | 122 |
| | APÊNDICES | 126 |
| | APÊNDICE A – PROBLEMA GERADOR I | 127 |
| | APÊNDICE B – PROBLEMAS PROPOSTOS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA I | 129 |
| | APÊNDICE C – PROBLEMA GERADOR II | 135 |
| | APÊNDICE D – PROBLEMAS PROPOSTOS - SEQUÊNCIA DIDÁTICA II | 137 |

1 INTRODUÇÃO

Na antiguidade, o homem em suas descobertas primitivas, de alguma maneira já usava a Matemática para auxiliar em suas atividades corriqueiras, mesmo antes dela ser uma ciência como conhecida atualmente. Com o passar do tempo, a Matemática precisou - e precisa - passar por refinamentos para que as pessoas possam compreendê-la adequadamente.

O surgimento dos problemas do 2º grau, problemas relacionados à equações do 2º grau ou função polinomial do 2º grau, trouxe consigo a necessidade de “ferramentas” que auxiliassem na sua resolução, tal ânsia contribuiu para o desenvolvimento da Álgebra, área muito importante da Matemática. Desde os primórdios da humanidade o ser humano sentiu a necessidade de materializar os seus pensamentos, de maneira especial o pensamento matemático. Consta em escritos da antiguidade que tais descobertas, mesmo que primitivas, eram representadas por símbolos, que a sua época tinha um significado. Contudo, quando se tornaram insuficientes para tal representação, despertou a curiosidade da invenção dos sistemas de numeração e, subsequentemente, as escritas matemáticas mais sofisticadas.

A noção de equação surgiu com a ideia básica de igualdade entre coisas e objetos de diferentes natureza. Vale salientar que a noção de resolução de equação, para época do seu surgimento, nada mais era do que descobrir um valor que torne duas ou mais quantidades de caráter diferentes, iguais (RIBEIRO; CURY, 2021). Particularmente, o estudo do que conhecemos hoje como equações do 2º grau e seus desdobramentos.

Quando nos remetemos a sala de aula e aos problemas do 2º grau, alguns comentários e/ou questionamentos dos alunos, ao longo dos anos de minha prática docente, tornaram-se recorrentes: “*professor, nós vamos estudar a fórmula de Bhaskara?*” “*e essas letras na Matemática só atrapalham, era bom quando só tinha números*”, “*Matemática não tem nada haver com o cotidiano*”. Por outro lado, o distanciamento dos alunos da disciplina me causava e causa um certo incômodo, assim me perguntei: *Como posso aproximar meus alunos da Matemática dando significado prático ou não a mesma? Como contribuir significativamente com a formação deles? Como podemos torná-los protagonistas da sua trajetória em meio a essas salas de aula com aproximadamente 50 alunos? Como fazê-los compreender seus achados, dando funcionalidades aos seus cálculos?* O termo **problemas do 2º grau** foi inspirado em uma aula¹ do PAPMEM² 2013 do magnífico professor Ledo Vaccaro.

¹ Disponível em: <<https://youtu.be/rPVIRGCDPQs>>

² Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio.

A proposição desse trabalho se justifica pela emergente necessidade de responder e minimizar esses questionamentos feitos anteriormente. Assim, a proposição de sequências didáticas como um guia para trabalhar Matemática *através* da Resolução de Problemas com alunos do Ensino Médio, surge como uma potencialidade para responder tais problematizações, a partir do momento que os questionamentos feitos forem sendo respondidos, pôde-se (e pode-se) obter mudanças significativas, tanto na compreensão, como no significado da matemática.

Das abordagens que se busca para estruturar o nosso trabalho, a maior parte delas são constituídas de temáticas trabalhadas predominantemente pela Educação Matemática. É nesse ambiente que a literatura trouxe algumas reflexões, sobre o ensino de matemática *através* da Resolução de Problemas. Onuchic (1999) já comentava que a resolução de problemas era, e ainda é, uma força que vai além dos conceitos e particularidades, na qual o problema não é um caso isolado no contexto da Matemática.

Nessa perspectiva, o ensino de Matemática *através* da Resolução de Problemas e suas potencialidades ganham novos delineamentos, nos quais alguns autores e seus escritos trazem outros elementos para integrar tal metodologia. Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2011) apresentam que o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problemas, deve conceber como o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através dessa metodologia, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e significados para os conteúdos.

Huanca (2014) discorre que o papel da avaliação muda, passando ela a ser dimensionada para além do conceito tradicional de avaliar com as chamadas “provas”. Desse modo, o processo avaliativo integrado ao Ensino-Aprendizagem passa a levar em conta o crescimento do aluno, sendo ela feita continuamente e potencializada na resolução dos novos problemas.

Em pesquisa recente, Pironel e Vallilo (2017) refletem acerca dos processos de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática e afirmam que quando ocorrerem simultaneamente podem potencializar os conhecimentos, promover simultaneamente uma avaliação do professor e uma auto avaliação do aluno, além disso, quando integramos a avaliação ao processo de Ensino-Aprendizagem, ela passa a ser também um instrumento de ensino, promovendo a aprendizagem durante a sua realização. Nesse sentido, a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problemas corrobora com essa visão integradora por possibilitar a equidade a todos os alunos durante o seu processo.

Para que tais processos fossem possíveis, foi-se necessário ancorarmos em instrumentos normativos, como a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), para que as práticas escolares pudessem ter respaldo, tanto na literatura, como nesse

documento, sendo ele constituído por competências e habilidades. De modo particular, as de matemática fornecem um suporte para estruturação de parte do nosso trabalho. Assim, preceituam que

[...] para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado (BRASIL, 2018, p. 529).

Nos capítulos posteriores, enaltecemos e argumentamos acerca da importância de todas essas competências para que o ensino da Matemática *através* da Resolução de Problemas seja consolidado.

Em uma breve busca, encontramos algumas pesquisas que remetem ao estudo de equação do 2º grau e função polinomial do 2º grau, as quais tecemos brevemente alguns comentários, a seguir.

Coutinho (2016), apresentou em sua pesquisa uma proposta para o estudo das equações do 2º grau, sendo ela guiada em algumas técnicas de resolução de problemas. Podemos identificar, ao analisarmos o trabalho da pesquisadora, que foi utilizada uma abordagem de *ensinar sobre resolução de problemas*.

Por sua vez, Guedes (2019) apresentou em sua pesquisa as contribuições de Bhaskara em relação a resolução da equação quadrática. O autor fez um apanhado histórico para que o leitor compreendesse a evolução do que hoje é conhecido como *equação do 2º grau* ou *equação quadrática*. Comentou também, que alguns textos da história da Matemática apontam para a não veracidade da criação por Bhaskara da fórmula resolvente da equação quadrática, em seguida, discorreu sobre as contribuições desse matemático indiano acerca do método de resolução que leva à fórmula. De um modo geral, focou-se, quase que em sua totalidade, no estudo das equações *"ao modo Bhaskara"*.

Em seu trabalho, Silva (2022) investigou a noção de como a equação do 2º grau é concebida na Educação Básica a partir de suas diferentes concepções e formas. O autor fez um breve levantamento histórico acerca do tema e, em seguida, analisou como tal conceito é abordado em livros didáticos, estabelecendo um diálogo com algumas perspectivas da Educação Matemática, buscando apreciar os saberes necessários a prática pedagógica em seu ensino. Por fim, fez uma análise minuciosa sobre como as diferentes concepções de equações são abordadas no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.

Silva (2019), em seu estudo investigativo sobre função polinomial do 2º grau em uma escola estadual do Rio de Janeiro, abordou tal conteúdo com a finalidade de identificar

a função por meio de uma expressão algébrica, por intermédio do seu gráfico, identificando seus principais elementos e resolvendo problemas contextualizados. Quanto aos resultados obtidos, o autor comentou que eles foram satisfatórios para alguns tópicos, porém no tocante a sua construção, identificação dos seus elementos e resolução de problemas contextualizados, o grupo não atingiu os objetivos preteridos.

Na proposição de nossa pesquisa, buscamos garimpar algumas ideias que julgamos pertinentes em alguns desses trabalhos, porém sentimos a necessidade de apresentar uma proposta, na qual, a abordagem dos conteúdos começasse onde os alunos estavam, e não onde o professor e o currículo indicavam. Além disso, trazemos para dentro da sala de aula os processos de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, como dito anteriormente. Mas, não entendemos que apenas propor algo seria o suficiente, então foi necessário passarmos pelo crivo da aplicação e discussão dos resultados para que a proposta também fosse avaliada e ajustada, quando necessário. Assim, buscou-se ampliar a visão sobre o estudo das equações do 2º grau, desde a sua evolução histórica até o seu formato contemporâneo, como também, entender as diversas propriedades da função polinomial do 2º grau, buscando sempre que possível estabelecer conexões com a realidade, na qual os alunos estão inseridos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma proposta de sequências didáticas buscando fortalecer as estratégias para resolução de situações-problema do 2º grau para alunos do 1º ano do Ensino Médio.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar um levantamento histórico e bibliográfico sobre a Metodologia de Resolução de Problemas e os problemas do 2º grau;
- Propor sequências didáticas que evidenciem as diversas abordagens de resolução de situações-problema do 2º grau, baseado na Metodologia de Resolução de Problemas;
- Aplicar as sequências didáticas desenvolvidas em turmas do 1º ano do Ensino Médio, identificando as contribuições da metodologia sobre o estudo dos problemas do 2º grau;

- Analisar e discutir alguns resultados obtidos nas aplicações das sequências didáticas.

Quanto a metodologia utilizada do ponto de vista dos procedimentos técnicos, nossa pesquisa se caracteriza como pesquisa participante. Nesse sentido, Prodanov e Freitas (2013) comenta que esse tipo de pesquisa se caracteriza pela interação entre pesquisadores e membros das situações investigadas, visto que o pesquisador utilizou a sua própria sala de aula, no caso, três turmas de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, localizada no Município de Brejo da Madre de Deus - PE, Agreste Pernambucano.

Do ponto de vista da forma de abordagem dos problemas, usou-se a modalidade de pesquisa qualitativa, pois pensando no fato de estarmos diretamente conectados ao nosso objeto de estudo. Prodanov e Freitas (2013, p. 70) nos situa bem sobre esse tipo de pesquisa informando que “na abordagem qualitativa, a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados. O pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão, necessitando de um trabalho mais intensivo de campo”.

Nessa mesma linha de raciocínio, entendemos que no contexto da pesquisa qualitativa observa-se uma busca aprofundada do pesquisador, pois nessa perspectiva há uma preocupação em entender o cenário que se pretende realizar o determinado estudo. Como pontuam Bogdan e Biklen (1994, p. 48) “os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente de ocorrência”.

A pesquisa foi guiada pelos pressupostos metodológicos para resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021), que subsidiaram a construção das sequências didáticas aplicadas.

Com relação a análise dos dados coletados realizou-se a uma amostragem dos escritos produzidos pelos grupos. Vale salientar que participaram da pesquisa, 29 grupos com no máximo 5 alunos cada. No trato com os dados, trazemos comentários particulares a cada grupo da amostragem, cabe pontuar que sempre se buscou apresentar resoluções diversas nesses recortes. Na plenária e na correção dos novos problemas, também foram feitos comentários ao grande grupo. Essa comunicação com esse *feedback* é muito importante na vivência dessas sequências.

1.2 Organização do trabalho

Com o propósito de atender aos objetivos postos na Seção 1.1, o presente trabalho apresenta sete capítulos, sendo eles organizados da seguinte forma: no Capítulo 1,

considerado a introdução, fazemos um breve apanhado histórico a respeito do tema, percorrendo acerca da necessidade de se propor sequências didáticas alinhadas com a Metodologia de Resolução Problemas. Por fim, apresentamos o problema de pesquisa identificado, sua metodologia de pesquisa, seus objetivos e estrutura do trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos um arcabouço teórico que fundamenta a pesquisa, assim apresentamos um recorte histórico a respeito da Resolução de Problemas, tomando como ponto de partida o período posterior ao declínio da Matemática moderna, como também, as diferentes concepções sobre a mesma. Destacamos também a relevância da mesma para o ensino de Matemática e por fim, discorremos sobre a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problemas. Dentre os principais referenciais teóricos, destacamos Allevato e Onuchic (2021), Onuchic e Allevato (2011), Van de Walle (2009), Allevato (2005), entre outros.

No Capítulo 3, abordamos os problemas do 2º grau, trazendo alguns recortes do contexto histórico, passando pela Babilônia, Egito, Grécia, Índia e a fórmula que não é de Bháskara, os árabes e os processos de balanceamento e restauração para equações, chegando até a Europa ocidental e as contribuições de Viète. Tais comentários serão adequados a linguagem moderna para o entendimento do leitor. Por fim, comentamos sobre os problemas do 2º grau no cotidiano.

No Capítulo 4, discorremos sobre as competências e habilidades segundo a BNCC (BRASIL, 2018), Organizador Curricular de Pernambuco - (PERNAMBUCO, 2021) e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP, 2009) relacionadas às equações do 2º grau e função polinomial do 2º grau. Apresentamos também, a formalização do conceito de equação do 2º grau e as suas respectivas formas, tecendo alguns comentários e fazendo suas demonstrações, do mesmo modo, trataremos a respeito da função polinomial do 2º grau e alguns resultados associados a ela.

No Capítulo 5, apresentamos as propostas de sequências didáticas para o estudo dos problemas do 2º grau na perspectiva do ensino de Matemática *através* da Resolução de Problemas.

No Capítulo 6, trazemos os resultados e discussões acerca dos problemas geradores e dos novos problemas aplicados a sequência didática I.

No Capítulo 7 apontamos algumas considerações sobre a pesquisa, apresentando as diversas contribuições da metodologia estudada, na qual destacamos as possibilidades e caminhos para pesquisas futuras, assim como, das limitações da nossa pesquisa.

2 METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, discorreremos sobre a Resolução de Problemas e sua inegável contribuição para o processo educacional, fazendo alguns recortes históricos para compreendermos seus processos evolutivos. Dissertamos acerca das diferentes concepções que as literaturas adotam com relação a Resolução de Problemas. Em seguida, comentamos da sua importância no contexto escolar, na qual ela passa a ser adotada como metodologia de ensino. Tal relevância é evidenciada nas diversas pesquisas, principalmente na área de Educação Matemática, com enfoque na Educação Básica. É importante deixar claro que as literaturas recomendam um pouco de cuidado com as expressões *Resolução de Problemas* e *resolução de problemas*. Nesse sentido, [Huanca e Melo \(2021\)](#) comentam que o termo “resolução de problemas” quando associado a Matemática é usado e relacionado ao ato de resolver questões, “**fazer contas**”. Por vezes esse termo fica interinamente ligado ao ato de solucionar uma determinada situação ou problemática um pouco “**difícil**”. Já a expressão *Resolução de Problemas* (RP), com letras maiúsculas, refere-se diretamente ao movimento educacional Resolução de Problemas, concebido como metodologia de ensino, no qual teve seu pontapé inicial em meados do século XX, tendo evoluído e contribuído efetivamente para o ensino de Matemática.

2.1 Resolução de Problemas: comentários e alguns recortes históricos

A concepção da Resolução de Problemas como metodologia de ensino perpassou por diversos pesquisadores, que ao seu tempo, contribuíram para o aprimoramento e disseminação de tal metodologia. Para escopo dessa pesquisa, nos detemos aos recortes históricos da resolução de problemas como marco temporal sobre essa concepção, tomamos como ponto de partida o período após o declínio da Matemática Moderna (1960 – 1980). Nesse sentido, Soares, Dassisti e Rocha (2004), comentam que

A implantação da Matemática Moderna como parte do currículo escolar não se mostrou eficaz no combate aos problemas que o ensino já apresentava. Sua adoção foi feita sem o planejamento necessário e sem a devida preparação dos professores. Dessa forma, as opiniões gerais tendem a considerar que o movimento fracassou, pois não atingiu as metas a que se propôs, ou seja, a de unificar o ensino da matemática, democratizar o ensino e torná-lo mais acessível ([SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004](#), p. 12).

A Matemática Moderna foi um movimento internacional que buscou novas referências para o ensino de Matemática, tendo surgido na década de 1960 e declinado no final dos anos 1970. Tal movimento, norteava-se na formalidade e no rigor dos fundamentos, onde a teoria dos conjuntos e a álgebra eram o centro para o ensino e a aprendizagem de Matemática. A fim de aprimorar e contribuir com o ensino de Matemática, o livro intitulado *A Arte de Resolver Problemas*, de Polya (1995), que teve sua primeira versão publicada em (1945), é uma obra que marca uma nova concepção de ensinar Matemática, como também, apresenta a Resolução de Problemas como metodologia de ensino. O autor defende em sua obra que resolver problemas poderia ser potencializado por imitação e prática de certos procedimentos e mecanismos. Desta maneira, Polya (1995) comenta que resolver problemas é uma habilitação que desenvolvemos, ou seja, é algo que precisamos treinar, praticar e imitar para potencializar. Uma analogia a essa concepção pode ser remetida a prática de algum esporte ou atividade de repetição, em que são aprendidos e aperfeiçoados através de reiteradas atividades contínuas. Assim, ao tentarmos resolver problemas, teríamos que observar e imitar o que fazem outras pessoas ao resolverem os seus e, por fim, aprenderíamos a resolvê-los, resolvendo-os.

Nessa obra, o autor ainda defende que o professor que pretende desenvolver em seus alunos a habilidade de resolver problemas deve proporcionar muitas oportunidades de repetição e imitação, para assim, torná-la algo natural.

Cabe comentar que George Pólya, matemático húngaro (1887 – 1985), é um pesquisador bastante estimado na área de matemática, dedicou-se fortemente a caracterizar a forma como a maioria dos alunos resolvia problemas de matemática, trazendo muitas contribuições para o tema, com a produção bastante escritos a respeito. A partir dele começamos a ter as primeiras ideias e direcionamentos a respeito da resolução de problemas em sala de aula.

Vale salientar que seus diversos trabalhos se expandem para diversas áreas da Matemática, como probabilidade, séries, análise, teoria dos números, geometria, combinatória, dentre outros. Porém, seu maior ímpeto foi dedicar-se a questões pedagógicas ao longo de toda carreira. Como veremos posteriormente, Pólya descreveu como deveria se resolver problemas de diferentes tipos, até mesmo os que não são de matemática. Dentre os diversos trabalhos publicados pelo pesquisador, merece destaque o livro “*How to Solve It*”, que foi traduzido para o português com o título “*A Arte de Resolver Problemas*”, que inclui algumas sugestões para professores de Matemática, com estratégias heurísticas (descobertas dos fatos).

Na obra elencada acima, o autor sugere 4 etapas para se desenvolver a habilidade em resolver problemas.

As etapas preconizadas por Polya (1995) para resolver problemas devem ser consideradas, visto que, tem sua relevância, como podemos observar na Figura 1:

Figura 1 – Etapas da resolução de problemas proposta por Polya



Fonte: Elaborado pelo autor (2022) com base em Polya (1995, p. 3 - 4).

A seguir, comentamos brevemente sobre cada uma das etapas defendidas a época por Polya (1995), que são elas:

- **Compreensão do Problema:** o autor pontua como algo muito importante essa compreensão, visto que, seria uma tolice tentar responder um problema que ao menos não se entende aquilo que se pede. Fica evidente que, nessa primeira etapa o autor se preocupava com o entendimento do problema primeiramente, para assim despertar o desejo do aluno em resolvê-lo. Nesse sentido, ele elenca

que para compreender melhor o problema podemos realizar algumas perguntas, tais como: Qual é a incógnita¹? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Também se devem considerar, sob vários pontos de vista, as partes que julgarem importantes no problema. Quando necessário representá-lo por meio de uma figura ou algo semelhante e, se possível, satisfazer a condicionante.

- **Estabelecimento de um plano:** segundo o autor, deve-se iniciar com um plano atrelado a algumas perguntas, como: “Conhece um problema correlato? Caso sim, considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante que possa ser utilizada”. Caso contrário, faz-se necessário tentar reformular o enunciado. Essa reformulação pode nos levar a problemas auxiliares que contemplem parcialmente a resolução do problema preterido. Para retomar o problema original é importante fazer os seguintes questionamentos: Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?
- **Execução do plano:** essa fase é um guia ou roteiro geral da resolução. Aqui, é necessário que o aluno verifique cada um dos passos, de modo que nenhum erro ou dúvida passem despercebidos. Na execução do plano é primordial ter paciência e certeza que cada passo executado está correto.
- **Retrospecto:** esta última etapa é de suma importância, pois é ela que vai corroborar e verificar se o problema foi resolvido de maneira correta, descartando assim, algum possível erro que pode ter ocorrido pelo caminho. Para tal, alguns questionamentos se fazem necessários: É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? Também será necessário verificar se poderemos utilizar o resultado obtido ou o método utilizado em algum outro problema ou, até mesmo, encontrarmos a solução utilizando outra estratégia (POLYA, 1995, p. 3 - 10).

Certamente, Polya (1995) contribuiu significativamente para os estudos referentes a Resolução de Problemas, apesar de suas abordagens terem, por vezes, um caráter teórico e mecanizado. Porém, suas concepções sobre resolver problemas foram importantíssimas, tendo diversos direcionamentos e aperfeiçoamentos por outros autores. Vale salientar que Polya (1995) teorizava *sobre* Resolução de Problemas, concepção que será comentada mais adiante.

Para melhorar a perspectiva defendida por Polya (1995), Onuchic (1999) comentava que o trabalho em sala de aula, *através* da metodologia de Resolução de Problemas, começou a ganhar “corpo”, a partir da preocupação dos professores e pesquisadores

¹ Nesse contexto o autor refere-se ao que deve ser descoberto para que o problema seja resolvido. Alguns problemas, podem estar presentes mais de uma incógnita, quanto a solução é dividida em mais de uma etapa.

em atribuir significado a aprendizagem matemática com outra abordagem. Para isso, a Resolução de Problemas deveria compor as seguintes etapas: formar pequenos grupos e entregar uma atividade; o papel do professor como intermediador; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar e explorar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização com terminologias novas (ONUCHIC, 1999, p. 216 - 217).

A fim de aprimorar as etapas sugeridas em 1999, Onuchic e Allevato (2011, 83 - 84, grifos nossos), tem-se como etapas para resolução de problemas: *preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso e formalização do conteúdo*. Faz-se necessário algumas observações da nova etapa sugerida pelas autoras “a preparação do problema”, como as autoras assim a nomeiam. Ao nosso entendimento é uma das etapas mais importante do percurso metodológico, pois, demonstra-se uma preocupação com todo o processo envolvido, mesmo antes da aula propriamente dita, como pesquisas posteriores vão relatar.

Na busca em atender as demandas dos estudos referentes a metodologia de Resolução de Problemas, Allevato e Onuchic (2014, 2021) sugerem 10 etapas para o percurso metodológico. A novidade para essa nova versão é a última etapa, na qual a proposição de novos problemas surge como uma corroboração das etapas anteriores e como uma retomada e aprofundamento do conteúdo preterido. As etapas apresentadas e comentadas pelas autoras, são:

1. **Proposição do problema gerador** - o professor seleciona ou elabora um problema e propõe aos alunos ou aceita um problema proposto pelos próprios alunos.
2. **Leitura individual; aluno recorre aos conhecimentos prévios** - cada aluno faz sua leitura do problema. A ação, nessa etapa, é do aluno; ao ler individualmente, tem possibilidade de refletir, de se colocar em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto. Então, os alunos se reúnem em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema.
3. **Em pequenos grupos, alunos discutem e aprimoram compreensões** – os alunos reúnem-se em pequenos grupos e fazem nova leitura e discussão do problema. O professor ajuda os grupos na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários², mas ainda as ações são realizadas, essencialmente, pelos alunos.

² Dúvidas referentes à notação, à passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, a conceitos relacionados e a técnicas operatórias

4. **Alunos em grupos, resolvem o problema** - os alunos, em seus grupos, tentam resolver o problema gerador, que os conduzirá à construção de conhecimento sobre o conteúdo planejado pelo professor para aquela aula. A ação dos alunos volta-se à expressão escrita pois, para resolver o problema, precisarão da linguagem matemática ou de outros recursos de que dispõem: linguagem corrente, desenhos, gráficos, tabelas ou esquemas.
5. **Professor incentiva e observa** – o professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas e incentivando a troca de ideias. Auxilia nas dificuldades sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos.
6. **Alunos apresentam resoluções** - representantes dos grupos são solicitados a fazerem o registro de suas resoluções na lousa (certas, erradas ou feitas por diferentes processos).
7. **Em plenária, professor e alunos discutem ideias, concepções** - em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo. O professor é um interlocutor dos diferentes pontos de vista, tendo ele o papel de incentivar a participação dos envolvidos.
8. **Busca de consenso sobre as resoluções** - após a plenária, são esclarecidos todos os questionamentos acerca do problema e o professor busca com a classe chegar a um consenso a respeito do resultado mais próximo do ideal.
9. **Professor formaliza o conteúdo matemático** - o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos *através* da resolução do problema, destacando diferentes técnicas operatórias e construindo demonstrações, (se for o caso).
10. **Proposição e resolução de novos problemas** - possibilita analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como, aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014; ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 45 - 46/48 - 50).

Allevato e Onuchic (2014, 2021) evidenciam quem em todo percurso metodológico o professor é mediador, questionador, gerador de situações. As etapas defendidas por elas nortearam nosso percurso metodológico, pois orientaram o desenvolvimento das atividades junto aos alunos, potencializando a aprendizagem dos conteúdos pretendidos (problemas do 2º grau), além de promover um ambiente de colaboração para uma aprendizagem significativa, crítica e reflexiva.

2.2 Concepções sobre Resolução de Problema

Nesta seção, fazemos alguns breves comentários sobre as concepções acerca da Resolução de Problemas, evidenciando as características de cada uma delas, como base em alguns recortes da tese de doutorado de Allevato (2005).

Ao apresentar e analisar as características de cada uma delas, separadamente, acreditamos que ficarão explicitadas, também, as diferenças entre essas concepções.

2.2.1 Ensinar sobre Resolução de Problemas

A fim de superar o período pós Matemática Moderna, pesquisadores e educadores matemáticos voltaram suas atenções para o ensino de matemática, dando ênfase a resolução de problemas. Nesse sentido, Allevato (2005) deixa claro que

As heurísticas ganharam força, constituindo-se em listas de sugestões e estratégias gerais, independentes do assunto particular. Elas auxiliavam a fazer aproximações, compreender um problema e dispor, eficientemente, os recursos para resolvê-lo. Portanto, foi sedimentada a crença de que era preciso ensinar aos estudantes a resolver problemas ou, o que é mesmo ensinar sobre resolução de problemas (ALLEVATO, 2005, p. 49).

Com forte influência **sobre** a Resolução de Problemas, Polya (1995) passou a ser reconhecido por muitos estudiosos como uma das principais referências dessa teoria, apesar de não a ter criado. Seus escritos tiveram muita influência no processo de disseminação da Resolução de Problemas nos estudos em sala de aula. O autor tinha como foco principal o professor como resolvidor de problemas para que ele pudesse, de maneira linear, tornar seus alunos “bons resolvidores de problemas”. Essa concepção de resolução de problemas também preconiza a repetição e imitação exaustiva de longas listas de exercícios, esperava-se que o aluno fizesse o mesmo na avaliação para que a aprendizagem matemática acontecesse. Allevato (2005, p. 52) alerta que “a repetição de uma estratégia ou técnica operatória, mesmo que realizada corretamente, não garante a compreensão do conceito ou conteúdo matemático envolvido”.

2.2.2 Ensinar para a Resolução de Problemas

O ensinar *para* a Resolução de Problemas, defendido nessa concepção, direciona que antes da resolução dos problemas o aluno deve estar “munido” de alguma técnica ou algoritmo para aplicá-lo a sua resolução. O professor deve se concentrar no modo como a matemática deve ser ensinada, e a mesma, torna-se uma ferramenta ou dispositivo para resolver problemas. Nesse contexto, Allevato (2005) explica que:

Nessa concepção o professor concentra-se no modo como a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas. Ele se preocupa com a habilidade dos alunos de transferirem o que aprendem num contexto para problemas em outros contextos, ou seja, ele ensinar para a resolução de problemas (ALLEVATO, 2005, p. 52 - 53).

A Resolução de Problemas com essa abordagem passa a ser compreendida como mais uma atividade de verificação ou avaliação “*sentenciadora*” ao final do conteúdo estudado.

Porém, Allevato (2005) ressalta que essa concepção do ensinar para a Resolução de Problema, pode gerar algumas limitações, como o uso utilitarista do conhecimento matemático adquirido anteriormente para solucionar problemas de ordens rotineiras ou não. Assim como, no desenvolvimento do raciocínio, da capacidade de abstrair, raciocinar, relacionar e conjecturar durante todo o percurso metodológico.

2.2.3 Ensinar através da Resolução de Problemas

Essa percepção não é entendida apenas como um simples conteúdo a ser abordado na aula de Matemática ou uma maneira de tornar a matemática um meio de resolver problemas, vai muito além dessa visão. O ensinar *através* de Resolução de Problemas passa a ser concebido como uma metodologia de ensino, na qual o conhecimento matemático é ampliado, ressignificado ou, até mesmo, afluído, através de um **problema gerador**, que mais a frente detalharemos o seu significado no percurso metodológico adotado nesse trabalho.

Para, Van de Walle (2009)

[...] ensinar com tarefas baseadas em resolução de problemas é **mais centrado no aluno do que no professor**. O ensino começa e se constrói com ideias que as crianças possuem – **seus conhecimentos prévios**. É um processo que requer confiança nas crianças - uma convicção de que todas elas podem **criar ideias significativas sobre a matemática** (VAN DE WALLE, 2009, p. 58, grifo nosso).

Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2011) corroboram e acrescentam que na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação o ensino de Matemática *através* da Resolução

de Problemas, a proposição do problema é o norte principal para que os diversos conhecimentos desponham em sala de aula, despertando nos alunos a habilidade de fazer diferentes conexões para os diferentes campos da Matemática, suscitando novos conceitos e ressignificando a aprendizagem para compreensão de novos conteúdos.

É importante comentar que diferente do ensino tradicional, a metodologia evidenciada é antagonista dos meros processos de cópias e apenas reprodução de tarefas, tendo o estudante como protagonista do processo.

Por fim, reitera-se que no ensinar *através* da Resolução de Problemas o problema é o ponto de partida e sua compreensão passa a ser seu objetivo central, e dele, decorre todo o percurso metodológico que possibilita a formação dos sujeitos numa perspectiva integral, dinâmica, contemporânea e significativa.

Para o foco dessa pesquisa e das exigências apresentadas no contexto de sala de aula, entendemos que o aluno é o centro de todo o processo pedagógico. Nesse sentido, defendemos que os processos educacionais devem ser reorientados (e estão sendo) a partir dos interesses e demandas dos alunos, corroborando assim, em um desenvolvimento integralizado deles. É imprescindível compreender que todos os alunos são capazes de aprender, ainda que cada um ao seu tempo e de formas diferentes. Portanto, enquanto educador entendo e defendo que os esforços devem ser canalizados para que o ensino, aprendizagem e avaliação ocorram simultaneamente **através** da Resolução de Problemas. Entretanto, Allevato (2005) comenta que essa metodologia de ensino não exclui as demais, visto que o aluno pode aprender **para** e **sobre**, enquanto aprendem *através* da Resolução de Problemas.

2.3 A relevância da Resolução de Problemas no Ensino da Matemática

Quando delimitamos pesquisar a Resolução de Problemas no ensino de Matemática, levamos em consideração as diversas contribuições dessa metodologia de ensino para ao transcorrer de todo o processo. Na busca de elementos que referenciassem a nossa escolha, no livro intitulado “*Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicações em sala de aula*”, Van de Walle (2009) aponta boas razões para adotarmos a Resolução de Problemas como estratégia de ensino, pois a mesma: a) concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido as mesmas; b) fornece dados contínuos para avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais e ajudar os alunos a ter bom desempenho, mantendo os pais informados; c) possibilita um ponto de partida para ampla gama de alunos; d) envolve os estudantes de modo que ocorre menos problemas de disciplina; e) desenvolve o “potencial matemático”; f)

é muito divertida (VAN DE WALLE, 2009, p. 59).

Diversos(as) outros(as) pesquisadores(as) também apontam contribuições e pertinências sobre estudar o tema, dentre eles, destacam-se Onuchic e Allevato (2011), que apresentam seis boas razões para que possamos adotar a Resolução de Problemas como prática nas aulas de Matemática, sendo elas:

Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre dar o sentido.

Resolução de Problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.

Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido, assim a confiança e autoestima dos estudantes aumentam.

Resolução de Problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.

Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.

A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Quando falamos da importância da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, não se exclui a relevância de outras metodologias para tal processo. Mas, as diversas pesquisas têm mostrado ao longo dos anos que a Resolução de Problemas, quando bem trabalhada em sala de aula, tem contribuído para o ensino colaborativo, crítico e reflexivo dos conteúdos de Matemática, acarretando assim numa aprendizagem significativa.

Quando nos remetemos aos documentos de caráter normativo, destaca-se a BNCC (BRASIL, 2018), que em uma de suas habilidades destinadas ao Ensino Fundamental Anos Finais sobre equação, elenca que “(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ ” (BRASIL, 2018, p. 313), e na abordagem com funções propõem que a ideia que o aluno deve “(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 536).

Em particular, abordamos os problemas do 2º grau, com enfoque no estudo de equação do 2º grau, como conteúdo de retomada, e função polinomial do 2º grau como conteúdo de continuidade.

