

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Engenharia Elétrica e Informática
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Análise da Codificação Wavelet em Sistemas Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh Plano

Luiz Felipe de Queiroz Silveira

*Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Campina
Grande como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor
em Engenharia Elétrica.*

Área de Conhecimento: Processamento da Informação

Orientadores:
Francisco Marcos de Assis
Ernesto Leite Pinto

Campina Grande, Paraíba, Brasil

©Luiz Felipe de Queiroz Silveira, Abril de 2006

UFCG - BIBLIOTECA - CAMPUS I	
4363	21. 11. 06

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S587a Silveira, Luiz Felipe de Queiroz
2006 Análise da codificação wavelet em sistemas sujeitos ao desvanecimento rayleigh plano / Luiz Felipe de Queiroz Silveira. — Campina Grande, 2006. 160p. : il..

Inclui bibliografia.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática.

Orientadores: Dr. Francisco Marcos de Assis , Dr. Ernesto Leite Pinto

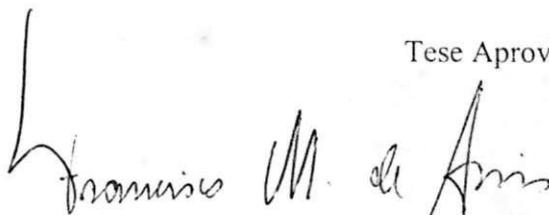
1— Sistemas de Comunicação 2— Codificação Wavelet 3— Canal com Desvanecimento I— Título

CDU 621.391

ANÁLISE DA CODIFICAÇÃO WAVELET EM SISTEMAS SUJEITOS AO
DESVANECIMENTO RAYLEIGH PLANO

LUIZ FELIPE DE QUEIROZ SILVEIRA

Tese Aprovada em 28.04.2006



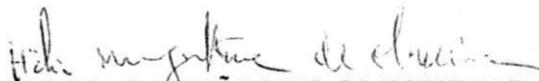
FRANCISCO MARCOS DE ASSIS, Dr., UFCG
Orientador



ERNESTO LEITE PINTO, Dr., IME
Orientador



BARTOLOMEU FERREIRA UCHOA FILHO, Ph.D., UFSC
Componente da Banca



HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA, Docteur., UFPE
Componente da Banca



JOSÉ EWERTON POMBO DE FARIAS, Dr., UFCG
Componente da Banca



BRUNO BARBOSA ALBERT, D.Sc., UFCG
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE – PB
ABRIL - 2006

Este trabalho é dedicado aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, por tudo;
- Aos meus pais Luiz Gonzaga e Maria de Jesus, pelo infinito amor e incentivos constantes;
- Aos meus irmãos Fernando, Junior e Cecília, pelos incentivos constantes;
- A Hevana Maia, meu amor, pelos incentivos e compreensão em todos os momentos;
- Aos professores Ernesto Leite Pinto e Francisco Marcos de Assis, pela orientação, amizade, incentivos e ensinamentos;
- Aos amigos Alfranke, Danilo, Darlan, Edmar Gurjão, Edmar José, Ewerton, Fabiano, Fabrício, Iguatemi, Jerônimo, José Alves, Josemar, Karina, Leocarlos, Madhavan, Manoel, Netto, Paulo, Portela, Protásio, Rex, Ronaldo, Scaico, Tomaz, Towar e Waslon, pela amizade e momentos de descontração;
- Aos professores Bruno Albert, José Ewerton Farias e Marcos Barbosa, pelos ensinamentos e amizade;
- Aos demais professores do DEE-UFCG;
- A todos os funcionários do DEE-UFCG, em especial a Pedro e Suênia, pela amizade;
- A CAPES, pelo importante apoio financeiro.

*It is a capital mistake to theorize before you have all the evidence.
It biases the judgment.*

– SHERLOCK HOLMES (DOYLE, 1887)

RESUMO

Esta tese concerne à concepção, ao estudo e à análise de desempenho de sistemas de comunicações digitais baseados na codificação com matrizes wavelets, considerando modelos de canais com desvanecimento Rayleigh plano. Atualmente, várias abordagens são empregadas no combate aos severos efeitos desses canais nos sistemas de transmissão sem-fio. A codificação wavelet surge como mais uma abordagem neste cenário, devido à sua baixa complexidade de decodificação e ao seu bom desempenho, obtido em canais com desvanecimento. Entretanto, essa técnica de codificação necessita de esquemas de modulação não-convencionais para que todo o seu potencial possa ser explorado. Este trabalho apresenta uma análise de desempenho de sistemas codificados por matrizes wavelets em canais variantes no tempo, caracterizados pelo desvanecimento Rayleigh plano. Baseada nessa análise, novos esquemas de modulação são especialmente projetados para mapear os símbolos codificados pelas matrizes wavelets. Especificamente, constelações de sinais são obtidas usando um Algoritmo Genético (AG) guiado pelas ferramentas analíticas aqui derivadas. Além disso, um novo sistema baseado na integração de um esquema de transmissão em diversidade temporal à codificação wavelet é avaliado neste trabalho. O desempenho desse novo sistema também é investigado através de formulação analítica, derivada especificamente para considerar as novas características desse sistema, advindas da integração da codificação com matrizes wavelets com o esquema de diversidade de transmissão.