2.4 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Resolver problemas é algo inerente a vida escolar do estudante, em qualquer nível de ensino. Nesse sentido, é parte primordial o papel do professor como mediador e interlocutor do conhecimento matemático, intermediado pela metodologia de Resolução de Problemas como meio de dar significado a tais situações. É essencial o docente apresentar e ressignificar os sentidos do ensino, aprendizagem e avaliação, deixando de lado a concepção que eles são disjuntos no processo educacional, e com isso, superando um pouco aquela concepção de **ensinar matemática pela matemática**. Mesmo sendo algo emergente nos documentos norteadores, e nas diversas pesquisas em ensino de matemática, ensinar *através* da Resolução de Problemas tem sido um desafio a ser superado, pois, essa percepção de ensino não está clara para alguns educadores. Desse modo, Allevato e Onuchic (2021, p. 37) alertam que é “[...] inquestionável na formação escolar em todos os níveis de ensino, a forma de incorporá-la de modo a promover uma significativa e afetiva aprendizagem ainda não está clara para os professores de Matemática”.

Não é de hoje que as evidências acumuladas, por diversos pesquisadores, vêm contribuindo para podermos superar tais desafios e obstáculos. Sobre a Resolução de Problemas, Van de Walle (2009) já comentava e recomendava fortemente que

Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa. Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais não funciona e justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Quando Van de Walle (2009) remete sobre novas compreensões, fica evidente que os significados do conhecimento matemático começam a tomar sentido e terem outras percepções para o aluno, esse processo desperta uma aprendizagem significativa.

Ainda nessa perspectiva, Huanca (2014) traz importantes reflexões, segundo ele

[...] o ensino de Matemática através da resolução de problemas é importante. Ele nos oferece uma experiência em profundidade, uma

oportunidade de conhecer e delinear as dificuldades, de conhecer as capacidades e limitações do conhecimento matemático que os estudantes possuem. O ensino através da resolução de problemas coloca ênfase nos processos de pensamento, nos processos de aprendizagem e trabalha os conteúdos matemáticos, cujo valor não se deve deixar de lado (HUANCA, 2014, p. 71).

Dessa forma, um dos segredos está na mediação do professor para desencadear o processo de construção da aprendizagem *através* da Resolução de Problemas de forma intencional, sistemática e planejada, potencializando ao máximo as capacidades do aluno. Ainda em consonância com tal metodologia, Soares e Pinto (2001), afirmam que

[...] quando se ensina através da resolução de problemas, ajuda-se os alunos a desenvolver sua capacidade de aprender a aprender, habituando-os a determinar por si próprios respostas às questões que os inquietam, sejam elas questões escolares ou da vida cotidiana, ao invés de esperar uma resposta já pronta dada pelo professor ou pelo livro-texto (SOARES; PINTO, 2001, p. 01).

Nesse sentido, a aprendizagem *através* da Resolução de Problemas oportuniza aos alunos a criação de um ambiente de reflexão e construção colaborativa do conhecimento, desenvolvendo o pensamento crítico, a autonomia e a criatividade. Assim, quando eles opinam e debatem seus pontos de vista em aula, tendem a desenvolverem competências e habilidades que vão para além da Matemática, na busca por sua identidade enquanto sujeitos históricos, pertencentes a uma dada conjuntura social e cultural.

Vale salientar que quando falamos/pensamos no ensino de Matemática em sala de aula é natural pensarmos que Ensino-Aprendizagem-Avaliação são três processos, por vezes, totalmente disjuntos.

Por esta razão, Pironel e Onuchic (2016) discorrem que

Dicotomicamente podemos perceber que: 1. Pode ocorrer ensino e aprendizagem sem que exista uma avaliação desse processo; 2. Pode haver ensino e avaliação sem que tenha havido aprendizagem; e 3. Pode haver aprendizagem e avaliação dessa aprendizagem, sem que ela tenha acontecido a partir do ensino (PIRONEL; ONUCHIC, 2016, p. 4).

Para melhor detalhamento dos três processos, Huanca (2006) apresentou um quadro onde ele procurou fazer comparações entre os mesmos, tecendo alguns comentários, como podemos observar no Quadro 2.1.

Quadro 2.1 – Ensino-Aprendizagem-Avaliação

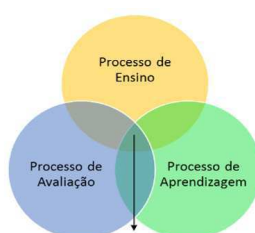
| | Ensino | Aprendizagem | Avaliação |
|--|--|--|--|
| Três processos distintos | A responsabilidade do ensino é do professor que visa a aprendizagem do aluno. | Os alunos devem aprender com compreensão. A responsabilidade da aprendizagem é dos alunos. Como? Sabendo relacionar as ideias que têm com as novas ideias que se quer construir. | A avaliação apoia a aprendizagem e informa aos professores quanto ao crescimento dos alunos e, também, informa aos professores quanto ao seu próprio trabalho. |
| Um processo duplo ligando ensino à aprendizagem | Ensino-Aprendizagem | | |
| | Este processo é um ser maior. É maior do que o ensino. É maior do que a aprendizagem. Acontece simultaneamente durante a construção do conhecimento, através da resolução de problemas, tendo os alunos como co-construtores desse conhecimento. | | |
| Um processo triplo e único de ensinar, aprender e avaliar ao mesmo tempo e no mesmo espaço | Ensino-Aprendizagem-Avaliação | | |
| | Este processo é um ser ainda maior. É maior do que o ensino, do que a aprendizagem e do que a avaliação. Tendo a avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem , que passa a ser vista como um processo bem mais amplo chamado ensino-aprendizagem-avaliação. O professor avalia o crescimento dos alunos. Os alunos fazem também sua avaliação destinada a guiar e aumentar sua aprendizagem. | | |

Fonte: (HUANCA, 2006, p. 44).

A fim de superar a necessidade de que os processos de ensino, aprendizagem e avaliação ocorram em sala de aula de maneira integralizada, a mudança de postura por parte de professores e alunos se faz emergente. Tais inquietações são fundamentais para a superação desses obstáculos, assim, conforme Pironel e Onuchic (2016, p. 4) “compreende-se a necessidade de que os processos de ensino, aprendizagem e avaliação ocorram integradamente quando pensamos na sala de aula de Matemática”.

A Figura 2 a seguir ilustra bem a visão baseada na integralização entre Ensino-Aprendizagem-Avaliação, defendida por Pironel e Onuchic (2016).

Figura 2 – Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação



Fonte: Pironel e Onuchic (2016, p. 4).

Na busca, concomitantemente, a consolidação dos processos de Ensino-Avaliação-Aprendizagem, é primordial o professor pensar e planejar todo o processo cuidadosamente, mesmo antes da sua execução, principalmente no processo avaliativo. Sendo assim, Pironel e Vallilo (2017) reiteram que

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas propõe que a avaliação deve acontecer durante todo o desenvolvimento da atividade proposta pelo professor, por outro lado, o processo de avaliação deve ser iniciado antes mesmo do início da aula, quando o professor começa a elaborar o problema gerador ou decide adotar um problema existente (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 281).

Buscando contribuir com essa perspectiva, Onuchic e Allevato (2011) afirmam que

Fundamentar a Resolução de Problemas nessas concepções, e implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Em pesquisa recente, Huanca e Silva (2022) comentam que a aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas tem sido bastante estudada e explorada. Nesse sentido, preceituam que

Muitas ideias associadas a essa abordagem, mudança nos papéis do professor, como promoção e seleção de problemas para o ensino, aprendizagem colaborativa, e problematização do currículo, têm sido extensivamente estudadas, resultado em respostas baseadas em investigações para várias questões frequentemente levantadas sobre Resolução de Problemas (HUANCA; SILVA, 2022, p. 4).

Aproximar a Matemática do cotidiano *através* da metodologia de Resolução de Problemas é colocar o aluno como responsável por uma parcela significativa da sua aprendizagem. Ou seja, ser protagonista do seu próprio caminho, possibilitando aos mesmos encarar desafios, conjecturar caminhos de resolução, criar e validar hipóteses, buscar estratégias e materializar o conhecimento, tornando-a mais significativa e prazerosa.

Buscando aprimorar os percursos metodológicos propostos em Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2011), Allevato e Onuchic (2014, 2021) apresentam um novo percurso metodológico, bem mais robusto e guiado em 10 etapas, como mostra o Quadro 2.2 comparativo a seguir.

Quadro 2.2 – Evolução do roteiro em sala de aula de Onuchic e Allevato

| Onuchic (1999) | Onuchic e Allevato (2011) | Allevato e Onuchic (2014 e 2021) |
|---|----------------------------------|--|
| Formar pequenos grupos e entregar uma atividade | Preparação do problema | Proposição do problema gerador |
| | Leitura individual | Leitura individual: aluno recorre aos conhecimentos prévios |
| | Leitura em conjunto | Em pequenos grupos, alunos discutem e aprimoram compreensões |
| Professor como intermediador | Resolução do problema | Alunos em grupos, resolvem o problema |
| | Observar e incentivar | Professor incentiva e observa |
| Resultados na lousa | Registros das soluções na lousa | Alunos apresentam resoluções |
| Realizar plenária | Plenária | Em plenária, professor e alunos discutem ideias e concepções |
| Buscar um consenso | Busca de consenso | Busca de consenso sobre as resoluções |
| Fazer a formalização | Formalização do conteúdo | Formalização do conteúdo |
| | | Proposição e resolução de novos problemas |

Fonte: Adaptado de Huanca e Silva (2022, p. 4).

O ponto de partida para a construção da nossa proposta, baseada na Resolução de Problemas do 2º grau, norteou-se a partir de situações trazidas pelos alunos ou levadas pelo professor, o que chamamos de situações motivadoras, ponto de partida ou problemas geradores. Cabe evidenciar que

Esse problema inicial é chamado gerador, pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 49).

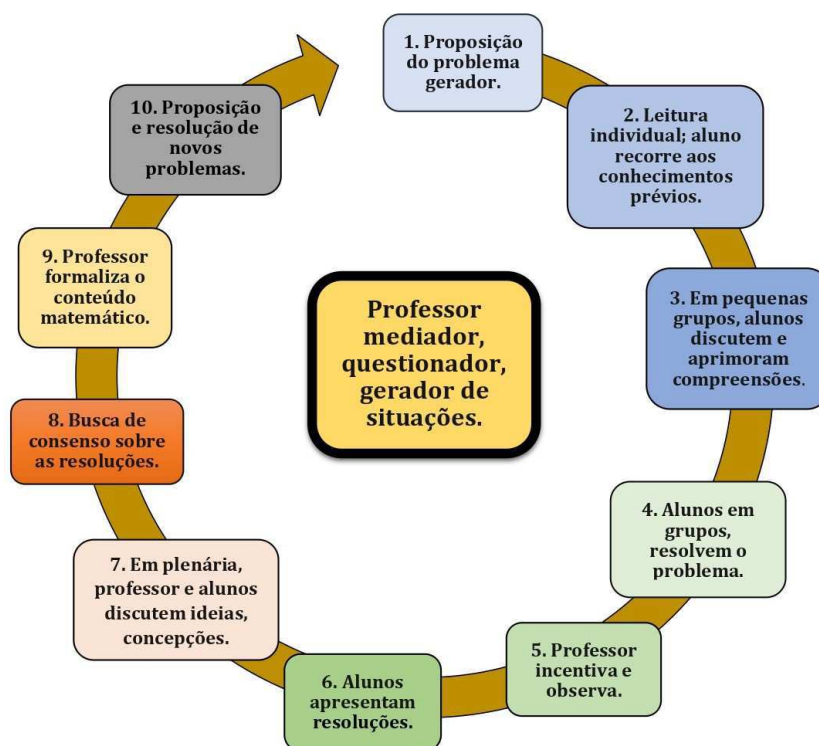
Segundo Allevato e Onuchic (2014) uma atividade é chamada de problema gerador quando nenhum indicativo de caminho ou procedimento de resolução é deixado explícito para o aluno, visto que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema, ainda não foi trabalhado em sala de aula. Ainda nessa visão, Allevato e Gonçalves (2020), acrescentam e discorrem que

Como o conteúdo matemático necessário à resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula, o professor pode propor atividades para a retomada de alguns conceitos que sejam relevantes para a resolução do problema proposto. Ao realizar essa dinâmica de aula, por meio dos organizadores prévios, o professor busca reativar significados fundamentais para a resolução do problema dando sentido ao novo conteúdo matemático (ALLEVATO; GONÇALVES, 2020, p. 64 - 65).

Durante essa etapa é natural surgirem resoluções diversas por parte dos alunos, até mesmo, resoluções não esperadas, como foi possível constatar na aplicação de tal problema em nossa pesquisa.

A partir do problema gerador, deve-se percorrer algumas etapas para consolidação da aprendizagem na perspectiva da Resolução de Problemas, estando elas estão interligadas uma à outra, dando assim, uma melhor sustentação para a assimilação dos problemas propostos. Para tal, apresenta-se uma metodologia que está guiada nas etapas corroboradas por Allevato e Onuchic (2021), como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Etapas da Metodologia proposta por Allevato e Onuchic



Fonte: Elaborada pelo autor com base em Allevato e Onuchic (2021, p. 51).

Como sistematização de todo o processo apresentamos duas sequências didáticas, nas quais foram apresentados diversos problemas. É importante fazermos alguns comentários sobre a classificação deles, nesse sentido Butts (1980) e Dante (2005) citados por (ALLEVATO; GONÇALVES, 2020, p. 55 - 57) , apresentam alguns tipos:

- **Exercícios de reconhecimento:** esse tipo de exercício exige do resolvidor reconhecer ou recordar um conceito, uma definição ou propriedade que possa ser aplicada naquela atividade.
- **Exercícios de algoritmos:** trata-se de um exercício onde as regras para resolvê-lo já estão prescritas, ou seja, exercícios que são resolvidos utilizando procedimentos passo-a-passo.
- **Exercícios de aplicação:** é caracterizada por problemas tradicionais, exigindo do resolvidor a aplicação de algoritmos para matematizar e coletar informações de uma situação problema envolvendo outras áreas do conhecimento ou o cotidiano do aluno.
- **Problemas de quebra cabeça:** são problemas que buscam desenvolver a percepção, motivar e desafiar os alunos por meio da matemática recreativa.
- **Problemas processos ou heurísticos:** esse tipo de problema tem como objetivo fazer o aluno pensar e elaborar um plano de ação, uma estratégia para resolução do problema inerente. Não exige do resolvidor apenas a aplicação de um determinado algoritmo.
- **Problemas de pesquisa aberta:** são entendidos como pesquisa aberta aqueles problemas em que no enunciado não há uma estratégia específica para resolvê-lo.

Em nossas sequências didáticas utilizamos, predominantemente, problemas de caráter heurísticos e de pesquisa aberta, pois acreditamos que eles contribuem significativamente para o objetivo do nosso trabalho.

3 PROBLEMAS DO 2º GRAU: ALGUNS RECORTES NO CONTEXTO DAS DIVERSAS SOCIEDADES

Nesse capítulo, apresentamos alguns recortes históricos a respeito dos problemas do 2º grau nas diversas sociedades. Trazemos, também, breves comentários acerca deles, a fim de adequá-los à linguagem moderna, para que o leitor possa estabelecer conexões entre as diferentes épocas e os dias atuais.

Por vezes, a história da Matemática se apresenta de forma controversa, ou até mesmo, dúbia. Talvez algumas traduções e recortes propagados nas literaturas, tenham sido (re)adequados por escritores, assim, não sendo tão fidedignos a sua época. Em virtude disso, recomendamos ao leitor mais crítico que, para afunilarmos tais inquietações, faz-se necessário um maior aprofundamento teórico acerca do tema.

3.1 Babilônia

Na antiguidade, a resolução de problemas fazia parte do cotidiano de diversas sociedades. Os povos babilônicos¹ que habitavam a antiga Mesopotâmia, por exemplo, já resolviam alguns tipos de problemas, registrando-os em tabletas. Alguns desses, assemelhava-se com os que hoje chamamos de problemas do 2º grau. Roque e Pitombeira (2012) apresentam um exemplo encontrado na coleção do British Museum, no tablete BM 13901, sendo traduzido usualmente da seguinte maneira:

“Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual o lado?”

Solução:

1. tome 1
2. fracione 1 tomando a metade² (0,30)

¹ Deve-se entender que se usa o termo descritivo *babilônico* meramente por conveniência, pois muitos povos além dos babilônios, como os sumérios, os acadianos, os caldeus, os assírios e outros povos antigos que habitavam a área, numa época ou outra, também se incluem na designação geral (EVES, 2004, p. 57).

² Usaremos o símbolo “;” como separador dos “algarismos” dentro da parte inteira ou da parte fracionária; e o símbolo “,” para a separação entre a parte inteira e a parte fracionária”. Muitos historiadores estrangeiros fazem o contrário, ou seja, usam o ponto e vírgula para separar a parte inteira da parte fracionária e a vírgula para separar os algarismos dentro da parte inteira ou da parte fracionária. Decidimos inverter esta representação uma vez que, no Brasil, a vírgula é usada normalmente para separar a parte inteira da parte fracionária e já estamos habituados a esta utilização do símbolo “,” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 12).

3. multiplique 0,30 por 0,30 (: 0,15)
4. some 0,15 a 0,45 (: 1)
5. 1 é a raiz quadrada de 1
6. subtraia os 0,30 de 1
7. 0,30 é o lado do quadrado³

“Cada passo do procedimento acima era executado com a ajuda de um tablete, por exemplo, a etapa (3) exigia a consulta a um tablete de multiplicação ou de quadrados e a etapa (5), evidente neste caso particular, era resolvida em geral pela consulta a um tablete de raízes quadradas” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 18 - 19).

Roque e Pitombeira (2012) propõe uma generalização do problema acima para uma notação mais atual, onde o mesmo poderia ser resolvido por uma equação do segundo grau. É importante salientar que os babilônios não escreviam a equação do 2º grau na forma $Ax^2 + Bx + C = 0$, com $A \neq 0$, como conhecemos hoje, pois não havia símbolos para representar os coeficientes e incógnitas. O momento histórico no qual os babilônios viveram não havia sentido para o que conhecemos hoje como equação. Problemas similares podem ser resolvidos por regras gerais e aplicados as diferentes casos. Algumas literaturas apresentam o procedimento adotado pelos babilônios para o caso geral da equação do tipo $Ax^2 + Bx = C$, que pode ser representado por uma natureza algébrica.

Desse modo, para generalizarmos a solução babilônica, devemos considerar que o procedimento pode ser traduzido algebricamente pelo passo a passo descrito abaixo para encontrarmos a raiz $R = \left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2} \right) \cdot \frac{1}{A}$.

Procedimentos:

1. Multiplique A por C (encontrando AC)
2. Tome metade de B , ou seja $\left(\frac{B}{2}\right)$
3. Multiplique $\frac{B}{2}$ por $\frac{B}{2}$, obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2$
4. Adicione os termos AC a $\left(\frac{B}{2}\right)^2$, obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC$
5. Tome a raiz quadrada dos termos encontrados anteriormente, ou seja, $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC}\right)$

³ Os babilônios utilizavam um sistema de numeração sexagesimal (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

6. Subtraia $\frac{B}{2}$ da raiz acima, encontrando $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right)$
7. Tome o inverso de A e obtenha $\frac{1}{A}$
8. Multiplique os termos do item 5 por $\frac{1}{A}$, obtendo assim o lado do quadrado pretendido
9. Daí, o lado do quadrado é $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right) \cdot \frac{1}{A}$

É possível fazer essa comparação da matemática babilônia com a linguagem de hoje por algumas traduções da época terem sido ajustadas ao modo de quem traduziu, alguns historiadores comentam que algumas dessas traduções podem ter sofrido ajustes para terem significados na linguagem de hoje.

De acordo [Roque e Pitombeira \(2012\)](#) os povos babilônios começaram a ter evidências de alguns casos particulares e, por vezes genéricos, o que mostra que eles não tinham um método único para resolução das equações do 2º grau. Cabe-nos comentar que seria anacrônico da nossa parte afirmar que os babilônios sabiam resolver equações do 2º grau.

3.2 Egito

Apontado como um dos berços das antigas civilizações, os egípcios contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Matemática. Dentre as evidências matemáticas que temos conhecimento, as mais famosas são os papiros, particularmente o papiro [4](#) de Moscou e Rhind. Eles apresentam problemas de natureza numérica e prática. Nesse sentido Eves (2004) comenta que

Muitos dos 110 problemas dos papiros Rhind e Moscou mostram sua origem prática ao lidar com questões sobre o quão substanciosos eram o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domésticas e sobre armazenamentos de grãos. Pra muitos desse problemas a resolução não exigia mais do que **uma equação linear simples** e o método empregado ficou conhecido mais tarde na Europa como regra de falsa posição. Assim, para resolver

$$x + \frac{x}{7} = 24$$

assume-se um valor conveniente para x , digamos $x = 7$. Então $x + \frac{x}{7} = 8$, em vez de 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto de x deve ser 3(7) ou 21 ([EVES, 2004](#), p. 73, grifo nosso).

⁴ Papiro é uma planta muito comum no Egito que era utilizada para produzir uma folha que servia como superfície para que os egípcios antigos pudessem escrever.

Como foi comentado anteriormente a resolução de equações no Egito se resumia ao emprego do método da falsa posição, que nada mais é do que uma tentativa (direcionada) de solução. Para entendermos melhor esse método, vamos apresentar a generalização dessa regra para equações do 1º grau.

Nesse sentido, [Roque e Pitombeira \(2012\)](#) apontam que devemos considerar a equação $ax = b$. Onde uma maneira de resolvê-la até recentemente, usando somente aritmética, antes dos procedimentos algébricos se tornarem praticamente universais para resolver problemas desse tipo, era a seguinte:

Escolha um valor arbitrário x_0 e calcule então o valor de a_0 , que chamaremos de b_0 . Na prática, x_0 é escolhido a fim de facilitar as contas. Assim, por exemplo, se a é uma fração com denominador q , com $q \neq 0$ é conveniente escolher $x_0 = q$ para sintetizar os cálculos.

Considere então a igualdade

$$ax_0 = b_0.$$

Como artifício devemos multiplicar ambos os lados da igualdade anterior por um valor conveniente para termos, do lado direito, b ? Obviamente, $\frac{b}{b_0}$. Desse modo, temos:

$$ax_0 \cdot \frac{b}{b_0} = b_0 \cdot \frac{b}{b_0}.$$

logo,

$$a \cdot \left(x_0 \cdot \frac{b}{b_0}\right) = b.$$

Daí,

$$x_0 \cdot \frac{b}{b_0}$$

é solução de $ax = b$.

Para além das equações lineares, os problemas associados a uma equação do 2º grau apareciam de maneira discreta, historiadores remetem que os egípcios dominavam alguma técnica primitiva para resolução dessas equações. Trazemos aqui um exemplo apresentado por Pedrosa (2010).

Um dos exemplos é encontrado no *Papiro de Berlim* e essa certeza também é baseada no fato encontrado no *Papiro de Kahun* uma solução da equação hoje é escrita como $x^2 + y^2 = k$, onde k é um número positivo, pelo método da falsa posição, desenvolvido pelos egípcios para encontrar a resolução de equação do 1º grau.

A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é o quádruplo do lado do outro. Encontre os lados desse

quadrado. Em simbologia atual o sistema de equações que representa

$$\text{o problema é } \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$$

A seguir o procedimento retórico dado pelo escriba para a resolução do problema:

1. Tome $x = 3$, então, $y = 4$
2. Assim, $3^2 + 4^2 = 25$. ($25 \neq 100$)
3. $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$
4. $10 \div 5 = 2$
5. Os lados são $2 \cdot 3 = 6$ e $2 \cdot 4 = 8$. (*Papiro de Berlim*) (PEDROSO, 2010, p. 2 - 3).

Os conhecimentos revelados nos papiros mostram que a noção de equação apresentada pelos egípcios remetia a um caráter pragmático aritmético, onde procurava-se tornar iguais duas quantidades para encontrar uma determinada quantidade desconhecida.

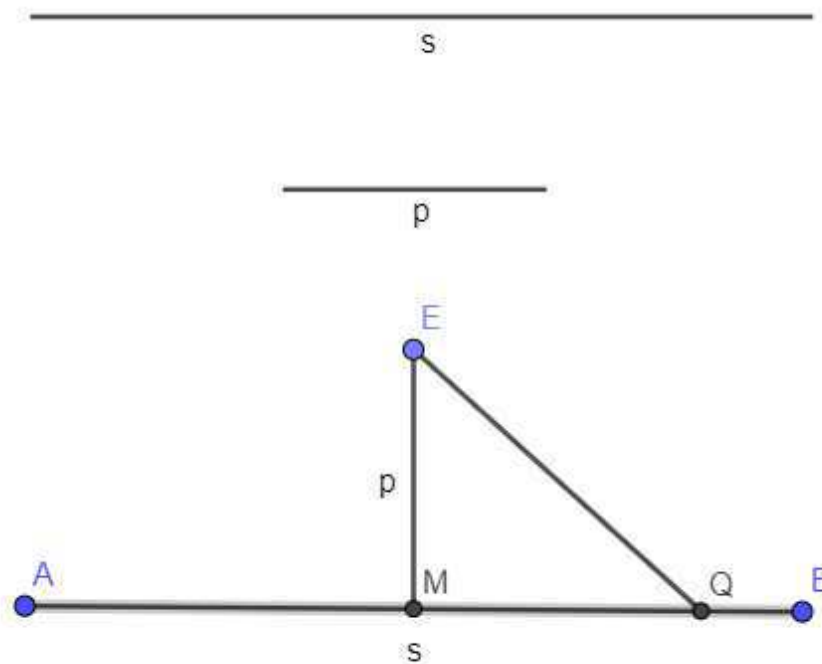
3.3 Grécia

A história tradicional nos remete que um dos primeiros matemáticos da Grécia tenha sido Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos V e VI da era comum. Algumas das suas contribuições podem ter sido influenciadas pelo babilônios e egípcios. Tecemos esse comentário, pois esses povos realizavam alguns cálculos relacionados com medidas de comprimento, área e volume. Vale salientar que essas abordagens eram bem diferentes da Matemática grega, que tinha um caráter quase que por completo baseado na geometria. Cabe comentar, por exemplo, que as ideias associadas a medidas eram abordadas e transformadas em problemas numéricos.

Pedroso (2010), comenta que os gregos encontraram algumas dificuldades para trabalhar com números racionais e irracionais. Além disso, seu sistema de numeração literal levou essa civilização (500 a 200 a.C) para uma inclinação pela geometria. Logo, é natural alguns problemas terem uma abordagem “tendencialmente geométrica”, com as equações do 2º grau não foi diferente. Pedroso (2010) comenta que em “Os Elementos”, obra do formidável matemático Euclides, encontramos algumas proposições que remetem ao que conhecemos hoje como equação, dentre elas destaca-se:

Proposição 28 - Livro VI: Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dada. Traduzindo para notação que conhecemos hoje seria, $x^2 - sx + p^2$, em que s e p são segmentos conhecidos.

Figura 4 – Equação na Grécia apresentada em linguagem moderna



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Sejam AB e ME dois segmentos de retas conhecidos, em que $\overline{AB} = s$, $\overline{ME} = p$ e $p < \frac{s}{2}$. Dividindo AB em duas partes com o ponto Q , de modo que $\overline{AQ} + \overline{BQ} = s$ e $\overline{AQ} \cdot \overline{BQ} = p^2$ denota-se a solução procurada. Para tal basta traçar uma circunferência de centro em E e raio $\frac{s}{2} = \overline{AM}$ ou \overline{MB} , ponto médio de AB . Assim, a circunferência cortará o segmento AB em dois pontos. Para facilitar o entendimento, denotaremos um deles por Q .

Daí,

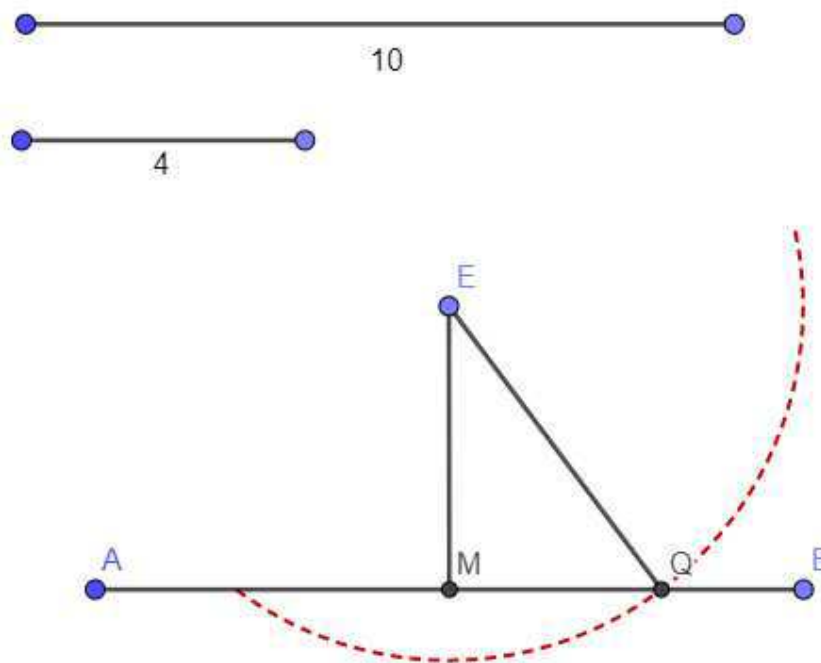
$$p^2 = \overline{MB}^2 - \overline{MQ}^2 = (\overline{MB} + \overline{MQ}) \cdot (\overline{MB} - \overline{MQ}) = \overline{AQ} \cdot \overline{BQ}$$

Por fim, denotamos por $m = \overline{AQ}$ e $n = \overline{BQ}$ as raízes da equação dada, portanto $s = m + n$ e $p^2 = m \cdot n$

Vamos observar o exemplo prático a seguir, onde discorreremos sua resolução baseada nas notações vistas anteriormente:

Exemplo 1. *Seja a equação onde atualmente se escreve da seguinte forma $x^2 - 10x + 16 = 0$, assim usaremos a Figura 5 para detalharmos o passo a passo de sua resolução, ao “modo Grego”, se assim podemos chamar:*

Figura 5 – Equação que remete a proposição 28 - Livro VI de Euclides



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

1. Traça o segmento AB de tamanho 10;
2. Por esse segmento traça o ponto médio M ;
3. Traça o segmento ME , perpendicular a AB de tamanho $\sqrt{16}$, ou seja, 4;
4. Com centro em E e raio MB , trace um arco de circunferência que corta AB no ponto Q ;
5. A raiz desejada será dada pelo comprimento AQ . Com efeito por construção, a medida do segmento AQ será $\frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - (\sqrt{16})^2} = 5 + 3$ e corresponde à raiz 8 da equação.

3.4 Índia e a fórmula que não é de Bhaskara

Assim como outras sociedades, a Índia foi berço de grandiosos e célebres matemáticos dentre os quais, *Brahmagupta* (viveu em 628 d.C.) e *Bhaskara* (1114-1185 d.C.), mas, o nome que facilmente nós brasileiros nos remetemos é o do último, pois a ele está ligado à fórmula geral de resolução de equações do segundo grau. A despeito desse fato, [Garbi \(2010\)](#), relata que a fórmula onde no Brasil atribuímos a *Bhaskara* não foi descoberta por ele, e sim, um século antes por Sridhara (991 -? d. C.) e publicada

em uma obra na qual não temos conhecimento. Boyer e Merzbach (2012) expressam em seus escritos que algumas obras de *Bhaskara* seriam um “refinamento” da obra de *Brahmagupta* e de outros matemáticos hindus. A mais conhecida delas é *Lilavati*⁵, que contém inúmeros problemas sobre tópicos favoritos dos hindus, dentre eles, equações lineares e quadráticas. Uma curiosidade é que em seus trabalhos aparece uma solução geral para a equação de Pell $x^2 = 1 + py^2$, proposta antes por *Brahmagupta*, apresentando soluções para cinco casos particulares $p = 8, 11, 32, 61$ e 67 .

Voltando a falar sobre o maior matemático do século XII, Bhaskara⁶ de Achārya, assim como os escritos matemáticos que remetem a sua época, apontavam os problemas de maneira poética, como visualizamos no verso a seguir:

Verso 77: “De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmims. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 153).

Nesse sentido, os autores mencionados anteriormente ainda comentam que o que hoje conhecemos como equação do 2º grau era enunciada de forma geral. “*De uma quantidade retiramos ou adicionamos a sua raiz multiplicada por um coeficiente e a soma ou a diferença é igual a um número dado*”. A quantidade expressa no enunciado anteriormente é um quadrado cuja raiz é a incógnita, transcrevendo as palavras para linguagem algébrica, poderíamos expressá-las com a equação $x^2 \pm px = q$. Quanto a sua resolução, Bhaskara tentara reduzir o problema a uma equação linear com a “*eliminação do termo médio*”, equivalendo ao que conhecemos hoje como completar quadrados. Uma curiosidade é que a igualdade, como conhecemos hoje, aparecia em problemas somente com palavras/abreviações, a uma equação, estava posta, em geral, entre um membro contendo a quantidade desconhecida e o seu quadrado e outro membro contendo as quantidades conhecidas. Tal fato era normal, pois os indianos não utilizavam a linguagem simbólica da nossa álgebra moderna.

Como o título do nosso trabalho remete aos problemas do 2º grau, o leitor deve estar curioso para comentarmos mais detalhadamente sobre o que conhecemos no Brasil como fórmula de *Bhaskara*. Pois bem, tecemos a seguir alguns comentários acerca da mesma, baseados em Garbi (2010). Sua dedução partiu da ideia de reduzir o grau da

⁵ “O nome do título é o da filha de *Bhaskara* que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas predições astrológicas” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 160)

⁶ “Bhaskara, também conhecido como Bhaskara II e Bhaskara Achārya (que significa *Bhaskara*, o professor) viveu de 1114 a 1185. Seu principal trabalho foi o *Siddhanta Siromani*, dividido em quatro partes: *Lilavati*, *Bijaganita*, *Grahaganita* and *Goladhyaya*, dedicados à aritmética, álgebra, astronomia e trigonometria esférica, respectivamente. Ele representa o ápice da Matemática do século XII” (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 153).

equação de 2º para 1º, através da extração de raízes quadradas. Método esse bem astuto, onde seu sucesso permitiu chegar ao que conhecemos no Brasil como fórmula de *Bhaskara*, vale salientar que as literaturas mais atuais utilizam o termo “forma resolutive para resolver equação do 2º grau”, corrigindo o termo equivocado “fórmula de Bhaskara”.

Seja a equação geral do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ com } a \neq 0 \quad (3.1)$$

(divida cada termo por a)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (3.2)$$

(some $-\frac{c}{a}$ em ambos os membros da igualdade)

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (3.3)$$

O leitor deve se perguntar como extrair a raiz de $x^2 + \frac{b}{a}x$, se ele não representa um quadrado perfeito? Ora, devemos somar algo em ambos os membros com a finalidade de tornar o lado esquerdo um quadrado perfeito, ou seja, $\frac{b^2}{4a^2}$

Assim,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}. \quad (3.4)$$

Como $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ representa um quadrado perfeito $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, ou seja,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \quad (3.5)$$

ou

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (3.6)$$

Feitos os ajustes necessários, podemos extrair raízes quadradas, porém, cabe comentar que, tanto números positivos, quanto negativos, elevados ao quadrado, são sempre positivos. Porém, os Babilônios, a sua época, não se deram conta de tal fato.

Portanto,

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad (3.7)$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.8)$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.9)$$

Chegamos então à Fórmula de *Bhaskara*, mas como dito anteriormente, ela não foi deduzida por ele, apenas ganhou popularidade com o seu nome. Outro fato que deve ser evidenciado, diz respeito a linguagem colocada acima para dedução da fórmula, visto que a simbologia usada não existia naquela época, porém, foi utilizada para melhor entendimento do leitor contemporâneo.

3.5 Os árabes e a casa da sabedoria

Se, por um lado, as literaturas atribuem aos árabes a responsabilidade pelo desaparecimento do saber ocidental, por outro contribuíram para sua conservação. Consta na literatura de [Garbi \(2010\)](#) que o califa (**significa sucessor de Maomé**) *Omar* ordenou a destruição da Biblioteca de Alexandria por entender que os livros repetiam os ensinamentos do alcorão e eram descartáveis, ou os contrariavam e eram nocivos ao seu povo, por isso, deveriam ser queimados. Dicotomicamente do anterior, o califa ***Al-Mansur*** (reinou de 754 – 775 d.C), que construiu Bagdá, desejou construir uma nova Alexandria, atraindo vários sábios dos arredores. Já o califa ***Harun al-Rashid*** (reinou de 786 – 809 d. C), ordenou que os Elementos de Euclides fosse traduzido para o árabe. Fato este muito importante para a sua preservação e consulta sobre estudos futuros na Europa. ***Al-Mamum*** (reinou de 813-833 d. C) deu continuidade a obra de ***Harun al-Rashid***, que era seu pai, determinando que a maior quantidade possível de manuscritos gregos fosse traduzida para o árabe. Segundo [Boyer e Merzbach \(2012\)](#) durante o esse período a alquimia e a astrologia estiveram entre os principais estudos árabes.

Nesse mesmo sentido, os autores acima citados comentam que *Al-Mamum* estabeleceu em Bagdá uma nova biblioteca de Alexandria, que viria a se chamar “**A casa da sabedoria**” (*Bait al-hikma*), onde a tradução de diversas obras, como comentado anteriormente, foi dando forma a mesma. Posteriormente, foi adicionado um observatório às propriedades da instituição, passando assim, a ser a melhor biblioteca do mundo a sua época, frequentada assiduamente por diversos matemáticos. Quando nos remetemos a Matemática árabe, o primeiro nome que vem a nossa mente é ***Al-Khwarizmi***, que dentre seus diversos legados, destacou-se pelo estudo da álgebra. Vale salientar que, as palavras **algarismo**, **algoritmo** e **álgebra** estão de alguma forma ligadas ao nome

de Al-Khwarizmi. Garbi (2010) comenta que Al-Mamum o teria solicitado uma obra popular e de fácil linguagem sobre o estudo de equações, ele escreveu o livro **Al-Kitab al-jarbr wa'l Muqalabah**, cuja tradução para a língua portuguesa se aproxima com o título “*O Livro da Restauração e do Balanceamento*”.

Ribeiro e Cury (2021) destacam duas expressões que tem um grande significado para a resolução de equações: **al-jabr** que é a operação que permite adicionar em ambos da equação termos equivalentes; e, **al-Muqabalah** que é a operação que permite reduzir ou eliminar termos iguais em ambos os membros da equação. Tais expressões foram de suma importância para Al-Khwarizmi realizar operações, como por exemplo, a equação $x - 6 = 15$ é equivalente a $x - 6 + 6 = 15 + 6$, que seria o processo de **al-Muqabalah** que equivale a um “balanceamento” e $x = 21$, seria **al-jabr**, ou seja, uma “restauração” da equação original. Cabe comentar que Al-Khwarizmi também tinha grande preocupação em ser compreendido pelos seus leitores, com isso buscava simplificar suas escritas.

Segundo Roque e Pitombeira (2012), ao estudar problemas, que hoje conhecemos como equação do 2º grau, Al-Khwarizmi introduziu alguns termos necessários para o seu entendimento onde destacaremos os três modos sob os quais o número aparecia no cálculo da álgebra: **a raiz, o quadrado e o número simples**. De acordo com ele, o quadrado é um conceito algébrico designado pela palavra mal, que tem o significado de “possessão” ou “tesouro” e é empregada para representar o quadrado da quantidade desconhecida. Já a raiz é o termo essencial, onde é representado pela palavra **Jidhr**, mas poderia também ser representada pela palavra **coisa**. Essas palavras eram usadas para representar o que conhecemos hoje como incógnita, ou seja, a quantidade desconhecida do problema (*raiz do mal*). Por sua vez, **adad**, é um número dado qualquer, ou seja, a quantidade conhecida.

O Quadro 3.1 resume o exposto acima por Roque e Pitombeira (2012).

Quadro 3.1 – Quadro resumo da notação árabe

| Palavra | Significado | Sentido nos problemas | Notação moderna |
|---------|--------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| Adad | | Quantidade conhecida (número dado) | c |
| Jidhr | “raiz” | Quantidade desconhecida | x |
| Mal | “possessão” “tesouro” | Quadrado da quantidade desconhecida | x^2 |

Fonte: (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 156).

(RIBEIRO; CURY, 2021; ROQUE; PITOMBEIRA, 2012) apontam que na álgebra de Al-Khwarizmi, o estudo das equações poderia ser resumido em seis tipos, que em linguagem atual são:

1. quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$)
2. quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$)
3. raízes iguais a um número ($bx = c$)
4. quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$)
5. quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)
6. raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$)

Roque e Pitombeira (2012) trazem um comentário pertinente sobre essas equações, eles apontam que os coeficientes eram sempre positivos, **Al-Khwarizmi** possuía regras de solução sustentadas e justificadas a partir dos elementos de Euclides. Como forma de curiosidade, apresentamos um exemplo do quarto caso “**um mal e quatro jidhr igualam sessenta denares**”, que em notação moderna seria escrito como $x^2 + 4x = 60$. O procedimento de solução, para esse exemplo, está organizado em um quadro, a fim observarmos cada passo da solução de **Al-Khwarizmi** com o que utilizamos atualmente. O Quadro 3.2 a seguir, detalha o exemplo dado.

Quadro 3.2 – Quadro comparativo da solução de Al-Khwarizmi com o procedimento que utilizamos atualmente

| Solução dada por Al-Khwarizmi | Operações correspondentes em linguagem moderna | Operações correspondentes em linguagem moderna, para uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ |
|--|--|---|
| Tome a metade da quantidade de jidhr | $\frac{4}{2} = 2$ | $\frac{b}{2}$ |
| Multiplique esta quantidade por si mesma | $2^2 = 4$ | $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ |
| Some no resultado os adad | $4 + 60 = 64$ | $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ |
| Extraia a raiz quadrada do resultado | $\sqrt{64} = 8$ | $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$ |
| Subtraia deste resultado a metade dos jidhr , encontrando a solução | $8 - 2 = 6$ | $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ |

Fonte: Adaptada de Roque e Pitombeira (2012, p. 158).

Você neste momento está se perguntando o porquê de uma única raiz, o 6? **Al-Khwarizmi** só considerava as raízes positivas, mas, ao contrário dos gregos, admitia a existência de duas raízes. A solução apresentada pelo algoritmo de Al-Khwarizmi corresponde exatamente à raiz positiva da equação $x^2 + 4x = 60$, equivalente ao seu problema. Se observamos a generalização dessa solução, terceira coluna, percebemos que o algoritmo apresentado é uma sequência de operações análogas à fórmula de resolução para equação do segundo grau, na qual usamos hoje. Então, poderíamos concluir que, embora o exemplo seja uma particularidade (caso 4), ele mostra uma generalidade da solução apresentada. Os demais casos ficam a cargo de leitor, debruçar-se, e por que não, generalizá-los, fazendo suas demonstrações.

Por fim, Ribeiro e Cury (2021) resumem a abordagem de equação, explicitando que

A partir de árabes e de hindus, o *conceito de equação* passa a apresentar uma *concepção* mais *estrutural*, no sentido de se observar as características e propriedades definidas em uma classe de equação e não mais em equações relacionadas a situações particulares (RIBEIRO; CURY, 2021, p. 35).

Assim, podemos compreender que os árabes e hindus concebiam as equações do 2º grau inteiramente ligadas a problemas de ordem prática, onde as interpretações recaíam em soluções, por vezes, retóricas e de manipulações geométricas.

3.6 Europa ocidental e as contribuições de Viète

Superado o período dos árabes e hindus, chegamos a Europa e ainda as equações não tinham o formalismo atual, mas, o ganhariam quase que por completo. Então, tomaremos aqui alguns recortes de acordo com Boyer e Merzbach (2012), onde eles categorizam que a álgebra preconizada por François Viète (1540 – 1603 d. C), foi a que chegou a se aproximar mais das ideias ditas hoje como modernas. Os autores relatam que “*não poderia haver grande progresso na teoria da álgebra enquanto a preocupação fosse encontrar a “coisa” em uma equação com coeficientes numéricos específicos*”. Em seus escritos, Viète introduziu algumas convenções tidas como simples para simplificar o entendimento das equações, onde usou **vogal** para representar uma quantidade desconhecida ou indeterminada e **consoante** a grandeza ou número conhecido, tal distinção, foi de suma importância para os estudos posteriores sobre o tema, onde pela primeira vez as equações ganhavam um caráter estrutural. Outra curiosidade foi a maneira de representar a segunda potência como **A quadratus** para (A^2) , a palavra latina *in* para representar a multiplicação, a para de fração de divisão e a abreviação da palavra latina *aequalis* para representar igualdade.

Pedroso (2010) expressou, em linguagem moderna, o método preconizado por Viète para resolver a equação do tipo $x^2 + 2xa = b$, onde ele propôs uma mudança de variável

na equação inicial para a transformá-la em incompleta. Os passos por ele utilizados serão expressos a seguir, com a notação que conhecemos atualmente, onde:

1. Seja $x + a = u$ (eleve ambos os membros ao quadrado)
2. Então $u^2 = x^2 + 2xa + a^2$ (compare as duas equações)
3. Da equação inicial temos $x^2 + 2xa = b$, ou seja, $u^2 = a^2 + b$
4. Assim, $(x + a)^2 = u^2 = a^2 + b$ (extraído as raízes em ambos os lados da igualdade)
5. Logo, $x + a = \sqrt{a^2 + b}$ e $x = \sqrt{a^2 + b} - a$

Já para uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, o que chamamos hoje de forma geral da equação, o método de Viète seria:

1. Seja $x = u + v$.
2. Substituindo $x = u + v$ em $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se $a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0$, ou seja, $au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0$. (reagrupando de maneira conveniente)
3. Assim, $au^2 + (2av + b)v + (av^2 + bv + c) = 0$.
4. Se $2av + b = 0$, então $v = -\frac{b}{2a}$.
5. Substituindo $v = -\frac{b}{2a}$ em $au^2 + (2av + b)v + (av^2 + bv + c) = 0$, obtemos
6. $au^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = 0$, ou seja, $au^2 = -\frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} - c = \frac{-b^2 + 2b^2 - 4ac}{4a}$.
7. Assim, $u^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (como u^2 é sempre positivo), então $u = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$.
8. Por fim, substituindo $v = -\frac{b}{2a}$ e $u = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$ em $x = u + v$, tem-se
9. $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$, ou seja, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Por fim, podemos afirmar que o modo o qual estudamos equação do 2º grau hoje, pode ser sintetizado da seguinte maneira: usamos a representação literária introduzida inicialmente pelos europeus, quanto ao método de resolução, assemelha-se ao da matemática árabe e hindu.

3.7 Problemas do 2º grau no cotidiano

Sabe-se que independente de sua época, os problemas do 2º grau tiveram e têm um caráter importantíssimo, não só para a Matemática, mas também para outras diversas áreas, como por exemplo:

- No futebol, quando o jogador cobra um escanteio o caminho que a bola percorre é uma curva, uma parábola. Assim como em todos os lançamentos, de qualquer natureza, uma pedra, uma flecha, uma bala de canhão, um dardo olímpico, um lançamento de satélite ou foguete.
- Na Física, ele possui um papel importante na análise dos movimentos uniformemente variados (MUV), pois em razão da aceleração, os corpos variam a velocidade e o espaço em função do tempo.
- Na Química, a decomposição ou desintegração de determinadas substâncias é expressa por equações de 2º grau.
- Na Administração e na Contabilidade, as equações de 2º grau estão relacionadas às funções de Custo, Receita e Lucro.
- Na Engenharia, as estruturas em formas de arcos também se relacionam com estas equações.

É importante salientar que existe uma grande lacuna entre a sala de aula e a realidade fora dela. Enquanto professor do Ensino Médio, é parte da nossa missão desmistificar que a Matemática é distante da realidade, apresentando assim situações que por hora passariam despercebidas nos alunos. A fim de estreitar essa visão dos alunos, abordaremos de modo particular, os problemas do 2º grau e suas ramificações como objeto de conhecimento a ser estudado. Apresentar diversas técnicas de resolução para esses tipos de problemas possibilita ao aluno o desenvolvimento de estratégias para a resolução de diferentes tipos de problemas matemáticos.

A apresentação de vários problemas do 2º grau, além de tornar as aulas de matemáticas mais ricas de informações, no nosso entendimento, despertará uma motivação para ele relacionar a matemática e a aplicabilidade de seus diversos conteúdos. Ajudará também, no desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo, fazendo com que esse aluno deixe de ter apenas aquela postura passiva nas aulas. Por vezes, a postura passiva é desenvolvida pelo simples fato dos problemas do 2º grau serem apresentados de uma única maneira. É fato que nossos alunos acham que problemas do 2º grau se resumem a aplicar a fórmula de Bhaskara, o que de fato é um equívoco ingênuo. Nos

cabe enquanto professor, apresentar algumas técnicas de resolução como aliadas no ambiente de sala de aula, oportunizando assim, um ensino-aprendizagem mais significativo dos alunos.

4 PROBLEMAS DO 2º GRAU: DOS DOCUMENTOS NORTEADORES E FORMALIZAÇÃO DOS CONCEITOS

Nesse capítulo, apresentamos como os problemas do 2º grau são abordados nos documentos norteadores, como também, os conceitos e princípios básicos de equação do 2º grau e função polinomial do 2º grau.

4.1 Apontamentos à luz dos documentos norteadores

Desafiar-se ou, até mesmo, questionar-se, faz parte do ensino de Matemática e de suas diversas perspectivas. Resolver problemas é uma das abordagens que nos fazem construir um novo olhar, buscando padrões, conjecturas, caminhos, estratégias e ferramentas para resolvê-los.

Enquanto educador, a provocação por resolver problemas deve ser uma ferramenta primordial para o apreço pela Matemática. Amparar-se em documentos norteadores nos possibilita trilhar alguns caminhos que possam levar o nosso aluno a construir uma base sólida para tal.

A LDB (BRASIL, 1996)¹, em seu artigo 1º, inciso § 2º preconiza que “a educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social”. Desta forma, o ensino deve estar voltado para a realidade - escolar e social – e suas diversas práticas e atividades, de modo particular, relacionando a Matemática com atividades do cotidiano para torná-la mais palpável, entendível e útil; trazendo assim, uma aprendizagem mais significativa no tocante a sua assimilação e na relação com as diversas situações. O desafio de criar elos com o mundo real e relacioná-lo com situações do dia a dia é papel fundamental da escola e do educador.

Por outro lado, em seu artigo 35-A, da mesma lei, estabelece que “a Base Nacional Comum Curricular definirá direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio, conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação”, dentre as áreas do conhecimento, destaca-se: **II. Matemática e suas tecnologias.**

De maneira integralizada a BNCC é norteada por dez competências gerais que garantem “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas

¹ Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8). A segunda competência geral evidencia a importância de despertar e desenvolver a “curiosidade intelectual” dos estudantes, possibilitando uma abordagem investigativa e reflexiva em diversos parâmetros de ensino, onde podemos destacar a habilidade de resolver, criar e formular problemas.

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, **formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas** (BRASIL, 2018, p. 9, grifo meu).

Em suas competências específicas, em especial as de Matemática, podemos destacar:

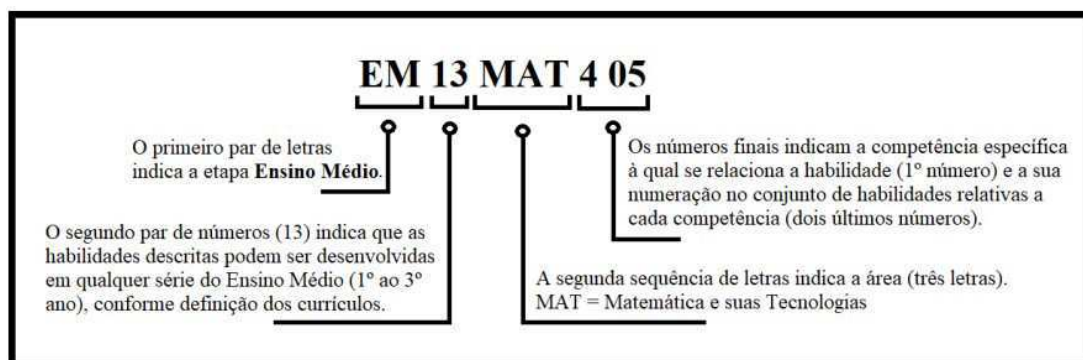
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 531).

Quanto aos problemas do 2º grau, destacamos algumas habilidades que evidenciam a sua abordagem, dando assim o direcionamento para a sua construção ao longo do Ensino Médio.

Como sabemos, a BNCC é um documento norteador para que os estados e municípios possam elaborar seus currículos, respeitando-se as habilidades e seus respectivos objetos de conhecimentos, adequando-os ao contexto sociocultural. Como educador da rede pública de Pernambuco, busquei evidenciar as diferentes abordagens dadas aos problemas do 2º grau, em conformidade com os documentos norteadores, tais como BNCC/Currículo de Pernambuco, Quadro 4.1 e Competências do ENEM, Figura 7.

Para que o leitor entenda o Quadro 4.1, faz-se necessário explicar o significado de cada código alfanumérico presente no mesmo.

Figura 6 – Habilidade EM13MAT405 - Detalhamento do código



Fonte: (SOUZA, 2023, p. 23).

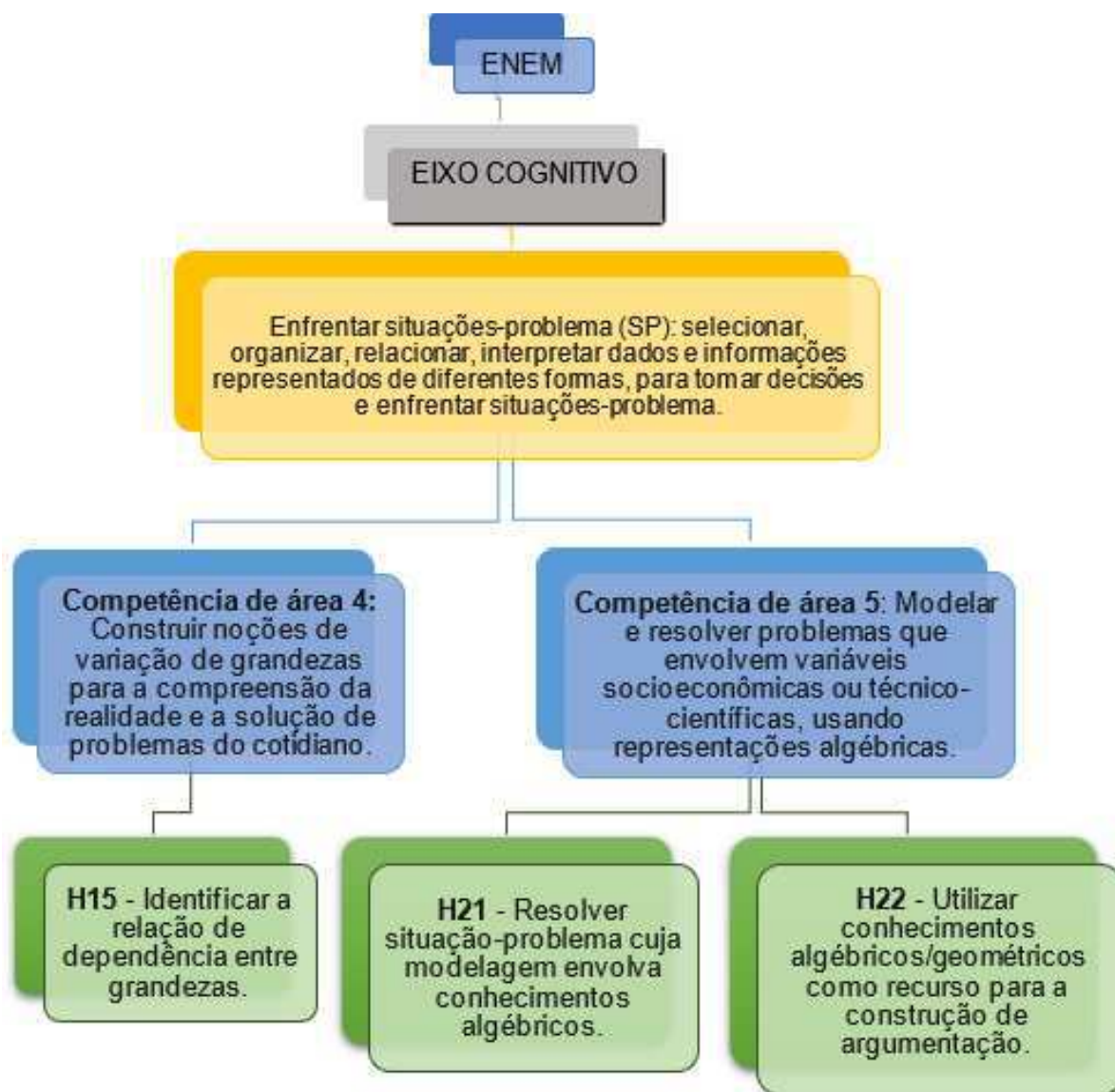
Quadro 4.1 – Habilidades que remetem aos problemas do 2º grau no Ensino Médio

| Habilidade de área na BNCC | Habilidades específica dos componentes no currículo de PE | Objetos de conhecimento |
|---|--|---|
| (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. | (EM13MAT302PE18) Construir modelos matemáticos para resolver situações-problema em vários contextos, envolvendo funções polinomiais do 1º e 2º graus, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais. | Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus |
| (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. | (EM13MAT402PE34) Converter e analisar representações algébricas de funções polinomiais do 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, reconhecendo o papel dos coeficientes a, b e c no gráfico, como também distinguir os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado de outra variável, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais. | Funções Polinomiais do 2º grau: proporcionalidade |
| (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. | (EM13MAT502PE41) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais. | Função Polinomial do 2º grau: relações e representações |
| (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. | (EM13MAT503PE42) Investigar e reconhecer pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos, envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com e/ou sem apoio de tecnologias digitais. | Pontos de máximo e de mínimo de funções quadráticas |

Fonte: Elaborado pelo autor (2022) com base em Brasil (2018) e Pernambuco (2021).

A seguir, a Figura 7 mostra o esquema entre as competências e habilidades do ENEM.

Figura 7 – Competências e habilidades do ENEM referentes a resolução de problemas



Fonte: Elaborado pelo autor (2022) com base na Matriz de Referência do ENEM.

O Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM representa um dos principais instrumentos de avaliação do Ensino Médio e desde 2009 tem sido adotado como uma das formas de ingresso dos alunos na maioria das instituições de Ensino Superior no Brasil. Neste sentido, pretende-se ao trabalhar os problemas de 2º grau desenvolver no aluno o raciocínio lógico, dedutivo, criativo e protagonista, a fim de prepará-lo para enfrentar situações do seu cotidiano. Tais processos, possibilitarão a construção de mecanismos, que contribuirão com a preparação desses alunos para o ENEM.

4.2 Equação do 2º grau e função polinomial do 2º grau

Nesta seção abordaremos alguns conceitos e propriedades importantes relacionadas as equações do 2º grau. As definições que serão apresentadas a seguir estão de acordo com (IEZZI et al., 2014) e (DANTE, 2016).

4.3 Equação do 2º grau

Definição 4.1. *Toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, é chamada de **equação do 2º grau** com uma incógnita.*

A representação $ax^2 + bx + c = 0$ é chamada de forma geral da equação do 2º grau, em que os números a, b e c são os **coeficientes** da equação e x é a **incógnita**, onde a é o coeficiente de x^2 , b é o coeficiente de x e c é o termo independente.

- Assim, na equação $x^2 + 3x - 15 = 0$, tem-se $a = 1, b = 3$ e $c = -15$.

Na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, quando, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, diz-se que a equação do 2º grau é **completa**. Se pelo menos um dos coeficientes b e c é nulo, diz-se que a equação do 2º grau é **incompleta**.

Porém, faz-se necessário tecer comentários sobre alguns problemas relacionados a equação do 2º grau, principalmente as incompletas do tipo $ax^2 \pm c = 0$. Usarei um exemplo prático para o leitor entender onde quero chegar.

Exemplo 2. *Determine a medida do lado de um quadrado, sabendo que sua área é $100u^2$.*

Solução: Denotando pela incógnita x a medida desconhecida, temos que $x^2 = 100$. Assim, $x = \sqrt{100}$ ou $x = -\sqrt{100}$, de forma que $x = 10$ ou $x = -10$. Mas, como x representa a medida do lado do quadrado, **temos que** x precisa ser um valor positivo. Portanto, $x = 10u$.

Ora, a raiz de qualquer número real positivo é, *por convenção*, sempre positiva. Assim, a raiz de 100, representada por $\sqrt{100}$ é igual a 10 e não -10 . Apesar desse fato, usamos na resolução do exemplo anterior, que existem dois números reais, 10 e -10 , cujo quadrado é igual a 100. Por isso, na solução do exemplo anterior chegamos a conclusão que há dois casos: $x = \sqrt{100}$ ou $x = -\sqrt{100}$. Mas será que o leitor entendeu o porque desse fato? Assim, faz-se necessários alguns comentários e generalização sobre tal fato.

Proposição 4.1. *Para qualquer número real não negativo c , se $x^2 = c$, então $x = \sqrt{c}$ ou $x = -\sqrt{c}$.*

Para provarmos a proposição, basta utilizarmos o seguinte fato: “Quando o produto de dois números ou mais números reais é igual a zero, pelo menos um deles tem que ser igual a zero”.

Usando os conhecimentos sobre produtos notáveis e o fato exposto anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 = c &\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{c})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + \sqrt{c})(x - \sqrt{c}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \sqrt{c} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{c} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{c} \text{ ou } x = \sqrt{c} \end{aligned}$$

Esclarecido o resultado anterior, faz-se necessário comentar outro fato: se x é um número real não-nulo, temos que x^2 é sempre positivo, pelo fato provado anteriormente. Sendo assim, sabemos que existe $\sqrt{x^2}$. Por outro lado, como $\sqrt{x^2}$ é positivo para valores positivos e negativos de x , contudo nem sempre vale que a igualdade $\sqrt{x^2} = x$. Basta considerarmos como exemplo, $x = -10$, temos que $x^2 = (-10)^2 = 100$; assim, $\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10$. Como $10 \neq -10$, constatamos que a recíproca não é verdadeira para alguns x real diferente de zero. Assim, o que podemos escrever sempre é:

Definição 4.2.

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Por fim, se x e y forem números reais tais que $x^2 = y^2$, então tem-se que:

$$x = y \text{ ou } x = -y.$$

Assim, $x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$, ou seja, $(x + y)(x - y) = 0$ o que acarreta $x + y = 0$ ou $x - y = 0$.

4.3.1 Completando quadrados: representação algébrica

O passo primordial para completarmos quadrados (**algebricamente**) na resolução de uma equação do 2º grau é lembrarmos dos seguintes produtos notáveis:

$$(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2.$$

,

$$(x - k)^2 = x^2 - 2kx + k^2.$$

Note que, o lado direito de ambas as equações postas anteriormente é chamado *trinômio quadrado perfeito*. É natural pensarmos em x como uma incógnita real e em k como um número real qualquer conhecido. Assim, como o coeficiente de x^2 é igual a 1, basta dividirmos $\pm 2k$ por 2, obtendo assim $\pm k$ e, finalmente elevando $(\pm k)^2$, obtendo k^2 .

Assim, para expressões do tipo $x^2 \pm bx$, completar quadrados significa somar algum termo a mesma para que o resultado seja um quadrado perfeito. Pelo que vimos anteriormente, o termo a ser adicionado pode ser obtido tomando o valor do coeficiente x , ou seja, $\pm b$, dividindo-o por 2 e, em seguida, elevando-o ao quadrado, obtendo assim $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, ou seja,

$$x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 \pm 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$$

Uma consideração importante sobre o exposto anteriormente, é que ao somarmos o termo $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ com a expressão $x^2 \pm bx$, o valor inicial fica alterado, ou seja, diferente da expressão original. Assim, se quisermos obter o mesmo valor original, faz-se necessário subtrair novamente o termo adicionado à $x^2 \pm bx$.

Assim,

$$x^2 \pm bx = x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Para equações do tipo $x^2 \pm bx = c$, ao somarmos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 \pm bx = c &\Leftrightarrow x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \\ &\Leftrightarrow \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c. \end{aligned}$$

Uma consideração muito importante a se fazer sobre o lado direito da equação é que deve sempre ser $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \geq 0$, assim

Para o caso $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \geq 0$, a equação admite raízes reais;

Para o caso $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c < 0$, a equação não admite raízes reais.

A generalização do caso geral, ou seja, para $a \neq 0$, será feita na próxima subseção, onde usamos para deduzir a fórmula resolutive de equações do 2º grau, atribuída erroneamente a *Bhaskara*. Sobre esse fato, tecemos alguns comentários na Seção 3.4.

4.3.2 Generalização da fórmula de equação do 2º grau: método algébrico

Generalizando a ideia de completar quadrados, podemos chegar a uma fórmula para resolver **qualquer equação do 2º grau**, incompleta ou completa, com o primeiro membro sendo um trinômio quadrado perfeito ou não. Consideremos a equação genérica do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes a, b e c reais e $a \neq 0$.

Dividindo ambos os membros dessa equação por a , obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \quad (4.1)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}. \quad (4.2)$$

Completamos o quadrado do primeiro membro somando $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}. \quad (4.3)$$

Nota-se que

- $x^2 =$ quadrado de x ;
- $\frac{b}{a}x = 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a}$;
- $\frac{b^2}{4a^2} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Fatorando o trinômio quadrado perfeito do primeiro membro da equação e transformando o segundo membro em uma única fração, obtemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (4.4)$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, obtemos:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}. \quad (4.5)$$

A passagem da Equação 4.4 para Equação 4.5 só tem sentido quando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Também faz-se necessário comentar que, uma vez que $\sqrt{4a^2} = 2|a|$ e $|a| = \pm a$, tem-se

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (4.6)$$

Isolando o x no primeiro membro, obtemos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (4.7)$$

Finalmente, obtemos a fórmula resolvente para equações do 2º grau.

4.3.3 Generalização da fórmula de equação do 2º grau: método geométrico

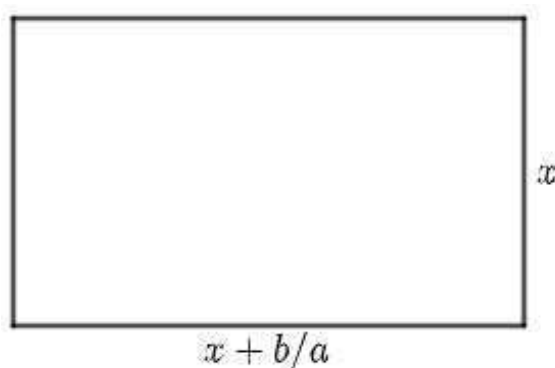
A equação genérica do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes a, b e c reais e $a \neq 0$.