ABSTRACT

This thesis concerns to the conception, the study and the performance analysis of wireless systems based on wavelet coding, over flat fading channels. In order to mitigate the destructive effects of those channels, many techniques have been recently proposed, including the use of new associations of modulation and channel coding strategies. Wavelet coding technique appears as a promising approach to this scenario, especially due to its low decoding complexity and good performance over multipath fading. However, this technique needs unusual modulation schemes so that it can be fully exploited. This work presents a performance analysis of wavelet-coded systems on time-varying Rayleigh channels. Based on this analysis, novel signal constellations are especially designed to map the output symbols generated by wavelet encoders. Specifically, these constellations are obtained using a Genetic Algorithm (GA) and the analytical tools derived herein. Moreover, a new transmission system based on the integration of a time-diversity scheme with the wavelet coding is evaluated in this work. The performance of this new system is also addressed by mathematical tools, derived specifically to take into account the specific features of the system, which emerge with the integration of the wavelet coding and diversity.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xvi
Lista de Símbolos	xvii
Glossário	xix
Capítulo 1– Introdução	1
1.1 Enfoque do Trabalho	3
1.2 Organização do Texto	4
Capítulo 2– Codificação com Matrizes Wavelets	6
2.1 Matrizes de Coeficientes Wavelets	7
2.1.1 Matrizes Wavelets Utilizadas na Codificação	8
2.2 Algoritmo de Codificação com Wavelets	9
2.3 Decodificação Wavelet	13
2.4 Distribuição dos Símbolos Gerados pelo Codificador Wavelet	14
2.5 Taxa da Codificação Wavelet	15
2.6 Conclusão	15

Capítulo 3– Sistemas Baseados na Codificação com Matrizes Wavelets	17
3.1 Sistema com Codificação Wavelet em Canais AWGN	18
3.2 Sistema com Codificação Wavelet em Canais com Desvanecimento Rayleigh . .	21
3.2.1 Quantização dos Símbolos Wavelets	26
3.2.2 Resultados Numéricos	28
3.3 Sistema com Codificação Wavelet Modificado em Canais com Desvanecimento Rayleigh	41
3.3.1 Resultados Numéricos	43
3.4 Conclusão	53
 Capítulo 4– Análise de Desempenho de Sistemas Baseados em MCW's	 54
4.1 Sistema com Codificação Wavelet em Canais AWGN	55
4.2 Sistema com Codificação Wavelet em Canais com Desvanecimento Rayleigh . .	56
4.2.1 Distribuição de Probabilidades do Ruído de Demodulação	59
4.2.1.1 Distribuição de probabilidade dos símbolos wavelets	61
4.2.1.2 Distribuição de probabilidade dos erros de demodulação	64
4.2.2 Distribuição de Probabilidades do Ruído Wavelet	65
4.2.3 Quantização de Símbolos Wavelets	66
4.2.4 Aplicação	70
4.3 Sistema com Codificação Wavelet Modificado em Canais com Desvanecimento Rayleigh	73
4.3.1 Distribuição de Probabilidades do Ruído de Demodulação	75
4.3.1.1 Distribuição de probabilidade dos sub-símbolos wavelets	76
4.3.1.2 Distribuição de probabilidade dos erros de demodulação	79
4.3.2 Distribuição de Probabilidades do Ruído Wavelet	80
4.3.3 Aplicação	82
4.4 Conclusão	82

<i>SUMÁRIO</i>	xi
Capítulo 5– Projeto de Constelações Adequadas à Codificação Wavelet	86
5.1 Aplicação de Algoritmos Genéticos ao Projeto de Constelações para Sistemas Baseados na Codificação com MCW's	87
5.1.1 Formulação do Problema	87
5.1.2 Representação Cromossômica	88
5.1.3 População Inicial	89
5.1.4 Função de Aptidão	90
5.1.5 Operadores Genéticos	91
5.1.5.1 Seleção geométrica normalizada	92
5.1.5.2 Cruzamento heurístico	92
5.1.5.3 Mutação não-uniforme multidimensional	93
5.2 Resultados Numéricos	94
5.3 Conclusão	99
Capítulo 6– Conclusão	101
6.1 Principais Contribuições	103
6.2 Perspectivas para Trabalhos Futuros	104
Apêndice A– Simulação dos Sistemas Baseados na Codificação com MCW's	106
Apêndice B– Modulação PSK: Probabilidade de Erro	107
B.1 Probabilidade de Erro em Canais AWGN	108
B.2 Probabilidade de Erro em Canais com Desvanecimento Rayleigh Plano	111
B.3 Conclusão	113

<i>SUMÁRIO</i>	xii
Apêndice C– Algoritmos Genéticos	114
C.1 Operadores Básicos de um Algoritmo Genético	116
C.2 Convergência do Método	118
C.3 Conclusão	120
Apêndice D– Matrizes e Sistemas Wavelets	121
D.1 As Matrizes Wavelets	122
D.2 Matrizes Wavelets de Haar	125
D.2.1 A Matriz de Haar Canônica	126
D.2.2 Matriz de Haar Característica de uma Matriz Wavelet	127
D.2.3 Produto Tensorial entre Matrizes de Haar	128
D.2.4 O Operador Extensão	129
D.3 Expansão Ortonormal Discreta	130
D.3.0.1 Teorema de Parseval	130
D.4 Funções Wavelets e de Escala	131
D.5 Sistemas Wavelet	133
D.6 Conclusão	134
Referências Bibliográficas	135

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama do codificador wavelet para uma MCW $m \times mg$. Neste esquema, o Bloco MCW_j é definido a partir da j -ésima linha da matriz de coeficientes wavelets.	10
2.2	Diagrama do codificador wavelet para uma MCW 2×8 ($m = 2, g = 4$).	12
3.1	Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet.	18
3.2	Desempenho do sistema com codificação wavelet e modulação ASK simulado com a MCW 2×8 em um canal AWGN.	20
3.3	Desempenho do sistema com codificação wavelet e modulação ASK simulado com a MCW 4×16 em um canal AWGN.	21
3.4	Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet com estimador de canal.	21
3.5	Constelações APK e PSK utilizadas no sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×128	28
3.6	Constelações APK e PSK utilizadas no sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×8	29
3.7	Desempenho de um sistema PSK com codificação wavelet, simulado com as MCW's 2×8 e 2×128 sobre um canal com $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.	30
3.8	Desempenho de um sistema APK com codificação wavelet, simulado com as MCW's 2×8 e 2×128 sobre um canal com $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.	32
3.9	Desempenho do sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×128 com modulações 11-PSK e 11-APK.	34
3.10	Curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os sistemas com modulações PSK e APK simulados com as MCW's 2×8 e 2×128 em um canal com desvanecimento com $f_D T_s = 0,002$	37