Dividindo ambos os membros dessa equação por a , obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

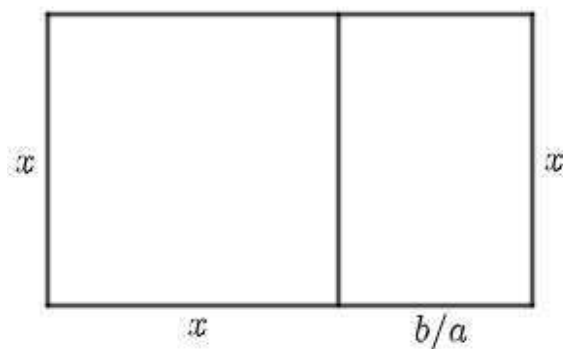
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}. \quad (4.8)$$

Consideremos um retângulo de base $x + \frac{b}{a}$ e altura medindo x , como podemos observar a seguir:



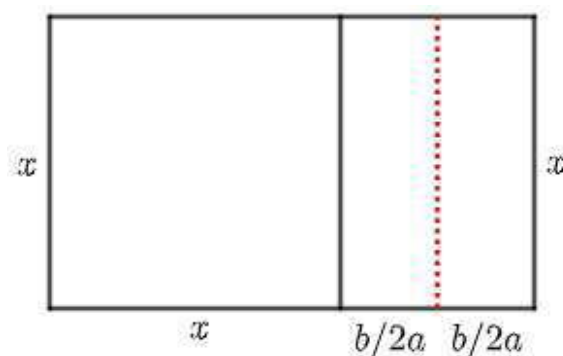
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Divida o retângulo em duas partes, de modo que, tenhamos um quadrado de lado x e um retângulo de base b/a e altura x , como podemos observar a seguir:



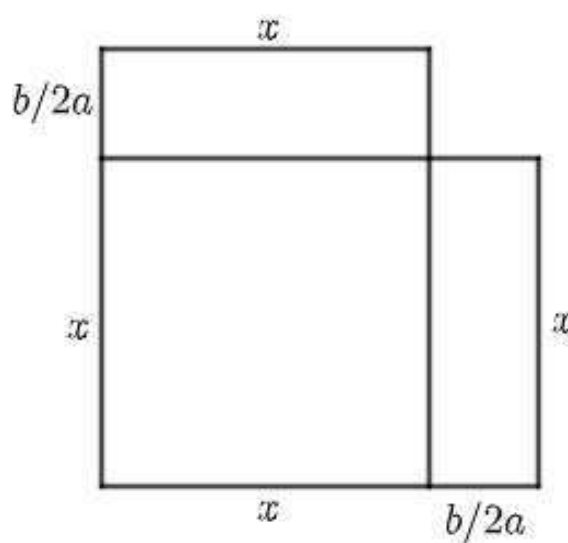
Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Dividindo o retângulo de base b/a e altura x em outros dois de base $\frac{b}{2a}$ e altura x , temos



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

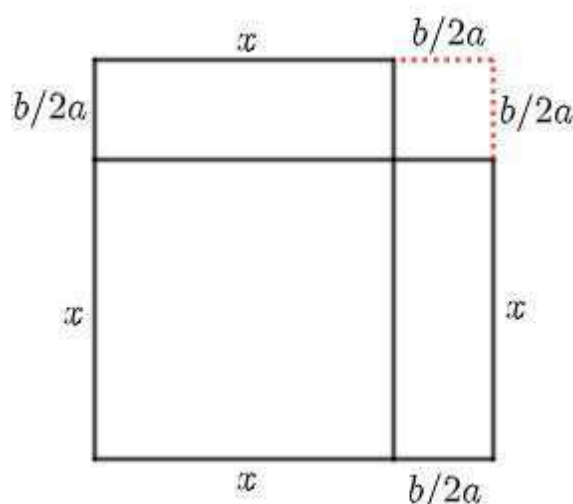
Reorganizando o retângulo de maneira estratégica, obtemos:



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Temos então que a área da figura anteriormente construída é exatamente $x^2 + \frac{b}{a}x$, que pelo Item 4.8, tem o seu valor igual a $-\frac{c}{a}$.

Vamos completar geometricamente, a figura anteriormente construída, de modo que ela se torne um quadrado com a menor área possível, ou seja, com lados medindo $x + \frac{b}{2a}$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Nota-se que tal processo geométrico é análogo ao processo algébrico no primeiro membro de 4.3, uma vez que adicionamos um quadrado de lado $\frac{b}{2a}$, com área $\frac{b^2}{4a^2}$ como indica a figura anterior.

Logo, se antes a área da figura era igual a $-\frac{c}{a} \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right)$, como foi acrescido um quadrado de lado medindo $\frac{b}{2a}$ a figura anterior, a área que antes era, $-\frac{c}{a}$ aumentará de $\frac{b^2}{4a^2}$.

Igualando os valores da área do quadrado completado, temos então

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Concluimos que este método para dedução da fórmula resolvente para equações do 2º grau, utiliza-se de recursos geométricos, e baseia-se em *completamento de quadrados*.

A seguir trataremos de algumas propriedades relacionadas as raízes de uma equação do 2º grau.

4.3.4 Soma e produto das raízes

Suponha que a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ admita duas raízes, sendo elas x_1 e x_2 ; vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$.

Sejam $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, então

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

4.3.5 Forma fatorada

Seja a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e raízes x_1 e x_2 . Então, a equação pode ser escrita na forma $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, que é a chamada **forma fatorada** da equação de 2º grau (lembre que fatorar uma expressão algébrica significa escrevê-la sob a forma de multiplicação).

Vamos mostrar tal propriedade. Notemos inicialmente que

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right).$$

Lembrando que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 \right] \\ &= a \left[x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 \right] \\ &= a \left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \right] \\ &= a \left[(x - x_1) \cdot (x - x_2) \right] \end{aligned}$$

Assim, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Exemplo 3. Dada a equação do 2º grau $x^2 + 2x - 24$, determine:

a) As suas raízes, se existirem;

Assim, devemos ter $x^2 + 2x - 24 = 0$, ou seja

Completando quadrado na equação $x^2 - 2x - 24 = 0$, temos

$$x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 = 24 + 1^2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 25 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow$$

$$x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6 \text{ ou } x - 1 = -5 \Rightarrow x = -4$$

Donde segue que seus zeros são 6 e -4.

b) A forma fatorada dessa equação.

Sabendo que $a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ é a forma fatorada de qualquer equação do 2º grau, então

$$(x - 6) \cdot (x - (-4)) \Rightarrow (x - 6) \cdot (x + 4), \text{ que é a forma fatorada de } x^2 - 2x - 24.$$

4.4 Função polinomial do 2º grau

Nesta seção, apresentamos algumas definições, propriedades e conceitos a respeito do estudo da função polinomial do 2º grau.

Definição 4.3. Chama-se **função quadrática**, ou **função polinomial do 2º grau**, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cuja lei é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a , b e c são números reais e $a \neq 0$.

Exemplo 4. Vamos analisar algumas situações:

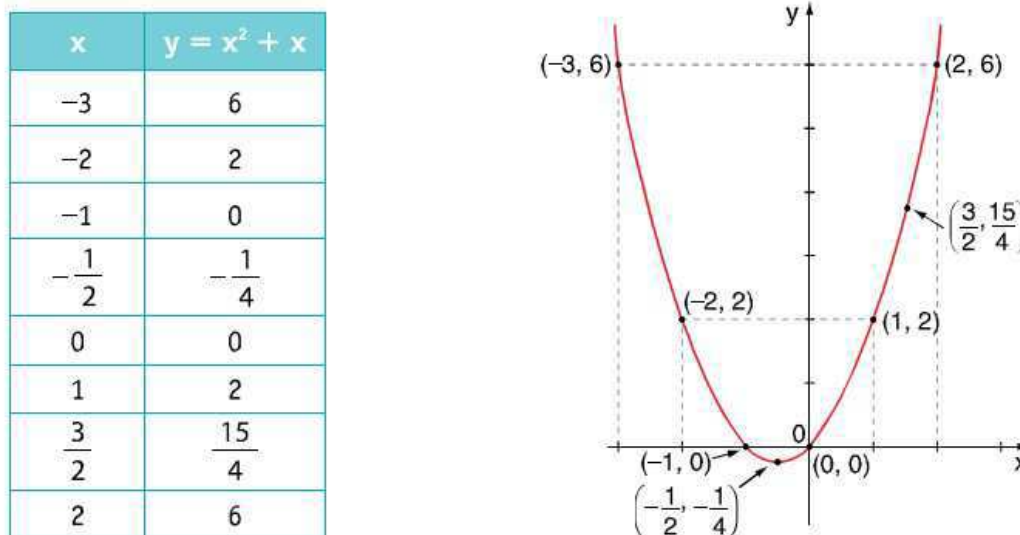
- $f(x) = 3x^2 + 3x + 4$, sendo $a = 3, b = 3$ e $c = 4$;
- $g(x) = x^2 - 4$, sendo $a = 1, b = 0$ e $c = -4$;
- $h(x) = -x^2 + 6x$, sendo $a = -1, b = 6$ e $c = 0$;
- $t(x) = -7x^2$, sendo $a = -7, b = 0$ e $c = 0$.

4.4.1 Gráfico

A seguir apresentamos os gráficos de algumas funções polinomiais do 2º grau e em seguida algumas propriedades do gráfico para tais funções.

Exemplo 5. Para construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = x^2 + x$, atribuímos a x alguns valores (observe que o domínio de f é \mathbb{R}), calculamos o valor correspondente de y para cada valor de x e, em seguida, ligamos os pontos obtidos:

Figura 8 – Tabela e gráfico associados ao Exemplo 5

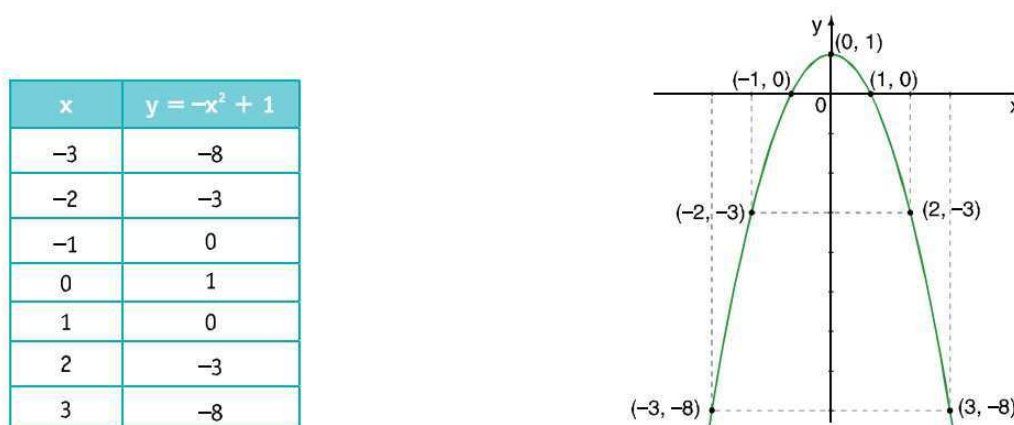


Fonte: (IEZZI et al., 2014, p. 129).

Note que, a função $f(x) = x^2 + x$ tem como imagem $[-\frac{1}{4}, +\infty)$.

Exemplo 6. Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = -x^2 + 1$. Repetindo o procedimento usado no exemplo anterior, temos:

Figura 9 – Tabela e gráfico associados ao Exemplo 6



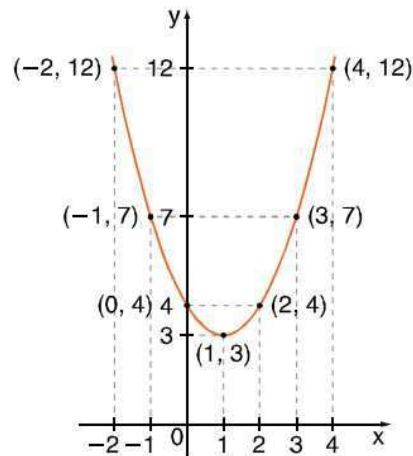
Fonte: (IEZZI et al., 2014, p. 129).

Note que, a função $f(x) = -x^2 + 1$ tem como imagem $(-\infty, 1]$.

Exemplo 7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 2x + 4$:

Figura 10 – Tabela e gráfico associados ao Exemplo 7

| x | $y = x^2 - 2x + 4$ |
|----|--------------------|
| -2 | 12 |
| -1 | 7 |
| 0 | 4 |
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |
| 3 | 7 |
| 4 | 12 |



Fonte: (IEZZI et al., 2014, p. 129).

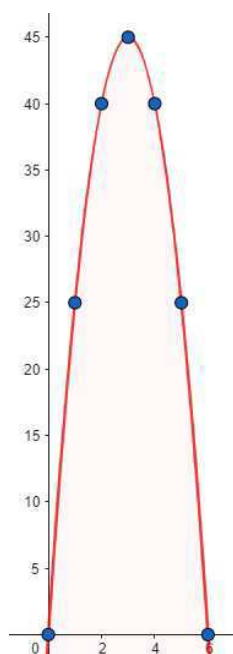
Note que, a função $f(x) = x^2 - 2x + 4$ tem como imagem $[3, +\infty)$.

Em cada um dos três exemplos anteriores, a curva obtida com a construção do gráfico é chamada **parábola**. De modo geral, é possível mostrar que todo gráfico associado a qualquer função polinomial do 2º grau dado por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola.

Um fato a ser considerado é que, algumas situações do cotidiano são, e podem, ser modelados por uma função polinomial do 2º grau. Vejamos:

Exemplo 8. A expressão $h(t) = 30t - 5t^2$ descreve a trajetória de uma bola de futebol após um chute de um jogador. Nessa expressão, $h(t)$ indica, em metros, a altura da bola em cada instante t (segundos) após o chute.

Figura 11 – Gráfico associado ao Exemplo 8



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

- Construindo e analisando o gráfico da função $h(t) = 30t - 5t^2$, nota-se que a altura máxima atingida pela bola de futebol é 45m.
- Percebe-se também que após 6 segundos do chute a bola toca novamente o solo.

Sigamos a nossa conversa, tecendo mais algumas observações.

Ao construir o gráfico de uma função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$, notamos sempre que:

- Se $a > 0$, então a parábola tem a concavidade voltada para cima, como podemos ver nos Exemplos 5 e 7;
- Se $a < 0$, então a parábola tem a concavidade voltada para baixo, como podemos ver no Exemplo 6.

Definição 4.4. Chamam-se **zeros da função polinomial do 2º grau**, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Em outras palavras, os zeros de uma função polinomial do 2º grau dada por $y = ax^2 + bx + c$, são os valores (se existirem) de x , associados as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplo 9. Vamos determinar os zeros da função de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Temos $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$.

Então, pela fórmula resolutiva para equações do 2º grau

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}, \text{ donde segue que}$$

$x' = 3$ e $x'' = 1$, ou seja, a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem como zeros 1 e 3.

Observação: A quantidade de zeros reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado **discriminante**:

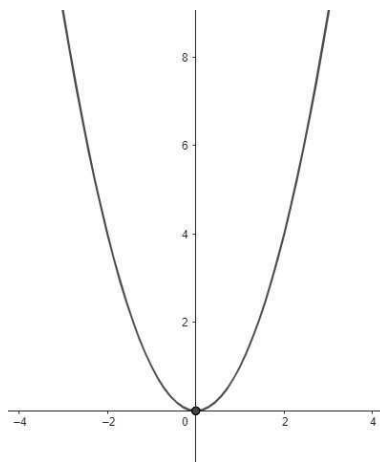
- Quando Δ é positivo, a função tem dois zeros reais e distintos;
- Quando Δ é zero, a função tem dois zeros reais iguais (ou um zero duplo);
- Quando Δ é negativo, não há zeros para essa função.

4.4.2 Coordenadas do vértice da parábola

Nosso objetivo é obter as coordenadas de um ponto V , chamado vértice da parábola.

Definição 4.5. Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem um mínimo em x_0 , se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

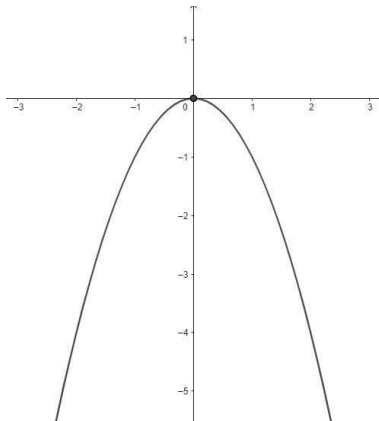
Exemplo 10. A função $f(x) = x^2$ tem um mínimo em 0, pois $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O gráfico a seguir ilustra melhor essa situação:



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Essa situação pode ser perfeitamente vista nos Exemplos [5](#) e [7](#).

Definição 4.6. Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem um máximo em x_0 , se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O gráfico a seguir exemplifica geometricamente essa situação:



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Essa situação pode ser perfeitamente vista no Exemplo 6.

Uma função quadrática tem um ponto de máximo ou mínimo a depender do valor de a , como foi definido e visto em 4.5 e 4.6, esses resultados serão demonstrados em 4.2 e 4.3.

Assim, vamos retomar a fórmula que define a função quadrática e escrevê-la de outra forma:

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right), \quad (4.9)$$

$$y = a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right], \quad (4.10)$$

$$y = a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right], \quad (4.11)$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right], \quad (4.12)$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]. \quad (4.13)$$

Essa última forma é denominada **forma canônica** da função quadrática.

Observando a forma canônica, podemos notar que a , $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes. Apenas x é variável.

Daí:

Proposição 4.2. Se $a > 0$, então o valor mínimo de y é estabelecido quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$; como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$; nessa situação y é:

$$y = a \left[0 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Proposição 4.3. Se $a < 0$, por meio de raciocínio semelhante concluímos que o valor máximo de y ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$, nessa situação, o valor máximo de y é:

$$y = a \left[0 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Conclui-se em ambos os casos que o máximo ou mínimo da função quadrática ocorre quando $x = -b/2a$. Neste caso, $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

O ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado de **vértice da parábola**.

Denota-se o vértice da parábola por $V(x_V, y_V)$, onde $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.

Exemplo 11. Dada a função $y = -2x^2 + 20x - 3$, vamos determinar as coordenadas do seu vértice usando a forma canônica.

Seja a função $y = -2x^2 + 20x - 3$, temos

$$y = -2x^2 + 20x - 3 = -2 \left(x^2 - 10x + \frac{3}{2} \right) \Rightarrow$$

$$y = -2 \left[(x^2 - 10x + 5^2) - 5^2 + 3 \right] \Rightarrow$$

$$y = -2 \left[(x^2 - 10x + 5^2) - (5^2 - 3) \right] \Rightarrow$$

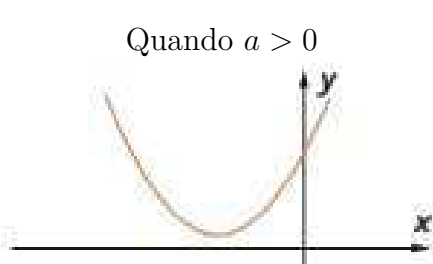
$$y = -2 \left[(x - 5)^2 - 47 \right].$$

Assim, as coordenadas do vértice da parábola são $(5, 47)$.

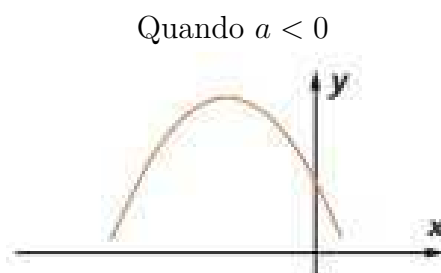
4.4.3 A função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e a influência dos seus parâmetros no gráfico

Vamos estudar os efeitos dos parâmetros a , b e c na parábola que é gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- **Parâmetro a :** O parâmetro a é responsável pela concavidade e abertura da parábola.

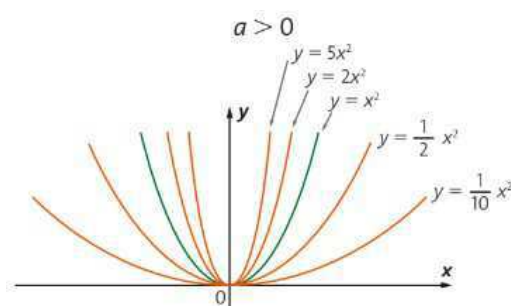


Fonte: (DANTE, 2016, p. 118).

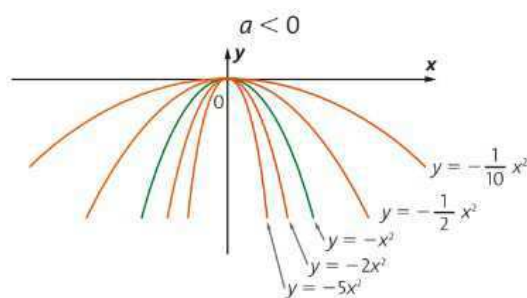


Fonte: (DANTE, 2016, p. 118).

Um comentário pertinente a se fazer é que, quanto maior o valor absoluto de a , menor será a abertura da parábola (parábola mais “fechada”), independentemente da concavidade ser para cima ou para baixo. As figuras a seguir exemplificam esses comentários.



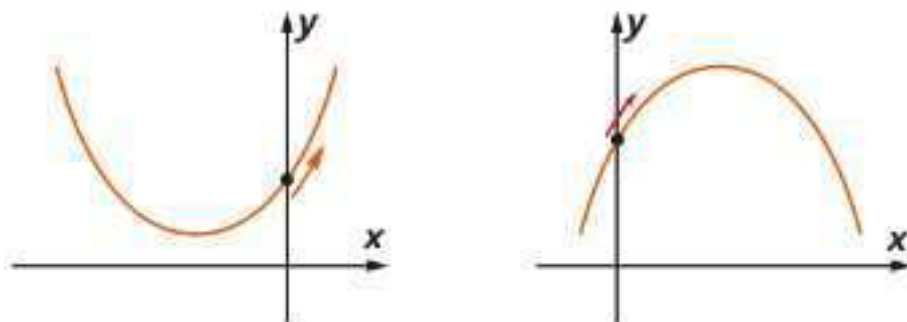
Fonte: (DANTE, 2016, p. 118).



Fonte: (DANTE, 2016, p. 118).

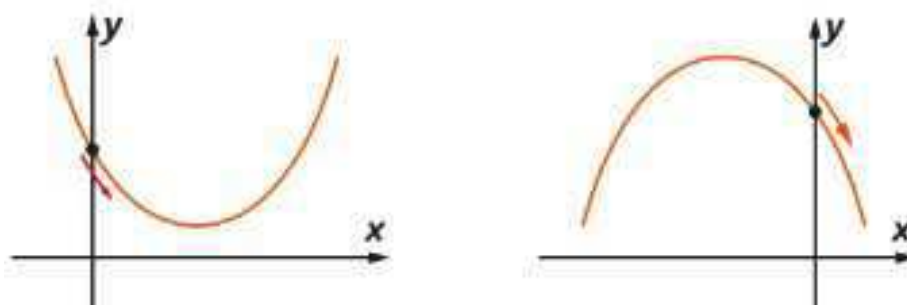
- **Parâmetro b :** O parâmetro b indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente da parábola.

1º caso: Se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente.



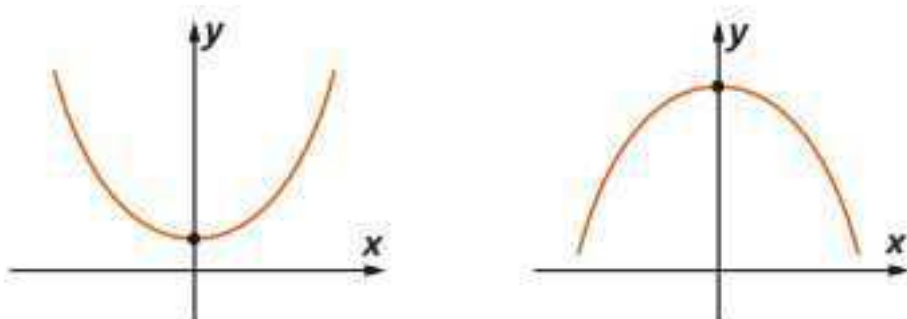
Fonte: (DANTE, 2016, p. 118).

2º caso: Se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente.



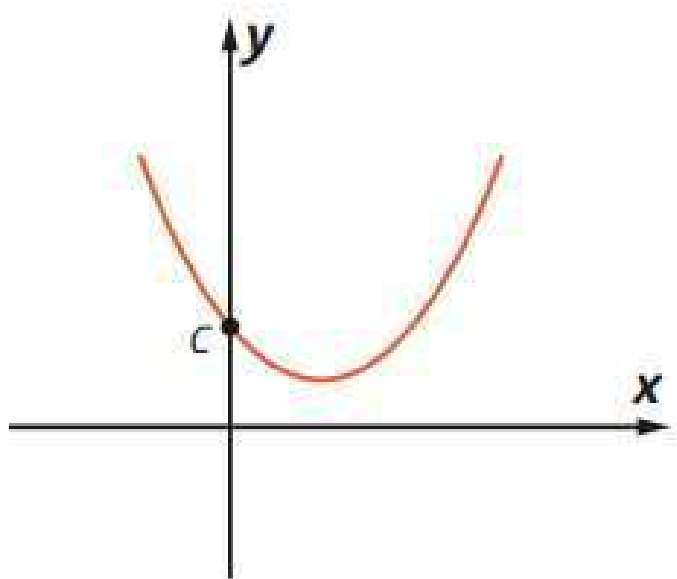
Fonte: (DANTE, 2016, p. 118).

3º caso: Se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo y no vértice.



Fonte: (DANTE, 2016, p. 118).

- **Parâmetro c :** O parâmetro c indica o ponto onde a parábola intersecta o eixo y .



Fonte: (DANTE, 2016, p. 119).

Note que, a parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$, ou seja, $f(0) = c$.

Entender a influência dos parâmetros na construção do gráfico, pode ajudar na resolução de problemas que remetam a sua análise.

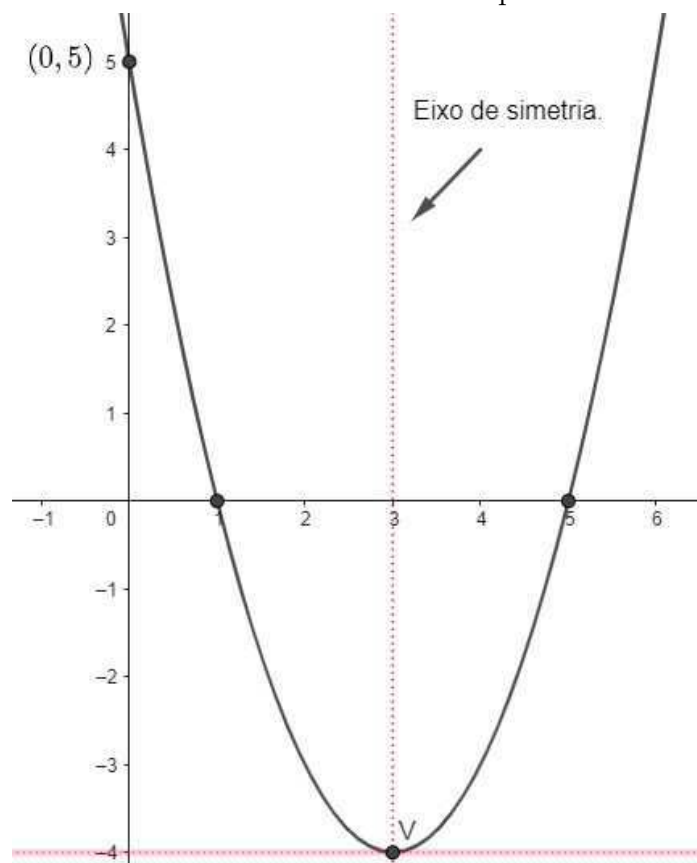
4.4.4 Construção da parábola sem o auxílio da tabela

Munidos das definições anteriores, é possível construir o gráfico de uma função do 2º grau sem o auxílio da tabela, construída a partir dos pares ordenados (x, y) , mas seguindo o roteiro de observações a seguir:

- O valor do coeficiente a define a concavidade da parábola;
- Os zeros da função definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo Ox ;
- O vértice $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou de máximo (se $a < 0$);
- A reta que passa por V e é paralela ao eixo Oy é o eixo de simetria da parábola;
- Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Então $(0, c)$ é o ponto em que a parábola intersecta o eixo Oy .

Exemplo 12. Façamos o esboço do gráfico da função quadrática dada por $y = x^2 - 6x + 5$.

Gráfico associado ao exemplo 12



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Características:

- Concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$;
- Intersecção com o eixo y :
 $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 - 5 = -5$, daí a parábola intersecta o eixo y em $(0, 5)$;
- Intersecção com o eixo x :
 $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 20 \Rightarrow \Delta = 16 > 0$ (a equação admite duas raízes reais distintas.), ou seja, $x = 1$ ou $x = 5$;
- As coordenadas do vértice podem ser dadas por $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, onde
 $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 1} = \frac{-16}{4} = -4$. Assim, $V = (3, -4)$.
- Note que, o conjunto imagem da função $y = x^2 - 6x + 5$ é dado por $[-4, +\infty)$;

Tais considerações são facilmente compreendidas observando o gráfico construído.

5 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Nesse capítulo, discorreremos sobre as sequências didáticas propostas em nosso trabalho. Na primeira delas tratamos sobre a resolução de problemas referentes aos estudos das equações do 2º grau, já na segunda, fizemos apontamentos no tocante a função polinomial do 2º grau. Antes de iniciarmos essas discussões, tecemos breves comentários a respeito do que a literatura considera como sequência didática e o que alguns autores apontam sobre.

5.1 Sequências didáticas: o que diz a literatura

Com a finalidade de buscar elementos que pudessem colaborar com o ensino de matemática *através* da Resolução de Problemas, encontrou-se nas sequências didáticas uma forma de estabelecer uma conexão com o objeto de estudo dessa pesquisa.

Segundo [Pais \(2015\)](#), p. 102, “a sequência didática é formada por um certo número de aulas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática”. O autor ainda justifica que a sua aplicação é também uma etapa importantíssima para garantir uma proximidade dos resultados práticos com a análise teórica, dando sustentabilidade a pesquisa.

Ao nosso crivo, uma sequência didática é um conjunto de ordenamentos metodológicos que visam organizar a execução prática de uma gama de atividades pré-definidas, buscando promover o ensino e aprendizagem dos conhecimentos, habilidades e competências pelo aluno, tendo o mesmo sempre como o centro de todo o processo.

Para [Zabala \(1998\)](#), p. 18, “sequência didática é como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. Ainda de acordo com o autor, uma sequência didática envolve etapas interligadas, mas disjuntas, que tem como objetivo principal conduzir os alunos para uma aprendizagem efetiva, gerando significado para eles.

Alinhado com uma visão construtivista da avaliação, Zabala (1998) preconiza algumas etapas que devem estar contidas em uma sequência didática, que são elas:

- **Ponto de partida:** antes mesmo de se chegar à sala de aula, o professor deve planejar suas atividades, buscando identificar o que os alunos têm de conhecimentos prévios, levando-os em consideração em todo o processo de realização das atividades.

- **Metas ao alcance dos alunos:** o professor deve delimitar metas e objetivos alcançáveis, que são diferentes para cada um dos alunos e grupos, pois eles têm pontos de partida diferentes, mas não se limitando apenas ao que o aluno já sabe.
- **Ajudas adequadas:** no processo de construção do conhecimento, quando surgirem obstáculos, o professor deve fazer questionamentos na busca de superá-los. Assim, a ajuda deve ser individualizada, já que nem todos aprendem da mesma forma, nem no mesmo ritmo e, portanto, tampouco o fazem com as mesmas atividades.
- **Organização e seleção do conteúdo:** o professor seleciona e organiza o conteúdo e os recursos que serão utilizados para atingir os objetivos de aprendizagem, tendo o aluno sempre como referencial.
- **Estratégias metodológicas:** o professor deve estar munido do maior número de meios e estratégias pedagógicas para poder atender às diferentes demandas que aparecerão no transcurso do processo de ensino-aprendizagem-avaliação.
- **Avaliação:** o professor estabelece critérios para avaliar o progresso do aluno e os resultados de aprendizagem ao longo da sequência.
- **Prolongamento:** O professor deve oportunizar aos alunos um aprendizado de maneira prática e significativa, trazendo significados para além da sala de aula.

Desse modo, faz-se necessário que a sequência didática tenha objetivos bem definidos, sujeitos envolvidos, conteúdos que serão abordados, conjunto de atividades que serão aplicadas em cada etapa e resultados esperados com toda a vivência dela. Assim, as seções a seguir trazem todas essas etapas, vivenciadas, apresentando - concomitantemente - sugestões de como se trabalhar com equações do 2º grau de acordo com essa perspectiva. Inicialmente, direcionamos nossos comentários e observações a respeito do estudo das equações do 2º grau.

5.2 Sequência didática I: estudo de equação do 2º grau e suas técnicas de resolução

Essa sequência didática foi pensada para ser vivenciada na transição entre o Ensino Fundamental Anos Finais e o 1º ano do Ensino Médio, ou seja, antes de se iniciar o conteúdo de função polinomial do 2º grau. Poderíamos dizer que ela é uma sequência de retomada para conteúdos e habilidades estudadas no Ensino Fundamental. A partir dela o professor pode direcionar e definir de onde deve-se começar (**ponto de partida**)

e o que os alunos precisam rever de conteúdos (**ressignificar a aprendizagem**), quando necessário. Assim, podemos dizer que ela vai orientar o professor sobre a retomada ou não do conteúdo de equação do 2º grau.

Tempo pedagógico: aproximadamente 10 aulas de 50 minutos cada, sendo:

- 2 aulas para explicação do percurso metodológico, aplicação do problema gerador, plenária e consenso;
- 4 aulas para formalização do conteúdo, demonstração de algumas formas da equação e exemplos aplicados a eles;
- 3 aulas para aplicação dos novos problemas;
- 2 aulas para as devolutivas por grupo e depois no geral.

***Vale salientar que o tempo pedagógico pode e deve ser ajustado a depender do nível de cada turma.**

Público: 1ª série do Ensino Médio.

Objetivos: Verificar o nível de compreensão no processo da Resolução de Problemas que possam ser representados e modelados por equações do 2º grau, aplicando algumas das técnicas de resolução, como também, compreender as etapas para resolução de problemas, fazendo inferências quanto ao resultado encontrado e sua plausibilidade como solução do problema.

Material Necessário: Caderno para anotações, impressões, lousa branca, pincel e apagador.

Desenvolvimento da sequência didática I

Momento I: Será apresentado aos alunos as 10 etapas preconizadas para resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021) e, em seguida, apresenta-se de forma impressa uma atividade denominada de Problema Gerador, que deverá ser resolvida em grupos de até 5 alunos. De acordo com as autoras, uma das etapas apontadas para Resolução de Problemas é a seleção ou elaboração de um problema, denominado “**Problema Gerador**”, cujo objetivo é de introduzir um novo princípio ou conceito matemático, nesse caso, o estudo das equações do 2º grau e as suas técnicas de resolução. Depois do desenvolvimento da atividade proposta, o tal problema será apresentado de forma escrita na lousa ou em anotações na folha e entregue ao grupo, onde na defesa das soluções serão feitos questionamentos por parte do professor. Nessa fase, o professor deve se comportar como um mediador, ou seja, deixará que os alunos exponham

suas ideias, mesmo que incompletas ou inconclusivas, e os direcionar para o conceito do conteúdo pretendido.

Problema gerador I - aplicado na sequência didática I

Os alunos do 1º ano foram desafiados pelo seu professor a descobrir as medidas de um terreno retangular. Para tal, o professor lhes concedeu algumas pistas:



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Com base nessas pistas, os alunos concluíram que o comprimento e a largura do terreno eram, respectivamente:

Justificativa: O problema gerador I, posto anteriormente, foi elaborado buscando contemplar as habilidades que julgou necessárias para introdução do conteúdo preterido, como também, retomar algumas habilidades que precisam ser ressignificadas e/ou aprofundadas. Assim, a mesma é justificada pela necessidade de que na etapa do Ensino Médio o aluno tenha domínio das representações algébricas, noção de incógnita, modelagem de uma equação, dada uma situação-problema, além da correlação de mais de um conteúdo para resolver situações diversas. Desse modo, o domínio desse conteúdo será de suma importância para as etapas posteriores da sequência didática.

Questionamentos: É importante o professor fazer algumas indagações como, o que seria um terreno retangular? O que vocês entendem como área de uma figura? Como medidas ou quantidades desconhecidas podem ser representadas na matemática? Como a junção de todas essas informações representam que modelo matemático? E enfatizar que em matemática o x **NÃO É LETRA**, e sim, representa no contexto de equação, uma incógnita.

Momento II: Nessa etapa o professor apresentará o conteúdo de equações do 2º grau, de maneira formal e estruturada em uma linguagem matemática, sustentada em algoritmos e conceitos bem definidos. Pode-se, também, formalizar tal conteúdo a partir do problema gerador ou não. Em seguida, haverá outras exemplificações e exposições dos diversos algoritmos.

Justificativa: O Momento II é de suma importância para grande parte do sucesso de toda a sequência didática, pois é nele que o professor vai ressignificar ou construir habilidades com insuficiência nos seus alunos. O problema gerador vai direcionar e mostrar esses possíveis déficits. Julgamos necessário o professor apresentar as diversas técnicas de resolução para equação do 2º grau, fazendo a demonstração de alguns resultados, a depender das necessidades de aprendizagem da turma. Outro fato é que o professor deve provocar seus alunos a interpretarem os resultados encontrados na resolução de um problema, bem como, justificar a solução encontrada, não bastando somente dominar os algoritmos.

Questionamentos: Depois da apresentação das técnicas de resolução é possível resolver o problema gerador? É possível resolver um problema que remete a uma equação por mais de uma técnica? É possível entender que por trás das fórmulas matemáticas tem uma justificativa plausível? As equações do 2º grau aparecem em problemas de natureza prática?

Momento III: Passada a etapa de formalização do conteúdo, será proposto aos grupos novos problemas em sala (entregues e recolhidos) com questões abertas referentes ao conteúdo, **etapa 10** do percurso metodológico.

PROBLEMAS PROPOSTOS - SEQUÊNCIA DIDÁTICA I

1 - (SAEPE¹ – Adaptada) - O lucro mensal, em reais, de uma empresa pode ser calculado pela expressão $n^2 - 12n + 32$, em que n representa a quantidade em milhares

¹ O Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) foi criado em 2000 com o objetivo de aferir o desempenho dos alunos da rede pública e fomentar mudanças na educação oferecida pelo estado. Fonte: <https://institucional.caeddigital.net/projetos/saepe-pe.html>

de produtos vendidos. Qual a quantidade de produtos, em milhares, no mínimo, que essa empresa tem que vender para que o seu lucro seja nulo?

Fonte: <https://profwarles.blogspot.com/2020/03/d17-quiz-por-descritor-mat-3-serie-em.html>.

Acesso em: 05/10/2022

2 - **(Elaborado pelo autor - 2022)** - Com a finalidade de organizar os 340 alunos do 1º ano na quadra da EREM (Escola de Referência em Ensino Médio) André Cordeiro, de maneira que todas as fileiras contassem com a mesma quantidade de alunos, o professor de Artes pediu que Gabriel fizesse essa organização, de modo que, os alunos fossem distribuídos em $n + 3$ fileiras, sendo cada fileira contendo n alunos. Para atender o pedido do professor, Gabriel concluiu que cada fileira deveria ter quantos alunos?



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

3 - **(Elaborado pelo autor - 2022)** - Um grupo de alunos do 1º B combinou de se reunir para lanchar em um restaurante. A conta de todos os lanches foi de R\$300,00; que foi dividido igualmente entre todos eles. Durante a divisão, dois alunos perceberam que estavam sem suas carteiras, o que fez com que o grupo de alunos redistribuísse o valor da conta. Na nova redistribuição cada aluno pagou R\$5,00 a mais em relação a primeira conta. Com base nessas informações pode-se concluir que a quantidade de alunos e o valor pago no final por cada um foi de:

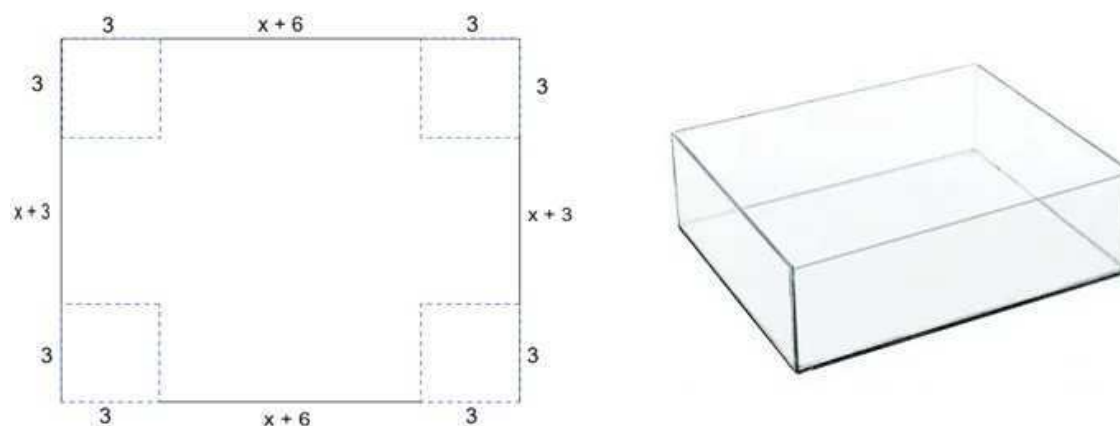
4 - **(Elaborado pelo autor - 2022)** - Brejo da Madre de Deus é o único município de Pernambuco que tem o cultivo de morango orgânico consolidado, o que se deve às condições climáticas e topográficas dos brejos, onde chove mais. Localiza-se no ponto mais alto do estado, a Serra da Boa Vista, mais conhecida como Serra do Ponto, situada no Planalto da Borborema. Lá, as/os agricultoras/es utilizam tecnologias sofisticadas.



Fonte: <<https://www.fetape.org.br/noticias-detalle/brejo-da-madre-de-deus-a-capital-agroecologi\ca-de-pernambuco/6221#.YzWXhHbMLIU>>. Acesso em 08/10/2022.

Seu José e Dona Maria são agricultores que plantam morango orgânico e pretendem dobrar a área de produção para $6000m^2$, para tal, eles pretendem aumentar uniformemente o comprimento e a largura da área plantada, que tem formato retangular, medindo $30m \times 100m$. Para que a necessidade de seu José e dona Maria seja atendida, de quantos metros deve ser esse acréscimo nas dimensões da área plantada?

5 – **(Elaborado pelo autor - 2022)** - Nas aulas de matemáticas o professor Benildo entregou aos seus alunos uma folha de papel com formato retangular com algumas marcações, pediu que seus alunos cortassem quadradinhos de $9cm^2$, marcados nos cantos, em seguida pediu que eles dobrassem seus lados, obtendo uma caixa com $120cm^3$ de volume, como mostra a representação abaixo.



Com base nessas informações, determine as dimensões dessa caixa.

Justificativa: A aplicação de novos problemas vai direcionar o professor no tocante a evolução dos grupos, como também, mostrará alguma lacuna que, porventura, ficou

na formalização do conteúdo. É importante organizar os novos problemas por ordem de dificuldade, como também diversificar os seus tipos.

Questionamentos: É possível relacionar as questões postas ao conteúdo estudado? É possível construir um modelo matemático para alguns desses problemas? Alguns desses problemas têm significado social para a nossa realidade? As aulas vivenciadas até aqui contribuíram de alguma maneira para responder esses novos problemas?

Momento IV: Nessa fase, após a aplicação dos novos problemas, o professor realizará a devolutiva deles, fazendo uma conversa grupo a grupo, como também, apresentará uma correção coletiva, buscando esclarecer possíveis lacunas.

Avaliação: Para sistematização do processo, é importante fazer questionamentos objetivos e subjetivos acerca da atividade, além de, buscar entender as dificuldades em cada etapa de resolução dos problemas. Tal processo de avaliação, consiste nas realizações das atividades, desde o problema gerador, até, a participação ativa nas contribuições diante do desenvolvimento das atividades propostas. Vale salientar, que na Metodologia de Resolução de Problemas o aluno ou grupos são avaliados cotidianamente. Assim, não se busca medir quem sabe mais ou quem sabe menos, pois, tudo que o aluno consegue produzir e evoluir é levado em consideração. Logo, reitera-se que o Ensino-Aprendizagem-Avaliação é um processo inseparável.

5.3 Sequência didática II: estudo da função polinomial do 2º grau ou função quadrática

Essa sequência didática foi elaborada para dar continuidade aos estudos dos problemas do 2º grau, em particular, o estudo da função polinomial do 2º grau. Assim, espera-se que na sua vivência os alunos possam abstrair e aprofundar habilidades consolidadas na sequência I, para que as novas habilidades sejam consolidadas.

Tempo pedagógico: aproximadamente 10 aulas de 50 minutos cada, sendo:

- 2 aulas para explicação do percurso metodológico, aplicação do problema gerador, plenária e consenso;
- 4 aulas para formalização do conteúdo, demonstração de algumas formas da equação e exemplos aplicados a eles;
- 3 aulas para aplicação dos novos problemas;
- 2 aulas para as devolutivas por grupo e depois no geral.

***Vale salientar que o tempo pedagógico pode e deve ser ajustado a depender do nível de cada turma.**

Público: 1^a série do Ensino Médio.

Objetivos: Verificar o nível de compreensão no processo de Aprendizagem *através* da Resolução de Problemas que possam ser representados e modelados por uma função polinomial do 2^o grau, aplicando algumas das técnicas de resolução e propriedades. Espera-se, também, que os alunos possam compreender as etapas para resolução de problemas, correlacionando alguns fenômenos do cotidiano com o conteúdo preterido, fazendo inferências quanto ao resultado encontrado e sua plausibilidade como solução do problema.

Material Necessário: Caderno para anotações, impressões, lousa branca, pincel e apagador.

Problema gerador II - aplicado na sequência didática II

As noções de área e perímetro de figuras planas são primordiais para compreendermos situações do nosso cotidiano. Pensando nisso, o professor de matemática desafiou seus alunos com a seguinte situação:



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Com base no exposto pelo professor, os alunos concluíram que tal terreno tem comprimento, largura e área, respectivamente iguais a:

Justificativa: O problema gerador II, posto anteriormente foi elaborado por esse pesquisador, buscando contemplar as habilidades que julgou necessárias para introdução do conteúdo preterido, como também, retomar algumas habilidades que precisam ser ressignificadas e/ou aprofundadas. Assim, a habilidade (EM13MAT506) de (BRASIL, 2018) preconiza que o aluno deve representar as relações que estão ligadas a

variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. O problema proposto busca provocar o alunos sobre esses fatos. Desse modo, o domínio das noções preliminares desse conteúdo será de suma importância para as etapas posteriores da sequência didática.

Questionamentos: É importante o professor fazer algumas indagações como, o que seria um terreno retangular? O que define uma figura plana para que ela seja classificada como retângulo? O que foi possível perceber em relação a área da figura quando as medidas dos lados se aproximavam? Como medidas ou quantidades desconhecidas podem ser representadas nesse problema? Como a junção de todas essas informações pode representar um modelo matemático? E enfatizar que no contexto de problemas que envolvem funções, passamos da ideia de incógnita para variável.

Momento II: Nessa etapa, o professor apresentará o conteúdo de função polinomial do 2º grau, de maneira formal e estruturada em uma linguagem matemática, sustentada em algoritmos e conceitos bem definidos. Pode-se, também, formalizar tal conteúdo a partir do problema gerador ou não. Em seguida, haverá outras exemplificações e exposições dos diversos algoritmos e propriedades envolvidas.

Justificativa: O momento II é de suma importância para grande parte do sucesso de toda a sequência didática, pois é nele que o professor vai ressignificar ou construir habilidades que servirão de base para o estudo do conteúdo. Desse modo, o problema gerador vai direcionar e mostrar esses possíveis déficits. Entendo que é de suma importância o professor apresentar as diversas propriedades da função quadrática. Outro fato é que o professor deve provocar seus alunos a modelarem ou relacionarem situações do cotidiano a função quadrática, assim como, interpretarem os resultados encontrados na resolução de um problema, justificando a solução encontrada, não bastando somente dominar os algoritmos.

Questionamentos: Depois da apresentação do conceito de função polinomial do 2º grau e algumas propriedades associadas a mesma, é possível resolver o problema gerador usando algumas das técnicas apresentadas? É interessante que o professor peça a seus alunos que tentem responder o problema gerador novamente. É possível entender que por trás das funções matemáticas tem uma justificativa plausível? Algumas situações do cotidiano podem ser modeladas por uma função polinomial do 2º grau?

Momento III: Passada a etapa de formalização do conteúdo, será proposto aos grupos novos problemas em sala (entregues e recolhidos) com questões abertas referente ao conteúdo, **etapa 10** do percurso metodológico.

PROBLEMAS PROPOSTOS - SEQUÊNCIA DIDÁTICA II

1 – (**SAEPE**). Em uma partida de futebol um goleiro chuta uma bola e sua trajetória descreve uma parábola de equação $h(x) = 16x - 2x^2$, onde $h(x)$ representa a altura atingida pela bola dada em metros, e x a distância horizontal, também dada em metros.

Nessas condições, a altura máxima, em metros, atingida pela bola é:

- a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

Fonte: <https://profwarles.blogspot.com/> Acesso em 10/10/2022.

2 - **ENEM 2016 (Segunda Aplicação)** - Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade detetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no:

- a) 19º dia. b) 20º dia. c) 29º dia. d) 30º dia. e) 60º dia.

Fonte: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em 10/10/2022.

3 – (**Elaborado pelo autor - 2022**) - Um casal irá se casar brevemente. Para o seu casamento, eles contrataram um Buffet que realizará sua festa para 240 convidados. O Buffet cobrará R\$ 60,00 por pessoa, se todos os convidados comparecerem. Caso contrário, para cada convidado que faltar, será acrescentado a quantia de R\$ 2,00 por pessoa que comparecer.



Fonte: <https://wakke.co/como-ter-um-planejamento-financeiro-eficaz-na-sua-escola/>. Acesso em 10/10/2022.

Para que o *Buffet* lucre o máximo possível, quantas pessoas deverão faltar ao casamento?

4 - (Elaborado pelo autor - 2022)

Fast-food

“*Fast-food*” é uma expressão de origem inglesa que significa uma modalidade alimentar.

Ela demanda agilidade no preparo e consumo, onde as refeições devem ser preparadas e vendidas em pouco tempo. Daí a padronização, mecanização e a rapidez desse sistema. Assemelha-se ao de produção fordista das linhas de montagem, onde tudo é pensado para agilizar a produtividade.

Destacam-se as cozinhas bem equipadas, mas que produzem poucas variedades alimentares. Além disso, o ambiente de consumo é, muitas vezes, relativamente desconfortável, de modo a incentivar a rápida ingestão dos alimentos.

Devemos destacar, por outro lado, que esse fenômeno é, na realidade, uma evolução do sistema de restaurantes e lanchonetes do tipo *drive-in*. Esses estabelecimentos surgiram na Califórnia, na década de 40, e logo se espalharam pelo mundo.

O cardápio desses estabelecimentos é basicamente constituído de lanches, acompanhados por batatas fritas e outras frituras, além de refrigerantes. Eles são servidos para consumidores que possuem pouco tempo para realizar suas refeições.

Figura meramente ilustrativa



Fonte: <<https://www.todamateria.com.br/fast-food/>>. Acesso em 10/10/2022.

O dono de um restaurante *Fast-food* percebeu que, vendendo o combo a R\$ 20,00 em média tem 300 vendas efetuadas no mês e para cada redução de R\$ 1,00 no preço do combo, as vendas aumentam na quantidade de 30. Qual deve ser o preço dos combos para que a receita seja máxima?

5 – (Elaborado pelo autor - 2022) - Uma das fontes de renda de algumas famílias brejenses² é *Microempreendedor Individual (MEI)*, em particular, no ramo de confecções. O *Microempreendedor Individual (MEI)* é uma figura jurídica do Brasil, é

² brejense – cidadão nascido em Brejo da Madre de Deus - PE

a pessoa que trabalha por conta própria e que se legaliza como pequeno empresário. Para ser um microempreendedor individual é necessário faturar até oitenta e um mil reais por ano e não ter participação em outra empresa como sócio ou titular, o MEI também pode ter um empregado contratado que receba um salário mínimo ou o piso da categoria.

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Microempreendedor_individual> Acesso em 17/11/2022.

Nesse sentido, uma das oportunidades de empreendimentos mais próximas é o Moda center Santa Cruz.

Moda Center Santa Cruz



Fonte: <<https://www.modacentersantacruz.com.br/sobre>>. Acesso em 17/11/2022.

Localizado em Santa Cruz do Capibaribe (PE), o Moda Center Santa Cruz é o maior centro atacadista de confecções do Brasil. Ele reúne mais de 10 mil pontos comerciais, entre boxes e lojas, onde são comercializadas peças no atacado e no varejo. O centro inclui desde produtos populares a artigos mais trabalhados.

Suponhamos que um Microempreendedor Individual (MEI) produz peças de roupa e vende cada *mil peças* por 14 mil reais, além disso, seu custo de produção é dado pela multiplicação de cada mil peças adicionado de um custo fixo de 2 mil reais por milhares de peças vendidas. Considere a função $L(x)$, em que L fornece o lucro desse microempreendedor, em milhares, a partir das x unidades vendidas (em milhares) de seu produto ao longo de um ano.

a) Obtenha as funções custo, receita e lucro.

b) Determine o lucro máximo obtido por esse microempreendedor.

Justificativa: A aplicação de novos problemas vai direcionar o professor no tocante a evolução dos grupos, como também, mostrará alguma lacuna que porventura ficou na formalização do conteúdo. É importante organizar os novos problemas por ordem de dificuldade, como também, diversificar os seus tipos.

Questionamentos: É possível relacionar as questões postas ao conteúdo estudado? É possível construir um modelo matemático para alguns desses problemas? Alguns desses problemas têm significado social para a nossa realidade? As aulas vivenciadas até aqui contribuíram de alguma maneira para responder esses novos problemas?

Momento IV: Nessa fase, após a aplicação dos novos problemas, o professor realizará a devolutiva deles, fazendo uma conversa grupo a grupo, como também, apresentará uma correção coletiva, buscando esclarecer possíveis lacunas, e retomando alguns pontos que por ventura não ficaram esclarecidos.

Avaliação: Para sistematização do processo, é importante fazer questionamentos objetivos e subjetivos acerca da atividade, assim como, buscar entender as dificuldades em cada etapa de resolução dos problemas, principalmente na modelagem das funções e interpretação dos resultados encontrados. Tal processo de avaliação, consiste nas realizações das atividades, desde o problema gerador, até a participação ativa nas contribuições diante do desenvolvimento das atividades propostas. Vale salientar, que na Metodologia de Resolução de Problemas o aluno ou grupos são avaliados continuamente. Assim, não se busca medir quem sabe mais ou quem sabe menos, pois, tudo que o aluno consegue produzir e evoluir é levado em consideração. Logo, reitera-se que o Ensino-Aprendizagem-Avaliação é um processo inseparável.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para uma melhor compreensão da análise dos dados, explicamos os critérios adotados para a formação dos grupos participantes da intervenção. Foram compostos por no máximo 5 alunos e nomeados por códigos específicos, assim, a letra corresponde a respectiva turma e o número, a sua identificação naquela conjuntura. Desta maneira, as turmas são identificadas pelas letras A, B e C, e os grupos por números de 1 até 10. Ressaltamos que os participantes tiveram autonomia para comporem a formação dos grupos, e apenas alertei para que os grupos permanecessem os mesmos durante os encontros.

6.1 Apresentação e aplicação do problema gerador I

Pensamos em criar um problema que nos ajudasse a analisar os diferentes níveis de compreensão a respeito de algumas habilidades do Ensino Fundamental anos finais, que juntas remetessem a um problema do 2º grau, em particular, a compreensão sobre a noção de equação do 2º grau. A fim de corroborar com esse pensamento, Pironel e Vallilo (2017) comentam que

Quando o professor decide que o problema pode ser um ponto de partida para a construção de um novo conhecimento para o aluno, ele precisa se debruçar sobre a tarefa da escolha ou da elaboração de uma atividade que esteja alicerçada num problema ou numa situação-problema, cuja resolução seja o fio condutor da aprendizagem de determinado conteúdo pelo aluno (PIRONEL; VALLILO, 2017, p. 285).

Na busca de elementos que subsidiem esse ponto de vista e que propiciem a coleta de informações, Allevato e Onuchic (2014) acrescentam e esclarecem que uma atividade é chamada de problema gerador quando nenhum indicativo de caminho ou procedimento de resolução é deixado explícito para o aluno, visto que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula.

Assim, quando pensamos no problema gerador I, proposto a seguir, nossa intenção era verificar o nível de compreensão de algumas habilidades do Ensino Fundamental Anos Finais, pois a partir delas decorrem os conteúdos a serem estudados durante o percurso metodológico.

O Quadro 6.1 especifica as habilidades que tentamos retomar, ou até mesmo construí-las, na elaboração e aplicação do problema gerador I.

Quadro 6.1 – Quadro de Habilidades BNCC - Problema Gerador I

| Código da Habilidade | Objetivo da Habilidade |
|----------------------|---|
| (EF07MA13) | Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. |
| (EF08MA09) | Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. |
| (EF09MA09) | Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações do 2º grau. |
| (EF08MA19) | Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos) em situações como determinar medida de terrenos. |

Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Buscou-se identificar quais habilidades os alunos já haviam construído, sejam totalmente ou parcialmente. É importante frisar que a construção ou reconstrução de habilidades matemáticas é um processo contínuo, requerendo sempre ajustes na passagem de uma série para outra. Assim, a partir da metodologia evidenciada na pesquisa, pretendeu-se ampliar o que os alunos já traziam consigo, como veremos em relatos posteriores. No que diz respeito a essas observações, BNCC (BRASIL 2018) traz importantes contribuições, segundo ela

Diante dessas considerações, a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no **Ensino Fundamental**, para promover ações que **ampliem o letramento matemático** iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de **reflexão** e de **abstração**, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes **formular e resolver problemas** em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (BRASIL, 2018, p. 528 - 529, grifo meu).

A seguir, podemos observar o problema gerador I, aplicado aos grupos em sala de aula, cujo qual, abordou as quatro habilidades postas no Quadro 6.1.

Problema gerador I - aplicado no primeiro momento

Os alunos do 1º ano foram desafiados pelo seu professor a descobrir as medidas de um terreno retangular. Para tal, o professor lhes concedeu algumas pistas:



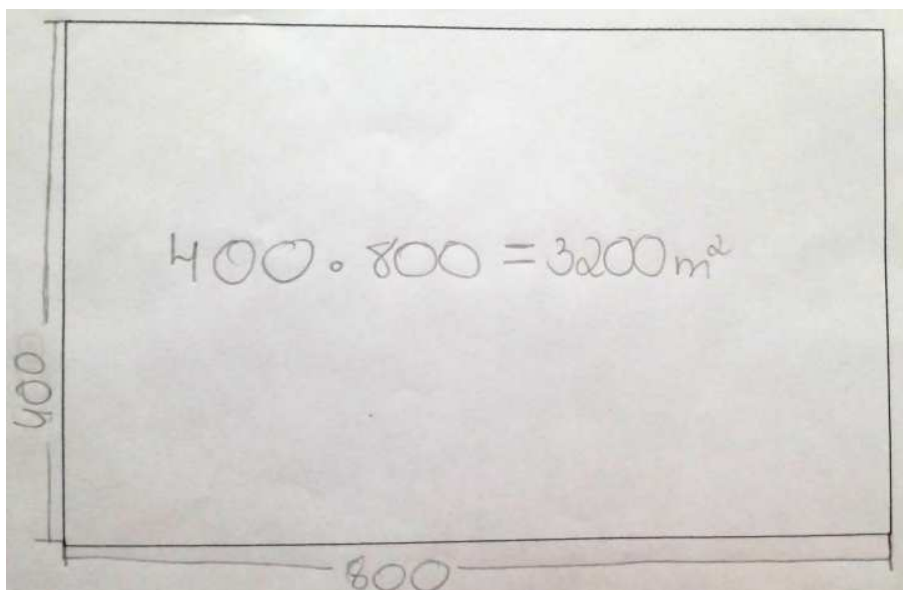
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Com base nessas pistas, os alunos concluíram que o comprimento e a largura do terreno eram, respectivamente:

A partir da apresentação do problema gerador, mediado pela Metodologia de Resolução de Problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021), foi oportunizado aos alunos explorarem tal problema, de modo que, cada grupo traçasse suas estratégias de resolução. À medida que os estudantes se envolveram em grupos e participaram da atividade proposta, foi construindo entendimentos para sua resolução, mostrando assim uma postura protagonista e proativa de alguns alunos. Durante o processo é natural surgirem resoluções diversas por parte dos alunos, até mesmo resoluções não esperadas, como foi possível constatar na aplicação de tal problema. Deste modo, analisamos três resoluções.

A seguir temos a solução apresentada pelo grupo B5 a respeito de tal problema, onde discorreremos alguns comentários no tocante a seus escritos.

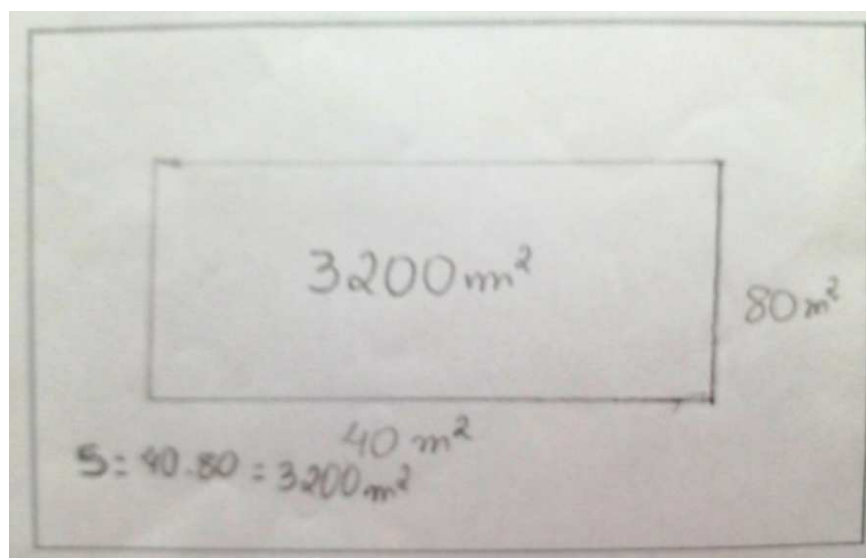
Figura 12 – Resolução do Problema Gerador I - Grupo B5 - Sequência Didática I



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Quanto a solução coletada do grupo **B5**, podemos perceber um problema no domínio de operações matemáticas básicas, por exemplo, na operação $400 \cdot 800 = 3200$. Podemos destacar que o grupo representou geometricamente o problema dado, mais um ponto que sentimos falta foi a não representação algébrica das medidas desconhecidas. A partir das observações colocadas, pode-se concluir que o grupo possuía lacunas consideráveis a respeito da maioria das habilidades relacionadas ao problema. A seguir, temos a resolução do problema gerado I, construída pelo grupo **C1**.

Figura 13 – Resolução do Problema Gerador I - Grupo C1 - Sequência Didática I



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na solução do problema gerador I, podemos observar a representação geométrica do problema dado, outro fato notório foi a apresentação de uma solução por meio do método dedutivo, testando apenas valores para se chegar ao resultado. Porém, houve a representação equivocada do comprimento e largura da figura plana dada, como também, quanto a unidade de medida. Vale salientar que o grupo não representou algebricamente as medidas desconhecidas, nem conseguiu criar um modelo algébrico para o mesmo. Assim, podemos concluir que o grupo cumpriu parcialmente o que esperávamos como resolução, porém, no processo de devolutiva se fez necessário alertar sobre os equívocos cometidos, pontuando posteriores avanços como: justificativa do resultado encontrado e representação algébrica do problema.

Agora vamos observar os escritos colhidos do grupo **A2** na resolução do problema gerador I, representados pela Figura 14.

Figura 14 – Resolução do Problema Gerador I - Grupo A2 - Sequência Didática I

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A solução desenvolvida pelo grupo contempla vários elementos que julgamos importante na resolução de um problema, dentre eles destacamos: Pensamento geométrico bem definido com a representação do terreno retangular, assim como, um pensamento abstrato evidente com a representação das medidas desconhecidas por incógnitas, fato esse importantíssimo no estudo de problemas que tem proximidades com a álgebra. Por fim, a junção de todos os pontos destacados anteriormente para deduzir uma equação a partir do problema proposto. Notou-se também a preocupação do grupo na verificação/validação dos resultados obtidos, com isso, entendemos que o grupo tem as habilidades avaliadas consolidadas.

Analisadas as soluções apresentadas pelos alunos, formalizou-se o conteúdo a ser estudado, em seguida, foram propostos novos problemas em acordo com as habilidades

da BNCC (BRASIL, 2018), Organizador Curricular de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2021) e Competências e Habilidades do ENEM (INEP, 2009). Ao entregar os problemas propostos, cerca de 5 Apêndice B, para que os grupos pudessem solucioná-los, foi concedido até 150 minutos, onde notou-se que alguns grupos já tinha uma melhor autonomia na condução e busca das soluções, por outro lado, alguns grupos sentiram um pouco de dificuldade em representar matematicamente alguns problemas preteridos. Outro fato curioso que iremos observar na análise dos resultados, é que alguns grupos demonstraram um pouco de dificuldade em interpretar as respostas encontradas, tendo eles desenvolvido a representação algébrica e os cálculos corretamente, mas não os utilizando na hora de expressá-los como resposta.

O encontro posterior foi utilizado para comentarmos os caminhos de solução adotados, como também a apresentação das resoluções, onde foi infatizado e discutido com os grupos as possíveis dificuldades na aprendizagem, seja ela total ou parcial.

6.1.1 Problemas propostos na sequência didática I e alguns recortes

Nessa subseção apresentamos alguns recortes das soluções apresentadas na primeira sequência didática, na qual nos deteremos a analisar os problemas 2, 4 e 5 da mesma, trazendo comentários a cerca da resolução de três grupos, denominados de **A1**, **B8** e **B9**. A imagem a seguir mostra o processo de aplicação desses problemas propostos, como podemos ver na Figura 15.

Figura 15 – Aplicação dos Novos Problemas - Sequência didática I



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A seguir, temos o Problema **02** aplicado aos diversos grupos.