3.11	Curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os sistemas com modulações PSK e APK simulados com as MCW's 2×8 e 2×128 sobre um canal com desvanecimento com $f_D T_s = 0,004$	37
3.12	Desempenho do sistema com codificação wavelet simulado com as MCW's 2×8 e 2×128 na presença de erros de estimação de canal para $f_D T_s = 0,002$	39
3.13	Desempenho do sistema com codificação wavelet simulado com as MCW's 2×8 e 2×128 na presença de erros de estimação de canal para $f_D T_s = 0,004$	40
3.14	Sistema com codificação wavelet modificado com estimador de canal.	42
3.15	Constelações utilizadas nas simulações do sistema com codificação wavelet modificado.	44
3.16	Desempenho do sistema PSK com codificação wavelet modificado, simulado com as MCW's 2×8 e 4×16 sobre um canal com $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.	46
3.17	Desempenho do sistema APK com codificação wavelet modificado, simulado com as MCW's 2×8 e 4×16 sobre um canal com $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.	47
3.18	Desempenho do sistema PSK com codificação wavelet modificado na ausência de erros de estimação de canal.	49
3.19	Curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os sistemas com modulações 5-PSK e 5-APK simulados com a MCW 2×8 sobre um canal com desvanecimento com $f_D T_s = 0,002$	50
3.20	Curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os sistemas com modulações 5-PSK e 5-APK simulados com a MCW 4×16 sobre um canal com desvanecimento com $f_D T_s = 0,002$	51
3.21	Desempenho do sistema com codificação wavelet modificado, simulado com as MCW's 2×8 e 4×16 na presença de erros de estimação de canal para $f_D T_s = 0,002$	52
4.1	Sistema com codificação wavelet.	57
4.2	Diagrama com todos os possíveis eventos de erros de demodulação que podem ocorrer quando o sinal de rótulo 4 da constelação, que representa o conjunto $\{2, 4, 6\}$ como definido na Tabela 4.5, é transmitido através de um canal ruidoso.	69

4.3	Sistema com codificação wavelet com MCW 2×8 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana.	71
4.4	Sistema com codificação wavelet com MCW 2×8 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na métrica de decisão MAP.	72
4.5	Sistema com codificação wavelet com MCW 2×128 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana.	72
4.6	Sistema com codificação wavelet com MCW 2×128 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na métrica de decisão MAP.	73
4.7	Sistema com codificação wavelet modificado.	74
4.8	Sistema com codificação wavelet modificado: Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana.	83
4.9	Sistema com codificação wavelet modificado: Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na métrica de decisão MAP.	84
5.1	Constelações obtidas via AG para os sistemas com codificação wavelet.	95
5.2	Desempenho do sistema com codificação wavelet com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana e esquemas de modulação projetados via AG.	97
5.3	Desempenho do sistema com codificação wavelet com demodulação baseada na regra MAP e esquemas de modulação projetados via AG.	97
5.4	Constelações obtidas via AG para o sistema com codificação wavelet modificado.	98
5.5	Desempenho do sistema com codificação wavelet modificado com esquemas de modulação projetados via AG.	100

LISTA DE TABELAS

2.1	Símbolos gerados por uma MCW 2×8	12
3.1	Matriz de entrelaçamento	22
3.2	Algoritmo de busca exaustiva de constelações para sistemas wavelets.	24
3.3	Quantização para MCW 2×128	27
4.1	Ruído de demodulação dos símbolos wavelets	60
4.2	Medidas empíricas de informação mútua.	60
4.3	Símbolos wavelets	62
4.4	Vetor de símbolos wavelets \mathbf{y}_{x_8}	62
4.5	Quantização para MCW 2×128	67
4.6	Ruído de quantização dos símbolos wavelets para uma MCW 2×128	68
4.7	Sub-símbolos wavelets	76
4.8	Vetor de sub-símbolos wavelets $\mathbf{y}_{x_8}^0$	77
5.1	Operadores genéticos empregados nos projetos.	91
C.1	Termos biológicos usados no contexto dos AGs.	116

$\mathbf{A} = (a_k^s)$ - Matriz de coeficientes wavelets

\mathbf{a}^0 - Vetor de escala

$\mathbf{a}^s, s \geq 0$ - Vetores wavelets

a_k^s - Coeficientes de uma matriz wavelet

\mathbf{C}_{MCW} - Matriz de codificação wavelet

$\mathbb{E}[\cdot]$ - Valor médio de uma variável aleatória

E_b - Energia de bit

E_b/\mathfrak{N}_0 - Relação sinal-ruído de bit

E_C - Energia média da constelação de sinais

$E(I_d, L)$ - Entrelaçador de bloco com profundidade I_d

E_s - Energia do sinal

e_n - Ruído de demodulação

f - Deslocamento Doppler

f_D - Máximo desvio Doppler

$f_D T_s$ - Máximo desvio Doppler normalizado

f_0 - Banda de coerência de um canal de comunicação

$\mathbb{G}_{\nu_i}(z)$ - Função geradora de momentos do ruído wavelet

$GF(q)$ - Campo de Galois q -ário

g - Gênero de uma matriz de coeficientes wavelets

$I(X; Y)$ - Informação mútua entre as v.a.'s X e Y

I_d - Profundidade do entrelaçamento

$J_0(\cdot)$ - Função de Bessel de ordem zero

K - Comprimento de restrição do codificador wavelet

$L \cdot I_d$ - Comprimento da seqüência entrelaçada

$L^2(\mathbb{R})$ - Espaço vetorial de Hilbert

m - Posto de uma matriz de coeficientes wavelets

\mathbf{n} - Valor complexo do ruído AWGN

$[nT_s, (n+1)T_s)$ - Intervalo de sinalização

$n(t)$ - Ruído AWGN

P_{erro} - Probabilidade de erro de bit

$P(\tilde{y}_n | y_n)$ - Probabilidade do detetor decidir pelo símbolo \tilde{y}_n dado que o símbolo y_n foi transmitido