Problema 02 - Com a finalidade de organizar os 340 alunos do 1º ano na quadra da EREM (Escola de Referência em Ensino Médio) André Cordeiro, de maneira que todas as fileiras contassem com a mesma quantidade de alunos, o Professor de Artes pediu que Gabriel fizesse essa organização, de modo que, os alunos fossem distribuídos em $n + 3$ fileiras, sendo cada fileira contendo n alunos. Para atender o pedido do professor, Gabriel concluiu que cada fileira deveria ter quantos alunos?



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Quando elaboramos, tal problema, pensamos em algo que era da nossa vivência na escola, desta forma, a imagem utilizada e o quantitativo de alunos expressos no problema são integrantes da nossa realidade. A ideia de organizá-los em filas também é algo que fazemos, por vezes, na vivência de alguns projetos. Assim, esperávamos familiaridade com a situação expressa no mesmo e que, de alguma maneira, eles remetessem essas vivências cotidianas para poder auxiliar a modelar o exposto.

A seguir, a Figura [16](#), representa a solução desenvolvida pelo grupo **A1**, acerca do Problema **02**.

Figura 16 – Resolução do Problema 02 - Grupo A1 - Sequência Didática I

$$\begin{array}{l}
 7 + 3 \cdot 7 = 70 \times \\
 10 + 3 \cdot 10 = 130 \times \\
 12 + 3 \cdot 12 = 180 \times \\
 16 + 3 \cdot 16 = 304 \times \\
 18 + 3 \cdot 18 = 378 \times \\
 17 + 3 \cdot 17 = 340 \checkmark
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 n + 3 \cdot n = 340 \\
 17 + 3 \cdot 17 = 340
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A resolução desenvolvida pelo grupo **A1**, apresenta-se uma solução correta, porém faltou deixar explícito o que corresponde ao número de alunos e ao número de fileiras, como também, a carência de uma representação algébrica para auxiliar o leitor na compreensão e significado de cada valor.

Nota-se também a ausência de parênteses para separar as operações, pois se usarmos as regras para ordens de prioridade das operações matemáticas, o cálculo estaria equivocado. Sugeri na devolutiva para o grupo que em soluções posteriores pudessem explorar ou representar mais o exposto. Tais recomendações não buscaram deslegitimar a solução apresentada, apenas contribuir para um melhor aperfeiçoamento da mesma. Nesse sentido, Pironel e Onuchic (2021) comentam que o erro não é visto com algo negativo ao processo e que deve ser descartado, mas como um elemento auxiliar e propulsor para a aprendizagem do aluno. Assim, essa interação professor-aluno pode e deve orientar e otimizar a aprendizagem.

Por fim, poderíamos dizer que o grupo cumpriu parcialmente o que era pretendido em tal problema, restando apenas pequenos ajustes a serem feitos.

Na Figura [17](#), apresenta-se a resolução desenvolvida pelo grupo **B8**, acerca do Problema **02**.

Figura 17 – Resolução do Problema 02 - Grupo B8 - Sequência Didática I

$$\begin{aligned}
 n+3 &= \text{Fileiras} \\
 n &= \text{alunos} \\
 n \cdot (n+3) &= 340 \\
 n^2 + 3n - 340 &= 0 \\
 \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\
 \Delta &= 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-340) \\
 \Delta &= 9 + 1360 \\
 \Delta &= 1369 \\
 n &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\
 n &= \frac{-3 \pm 37}{2} \\
 nI &= \frac{-3 + 37}{2} = \frac{34}{2} = 17 \Rightarrow 17+3 = 20 \text{ Fileiras} \\
 &\quad 17 \text{ alunos em cada fileira.} \\
 nII &= \frac{-3 - 37}{2} = \frac{-40}{2} = -20
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Alguns fatos que podemos destacar ao analisarmos a solução apresentada pelo grupo **B8**, é o destaque das informações $n + 3 = \text{fileiras}$ e $n = \text{alunos}$, como também a representação algébrica do problema que decorre posteriormente em uma equação do 2º grau e sua resolução por meio da fórmula resolvente, na qual representou as raízes por n , que era a incógnita do problema, distinguindo dos demais grupos, que “por força do hábito”, representaram a mesma na incógnita x . Passada a etapa de encontrar as raízes da equação, o grupo soube interpretar corretamente os resultados encontrados, usando a raiz positiva 17, para determinar a quantidade de alunos em cada fila, situação preterida na proposição do problema. Tal achado vem corroborar com a BNCC **BRASIL** (2018) que preconiza que os alunos devem desenvolver habilidades relativas aos processos de averiguação, representação, construção de modelos para resolução de problemas, e assim, o grupo fez. Além disso, devem mobilizar meios próprios de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e debater; buscando consensos com base em discussões, visando potencializar e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

Poderíamos dizer que o grupo apresentou uma resolução bem estruturada, desde a representação até a interpretação, do resultado final.

A seguir, a Figura **18**, representa os escritos do grupo **B9**, acerca do Problema **02**.

Figura 18 – Resolução do Problema 02 - Grupo B9 - Sequência Didática I

$$m^3 + 3m - 340 = 0$$

$$A = 1 \quad b = -3 \quad c = -340$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-340)$$

$$\Delta = 9 + 1360$$

$$\Delta = 1369$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{1369}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm 37}{2}$$

$$x' = \frac{-3 + 37}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

$$x'' = \frac{-3 - 37}{2} = \frac{-40}{2} = -20$$

tentando números chegamos que 17 x 20 dá 340

17 filas
20 alunos

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Quanto a solução apresentada pelo grupo **B9**, podemos observar que a mesma apresenta um caráter mecanizado, visto que, preocupou-se em reproduzir processos de maneira automática, sem explicá-los. Nota-se que o grupo conseguiu representar o problema algébricamente na incógnita n , mas por “vício” de escrita o resolveu na incógnita x . Outro fato a se destacar é a não diferenciação do que representavam *filas* e do que representavam *alunos*.

Nesse sentido, [Van de Walle \(2009\)](#) comenta que é imprescindível os alunos escreverem suas explicações no processo de resolução dos problemas. O autor enfatiza que tal fato é tão importante, que vale a pena esclarecer o valor da escrita e justificativa dos alunos, pois há grandes vantagens, independente da série. Uma delas é que o ato da escrita é um processo reflexivo, assim, os alunos se esforçarão para explicar a forma de raciocínio adotada, com isso, passarão a ter mais concentração no desenvolvimento dessas ideias envolvidas.

No proceso de devolutiva fez-se necessário recomendar ao grupo um melhor trato nos pontos levantados anteriormente, principalmente os processos de justificativa de cada etapa ou procedimento.

4 - (**Problema 04**) - Brejo da Madre de Deus é o único município de Pernambuco que tem o cultivo de morango orgânico consolidado, o que se deve às condições climáticas e topográficas dos brejos, onde chove mais. Localiza-se no ponto mais alto do estado, a Serra da Boa Vista, mais conhecida como Serra do Ponto, situada no Planalto da Borborema. Lá, as/os agricultoras/es utilizam tecnologias sofisticadas.



Fonte: <<https://www.fetape.org.br/noticias-detalle/brejo-da-madre-de-deus-a-capital-agroecologica-de-pernambuco/6221#.YzWXhHbMLIU>>. Acesso em 08/10/2022

Seu José e Dona Maria são agricultores que plantam morango orgânico e pretendem dobrar a área de produção para $6000m^2$, para tal, eles pretendem aumentar uniformemente o comprimento e a largura da área plantada, que tem formato retangular, medindo $30m \cdot 100m$. Para que a necessidade de seu José e dona Maria seja atendida, de quantos metros deve ser esse acréscimo nas dimensões da área plantada?

Na elaboração do Problema **04**, buscamos expressar um marco que está presente no cotidiano de alguns dos nossos alunos: a origem rural e a atividade de subsistência de suas famílias ligadas à agricultura. Assim, em diálogos em sala de aula, identificamos essa realidade, e por que não, essa potencialidade. Então, uma das formas de dar representatividade a esses sujeitos e suas realidades foi elaborar essa questão que consegue trilhar por diversas áreas do conhecimento.

A **competência específica 2**, preceituada por **BRASIL (2018)**, destaca que a participação do estudante em ações que busquem investigar os desafios do mundo contemporâneo com enfoque na sustentabilidade, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprias da Matemática. Nesse sentido, entendemos que o problema proposto favoreceu a interação entre os alunos, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Na Figura 19, discorreremos sobre a resolução do Problema 04, apresentadas pelo grupo A1.

Figura 19 – Resolução do Problema 04 - Grupo A1 - Sequência Didática I

$6000 = (30 + x) \cdot (100 + x)$
 $6000 = 3000 + 30x + 100x + x^2$
 $x^2 = 30x + 100x - 6000 + 3000$
 $x^2 = 130x - 3000$
 $a = 1 \quad b = 130 \quad c = -3000$
 $\Delta = 130^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3000$
 $\Delta = 16900 + 12000$
 $\Delta = 28900$
 $x = \frac{-130 \pm \sqrt{28900}}{2 \cdot 1}$
 $x = \frac{-130 \pm 170}{2 \cdot 1}$
 $x' = \frac{-130 + 170}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ (serve)}$
 $x'' = \frac{-130 - 170}{2} = \frac{-300}{2} = -150 \text{ (não serve)}$

A resposta é 20 pois é o único valor válido.
 Então o acréscimo nas dimensões é de 20 metros.

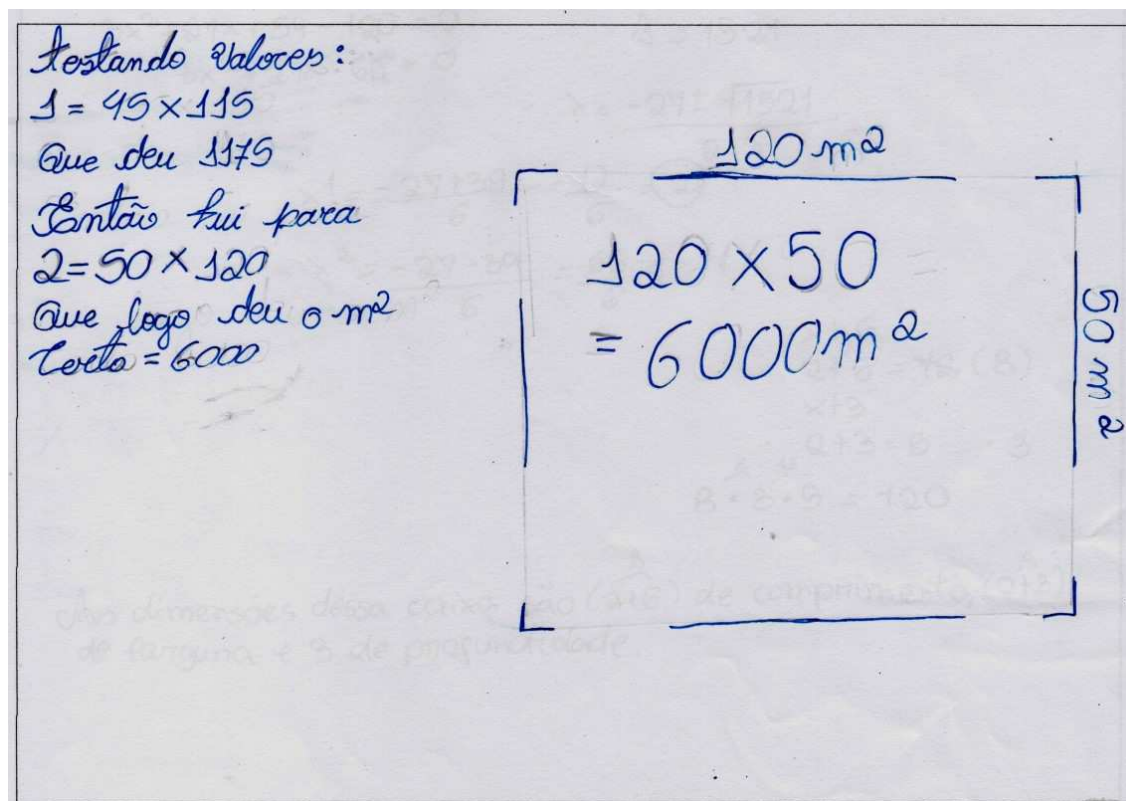
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na resolução apresentada, podemos perceber que o grupo interpretou e entendeu corretamente o que era proposto, assim, verificou-se a construção de um modelo matemático para representar o que era preterido, como também, constatou-se representação/incremento no comprimento e na largura a ser expressado por um valor desconhecido, a incógnita x . Nota-se que o grupo construiu um modelo matemático para representar o que era proposto, desenvolvendo, assim, o seu raciocínio até chegar em uma equação do 2º grau completa, resolvida pela fórmula resolutive, encontrando suas raízes e interpretando-as para determinar a solução correta para a equação. Daí, o grupo identificou que a solução correta seria o 20, onde esse valor seria o incremento necessário para que a área plantada dobrasse de tamanho.

Percebemos, também, que o exposto pelo grupo em sua resolução é potencialmente significativo, pois vai de encontro ao que preconiza a **competência específica 3 BRASIL (2018)**, cuja qual ressalta a utilização de estratégias, conceitos e definições, que levou o grupo a construir um modelo matemático para resolver tal problema, bem como, analisou a plausibilidade dos resultados encontrados, julgando-os adequados ou não, para a solução proposta, de modo a construir uma argumentação consistente e bem clara para todo o **problema**.

A seguir, observaremos na Figura 20, mais uma solução do problema 04, desta vez o grupo em foco é o B8.

Figura 20 – Resolução do Problema 04 - Grupo B8 - Sequência Didática I



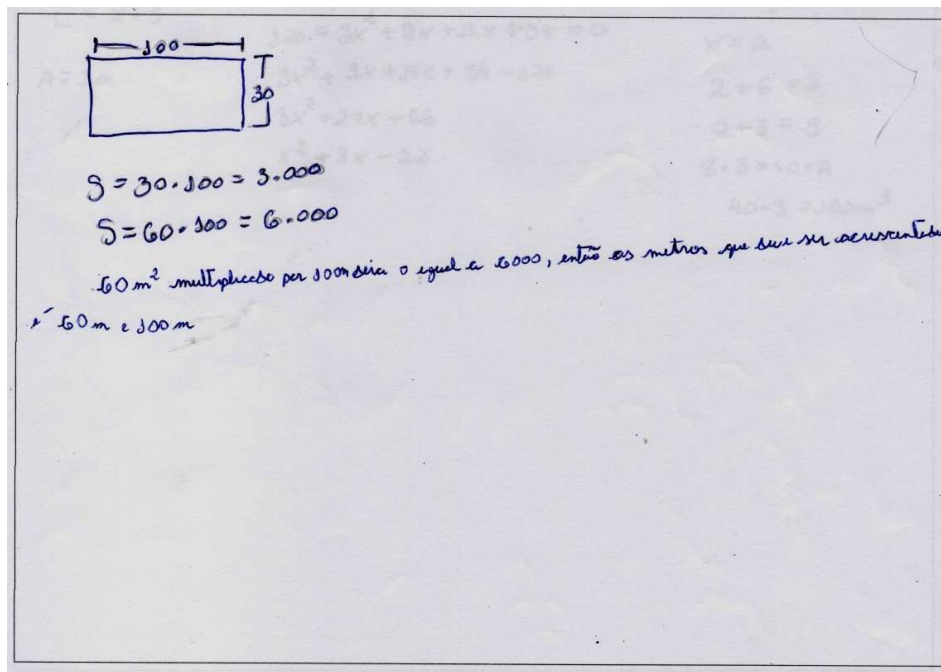
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A partir dessa solução, podemos perceber que o grupo não modelou algebricamente o problema proposto, ou seja, percorreram sua solução por *tentativa e erro*. Vale salientar que, na tentativa 1, por descuido foi escrito $45 \times 115 = 1175$, mas na verdade, o resultado correto seria 5175. Desta maneira, para um melhor entendimento do leitor, o grupo poderia ter deixado mais explícito qual foi o incremento necessário no comprimento e na largura. Nota-se, também, que o mesmo cometeu um lapsos quanto a unidade correta para a representação do comprimento e da largura. É importante frisar que o testar valores resolve casos particulares, já a construção de modelos matemáticos podem quase que generalizar soluções.

Na devolutiva do problema ao grupo, fez-se necessário reiterar os comentários anteriores para que os pequenos equívocos pudessem ser corrigidos em futuras resoluções. Alguns integrantes comentaram que utilizaram o modo de testar resultado pelo fato de acharem o problema "bem fácil", no entendimento dos mesmos. Nesse sentido alertei que pelo simples fato deles acharem o problema fácil, eles não adotaram um postura mais cuidadosa na resolução, que de fato foi confirmado por eles .

A seguir, na Figura 21, apresentamos a resolução do problema 04 posta pelo grupo B9.

Figura 21 – Resolução do Problema 04 - Grupo B9 - Sequência Didática I



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

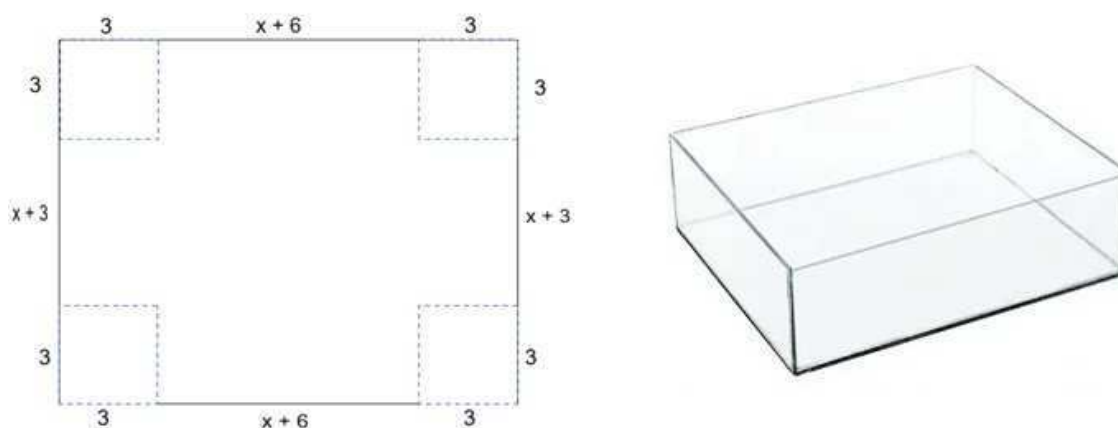
Podemos perceber que o grupo representou a figura inicial com medidas $100m$ por $30m$, porém, não se deram conta que o aumento deveria ser **uniformemente** para, ambos os lados, a fim de encontrar uma nova área retangular de $6000m^2$. Assim, eles encontraram uma nova área com $6000m^2$ e o aumento foi apenas na largura, o que contraria o proposto pelo problema. Nota-se, também, uma situação um pouco inconclusa quanto a redação dos seus achados, faltou clareza em algumas informações, como podemos verificar na informação $60m^2$ com lado do retângulo e na escrita de $60m$ e $100m$ como acréscimo.

No processo de devolutiva, alertei ao grupo sobre os equívocos cometidos, como também, para outros obstáculos que vão além da matemática. Com as demandas que vão surgir na escola e para além da escola, o “fazer contas” já não basta. Então, é preciso compreender o porquê dos resultados encontrados e suas respectivas interpretações e os usos adequados. Tais inquietações, são justificadas pelo documento norteador [BRASIL \(2018\)](#), pois de acordo com o mesmo, espera-se que para resolver problemas, o aluno deve identificar os conceitos e procedimentos matemáticos, além de aplicar e executar os procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada, o que faltou nos escritos do grupo.

Por fim, uma das integrantes do grupo comentou que para ela estava sendo um pouco complicado, pois sempre aprendeu e estudou a matemática de forma um pouco direta, sem a contextualização e justificativa dos resultados obtidos.

A seguir, comentamos sobre a elaboração do Problema **05** e os resultados obtidos a partir do mesmo.

5 – **(Problema 05)** - Nas aulas de matemática o professor Benildo entregou aos seus alunos uma folha de papel com formato retangular com algumas marcações, pediu que seus alunos cortassem quadradinhos de 9cm^2 , marcados nos cantos, em seguida pediu que eles dobrassem seus lados, obtendo uma caixa com 120cm^3 de volume, como mostra a representação abaixo.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Com base nessas informações, determine as dimensões dessa caixa:

Na elaboração desse problema, buscamos aguçar e transpor a visualização em **2D** para **3D**, assim, esperávamos que os alunos, em grupo, pudessem reativar algumas habilidades e aplicar as técnicas e algoritmos ligados a equação do 2º grau, vistos na etapa 9 do percurso metodológico. Nesse sentido, a BNCC (BRASIL, 2018) afirma que

[...] na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio (BRASIL, 2018, p. 529).

Assim, entendemos que esse problema perpassa por diversas habilidades, por isso, consideramos sua relevância e pertinência para a sequência didática.

Trazemos, na Figura 22, as escritas desenvolvidas pelo Grupo A1, acerca do Problema 05.

Figura 22 – Resolução do Problema 05 - Grupo A1 - Sequência Didática I

volume: 120 cm^3
 Comprimento: $x+6$
 largura: $x+3$
 Altura: 3

$$120 = 3 \cdot (x+3) \cdot (x+6)$$

$$120 = 3 \cdot (x^2 + 6x + 3x + 18)$$

$$120 = 3x^2 + 18x + 9x + 54$$

$$3x^2 + 18x + 9x + 54 - 120 = 0$$

$$3x^2 + 27x - 66 = 0$$

$$a = 3 \quad b = 27 \quad c = -66$$

$$\Delta = 27^2 + 4 \cdot 3 \cdot (+66)$$

$$\Delta = 729 + 792$$

$$\Delta = 1521$$

$$x = \frac{-27 \pm 39}{6}$$

$$x' = \frac{-27 + 39}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x'' = \frac{-27 - 39}{6} = \frac{-66}{6} = -11$$

daí, comprimento = $x+6 = 2+6 = 8$
 largura = $x+3 = 2+3 = 5$, Altura = 3

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na resolução apresentada pelo grupo, podemos perceber um cuidado em coletar as informações pertinentes do enunciado, como o $\text{volume} = 120\text{cm}^3$; $\text{comprimento} = x+6$; $\text{largura} = x+3$ e $\text{altura} = 3$. Outro fato notório foi a junção dessas informações, decorrendo em uma modelagem algébrica do problema e, conseqüentemente, em uma equação do 2º grau. Posteriormente, o grupo aplicou uma técnica correta para a sua resolução, a fórmula resolutive para equações do 2º grau. Por fim, utilizou-se a raiz positiva como solução do problema proposto, fazendo a sua substituição para determinar o valor comprimento e largura.

No processo de devolutiva, fez-se necessário dialogar com o grupo a respeito do cálculo com o discriminante Δ , no tocante ao sinal do $+4$, que seria -4 e o sinal do $+66$ que seria -66 . Por sorte, esses “descuidos” não afetaram o resultado final, mas poderia o ter. Assim como, mesmo a raiz positiva tendo sido a solução do problema, era importante fazer uma verificação geral desse resultado. Tais recomendações podem até parecer preciosismo, mas se fazem necessárias. Poderíamos dizer que o grupo cumpriu uma grande parte do que era preterido com o problema.

Na Figura 23, apresentamos a resolução do Problema 05, discorrida pelo grupo B8 acerca do problema.

Figura 23 – Resolução do Problema 05 - Grupo B8 - Sequência Didática I

$$\{(x+3) \cdot (x+6)\} \cdot 3 = 120$$

$$(x^2 + 6x + 3x + 18) \cdot 3 = 120$$

$$3x^2 + 27x + 54 = 120$$

$$3x^2 + 27x - 66 = 0$$

$$\Delta = 27^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-66)$$

$$\Delta = 729 + 792$$

$$\Delta = 1521$$

$$x = \frac{-27 \pm \sqrt{1521}}{2 \cdot 3}$$

$$x^1 = \frac{-27 + 39}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x^2 = \frac{-27 - 39}{6} = \frac{-66}{6} = -11$$

comprovando

$$x+6$$

$$2+6 = 8$$

$$x+3$$

$$2+3 = 5$$

$$8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

As dimensões dessa caixa são $(2+6)$ de comprimento, $(2+3)$ de largura e 3 de profundidade.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Podemos perceber que nessa solução o grupo entendeu corretamente o enunciado e o que se queria com o problema proposto. Nota-se que o grupo usou a ideia para cálculo do volume de um prisma, quando no primeiro procedimento usou a multiplicação do *comprimento*, *largura* e *altura*, respectivamente. Posteriormente, utilizou o algoritmo para solução corretamente, e até preocupou-se com o uso dos parênteses, consequentemente, encontrou dois valores descritos como suas raízes. Cuidadosamente, usou-se a raiz positiva e fez a verificação da sua solução encontrada, descrevendo-a de forma clara e objetiva, o que era pedido no mesmo. Sobre esses achados, Van de Walle (2009) comenta que quando se coleta informações dos alunos no processo de resolução de um problema, quando os resultados estão sendo justificados e aprimorados, ou seja, enquanto os alunos estão fazendo matemática, você obterá informação que fornecerá *insights* sobre a natureza da compreensão dos alunos sobre aquela ideia envolvida no problema proposto, como foi possível constatar na resolução do grupo. Assim, entendemos que foram cumpridas as expectativas na resolução do problema.

Na Figura 24, trazemos as anotações desenvolvidas pelo grupo B9, acerca do Problema 05.

Figura 24 – Resolução do Problema 05 - Grupo B9 - Sequência Didática I

Handwritten mathematical work showing the solution of a problem. The work is organized into three columns:

- Left Column:**

$$V = 120$$

$$C = x + 6$$

$$L = x + 3$$

$$A = 3m$$
- Middle Column:**

$$120 = (x+6) \cdot 3 \cdot (x+3)$$

$$120 = 3 \cdot (x^2 + 3x + 6x + 18)$$

$$120 = 3x^2 + 9x + 18x + 54 = 0$$

$$3x^2 + 9x + 18x + 54 - 120$$

$$3x^2 + 27x - 66$$

$$x^2 + 9x - 22$$
- Right Column:**

$$-2 + 1x = -9$$

$$2 + 1x = -22$$

$$x = 2$$

$$2 + 6 = 8$$

$$2 + 3 = 5$$

$$8 \cdot 5 = 40 \cdot A$$

$$40 \cdot 3 = 120m^3$$

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na solução do Problema 05, anteriormente representada, desenvolvida pelo grupo B9, podemos perceber que os integrantes conseguiram entender e identificar os dados da questão, como observamos na margem superior esquerda. Nota-se, também que o grupo conseguiu desenvolver um modelo matemático para o problema, decorrendo posteriormente em uma equação do 2º grau. Porém, nas etapas já mencionadas, alguns passos ficaram um pouco inconclusos, como por exemplo, na passagem de $3x^2 + 27x - 66$ para $x^2 + 9x - 22$, pois caberia especificar para o leitor que houve uma divisão por 3. Outra consideração é a aplicação da técnica para encontrar as raízes, **soma e produto**, fato esse positivo, contudo, faltou deixar indicado com palavras o uso dessa técnica, além de não afirmar que a raiz que determinaria a solução da equação, seria $x = 2$. Por fim, é louvável comentar a verificação da solução obtida, faltando apenas deixar justificado o que era pretendido com esses valores. Portanto, podemos afirmar que o grupo cumpriu parcialmente o que era requerido, restando alguns ajustes que foram elencados na devolutiva.

Como foi comentado na Seção 2.4, o Ensino-Avaliação-Aprendizagem devem ocorrer

simultaneamente no ensinar *através da Resolução de Problemas*, mas o leitor deve estar se perguntando como e onde ocorreu avaliação, visto que este pesquisador trouxe recortes dos dados da pesquisa e apontou na devolutiva aos grupos pontos a serem superados e melhorados. A avaliação começou e ocorreu durante todo o processo, mesmo antes da aplicação do problema gerador, até a aplicação e devolutiva dos novos problemas com as devidas observações. Quando buscamos consolidar Ensino-Aprendizagem-Avaliação como algo indissociável, levamos em consideração contribuições de Pironel e Onuchic (2016), onde comentam que

[...] a utilização de problemas matemáticos como estratégia de ensino nos levaram à utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, **por privilegiar a integração da avaliação ao processo de ensino-aprendizagem** e dar condições para que o professor possa **intervir imediatamente** na construção da aprendizagem do educando, **através da observação** (PIRONEL; ONUCHIC, 2016, p. 7, grifo meu).

Mesmo não sendo um de nossos objetivos, apresentamos a seguir alguns aspectos quantitativos, com o uso de tabelas e gráficos a fim de facilitar a compreensão geral dos resultados obtidos na aplicação dos novos problemas. Esse apanhado traz uma visão por questão, turma e no geral.

Desse modo, seguem os conceitos usados por esse pesquisador para o entendimento quantitativo dos dados:

Satisfatório - representa os grupos que acertaram o problema em sua totalidade;

Parcial - representa os grupos fizeram os cálculos quase que por completo, como também, os que não conseguiram interpretar o que fazer com o resultado obtido na resolução da equação;

Insuficiente - representa os grupos que apresentaram respostas inconclusas ou não responderam o problema.

A seguir, na Tabela 1 temos o resultado dos 10 grupos da turma **A**, no tocante ao resultado dos novos problemas da sequência didática I.

Tabela 1 – Quantidade de acertos por problema sequência didática I - Turma A

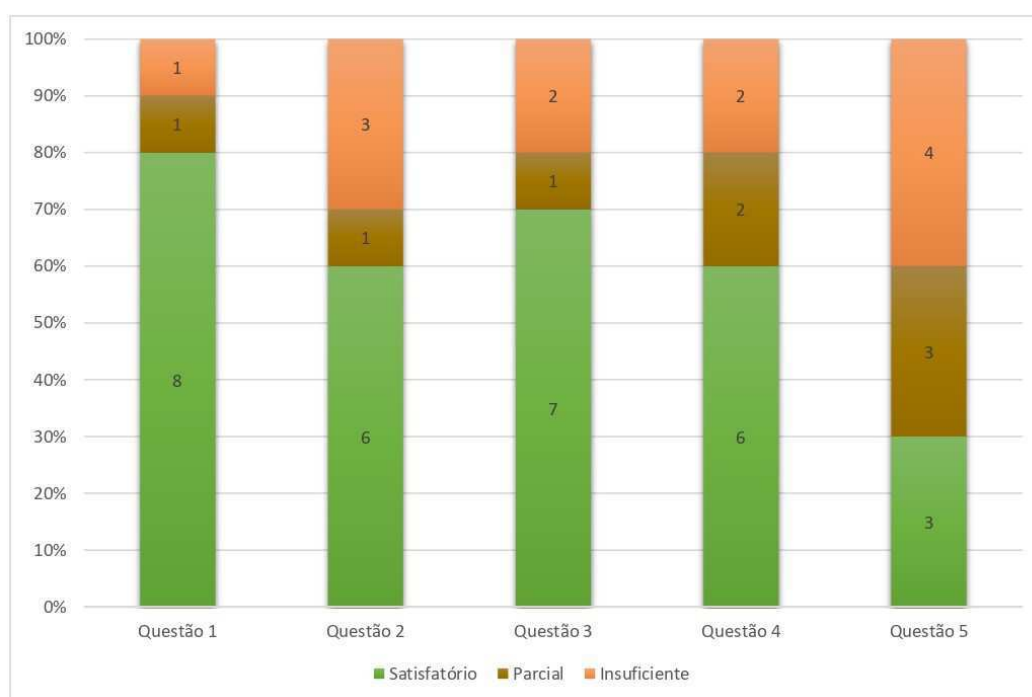
| TURMA A | Satisfatório | Parcial | Insuficiente |
|----------------|---------------------|----------------|---------------------|
| Problema 1 | 8/10 | 1/10 | 1/10 |
| Problema 2 | 6/10 | 1/10 | 3/10 |
| Problema 3 | 7/10 | 1/10 | 2/10 |
| Problema 4 | 6/10 | 2/10 | 2/10 |
| Problema 5 | 3/10 | 3/10 | 4/10 |
| TOTAL | 30/50 | 8/50 | 12/50 |

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A tabela construída anteriormente, busca expressar uma visão quantitativa dos acertos por problema, pois no corpo do nosso trabalho trazemos apenas recortes em relação aos grupos e aos problemas propostos, de modo particular, a mesma representa os dados coletados da turma **A**. O gráfico representado pela Figura 25, deixa bem mais evidente esses resultados, tomando como exemplo os resultados da questão 05, em um modelo de avaliação sentenciadora, o resultado seria apenas de 3 acertos, já em um modelo de avaliação integrado ao Ensino-Aprendizagem, o total de acertos seria de 6.

Quanto aos resultados colhidos na turma **A**, o gráfico representado pela Figura 25, detalha melhor esse comentário.

Figura 25 – Gráfico referente a Tabela 1 - Resultados da aplicação dos novos problemas



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A Tabela 2 a seguir, mostra um copilado dos resultados obtidos pela turma **B** a cerca dos novos problemas, **etapa 10** do percurso metodológico.