$p(t)$ - Pulso limitado em banda com energia unitária

$p(y_n)$ - Probabilidade de ocorrência do símbolo y_n

- $Q(\cdot)$ - Função de erro
 R_b - Taxa de bit
 $R(\Delta f)$ - Função de correlação entre as diferenças de frequências
 $R(\Delta t)$ - Função de correlação das diferenças de tempo
 R_s - Taxa da codificação wavelet
 $r(t)$ - Sinal recebido
 $S(f)$ - Espectro de Jakes
 $S(\tau)$ - Perfil de intensidade de múltiplos percursos
 $s(t)$ - Sinal transmitido
 T_m - Máximo tempo de atraso
 T_0 - Tempo de coerência de um canal de comunicação
 $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$ - Sistema wavelet associado à matriz wavelet \mathbf{A}
 \mathbf{x} - Vetor de bits de informação
 x_n - Bits de informação
 \mathbf{y}_n - Palavra-código wavelet
 y_n - Símbolos wavelets
 y_n^j - Sub-símbolos wavelets
 z_i - Saída do decodificador/correlator wavelet no tempo i
 $\alpha(t)$ - Ganho do canal com desvanecimento
 $\delta_{x,y}$ - Símbolo de Kronecker
 μ - Passo do LMS
 ν_i - Ruído wavelet
 σ^2 - Variância do ruído gaussiano
 τ - Tempo de atraso
 $\varphi_{jk}(x)$ - Família de funções de escala
 $\psi_{jk}^s(x)$ - Família de funções wavelet
 \aleph_0 - Densidade espectral de potência do ruído gaussiano

- APK* - Amplitude-Phase Keying (*Modulação em Amplitude e Fase*)
- ASK* - Amplitude Shift Keying (*Modulação em Amplitude*)
- AWGN* - Additive White Gaussian Noise (*Ruído Aditivo Gaussiano Branco*)
- BER* - Bit Error Rate (*Probabilidade de Erro de Bit*)
- BPSK* - Binary Phase Shift Keying (*Modulação em Fase Binária*)
- CSI* - Channel State Information (*Canal com Estado Conhecido pelo Receptor*)
- DEP* - Densidade Espectral de Potência
- EMQ* - Erro Médio Quadrático
- ISI* - Inter-Symbol Interference (*Interferência Intersimbólica*)
- i.i.d.* - Variáveis Independentes e Identicamente Distribuídas
- MAP* - Maximum a Posteriori Probability (*Máxima Probabilidade a posteriori*)
- MCW* - Matriz de Coeficientes Wavelets (*WCM - Wavelet Coefficients Matrix*)
- PEI* - Patamar de Erro Irreduzível (PEI)
- PSK* - Phase Shift Keying (*Modulação em Fase*)
- RI* - Resposta Impulsional
- SNR* - Relação Sinal-Ruído
- STBC* - Codificação de Bloco Espaço-Temporal
- VLSI* - Very Large Scale Integration (*Integração em Escala Muito Grande*)
- v.a.* - Variável Aleatória
- WSS-US* - Wide Sense Stationary - Uncorrelated Scattering (*Canal Descorrelacionado e Estacionário em Sentido Amplo*)

INTRODUÇÃO

O desempenho de vários sistemas de comunicações sem-fio desenvolvidos na atualidade é severamente limitado pelo desvanecimento plano produzido por múltiplos percursos de propagação. Com o objetivo de minimizar a interferência destrutiva desses canais, várias técnicas têm sido propostas recentemente. Dentre elas, podem ser citadas técnicas de diversidade (ASSIS; SOUSA, 1999; SILVA; SOUSA, 1995; GOWDA et al., 1998), uso de decodificadores iterativos (BERROU et al., 1993; HAGENAUER et al., 1996; TEPE; ANDERSON, 2001) e esquemas de modulação codificada (ALAMOUTI, 1998; NAGUIB et al., 1997; SILVA; ASSIS, 1999).

Em particular, as técnicas de diversidade consistem, basicamente, em gerar redundância (réplicas) do sinal transmitido no receptor. Essas réplicas são transmitidas sobre canais independentes, e portanto, são afetadas diferentemente (de maneira descorrelacionada) pelo canal. Dessa forma, quando uma dessas réplicas estiver em uma situação de desvanecimento profundo, deverá ser grande a probabilidade de que outras réplicas não estejam nessa situação. Assim, elas podem ser combinadas de forma a fornecer uma maior confiabilidade na detecção desse sinal (PROAKIS, 1989).

Dentre as várias técnicas de codificação existentes na literatura, a codificação wavelet apresenta-se como uma nova abordagem para superar os efeitos do desvanecimento (SILVEIRA et al., 2003, 2004a). Essa codificação, proposta inicialmente por Tzannes & Tzannes (1992), é baseada nas propriedades de ortogonalidade das linhas de uma matriz de coeficientes wavelets (MCW).

As operações realizadas no processo de codificação wavelet são definidas no corpo dos números reais. Os símbolos resultantes dessa codificação, denominados *símbolos wavelets*, são multiníveis e possuem probabilidades de ocorrência não-eqüiprováveis.

No processo de codificação, a seqüência binária de dados é aplicada à entrada de um banco de registradores de deslocamento, com células ponderadas pelos coeficientes de uma matriz wavelet. Da mesma forma que ocorre na codificação convolucional, a informação de cada bit de entrada é disseminada por vários símbolos codificados. Devido às propriedades de ortogonalidade das MCW's, a seqüência de bits de informação pode ser recuperada na recepção simplesmente por um banco de correlatores. A simplicidade computacional do processo de decodificação é uma das principais vantagens da codificação com matrizes wavelets.

A estratégia utilizada pela codificação wavelet de “espalhar” a informação de cada bit por vários intervalos de sinalização, aumenta potencialmente a robustez do sistema à combinação de desvanecimento plano variante no tempo e efeitos de ruídos localizados. De fato, o número máximo de símbolos codificados que podem ser afetados por um bit de entrada é definido pelo número de colunas da matriz de coeficientes wavelets utilizada na codificação, e portanto, o ganho de desempenho da codificação wavelet depende fortemente desse parâmetro.

Por outro lado, o aumento no comprimento das linhas da MCW resulta em um aumento do alfabeto dos símbolos codificados. Como cada símbolo deste alfabeto é mapeado em um sinal da constelação, segue que MCW's com um número grande de colunas ocasionam um acúmulo de pontos na constelação de sinais utilizada no esquema de modulação, podendo comprometer o desempenho desses sistemas. Em (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998; TZANNES; TZANNES, 1992) foi apresentada uma forma de se evitar a aglomeração de pontos na constelação de sinais dos sistemas com codificação wavelet. Trata-se de um esquema que limita a modulação a um número de níveis menor que o número de símbolos wavelets que podem ser gerados na codificação. Esse procedimento pode ser visto como um esquema de quantização dos símbolos wavelets. Quando este esquema é aplicado de forma criteriosa, o efeito da quantização dos símbolos torna-se irrelevante quando comparado ao ganho de desempenho conseguido pela codificação wavelet combinada a um esquema de modulação eficiente.

Outro aspecto que deve ser levado em consideração durante o projeto do esquema de modulação, diz respeito à distribuição de probabilidades dos símbolos gerados pelo codificador

wavelet. Esses símbolos são multiníveis e têm uma distribuição de probabilidades muito desbalanceada. Portanto, a escolha do esquema de modulação influencia sensivelmente o desempenho dos sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets.

1.1 ENFOQUE DO TRABALHO

Em trabalhos anteriores, os sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets utilizavam esquemas de quantização de símbolos wavelets e constelações de sinais projetados empiricamente, por simulação computacional (TZANNES; TZANNES, 1992; SILVEIRA, 2002). De fato, até o momento não se dispunha de ferramentas matemáticas que pudessem ser utilizadas para projetar analiticamente o esquema de modulação utilizado nesses sistemas.

Neste trabalho, as ferramentas analíticas necessárias para investigar o desempenho de sistemas de comunicações codificados por matrizes de coeficientes wavelets, em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência, são derivadas e validadas através de comparações com simulações computacionais.

Além disso, um novo sistema baseado na codificação com matrizes wavelets é apresentado. Neste sistema, um esquema de transmissão em diversidade temporal é integrado à codificação wavelet, visando aumentar o ganho de diversidade que esta técnica de codificação propicia em canais caracterizados pelo desvanecimento não-seletivo em frequência. Note que o uso de diversidade temporal leva, quase que invariavelmente, a uma diminuição da eficiência espectral do sistema (PROAKIS, 1989). Portanto, esquemas de transmissão baseados na utilização de múltiplas antenas transmissoras podem ainda ser investigados em trabalhos subsequentes, de forma a preservar essa eficiência espectral (ALAMOUTI, 1998; TAROKH et al., 1998).

O desempenho desse novo sistema também é analisado em canais com desvanecimento Rayleigh plano, através de ferramentas matemáticas derivadas especificamente para considerar as novas características do sistema, advindas da integração da codificação com matrizes wavelets com o esquema de transmissão em diversidade. O desenvolvimento analítico apre-

sentado aqui pode ainda ser facilmente generalizado para auxiliar na concepção e análise de outras abordagens baseadas na codificação com matrizes wavelets.

Por fim, este trabalho apresenta uma nova metodologia de projeto para os esquemas de modulação utilizados nos sistemas wavelets. Especificamente, as constelações de sinais empregadas por esses esquemas de modulação são projetadas por meio de um algoritmo genético guiado pela formulação analítica derivada neste trabalho.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este texto é organizado em seis capítulos e quatro apêndices.

No Capítulo 2 as matrizes wavelets são definidas e suas principais propriedades são apresentadas. Ainda no Capítulo 2, são apresentados os algoritmos de codificação e decodificação com matrizes de coeficientes wavelets. O final do Capítulo 2 é dedicado a uma análise da taxa de codificação wavelet.

No Capítulo 3, são apresentados dois sistemas baseados na codificação wavelet: O sistema proposto por Tzannes & Tzannes (1992) e um novo sistema, caracterizado pela integração de um esquema de transmissão em diversidade temporal à codificação de canal com matrizes wavelets. O desempenho de ambos os sistemas são avaliados em canais com desvanecimento Rayleigh, via simulação computacional, considerando a presença de erros de estimação de canal no receptor. O algoritmo LMS (*Least Mean Square*) foi escolhido aqui para estimar o estado do canal de comunicação ao longo de cada transmissão.

No Capítulo 4, as ferramentas analíticas necessárias para se investigar o desempenho dos sistemas de transmissão abordados neste trabalho, baseados na codificação com matrizes wavelets, sobre canais sujeitos apenas ao ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN) e em canais com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência, serão derivadas e validadas através de comparações com simulações computacionais.

O Capítulo 5 trata do projeto de constelações de sinais para uso em sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets. Especificamente, essas constelações são projetadas por meio de um algoritmo genético guiado pelas ferramentas analíticas derivadas no Capítulo 4. Neste capítulo, os aspectos envolvidos na aplicação de algoritmos genéticos ao projeto dessas constelações são detalhados.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões do trabalho, sendo destacadas as principais contribuições. Também são apresentadas neste capítulo algumas propostas para a continuação da pesquisa.

O Apêndice A apresenta detalhes de implementação e simulação dos sistemas de transmissão investigados neste trabalho.

O Apêndice B apresenta as deduções das probabilidades de erros de demodulação de sinais PSK provenientes de uma constelação assimétrica, tanto em canais com ruído aditivo Gaussiano branco quanto em canais caracterizados pelo desvanecimento Rayleigh plano. Essas equações foram utilizadas nas análises dos sistemas de transmissão apresentadas no Capítulo 4.