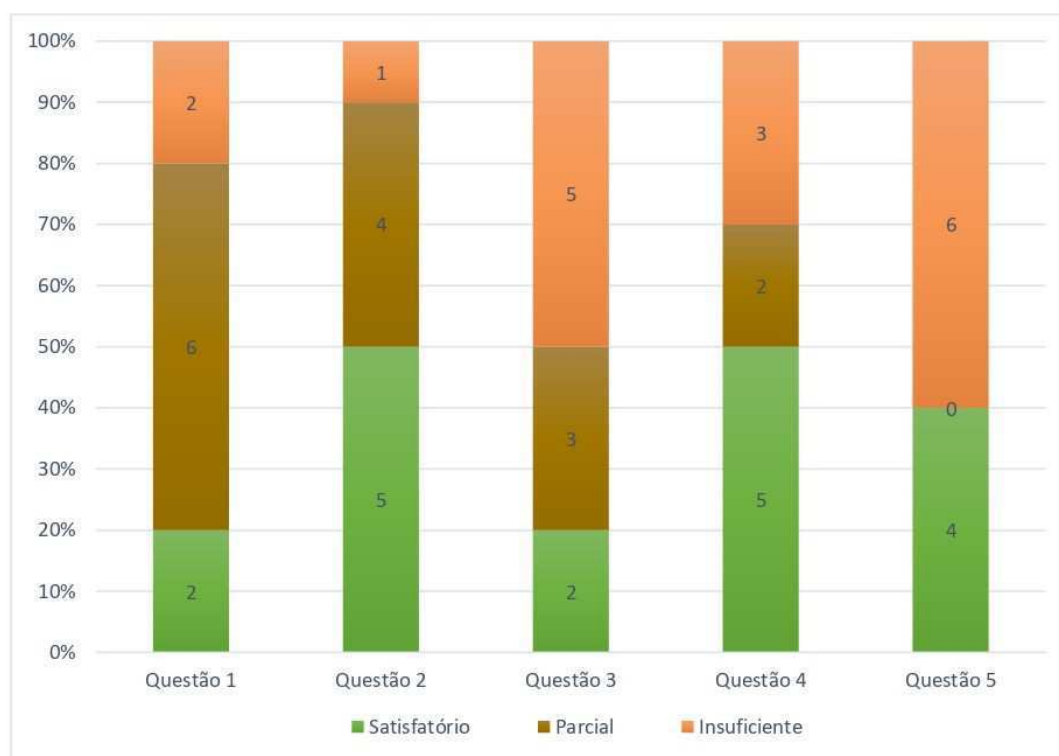
Tabela 2 – Quantidade de acertos por problema sequência didática I - Turma B

| TURMA B | Satisfatório | Parcial | Insuficiente |
|----------------|---------------------|----------------|---------------------|
| Problema 1 | 2/10 | 6/10 | 2/10 |
| Problema 2 | 5/10 | 4/10 | 1/10 |
| Problema 3 | 2/10 | 3/10 | 5/10 |
| Problema 4 | 5/10 | 2/10 | 3/10 |
| Problema 5 | 4/10 | 0/10 | 6/10 |
| TOTAL | 18/50 | 15/50 | 17/50 |

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A gráfico da Figura 26 resume e detalha melhor os dados obtidos, destacamos os resultados satisfatórios nas questões 01 e 03, que ao nosso crivo, abaixo do esperado, pois como podemos observar no Apêndice B, as questões foram organizadas por ordem de dificuldade, da mais simples para a mais complexa. Outro fato a se destacar foram os resultados insatisfatórios, principalmente na questão 05, que fez com que esse pesquisador retomasse e buscasse entender as lacunas que ficaram por parte do mesmo e dos alunos.

Figura 26 – Gráfico referente a Tabela 2 - Resultados da aplicação dos novos problemas



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A seguir, temos a Tabela 3, referente aos resultados quantitativos, quanto a aplicação dos novos problemas, construída pelo grupo C.

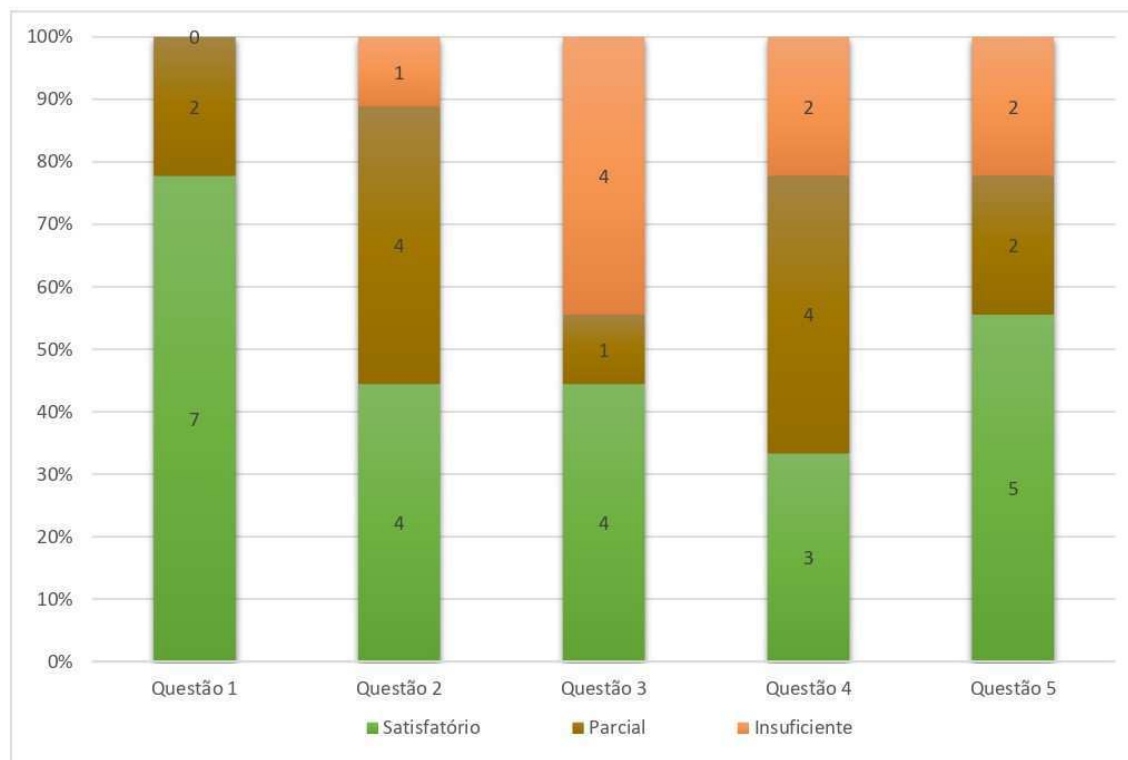
Tabela 3 – Quantidade de acertos por problema sequência didática I - Turma C

| TURMA C | Satisfatório | Parcial | Insuficiente |
|----------------|---------------------|----------------|---------------------|
| Problema 1 | 7/9 | 2/9 | 0/9 |
| Problema 2 | 4/9 | 4/9 | 1/9 |
| Problema 3 | 4/9 | 1/9 | 4/9 |
| Problema 4 | 3/9 | 4/9 | 2/9 |
| Problema 5 | 5/9 | 2/9 | 2/9 |
| TOTAL | 23/45 | 13/45 | 9/45 |

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O gráfico da turma **C**, apresentado na Figura 27, mostra um resultado mais condizente com a proposição dos novos problemas, principalmente pela ordem de dificuldade. Assim como a turma **B**, a maior dificuldade da turma **C** esteve concentrada no problema **03**.

Figura 27 – Gráfico referente a Tabela 3 - Resultados da aplicação dos novos problemas



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Ao fazer uma retrospectiva, entre os dados obtidos na aplicação dos **novos problemas, etapa 10** do percurso metodológico e o **problema gerador, etapa 1**, percebeu-se potenciais de avanços, visto que a maioria dos grupos conseguiu resolver boa parte dos problemas, como também alguns deles buscaram justificar seus achados, diferentemente da aplicação do problema gerador. Fazendo uma avaliação de todo o processo, podemos constatar que os alunos foram mais aplicados e comprometidos, tendo, despertado uma ação protagonista e proativa em boa parte deles.

Outro fato a se destacar, foi a preocupação em justificar os procedimentos de resolução potencializados, passando esses a terem significados por vezes práticos, como algumas questões requereram **“intencionalmente”**. Vale salientar, que alguns grupos também mostraram estagnação ou resistência ao processo, como podemos ver em alguns recortes exibidos. Considero que a sensibilidade no trato com o problema gerador é um fator primordial, pois, mesmo não sendo um conteúdo do 1º ano do Ensino Médio,

fez-se necessário ressignificar as habilidades que remetiam a equação do 2º grau.

A convivência dos grupos fixos durante essa sequência didática, despertou um espírito de coletividade, cooperação, interação, liderança e representatividade para alguns alunos que antes eram invisíveis perante seus colegas. Como mediador, cheguei a ouvir relatos do tipo:

- “*Eu não sabia que seria capaz de resolver esse problema*”;
- “*Meus pais trabalham com isso, fiquei feliz em ver minha realidade representada*”;
- “*Gostei dessa forma do senhor nos avaliar, por que tudo que fazemos o senhor considera para nossa nota*”;
- “*A parte mais difícil é justificar essas respostas, pra que isso? As contas estão certas*”.

Ao final dessa sequência didática, foi possível consolidar a ideia que a matemática faz sentido para as nossas vivências. Por conseguinte, Van Walle (2009) traz apontamentos que vem corroborar com os nossos achados, pois

I - Os estudantes devem diariamente aprender por experiência própria que a matemática faz sentido.

II - Os estudantes devem vir a acreditar que eles são capazes de dar significado à matemática.

III - Os professores devem deixar de ensinar simplesmente expondo e começar a deixar os estudantes atribuir significado à matemática que eles estão aprendendo.

IV - E para isto, os professores devem acreditar em seus estudantes – em todos eles! (VAN DE WALLE, 2009, p. 33).

Entendemos que o *Ensino de Matemática Atráves da Metodologia de Resolução de Problemas*, vivenciado durante todo o percurso metodológico, foi capaz de promover uma aprendizagem significativa e dar sentido e significado à matemática para grande parte dos alunos.

6.2 Apresentação e aplicação do problema gerador II

No processo de aplicação do problema gerador II, destacado a seguir, buscou-se motivar os grupos e prepará-los no tocante ao que se desejava com tal aplicação. Em vista disso, Allevato e Onuchic (2021) comentam que para uma atividade se caracterizar verdadeiramente como um problema, o professor não pode direcionar os alunos com dicas, pistas ou algoritmos pré-estabelecidos para sua solução, como de fato aconteceu. Para além dessas recomendações, o aluno e o grupo têm que estarem interessados e não terem resolvido tal problema antes. Caso contrário, não se configuraria um problema para ele(s). Remetendo a essa preocupação, elaboramos o problema a seguir, onde foi entregue fotocópia com o problema gerador, conforme representação a seguir:

Problema gerador II - aplicado na sequência didática II

As noções de área e perímetro de figuras planas são primordiais para compreendermos situações do nosso cotidiano. Pensando nisso, o professor de matemática desafiou seus alunos com a seguinte situação:



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Com base no exposto no problema pelo professor, os alunos concluíram que tal terreno tem comprimento, largura e área, respectivamente iguais a:

Posteriormente, foram dados em torno de 2 minutos a fim de que cada aluno fizesse uma leitura do problema, em seguida, montou-se os grupos de máximo 5 alunos para juntos socializarem as diferentes visões e pontos de vista para buscarem coletivamente (o grupo) uma solução para o problema preterido. Na busca de solucionar o problema alguns grupos fizeram indagações a respeito do caminho escolhido para a solução, porém, como dito anteriormente o professor não poder fazer direcionamentos para tais questionamentos. Vale salientar que comentários sutis são possíveis durante o processo. A resposta dada por este pesquisador a todas as perguntas proferidas foi, “**Será que não existe outra resposta para o problema proposto?**”. Foi possível observar a postura de insegurança por parte de um ou grupo quando a sua resposta. Entendo que a dúvida e o questionasse faz parte da construção de argumentos para solução do problema. [Allevato e Onuchic \(2021\)](#), destacam que

[...] a compreensão de Matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que compreender é essencialmente relacionar. Ressalte-se que as indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemática específicas surge, com frequência, quando se resolve um problema [\(ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 52\)](#).

Na proposição do problema gerador II buscou-se verificar a consolidação de algumas habilidades do Ensino Fundamental Anos Finais, onde no processo de preparação e resolução o pesquisador reiterou junto aos grupos que buscassem construir argumentos sólidos para justificar e explicar suas resoluções. Tal observação foi necessário pois, esperasse que na transição Ensino Fundamental para o Ensino Médio, o aluno deve desenvolver parcialmente ou totalmente algumas competências e habilidades. Nesse sentido, Brasil (2018) comenta que

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (BRASIL, 2018, p. 266).

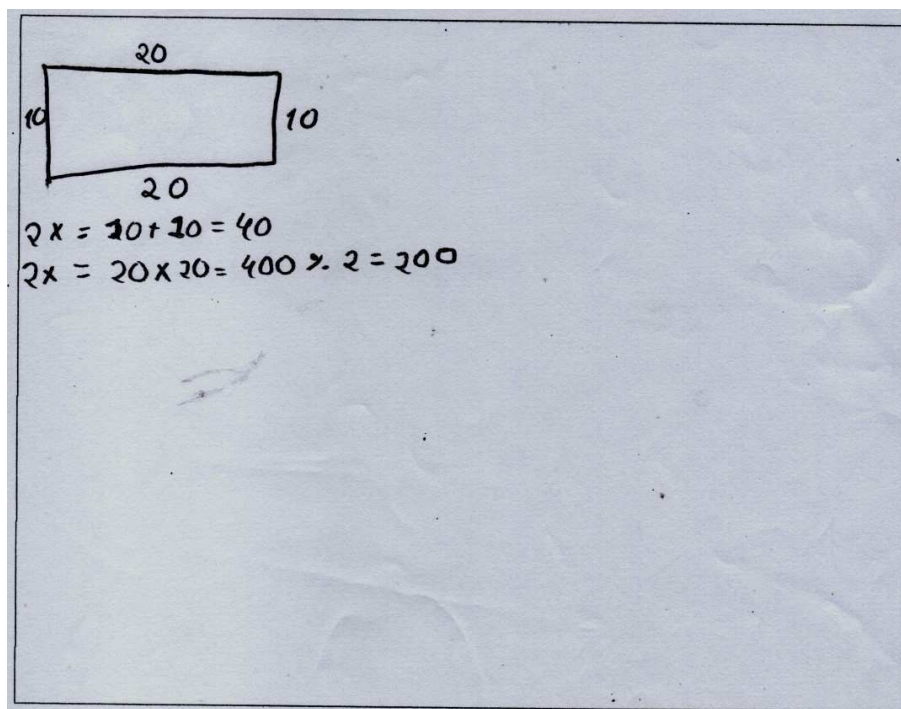
Por fim, após todos os grupos devolverem a folha com a resolução do problema gerador, se iniciou a plenária e busca de consenso. Momento riquíssimo do percurso metodológico, onde alguns alunos, representando o seu grupo, foram convidados a socializarem suas ideias de resolução na lousa ou oralmente, cada um ao seu modo. As figuras a seguir apresentam alguns recortes de solução.

6.2.1 Resolução do problema gerador II pelos grupos

Nossa intenção foi descrever e tecer alguns comentários sobre as quatro resoluções que apresentaremos a seguir, onde buscamos identificar elementos que dentro do processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação *através* da Resolução de Problemas, contribuíram para a aprendizagem significativa. É importante salientar que os comentários referidos para cada resposta apresentada são totalmente antagônicos do processo sentenciador de avaliação. Corroborando com essa visão, Onuchic e Allevato (2011) preceituam que o conceito de avaliação começou a ser repensado e ressignificado nos ambientes educacionais. A partir da compreensão da necessidade de adotar os princípios da avaliação contínua e formativa, esta passou a ser incorporada mais ao desenvolvimento dos processos e menos ao julgamento dos resultados obtidos com esses processos, como assim fizemos em toda nossa pesquisa. No ensino-aprendizagem a avaliação é um constituinte de suma importância e indissociável para esse processo contínuo.

Nesse sentido trazemos a resposta produzida pelo grupo **C5**, apresentada na Figura 28 a seguir:

Figura 28 – Resolução do Problema Gerador II - Grupo C5 - Sequência Didática II



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Nessa solução apresentada, podemos observar que o grupo não conseguiu desenvolver o raciocínio pretendido, limitando-se apenas a encontrar uma única solução para o problema, onde ela não apresenta um argumento matemático condizente, pois até o processo usado para a solução foi facilmente contraposto na plenária, basta observarmos o exemplo, vejamos:

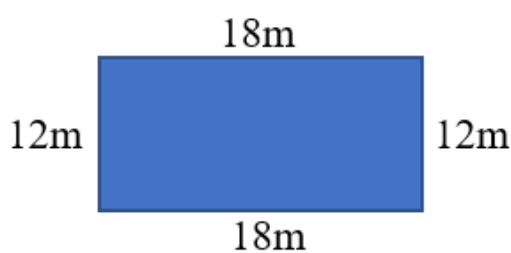


Figura auxiliar

Note que, se seguirmos o raciocínio proposto pelo grupo teríamos:

$$2x = 12 + 12 = 48$$

$$2x = 18 \times 18 = 324 : 2 = 162$$

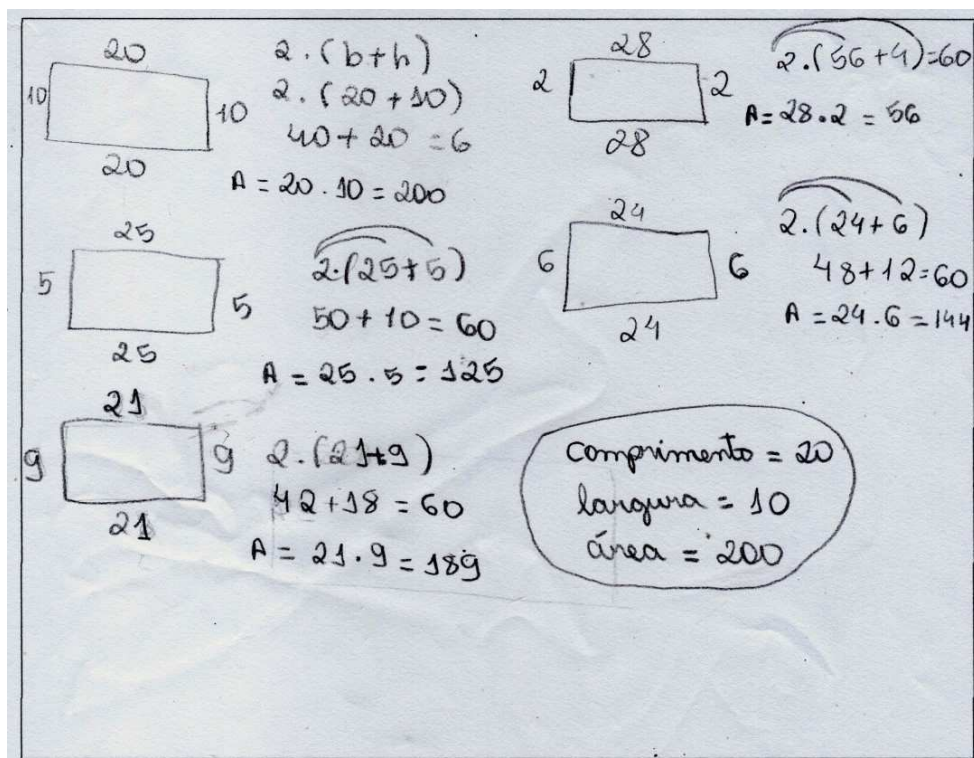
Porém, $12 \times 18 = 216$ e $216 \neq 162$

Ao debatermos a solução proposta pelo grupo, eles ficaram convencidos que se tratava de um caso particular de solução que não tinha sustentação matemática. Fizemos

questão de trazer essa solução para que o leitor passe a entender o quanto é desafiador o papel do professor em sala de aula, principalmente em um momento pós pandêmico. Esperávamos que ao menos o grupo conjecturasse e apresentasse outra(s) tentativa(s) de solução.

Na Figura 29, apresentamos as anotações desenvolvidas pelo grupo B2, acerca do problema gerador II.

Figura 29 – Resolução do Problema Gerador II - Grupo B2 - Sequência Didática II

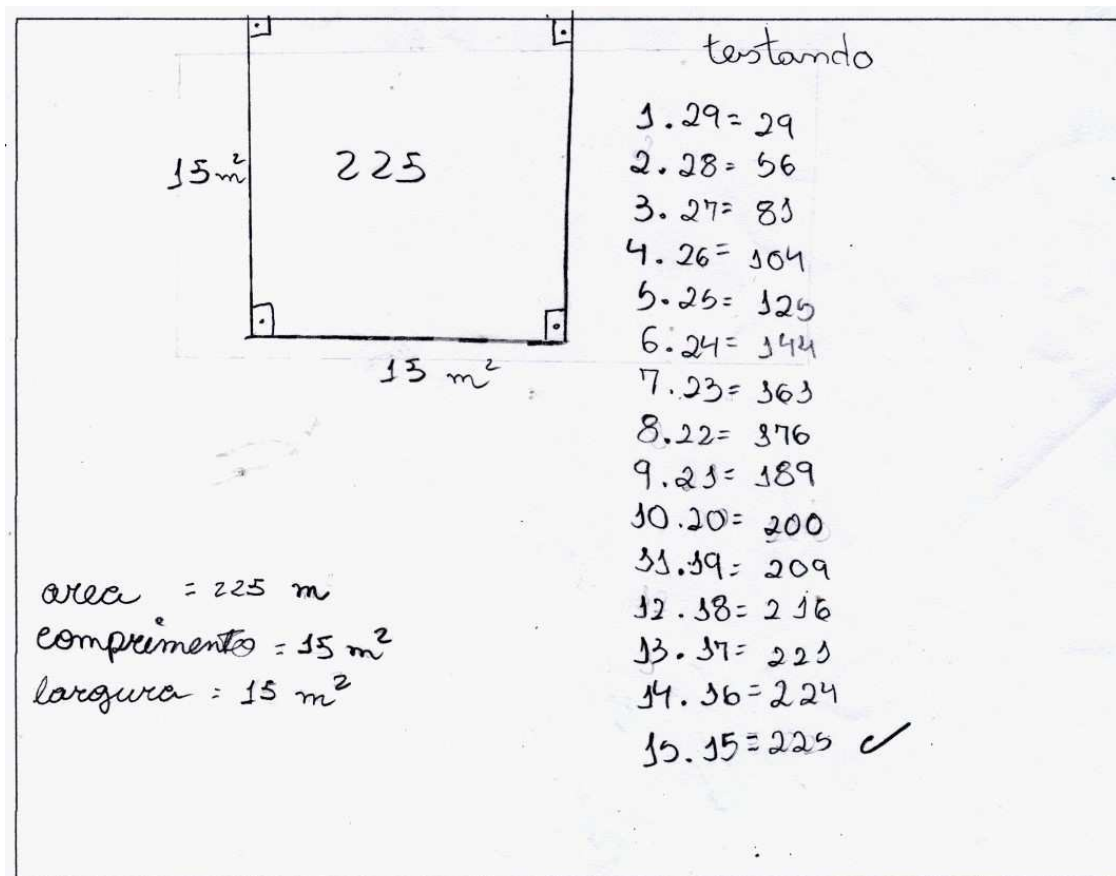


Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na solução acima posta, podemos perceber que o grupo entendeu o que o problema gerador pretendia, visto que, na solução apresentada se encontra algumas tentativas para a solução dele. Em todas elas, foi possível observar o cuidado em manter o perímetro sempre igual a **60m**, um dos requisitos do problema proposto. Então, entendemos que o grupo precisa consolidar algumas habilidades para que possam avançar um pouco mais nas habilidades matemáticas envolvidas no conteúdo proposto no problema. Nesse sentido, foi sugerido ao longo do processo um cuidado maior na representação dos retângulos (**cuidado maior com os desenhos**), como também, que se questionassem sempre sobre sua resposta (**verificar, validar**), além de um maior cuidado quanto a representação das unidades de **comprimento, largura e área**. Vale salientar que na resolução desse item foi possível reativar alguns conceitos de área e perímetro, conteúdos esse estudados no Ensino Fundamental Anos Finais.

Na Figura 30, trazemos as anotações desenvolvidas pelo grupo B7, acerca do problema gerador II.

Figura 30 – Resolução do Problema Gerador II - Grupo B7 - Sequência Didática II



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na resolução acima, percebe-se que o grupo compreendeu perfeitamente o que problema pretendia, nota-se que primeiramente foi montada uma coluna com diversos valores, e com cada um deles foi verificada a área com as medidas testadas. Desse modo, entendemos que as habilidades de área e perímetro estão bem consolidadas para esse grupo. Outro comentário importante é sobre a representação do retângulo que atende as exigências do problema, visto que, o grupo teve a preocupação quanto ao seu desenho. Na plenária, buscando debater soluções e chegar a um consenso, o grupo alertou os demais alunos que o quadrado também é um caso particular de retângulo, tal observação foi pertinente, pois surgiu a discussão por parte de outros grupos que o quadrado não era um retângulo. Sugeri que, eles tivessem um cuidado maior na representação das unidades de medida que se referem ao comprimento, largura e área.

Na Figura 31, trazemos as anotações desenvolvidas pelo grupo A4, acerca do problema gerador II.

Figura 31 – Resolução do Problema Gerador II - Grupo A4 - Sequência Didática II

15
 15
 15
 15
 $P = 15 + 15 + 15 + 15 = 60$
 $A = 15 \cdot 15 = 225$

Perímetro = 60
 Área = ?
 Comprimento = 15
 Largura = 15

• Para resolver bastava que o retângulo possui se 4 ângulos retos, então $15 + 15 + 15 + 15 = 60$; o perímetro.

Também fiz testando e antes de chegar no 15, fiz estes:

16
 14
 14
 16
 $16 + 16$
 $14 + 14$
 $60 = P.$
 $16 \cdot 14 = 224$

17
 13
 13
 17
 $17 + 17$
 $13 + 13$
 221
 $17 \cdot 13 = 221$

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Com base nessa resposta é possível perceber que o grupo compreendeu o enunciado do problema, bem como todos os processos envolvidos, como **maior área, comprimento e largura**. Percebe-se que o conjunto de competências e habilidades que remetem para o problema estão bastante consolidadas pelo grupo. Cabe destacar, a organização dos argumentos matemáticos como, representação da figura, justificativa das suas respostas com cálculos e argumentos escritos. Notamos também que antes de chegar na resposta preterida o grupo experimentou, se assim podemos chamar, outras soluções. Em plenária ficou evidenciado por outros grupos a capacidade de argumentar e justificar suas respostas. Porém, houve grande debate acerca das soluções em que chegaram como resposta um retângulo medindo **15m** por **15m**, alguns grupos argumentaram que não se tratava de um retângulo e sim de um quadrado. Por isso, foi importante a justificativa apresentada pelo grupo onde afirmam “**retângulo possui quatro ângulos retos**”. Como mediador dos debates para se chegar a um consenso, o pesquisador achou necessário ressignificar o objeto de conhecimento “*Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e*

ao paralelismo e perpendicularismo dos lados” e a habilidade (EF06MA20)¹ do Ensino Fundamental que rementem a esclarecer tal dúvida. Quando resignificasse a aprendizagem, retomando-se competências e habilidades para aprofundar um determinado conteúdo faz-se necessário, pois segundo Brasil (2018).

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018, p. 471).

Assim, foi possível perceber na análise dos documentos produzidos pelos grupos, como também no processo de interação durante a resolução em sala que, tal processo teve um caráter significativo, pois assumi o papel de mediador do conhecimento, sempre fazendo questionamentos e provocações sutis durante a aplicação do problema proposto.

Um fato que chamou bastante atenção é que nenhum dos grupos conseguiu criar uma representação matemática que pudesse modelar algebricamente o problema proposto, pois como visto anteriormente, as soluções foram, pura e simplesmente, por tentativa e erro. Outra curiosidade é que nenhuma das respostas apresentadas pelos grupos remetiam às soluções com números decimais. Assim, compreendi que seria necessário, em futuras pesquisas, a adoção de uma abordagem com problema gerador em que sua solução utilizasse números decimais, pois o fato de terem usados apenas números inteiros positivos na solução do problema proposto, gerou uma certa comodidade em sua resolução.

A não criação de um modelo algébrico para a generalização de sua solução, possa não ter acontecido, uma vez que seria necessário introduzir o conceito de função polinomial do 2º grau. Para uma solução “**mais robusta**”, seria necessário introduzir a ideia de máximo e mínimo da função polinomial do 2º grau. Mas, a não representação preterida, não deslegitima as soluções propostas, apenas entendemos que o método de tentativa e erro resolve casos particulares, já um modelo matemático geral serve para todos os casos.

¹ Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles (BRASIL, 2018, p. 302)

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de matemática é algo desafiador, principalmente no âmbito da Educação Básica. Podemos encontrar diversas abordagens com meras aplicações e reproduções memorísticas, restringindo-se a resolução de exercícios mecanizados e incondizentes com o contexto social, cultural e econômico da comunidade escolar. Desta maneira, é primordial construir um ambiente de aprendizagem significativo e potencializador do desenvolvimento de diversas estratégias de resolução de problemas.

É parte do nosso desafio, agregar o conhecimento matemático a situações do cotidiano, permitindo “quebrar” a visão da disciplina de matemática como algo distante da realidade e difícil de ser compreendida. Então, pôde ser levantado o seguinte questionamento: como contribuir para minimizarmos esses desafios encontrados? Buscando sair do “*achismo*”, a pesquisa é um pontapé para melhor se compreender a realidade da sala de aula e buscar possíveis alternativas de contribuição. No nosso caso, o estudo dos Problemas do 2º grau sob a perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas e as sequências didáticas como estratégia de desenvolvermos e potencializarmos habilidades referentes aos problemas do 2º grau em nossos alunos.

Mesmo o estudo dos problemas do 2º grau estando presente desde o Ensino Fundamental Anos Finais, foi perceptível as lacunas na aprendizagem dos nossos alunos nesse âmbito, como também, a desconexão desse conteúdo de situações do cotidiano e também, as abordagens resumidas. A fim de minimizar essas lacunas, foi proposto um estudo a respeito de uma proposta de sequências didáticas e a busca pelo fortalecimento das estratégias para resolução de situações-problema do 2º grau para alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Ao realizamos um levantamento histórico e bibliográfico sobre a metodologia de Resolução de Problemas, buscamos fazer um recorte histórico pós-matemática moderna, identificando suas diferentes concepções, contribuições para o ensino em sala de aula e sua importância para o ensino de matemática até se tornar uma metodologia de ensino. Quanto aos problemas do 2º grau, fizemos pequenas abordagens desse conteúdo, por diversas sociedades à luz da linguagem moderna, identificando as contribuições para a contemporaneidade.

Com relação a proposição e o desenvolvimento das sequências didáticas, buscou-se evidenciar as diversas abordagens da resolução de situações-problema do 2º grau atrelados a metodologia de Resolução de Problemas. Tal tarefa não foi fácil, pois foi preciso deixar de lado algumas concepções do ensino tradicional que os alunos carregavam consigo, fato esse predominante no contexto educacional, onde podemos

destacar o uso somente de aulas expositivas, cujas quais o aluno “recebe passivamente o conhecimento do professor”, não sendo um sujeito ativo de todo o processo. Fez-se necessário compreender que Ensino-Avaliação-Aprendizagem caminham lado a lado, em todas as aulas.

Quando pensamos na proposição e aplicação dessas sequências, almejamos identificar as contribuições da metodologia sobre o estudo dos problemas do 2º grau, assim como, as possíveis limitações para que pudéssemos fazer os ajustes necessários. Quanto aos entraves da mesma, queríamos destacar a superlotação nas salas de aula, a falta de assiduidade por parte de alguns alunos, a ausência de um espaço adequado na escola para relacionar o tema de pesquisa atrelado ao uso de *softwares* matemáticos, assim como, o pouco tempo para podermos analisar os novos problemas aplicados na sequência didática II.

Em contraponto, as suas contribuições superaram esses entraves. Destacamos que durante a vivência das sequências didáticas, notou-se uma maior participação dos alunos, quando o professor parte dos conhecimentos prévios dos alunos, pois assim, alunos e professor vão conectando e resignificando as ideias e conceitos matemáticos relevantes para o processo de Ensino-Avaliação-Aprendizagem *através* da Resolução de Problemas.

Outro fato que a análise documental mostrou foi a evolução significativa da maioria dos grupos, quando foi utilizado o percurso metodológico de [Allevato e Onuchic \(2021\)](#). Na aplicação de tal percurso, aos alunos foram desafiados a refletirem sobre a resolução dos problemas. De modo geral, foi possível constatar que os nossos alunos passaram a adotar uma postura mais ativa, crítica, autônoma e protagonista do conteúdo; desenvolvendo, assim, atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos para resolver problemas em diversos contextos, como identificamos na aplicação dos problemas propostos da sequência didática I.

Ao refletir acerca da minha prática pedagógica enquanto professor/pesquisador, posso afirmar, categoricamente, que após os estudos e o desenvolvimento da pesquisa, pude perceber a grande contribuição do ensino de matemática *através* da Resolução de Problemas para os alunos do Ensino Médio. O que acarretou significativas mudanças em minha postura enquanto docente, principalmente na sala de aula e na forma de conceber e produzir os materiais didáticos. A metodologia evidenciada passou a ser adotada como prática pedagógica nas minhas vivências.

Assim, podemos dizer que o problema da pesquisa foi respondido, como também, os objetivos foram alcançados.

Almeja-se que a Metodologia de Resolução de Problemas possa ser utilizada como uma ferramenta a fim de aproximar a matemática de diversos contextos, construindo assim, uma ponte para o conhecimento, tornando-o mais entendível e palpável, através

de uma aprendizagem atrativa, significativa e condizente com a realidade dos nossos alunos.