O Apêndice C apresenta os conceitos teóricos relacionados à técnica de otimização por algoritmos genéticos. Ele pode ser especialmente útil como uma introdução ao Capítulo 5.

O Apêndice D apresenta uma revisão da teoria de matrizes e sistemas wavelets.

CAPÍTULO 2

CODIFICAÇÃO COM MATRIZES WAVELETS

A codificação com wavelets foi proposta por Tzannes & Tzannes (1992) como uma nova abordagem para superar os efeitos do desvanecimento, explorando as propriedades de ortogonalidade entre as linhas de uma matriz de coeficientes wavelets (MCW). Os símbolos resultantes dessa codificação, denominados *símbolos wavelets*, são multiníveis e conduzem informação de vários bits.

Da mesma forma como ocorre na codificação convolucional, a codificação wavelet dissemina a informação de cada bit por vários símbolos codificados. Este mecanismo “espalha” a informação no tempo, aumentando potencialmente a robustez do sistema à combinação de desvanecimento plano variante no tempo e efeitos de ruídos localizados (SILVEIRA et al., 2003).

O número máximo de símbolos codificados que podem ser afetados por qualquer bit de entrada é denominado aqui *comprimento de restrição do codificador wavelet*. O comprimento de restrição K de um codificador wavelet é definido pelo número de colunas da matriz de coeficientes wavelets utilizada na codificação. Ao contrário da codificação convolucional, o comprimento de restrição de um codificador wavelet não causa um grande impacto à complexidade computacional do processo de decodificação. De fato, devido às propriedades de ortogonalidade das linhas da MCW, a seqüência de bits de informação pode ser recuperada de forma simples, usando um banco de correlatores formados a partir das linhas da MCW.

Este capítulo aborda os fundamentos da codificação de canal com matrizes de coeficientes wavelets. Neste contexto, os algoritmos de codificação e decodificação wavelet serão apresentados, e as principais propriedades dos símbolos gerados pelo codificador wavelet serão definidas.

O restante deste capítulo é organizado da seguinte forma: na Seção 2.1 são definidas as matrizes de coeficientes wavelets e apresentadas propriedades importantes dessas matrizes à codificação com wavelets. Na Seção 2.2 é apresentada a técnica de codificação com matrizes de coeficientes wavelets. Na Seção 2.3, apresenta-se o processo de decodificação wavelet. Na Seção 2.4, apresenta-se a distribuição de probabilidades dos símbolos gerados pelo codificador wavelet. Na Seção 2.5, discute-se a taxa do código wavelet. Finalmente, na Seção 2.6, são apresentadas algumas conclusões.

2.1 MATRIZES DE COEFICIENTES WAVELETS

Nesta seção, as matrizes de coeficientes wavelets são definidas e as suas propriedades mais relevantes para a codificação com wavelets são apresentadas. No Apêndice D, essas matrizes poderão ser estudadas mais detalhadamente.

Considere a matriz $\mathbf{A} = (a_k^s)$ com $m \geq 2$ linhas (vetores) e mg colunas denotada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_{mg-1}^0 \\ a_0^1 & \cdots & a_{mg-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{m-1} & \cdots & a_{mg-1}^{m-1} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

com elementos no conjunto dos números reais ou complexos.

A matriz \mathbf{A} é denominada de *matriz wavelet* de posto m e gênero g se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s = m\delta_{s,0}, \quad 0 \leq s \leq m-1 \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_{[k+mr']}^{s'} \bar{a}_{[k+mr]}^s = m\delta_{s',s}\delta_{r',r}, \quad \begin{aligned} 0 \leq s', s \leq m-1, \\ 0 \leq r', r \leq g-1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que $[k+mr]$ é usado para denotar a operação $k+mr$ módulo mg , \bar{a} é o conjugado complexo de a e $\delta_{x,y}$ é o símbolo de Kronecker, definido por

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.4)$$

A Equação (2.3) estabelece que os vetores representados pelas linhas de uma MCW de posto m têm comprimento igual a \sqrt{m} e são mutuamente ortogonais, mesmo quando deslocadas entre si por um múltiplo de m . Além disso, ela indica que cada linha da MCW é ortogonal a uma cópia de si mesma deslocada por um múltiplo de m .

Por outro lado, a Equação (2.2) assegura que a soma dos elementos da primeira linha da matriz é igual ao posto m da matriz wavelet, enquanto que a soma dos elementos das demais linhas é igual a zero.

2.1.1 Matrizes Wavelets Utilizadas na Codificação

Nesta seção será apresentada uma classe especial de matrizes wavelets, conhecidas como matrizes wavelets reais planas, que são utilizadas nos esquemas de codificação wavelet deste trabalho.

Uma matriz wavelet plana possui a propriedade de que todos os seus elementos têm o mesmo valor absoluto. Quando os elementos de uma matriz wavelet plana são reais, ela é denominada matriz wavelet real plana (TZANNES; TZANNES, 1992; RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998). As matrizes wavelets reais planas com elementos normalizados em ± 1 satisfazem as condições modificadas dadas a seguir:

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s = m\sqrt{g}\delta_{s,0}, \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=0}^{mg-1} a_{[k+mr']}^{s'} a_{[k+mr]}^s = mg\delta_{s',s}\delta_{r',r}. \quad (2.6)$$

A matriz wavelet real plana normalizada em ± 1 com dimensão 2×2 é a matriz de Haar expressa em (2.7). Matrizes wavelets reais planas de ordens maiores e gênero 1 são também conhecidas como matrizes de Hadamard ou matrizes de Walsh.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

A seguir, são apresentados dois outros exemplos de matrizes wavelets reais planas, as quais foram utilizadas nos sistemas avaliados neste trabalho.