No desenvolvimento do nosso trabalho, surgiram algumas inquietações para projeções em futuras pesquisas, onde destacamos: *o estudo das equações do 2º grau disfarçadas em tópicos como equações fracionárias, equações irracionais e as raízes estranhas e as equações biquadradas; a investigação de como é feita a passagem da linguagem retórica para a linguagem simbólica e como a Metodologia de Resolução de Problemas pode contribuir no desenvolvimento das habilidades preconizadas pela BNCC.* Tendo essa última inquietação surgido na análise do problema gerador I.

Portanto, pretendemos com este trabalho, contribuir significativamente com a adesão dos professores à Metodologia de Resolução de Problemas para o ensino de matemática. As sequências didáticas que foram sugeridas podem servir de guia para o trabalho dos professores com a abordagem de problemas do 2º grau, assim como, para pesquisas futuras.

Referências

- ALLEVATO, N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência. Tese de Doutorado - Universidade Estadual Paulista - UNESP, 2005. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102164>. Acesso em: 04 jan 2023. Citado 4 vezes nas páginas 18, 25, 26 e 27.
- ALLEVATO, N. S. G.; GONÇALVES, R. *Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças*. Curitiba: Editora CRV, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. D. L. R. *Resolução de problemas: teoria e prática*. Jundiaí – SP: Paco Editorial, 2021. Citado 11 vezes nas páginas 17, 18, 24, 29, 33, 34, 77, 91, 111, 112 e 120.
- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. L. R. *Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas*. Jundiaí – SP: Paco Editorial, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 24, 34 e 89.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. In: . Portugal: Porto Editora, 1994. Citado na página 17.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 43, 45 e 48.
- BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação*. 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em: 22 maio 2022. Citado na página 52.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 08 mai. 2022. Citado 15 vezes nas páginas 14, 15, 18, 28, 53, 83, 90, 94, 97, 99, 100, 102, 103, 113 e 118.
- COUTINHO, R. P. Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, 2016. Disponível em: <http://www.bdt.d.uerj.br/handle/1/4823>. Acesso em: 28 set 2022. Citado na página 15.
- DANTE, L. R. *Matemática Contexto & Aplicações (1º ano do EM)*. São Paulo: Editora Ática, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 56, 71, 72 e 73.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H.* São Paulo: Editora da Unicamp, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 38.
- GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 42, 43, 45 e 46.

GUEDES, E. G. A equação quadrática e as contribuições de bhaskara. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade Federal do Paraná - UFPR, 2019. Disponível em: <https://hdl.handle.net/1884/66582>. Acesso em: 28 set 2022. Citado na página [15](#).

HUANCA, R. R. H. A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista - UNESP, 2006. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91004>. Acesso em: 24 jan 2023. Citado na página [31](#).

HUANCA, R. R. H. A resolução de problemas e a modelização matemática no processo de ensino-aprendizagem-avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. Tese de Doutorado - Universidade Estadual Paulista - UNESP, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/108823>. Acesso em: 24 jan 2023. Citado 2 vezes nas páginas [14](#) e [30](#).

HUANCA, R. R. H.; MELO, I. R. S. Equações diferenciais ordinárias na formação inicial de professores de matemática através da resolução de problemas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM - Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, 2021. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/4330>. Acesso em: 02 jan 2023. Citado na página [19](#).

HUANCA, R. R. H.; SILVA, A. F. Aprendizagem matemática colaborativa através da resolução de problemas e tecnologias digitais. *Revista de Educação Matemática*, v. 19, n. 01, p. e022024, jun. 2022. Disponível em: <http://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/687>. Acesso em: 29 dez 2022. Citado 2 vezes nas páginas [32](#) e [33](#).

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*. São Paulo: Atual Editora, 2014. Citado 3 vezes nas páginas [56](#), [65](#) e [66](#).

INEP. *Exame Nacional do Ensino Médio*. 2009. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 08 mai. 2022. Citado 2 vezes nas páginas [18](#) e [94](#).

ONUCHIC, L. L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.*, São Paulo, p. 199–218, 1999. Citado 2 vezes nas páginas [14](#) e [23](#).

ONUCHIC, L. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema-Mathematics Education Bulletin*, p. 73–98, 2011. Citado 7 vezes nas páginas [14](#), [18](#), [23](#), [26](#), [28](#), [32](#) e [113](#).

PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. Citado na página [75](#).

PEDROSO, H. A. Uma breve história da equação do 2 grau. *Revista Eletrônica de matemática*, p. 1–13, 2010. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122614/ISSN2177-5095-2010-02-01-13.pdf>. Acesso em: 25 nov 2022. Citado 2 vezes nas páginas [40](#) e [48](#).

PERNAMBUCO. *Currículo de Pernambuco: Ensino Médio*. 2021. Disponível em: <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/?pag=1&cat=18&art=5428>. Acesso em: 08 mai. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 94.

PIRONEL, M.; ONUCHIC, L. L. R. Congresso nacional de avaliação em educação: Iv conave. bauru: Cecemca/unesp, 2016, pp. 1–n. página final.(isbn:) eixo-temático: 3. avaliação no ensino superior avaliação para a aprendizagem: uma proposta a partir de transformações do conceito de avaliação na sala de aula no século xxi. 2016. Disponível em: <https://sgcd.fc.unesp.br/#!/conave/conave-2015/anais/comunicacoes-cientificas/>. Acesso em: 02 jan 2023. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 107.

PIRONEL, M.; VALLILO, S. A. M. O papel da avaliação na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. *Perspectivas para Resolução de Problemas*. São Paulo: Livraria da Física, p. 279–304, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 14, 32 e 89.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência Editora, 1995. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 22.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição*. Novo Hamburgo: Editora Feevale, 2013. Citado na página 17.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. *Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2021. Citado 4 vezes nas páginas 13, 46, 47 e 48.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2012. Citado 7 vezes nas páginas 36, 37, 38, 39, 43, 46 e 47.

SILVA, H. L. D. Função quadrática: investigar os conhecimentos que os alunos do 1º ano do ensino médio apresentam para lidar com questões que envolvem os principais conceitos associados à função quadrática. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, 2019. Disponível em: <http://www.bdt.d.uerj.br/handle/1/4835>. Acesso em: 28 set 2022. Citado na página 15.

SILVA, J. E. M. D. Perspectivas sobre a equação do segundo grau e suas concepções no enem. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, 2022. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/4333>. Acesso em: 28 set 2022. Citado na página 15.

SOARES, F. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. Ensino de matemática no século xx–da reforma francisco campos à matemática moderna. *Horizontes, Bragança Paulista*, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004, 2004. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/handle/1/1112>. Acesso em: 21 jan 2023. Citado na página 19.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. Metodologia da resolução de problemas. *24ª Reunião ANPed*, 2001. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_soares_pinto.pdf. Acesso em: 10 dez 2022. Citado na página 30.

SOUZA, J. E. D. O uso da linguagem de programação python na resolução de problemas matemáticos do ensino médio. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - Universidade Federal de Campina Grande, 2023. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/profmat>. Acesso em: 06 mai 2023. Citado na página 53.

VAN DE WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula*. Porto Alegre: Penso Editora, 2009. Citado 7 vezes nas páginas 18, 26, 28, 29, 98, 105 e 111.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Penso Editora, 1998. Citado na página 75.

Apêndices

APÊNDICE A – PROBLEMA GERADOR I

Este apêndice apresenta o problema gerador I, aplicado na sequência didática I.

Problema gerador I aplicado no primeiro momento

Os alunos do 1º ano foram desafiados pelo seu professor a descobrir as medidas de um terreno retangular. Para tal, o professor lhes concedeu algumas pistas:



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Com base nessas pistas, os alunos concluíram que o comprimento e a largura do terreno eram, respectivamente:

Uma possível resolução:

Seja x a medida desconhecida, então

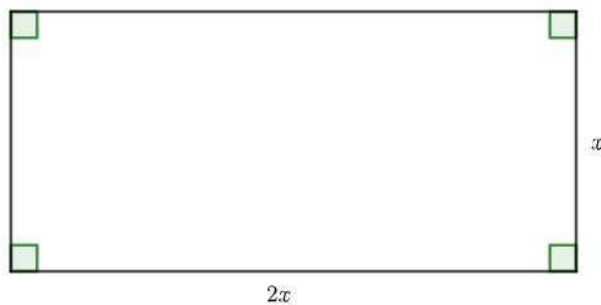
$$\mathbf{Comprimento} = 2x$$

$$\mathbf{Largura} = x$$

$$\mathbf{Área} = 3200m^2$$

Assim, a representação abaixo ilustra os dados do problema

Figura ilustrativa e fora de escala.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Sabendo que a área de um retângulo é dado por **base** · **altura**, temos

$$3200 = 2x \cdot x$$

$$3200 = 2x^2$$

$$1600 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{1600}$$

$$x = \pm 40$$

Como x representa uma medida, devemos ter $x = 40$.

Portanto, o comprimento é $= 2x = 2 \cdot 40 = 80m$ e a largura $= x = 40m$.

Outra sugestão de resolução: Tentativa erro

$$2x \cdot x = 3200m^2$$

$$x = 10, \text{ temos } 2 \cdot 10 \cdot 10 \neq 3200 \text{ (F)}$$

$$x = 15, \text{ temos } 2 \cdot 15 \cdot 15 \neq 3200 \text{ (F)}$$

$$x = 20, \text{ temos } 2 \cdot 20 \cdot 20 \neq 3200 \text{ (F)}$$

$$x = 30, \text{ temos } 2 \cdot 30 \cdot 30 \neq 3200 \text{ (F)}$$

$$x = 40, \text{ temos } 2 \cdot 40 \cdot 40 = 3200 \text{ (V)}$$

$$x = 45, \text{ temos } 2 \cdot 45 \cdot 45 \neq 3200 \text{ (F)}$$

APÊNDICE B – PROBLEMAS PROPOSTOS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA I

ATIVIDADE DE APRENDIZAGEM I

1 - (SAEPE – Adaptada) - O lucro mensal, em reais, de uma empresa pode ser calculado pela expressão $n^2 - 12n + 32$, em que n representa a quantidade em milhares de produtos vendidos. Qual a quantidade de produtos, em milhares, no mínimo, que essa empresa tem que vender para que o seu lucro seja nulo?

Fonte: <<https://profwarles.blogspot.com/2020/03/d17-quiz-por-descritor-mat-3-serie-em.html>>.

Acesso em: 05/10/2022

Para que o lucro mensal seja nulo, devemos ter $n^2 - 12n + 32 = 0$.

Resolução um: Dados: $a = 1, b = -12, c = 32$.

Pela fórmula resolutive, temos: $n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Calculando o determinante, obtemos $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32 = 16$. Como o $\Delta > 0$, a equação admite duas raízes reais e distintas.

Logo, $n = \frac{-(-12) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 4}{2}$, donde segue que $n = 8$ ou $n = 4$, mas como queremos o menor valor de n , devemos ter $n = 4$ mil.

Resolução dois: Dados: $a = 1, b = -12, c = 32$.

Pelo algoritmo da soma e produto das raízes, temos a SOMA = $S = \frac{-b}{a}$ e o PRODUTO = $P = \frac{c}{a}$, assim

$S = \frac{-(-12)}{1} = 12$ e $P = \frac{32}{1} = 32$, resta procurar dois números cuja soma seja 12 e produto 32.

Devemos ter, $n_1 + n_2 = 12$ e $n_1 \cdot n_2 = 32$, então $8 + 4 = 12$ e $8 \cdot 4 = 32$.

Daí, $n_1 = 8$ e $n_2 = 4$, como queremos o menor valor de n , então $n = 4$ mil.

Resolução três:

Utilizando a técnica de completar quadrados, temos

$$\begin{aligned}n^2 - 12n = -32 &\Rightarrow n^2 - 2 \cdot 6 \cdot n = -32 \Rightarrow n^2 - 2 \cdot 6 \cdot n + 6^2 = -32 + 6^2 \Rightarrow \\(n - 6)^2 = 4 &\Rightarrow n - 6 = \pm\sqrt{4} \Rightarrow n - 6 = \pm 2\end{aligned}$$

Daí, $n = 6 - 2 = 4$ ou $n = 6 + 2 = 8$. Como queremos o menor valor de n , ou seja, $n = 4$ mil.

2 - **(Elaborado pelo autor - 2022)** - Com a finalidade de organizar os 340 alunos do 1º ano na quadra da EREM (Escola de Referência em Ensino Médio) André Cordeiro, de maneira que todas as fileiras contassem com a mesma quantidade de alunos, o Professor de Artes pediu que Gabriel fizesse essa organização, de modo que, os alunos fossem distribuídos em $n + 3$ fileiras, sendo cada fileira contendo n alunos. Para atender o pedido do professor, Gabriel concluiu que cada fileira deveria ter quantos alunos?



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Resolução um: Fileiras = $n + 3$; Alunos = n .

No processo de organização dos alunos, a contagem pode ser feita multiplicando fileiras por alunos, ou seja,

$$(n + 3) \cdot n = 340 \Rightarrow n^2 + 3n = 340 \Rightarrow n^2 + 3n - 340 = 0, \text{ onde } a = 1, b = 3, c = -340.$$

Pelo algoritmo da soma e produto das raízes, temos a SOMA = $S = \frac{-b}{a}$ e o PRODUTO = $P = \frac{c}{a}$, assim

$S = \frac{-(3)}{1} = -3$ e $P = \frac{340}{1} = 340$, resta procurar dois números cuja soma seja -3 e produto 340 .

Devemos ter, $n_1 + n_2 = -3$ e $n_1 \cdot n_2 = 340$, então $-20 + 17 = -3$ e $-20 \cdot 17 = 340$.

Pelo enunciado do problema, n deve ser positivo, logo o número de alunos por fila será $n = 17$ alunos.

3 - (Elaborado pelo autor - 2022) - Um grupo de alunos do 1º B combinou de se reunir para lanchar em um restaurante. A conta de todos os lanches foi de R\$ 300,00; que foi dividido igualmente entre todos eles. Durante a divisão, dois alunos perceberam que estavam sem suas carteiras, o que fez com que o grupo de alunos redistribuísse o valor da conta. Na nova redistribuição cada aluno pagou R\$ 5,00 a mais em relação a primeira conta. Com base nessas informações pode-se concluir que a quantidade de alunos e o valor pago no final por cada um foi de:

Seja **A** o número de alunos e **P** o preço que cada um paga, então

Inicialmente temos, $P \cdot A = R\$ 300,00$. **(I)**

Na hora do pagamento da conta $(P + 5) \cdot (A - 2) = 300$, desenvolvendo a equação obtemos

$P \cdot A - 2P + 5A - 10 = 300$ **(II)**

Como $P \cdot A = 300$, então $5A = 2P + 10 \Rightarrow A = \frac{2P + 10}{5}$ **(III)**

Substituindo **(III)** em **(I)**, obtemos

$P \cdot \left(\frac{2P + 10}{5}\right) = 300 \Rightarrow 2P^2 + 10P = 1500 \Rightarrow 2P^2 + 10P - 1500 = 0$, onde

$a = 2; b = 10; c = -1500$

Pelo algoritmo da soma e produto das raízes, temos

Soma = $\frac{-b}{a} = \frac{-10}{2} = -5$ e Produto = $\frac{c}{a} = \frac{-1500}{2} = -750$

Devemos ter, $p_1 + p_2 = -5$ e $p_1 \cdot p_2 = -750$, então $25 - 30 = -5$ e $35 \cdot (-30) = -750$.

Daí, o valor de **P = 25** temos

Preço a ser pago inicialmente $P = 25$;

Preço a ser pago após a redistribuição da conta $P + 5 = 25 + 5 = 30$;

Número de alunos inicialmente $A = \frac{300}{P} = \frac{300}{25} = 12$;

Número de alunos que pagaram a conta $A - 2 = 12 - 2 = 10$.

Como queremos saber a quantidade de alunos A e o preço final $P + 5$ pago por cada um, tem-se

12 alunos e R\$ 30,00 de valor pago.

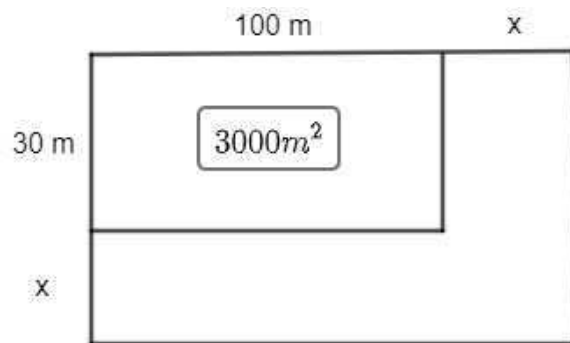
4 - (**Elaborado pelo autor - 2022**) - Brejo da Madre de Deus é o único município de Pernambuco que tem o cultivo de morango orgânico consolidado, o que se deve às condições climáticas e topográficas dos brejos, onde chove mais. Localiza-se no ponto mais alto do estado, a Serra da Boa Vista, mais conhecida como Serra do Ponto, situada no Planalto da Borborema. Lá, as/os agricultoras/es utilizam tecnologias sofisticadas.



Fonte: <<https://www.fetape.org.br/noticias-detalle/brejo-da-madre-de-deus-a-capital-agroecologi\ca-de-pernambuco/6221#.YzWXhHbMLIU>>. Acesso em 08/10/2022

Seu José e Dona Maria são agricultores que plantam morango orgânico e pretendem dobrar a área de produção para $6000m^2$, para tal, eles pretendem aumentar uniformemente o comprimento e a largura da área plantada, que tem formato retangular, medindo $30m \cdot 100m$. Para que a necessidade de seu José e dona Maria seja atendida, de quantos metros deve ser esse acréscimo nas dimensões da área plantada?

Resolução: Seja x o incremento uniforme em ambos os lados, então



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Como queremos dobrar a área, então a nova Área deve ser $6000m^2$. Como o produto do comprimento pela largura determina a área, temos

$$\text{Comprimento} = 100 + x; \text{Largura} = 30 + x; \text{Área com incremento} = 6000m^2$$

Daí, temos

$$(100 + x) \cdot (30 + x) = 6000 \Rightarrow x^2 + 130x + 3000 = 6000 \Rightarrow x^2 + 130x - 3000 = 0$$

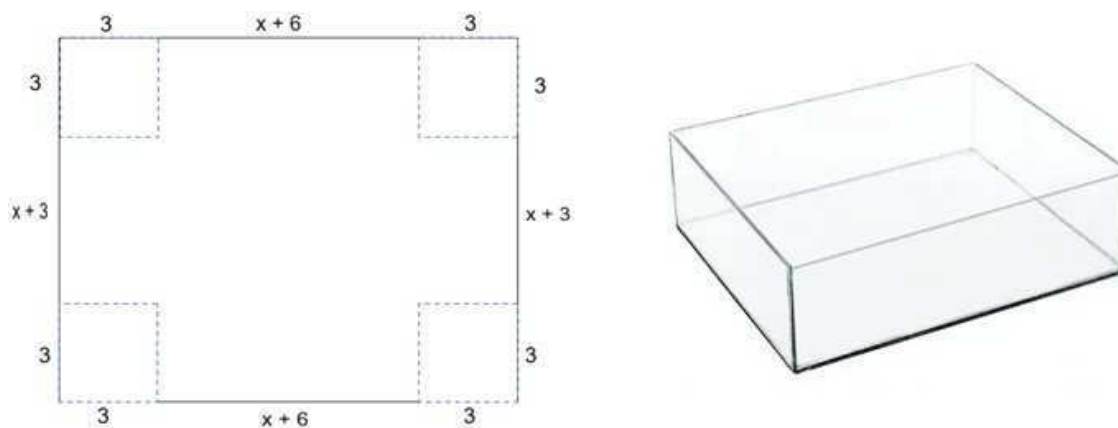
Pela técnica de completar quadrados, obtemos

$$x^2 + 2 \cdot 65 \cdot x = 3000 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot 65 \cdot x + 65^2 = 3000 + 65^2 \Rightarrow (x + 65)^2 = 3000 + 4225$$

$$(x + 65)^2 = 7225 \Rightarrow x + 65 = \pm\sqrt{7225} \Rightarrow x + 65 = \pm 85$$

Donde segue que, $x = -65 + 85 = \mathbf{20}$ ou $x = -65 - 85 = \mathbf{-150}$ mas como o incremento é uma medida, devemos ter $x = 20m$.

5 – **(Elaborado pelo autor - 2022)** - Nas aulas de matemática o professor Benildo entregou aos seus alunos uma folha de papel com formato retangular com algumas marcações, pediu que seus alunos cortassem quadrados de $9cm^2$, marcados nos cantos, em seguida pediu que eles dobrassem seus lados, obtendo uma caixa com $120cm^3$ de volume, como mostra a representação abaixo.



Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Com base nessas informações, determine as dimensões dessa caixa:

Resolução: Pela figura e pelo enunciado, temos:

comprimento = $x + 6$; largura = $x + 3$; altura = 3; volume = 120cm^3

Sabendo que o volume de um paralelepípedo é dado por

$$\text{Volume do bloco} = \text{comprimento} \cdot \text{largura} \cdot \text{altura}$$

Então,

$$120 = (x + 6) \cdot (x + 3) \cdot 3 \Rightarrow 120 = 3x^2 + 27x + 54 \Rightarrow 3x^2 + 27x - 66 = 0$$

Dividindo ambos os membros por 3, obtemos

$$x^2 + 9x - 22 = 0, \text{ com } a = 1; b = 9 \text{ e } c = -22$$

Pela fórmula resolvente, temos: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Calculando o determinante, obtemos $\Delta = (9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-22) = \mathbf{169}$. Como o $\Delta > 0$, a equação admite duas raízes reais e distintas.

Logo, $x = \frac{-(9) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 13}{2}$, donde segue que $x = 2$ ou $x = -11$, mas como estamos tratando com medidas, então $x = 2$.

Daí, o comprimento = $x + 6 = 2 + 6 = 8$; largura = $x + 3 = 2 + 3 = 5$; altura = 3.

Verificação: $120 = (x+6) \cdot (x+3) \cdot 3 \Rightarrow 120 = (2+8) \cdot (2+3) \cdot 3 \Rightarrow 120 = 8 \cdot 5 \cdot 3(V)$.

APÊNDICE C – PROBLEMA GERADOR

II

Este apêndice apresenta o problema gerador II, aplicado na sequência didática II.

Problema gerador II aplicado no primeiro momento da segunda sequência didática

As noções de área e perímetro de figuras planas são primordiais para compreendermos situações do nosso cotidiano. Pensando nisso, o professor de matemática desafiou seus alunos com a seguinte situação:

Dentre todos os terrenos retangulares com perímetro 60 m, qual deles tem a maior área?



Fonte: Elaborado pelo autor (2022).

Com base no exposto pelo professor, os alunos concluíram que tal terreno tem comprimento, largura e área, respectivamente iguais a:

Resolução: Seja x o comprimento e y a largura da região retangular, então

$$2x + 2y = 60 \Rightarrow x + y = 30 \text{ (I) e } \text{Área} = x \cdot y \text{ (II).}$$

De (I) e (II), temos $A = (30 - x) \cdot x$.

Variando a valor do comprimento, obtemos

$$\begin{aligned}x = 2 &\Rightarrow A = 28 \cdot 2 = 56m^2 \text{ e } y = 28; \\x = 5 &\Rightarrow A = 25 \cdot 5 = 125m^2 \text{ e } y = 25; \\x = 10 &\Rightarrow A = 20 \cdot 10 = 200m^2 \text{ e } y = 20; \\x = 12 &\Rightarrow A = 18 \cdot 12 = 216m^2 \text{ e } y = 18; \\x = 13 &\Rightarrow A = 17 \cdot 13 = 221m^2 \text{ e } y = 17; \\x = 14 &\Rightarrow A = 16 \cdot 14 = 224m^2 \text{ e } y = 16; \\x = 14,5 &\Rightarrow A = 15,5 \cdot 14,5 = 224,75m^2 \text{ e } y = 15,5; \\x = \mathbf{15} &\Rightarrow A = \mathbf{25 \cdot 5 = 225m^2} \text{ e } y = \mathbf{15}; \\x = 15,5 &\Rightarrow A = 14,5 \cdot 15,5 = 224,75m^2 \text{ e } y = 14,5; \\x = 16 &\Rightarrow A = 14 \cdot 16 = 224m^2 \text{ e } y = 14; \\x = 17 &\Rightarrow A = 13 \cdot 17 = 221m^2 \text{ e } y = 13; \\x = 18 &\Rightarrow A = 12 \cdot 18 = 216m^2 \text{ e } y = 12; \\x = 20 &\Rightarrow A = 10 \cdot 20 = 200m^2 \text{ e } y = 10; \\x = 25 &\Rightarrow A = 5 \cdot 25 = 125m^2 \text{ e } y = 5; \\x = 28 &\Rightarrow A = 2 \cdot 28 = 56m^2 \text{ e } y = 2.\end{aligned}$$

Daí, concluímos que quanto mais o comprimento e a largura vão se aproximando, a área vai aumentando. Assim, teremos a maior área igual a $225m^2$, tendo o comprimento e largura iguais a $15m$.

É importante comentar que nesse primeiro momento não se conseguiu resolver mais precisamente o problema gerador II, visto que, ainda não foi introduzido os conceitos de máximo e mínimo da função polinomial do 2º grau.

APÊNDICE D – PROBLEMAS PROPOSTOS - SEQUÊNCIA DIDÁTICA II

1 – (**SAEPE**). Em uma partida de futebol um goleiro chuta uma bola e sua trajetória descreve uma parábola de equação $h(x) = 16x - 2x^2$, onde $h(x)$ representa a altura atingida pela bola dada em metros, e x a distância horizontal, também dada em metros.

Nessas condições, a altura máxima, em metros, atingida pela bola é:

- a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

Fonte: <<https://profwarles.blogspot.com/>> Acesso em 10/10/2022.

RESOLUÇÃO: Como a altura máxima está relacionada com $h(x) = y$, em especial, $yv = \frac{-\Delta}{4a}$, ou seja

Calculando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, obtemos

$$\Delta = 16^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 256, \text{ substituindo em } yv = \frac{-\Delta}{4a}, \text{ tem-se}$$

$$yv = \frac{-256}{4 \cdot (-2)} = \frac{-256}{-8} = 32.$$

Donde segue que a altura máxima atingida pela bola é 32 metros, o que nos conduz a alternativa **D** como resposta.

2 - **ENEM 2016 (Segunda Aplicação)** - Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade detetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no:

- a) 19º dia. b) 20º dia. c) 29º dia. d) 30º dia. e) 60º dia.

Fonte: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>. Acesso em 10/10/2022.

RESOLUÇÃO:

Pelo enunciado devemos ter $f(t) = 1600$, ou seja,

$$-2t^2 + 120t = 1600 \Rightarrow t^2 - 60t = -800.$$

Pelo método de completar quadrados, temos

$$t^2 - 2 \cdot 30 \cdot t = -800 \Rightarrow t^2 - 2 \cdot 30 \cdot t + 30^2 = -800 + 30^2 \Rightarrow (t - 30)^2 = 100 \Rightarrow t - 30 = \pm\sqrt{100} \Rightarrow t - 30 = \pm 10$$

Assim, temos $t - 30 = 10 \Rightarrow t = 40$ ou $t - 30 = -10 \Rightarrow t = 20$.

Como a segunda dedetização deveria acontecer posterior a primeira, logo foi no 20º dia, o que nos conduz a alternativa **B**.

3 – **(Elaborado pelo autor - 2022)** - Um casal irá se casar brevemente. Para o seu casamento, eles contrataram um Buffet que realizará sua festa para 240 convidados. O Buffet cobrará R\$ 60,00 por pessoa, se todos os convidados comparecerem. Caso contrário, para cada convidado que faltar, será acrescentado a quantia de R\$ 2,00 por pessoa que comparecer.



Fonte: <<https://wakke.co/como-ter-um-planejamento-financeiro-eficaz-na-sua-escola/>>. Acesso em 10/10/2022.

Para que o Buffet lucre o máximo possível, quantas pessoas deverão faltar ao casamento?

Resolução: Seja x o número de convidados faltosos, temos:

- Convidados = 240;
- Faltosos = $240 - x$;
- Valor pago por convidado (caso todos compareçam) = R\$ 60,00;
- Valor pago por convidado (caso haja x faltosos) = R\$ 60,00 + R\$ 2,00 x ;

Do enunciado temos, $L(x) = (240 - x) \cdot (60 + 2x)$, onde $L(x)$ é o lucro obtido pelo *Buffet*. Então, $L(x) = -2x^2 + 420x + 14400$

$$\text{Daí, o número de faltosos está relacionado com } x_V, \text{ logo } x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-420}{2 \cdot (-2)} = \frac{-420}{-4} = 105.$$

Logo, para que o lucro do *Buffet* seja máximo, devem faltar 105 pessoas, consequentemente devem comparecer 135 pessoas.

4 - (Elaborado pelo autor - 2022)

Fast-food

“*Fast-food*” é uma expressão de origem inglesa que significa uma modalidade alimentar.

Ela demanda agilidade no preparo e consumo, onde as refeições devem ser preparadas e vendidas em pouco tempo. Daí a padronização, mecanização e a rapidez desse sistema.

Assemelha-se ao de produção fordista das linhas de montagem, onde tudo é pensado para agilizar a produtividade.

Destacam-se as cozinhas bem equipadas, mas que produzem poucas variedades alimentares. Além disso, o ambiente de consumo é, muitas vezes, relativamente desconfortável, de modo a incentivar a rápida ingestão dos alimentos.

Devemos destacar, por outro lado, que esse fenômeno é, na realidade, uma evolução do sistema de restaurantes e lanchonetes do tipo *drive-in*. Esses estabelecimentos surgiram na Califórnia na década de 40, e logo se espalharam pelo mundo.

O cardápio desses estabelecimentos é basicamente constituído de lanches, acompanhados por batatas fritas e outras frituras, além de refrigerantes. Eles são servidos para consumidores que possuem pouco tempo para realizar suas refeições.

Figura meramente ilustrativa



Fonte: <<https://www.todamateria.com.br/fast-food/>>. Acesso em 10/10/2022.

O dono de um restaurante *Fast-food* percebeu que, vendendo o combo a R\$ 20,00 em média tem 300 vendas efetuadas no mês e para cada redução de R\$ 1,00 no preço do combo, as vendas aumentam na quantidade de 30. Qual deve ser o preço dos combos para que a receita seja máxima?

Resolução:

Seja x o número de combos vendidos e $L(x)$ o lucro em função dos combos vendidos, temos

Para um valor de R\$ 20,00 o combo, obtemos um lucro de $20 \cdot 300 = R\$ 6000,00$, assim

Lucro = preço do combo \cdot número de combos vendidos, ou seja

$$L(x) = (20 - 1x) \cdot (300 + 30x) \Rightarrow L(x) = -30x^2 + 300x + 6000$$

Como queremos saber o preço para que o lucro seja máximo, então devemos encontrar o valor de x_V , isto é,

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(300)}{2 \cdot -30} = \frac{-300}{-60} = 5$$

Como o valor do combo é dado por $(20 - 1x)$ e o valor de x determinado é $x = 5$, temos

$$\text{Preço do combo} = (20 - 1x) = 20 - 1 \cdot 5 = 20 - 5 = 15$$

Logo o preço que determina o lucro máximo é R\$ 15,00.

5 – **(Elaborado pelo autor - 2022)** - Uma das fontes de renda de algumas famílias brejenses¹ é *Microempreendedor Individual (MEI)*, em particular, no ramo de confecções. O *Microempreendedor Individual (MEI)* é uma figura jurídica do Brasil, é a pessoa que trabalha por conta própria e que se legaliza como pequeno empresário. Para ser um microempreendedor individual é necessário faturar até oitenta e um mil reais por ano e não ter participação em outra empresa como sócio ou titular, o MEI também pode ter um empregado contratado que receba um salário mínimo ou o piso da categoria.

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Microempreendedor_individual>. Acesso em 17/11/2022.

Nesse sentido uma das oportunidades de empreendimentos mais próximas é o Moda center Santa Cruz.

¹ brejense – cidadão nascido em Brejo da Madre de Deus - PE

Moda Center Santa Cruz



Fonte: <<https://www.modacentersantacruz.com.br/sobre>>. Acesso em 17/11/2022

Localizado em Santa Cruz do Capibaribe (PE), o Moda Center Santa Cruz é o maior centro atacadista de confecções do Brasil. Ele reúne mais de 10 mil pontos comerciais, entre boxes e lojas, onde são comercializadas peças no atacado e no varejo. O centro inclui desde produtos populares a artigos mais trabalhados.

Suponhamos que um Microempreendedor Individual (MEI) produz peças de roupa e vende cada *mil peças* por 14 mil reais, além disso, seu custo de produção é dado pela multiplicação de cada mil peças adicionado de um custo fixo de 2 mil reais por milhares de peças vendidas. Considere a função $L(x)$, em que L fornece o lucro desse microempreendedor, em milhares, a partir das x unidades vendidas (em milhares) de seu produto ao longo de um ano.

a) Obtenha as funções custo, receita e lucro.

Seja x cada mil peças vendidas, e $C(x)$ a função custo, $R(x)$ a função receita e $L(x)$ a função lucro, temos

$$C(x) = (x + 2) \cdot x \Rightarrow C(x) = x^2 + 2x;$$

$$R(x) = 14x;$$

$$\text{Lucro} = \text{função receita} - \text{função custo} \Rightarrow L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = 14x - (x^2 + 2x);$$

$$L(x) = 14x - x^2 - 2x \Rightarrow L(x) = -x^2 + 12x.$$

b) Determine o lucro máximo obtido por esse microempreendedor.

Como o lucro máximo é obtido por y_V , calculando o discriminante, tem-se:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 144$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \cdot (-1)} = 36, \text{ ou seja, é igual a R\$ } 36.000,00 \text{ reais (36 milhares de reais).}$$