Exemplo 2.1 **Matriz wavelet real plana de posto 2 e gênero 4.** *Essa matriz wavelet foi obtida aplicando-se a operação de extensão, definida na Seção D.2.4, sobre a matriz de Haar de posto $m = 2$ apresentada na Equação (2.7).*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Exemplo 2.2 **Matriz wavelet real plana de posto 4 e gênero 4.** *Essa matriz wavelet foi obtida pelo produto tensorial, definido na Seção D.2.3, entre duas matrizes de Haar de posto $m = 2$, seguido por uma operação de extensão.*

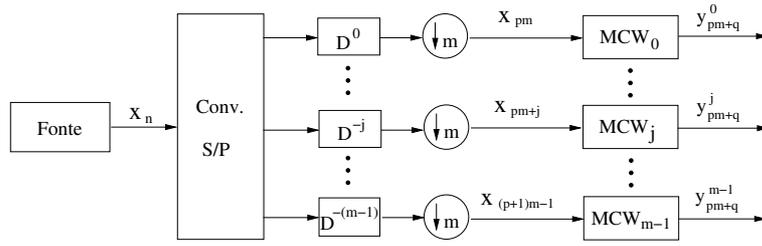
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

2.2 ALGORITMO DE CODIFICAÇÃO COM WAVELETS

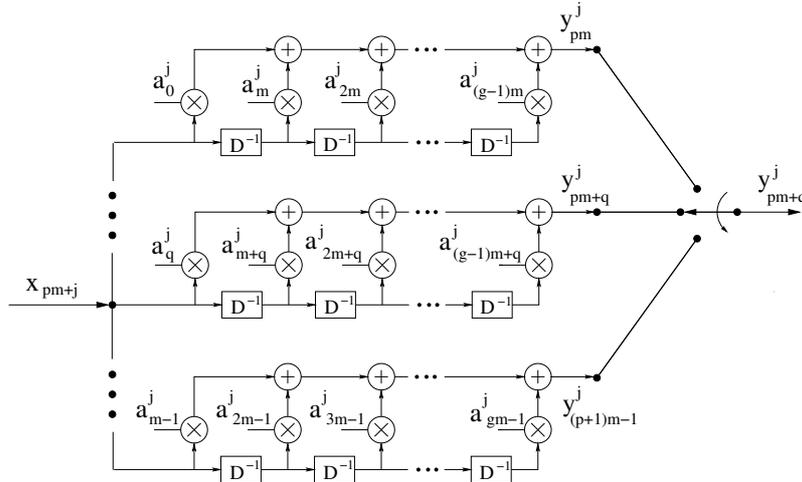
Nesta seção, o algoritmo de codificação com matrizes wavelets, proposto em (TZANNES; TZANNES, 1992), é apresentado sob uma nova perspectiva. Cabe notar que este algoritmo pode ser implementado usando-se qualquer matriz de coeficientes wavelets, embora neste trabalho sejam utilizadas apenas as matrizes MCW reais planas.

A Equação (2.3) sintetiza as propriedades das MCW's que são a base da codificação com wavelets. Para exemplificar o processo de codificação, considere uma fonte discreta que gera bits de informação $x_n \in \{+1, -1\}$, estatisticamente independentes e com distribuição equiprovável¹. Além disso, considere que no processo de codificação utilizou-se uma matriz MCW real plana com posto m e gênero g , que pode ser expressa genericamente pela Equação (2.1). A Figura 2.1 ilustra o codificador wavelet definido para esta matriz.

¹Esta fonte de informação será adotada em todo o trabalho.



(a) Estrutura geral.



(b) Vista detalhada do Bloco MCW_j . Note que em cada registrador do banco, o sub-índice q varia de 0 a $m - 1$.

Figura 2.1. Diagrama do codificador wavelet para uma $MCW\ m \times mg$. Neste esquema, o Bloco MCW_j é definido a partir da j -ésima linha da matriz de coeficientes wavelets.

A codificação wavelet realiza operações sobre o corpo dos números reais. Nessa codificação, a sequência de bits de informação x_n é inicialmente dizimada em m seqüências paralelas, definidas por $X_{pm+j} := \{x_{pm+j}\}_{p \in \mathbb{Z}}$, $0 \leq j < m$, como pode ser observado a partir da Figura 2.1(a). A j -ésima seqüência paralela X_{pm+j} é então codificada por um banco de registradores de deslocamento, denotado nessa Figura pelo bloco MCW_j . No instante de tempo $n = pm + q$, em que $p \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ e $q \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$, o j -ésimo bloco MCW_j do codificador wavelet gera o símbolo y_{pm+q}^j , chamado neste trabalho *sub-símbolo wavelet*.

A Figura 2.1(b) apresenta de forma detalhada a estrutura de um dos m bancos de registradores MCW_j que formam o codificador wavelet representado na Figura 2.1(a). Cada banco MCW_j é constituído por m registradores de deslocamento, denotados REG_q , cada um deles com g células de memória. Os mg coeficientes da j -ésima linha da MCW são distribuídos em

m grupos de g coeficientes equi-espçados, de tal forma que o q -ésimo grupo é formado pelos coeficientes que ponderam as células do registrador REG_q do j -ésimo banco.

A cada instante de tempo $n = pm + q$, m sub-símbolos wavelets y_{pm+q}^j , $0 \leq j \leq m - 1$, gerados simultaneamente pelo q -ésimo registrador de cada um dos m bancos MCW_j , são disponibilizados na saída do codificador wavelet. A partir da Figura 2.1(b), pode-se observar que o sub-símbolo wavelet y_{pm+q}^j , gerado no tempo $n = pm + q$, pelo q -ésimo registrador do banco MCW_j , é dado por

$$y_{pm+q}^j = \sum_{l=0}^{g-1} a_{lm+q}^j x_{(p-l)m+j}. \quad (2.10)$$

Como existem mg elementos de memória em cada banco de registradores de deslocamento, cada bit de entrada pode afetar no máximo mg sub-símbolos wavelets. O comprimento de restrição K de um codificador wavelet é definido como o número máximo de símbolos em uma seqüência de saída que podem ser afetados por qualquer bit de entrada, ou seja,

$$K := mg \quad (2.11)$$

No algoritmo de codificação wavelet apresentado em (TZANNES; TZANNES, 1992), os m sub-símbolos wavelets com o mesmo índice de tempo $n = pm + q$ são ainda adicionados, e o símbolo resultante, chamado *símbolo wavelet*, é dado por

$$y_{pm+q} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{g-1} a_{lm+q}^j x_{(p-l)m+j}. \quad (2.12)$$

Como ilustração, a Figura 2.2 apresenta um diagrama esquemático do codificador wavelet associado à $\text{MCW } 2 \times 8$, definida em (2.13). Os sub-símbolos wavelets y_n^j gerados nos primeiros oito intervalos desta codificação, e os seus respectivos símbolos wavelets y_n , são apresentados na Tabela 2.1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 & a_4^0 & a_5^0 & a_6^0 & a_7^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & a_6^1 & a_7^1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

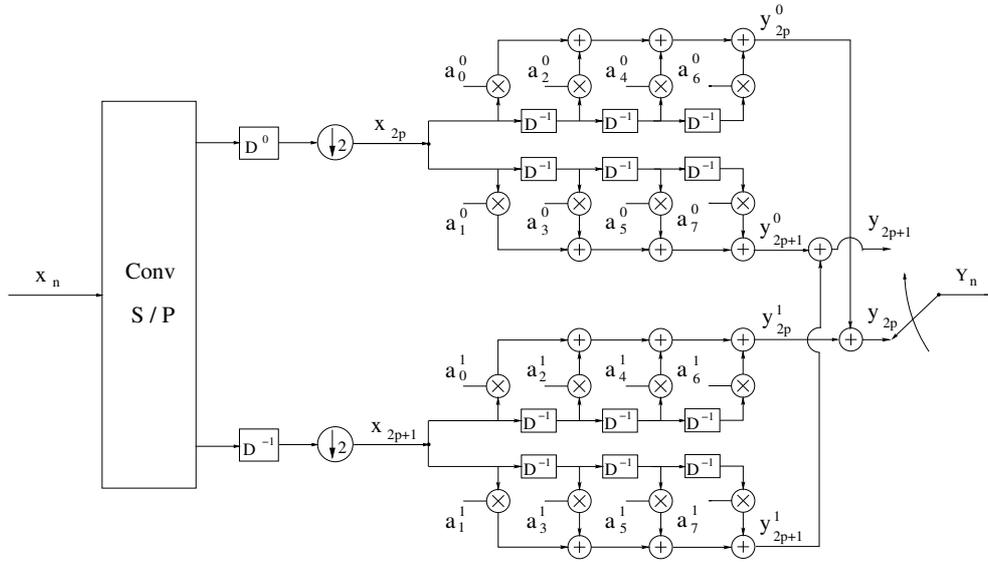


Figura 2.2. Diagrama do codificador wavelet para uma MCW 2×8 ($m = 2, g = 4$).

Tabela 2.1. Símbolos gerados por uma MCW 2×8 .

nT_s	y_n^0	y_n^1	$y_n = y_n^0 + y_n^1$
0	$a_0^0 x_0$	$a_0^1 x_1$	$a_0^0 x_0 + a_0^1 x_1$
1	$a_1^0 x_0$	$a_1^1 x_1$	$a_0^0 x_0 + a_1^1 x_1$
2	$a_2^0 x_0 + a_0^0 x_2$	$a_2^1 x_1 + a_0^1 x_3$	$a_2^0 x_0 + a_0^0 x_2 + a_2^1 x_1 + a_0^1 x_3$
3	$a_3^0 x_0 + a_1^0 x_2$	$a_3^1 x_1 + a_1^1 x_3$	$a_0^0 x_0 + a_1^0 x_2 + a_3^1 x_1 + a_1^1 x_3$
4	$a_4^0 x_0 + a_2^0 x_2 + a_0^0 x_4$	$a_4^1 x_1 + a_2^1 x_3 + a_0^1 x_5$	$a_4^0 x_0 + a_2^0 x_2 + a_0^0 x_4 + a_4^1 x_1 + a_2^1 x_3 + a_0^1 x_5$
5	$a_5^0 x_0 + a_3^0 x_2 + a_1^0 x_4$	$a_5^1 x_1 + a_3^1 x_3 + a_1^1 x_5$	$a_5^0 x_0 + a_3^0 x_2 + a_1^0 x_4 + a_5^1 x_1 + a_3^1 x_3 + a_1^1 x_5$
6	$a_6^0 x_0 + a_4^0 x_2 + a_2^0 x_4 + a_0^0 x_6$	$a_6^1 x_1 + a_4^1 x_3 + a_2^1 x_5 + a_0^1 x_7$	$a_6^0 x_0 + a_4^0 x_2 + a_2^0 x_4 + a_0^0 x_6 + a_6^1 x_1 + a_4^1 x_3 + a_2^1 x_5 + a_0^1 x_7$
7	$a_7^0 x_0 + a_5^0 x_2 + a_3^0 x_4 + a_1^0 x_6$	$a_7^1 x_1 + a_5^1 x_3 + a_3^1 x_5 + a_1^1 x_7$	$a_7^0 x_0 + a_5^0 x_2 + a_3^0 x_4 + a_1^0 x_6 + a_7^1 x_1 + a_5^1 x_3 + a_3^1 x_5 + a_1^1 x_7$

Os símbolos wavelets y_n , como definido em (TZANNES; TZANNES, 1992), também podem ser obtidos a partir de um produto matricial simples, expresso por

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{C}_{MCW} \quad (2.14)$$

em que \mathbf{y} é a palavra-código wavelet e \mathbf{C}_{MCW} é uma matriz de codificação, construída a partir de sucessivas repetições e deslocamentos (de m posições) da MCW até que o número de linhas da matriz \mathbf{C}_{MCW} seja igual à dimensão do vetor de bits de informação que se deseja codificar. Procedendo dessa forma, consegue-se manter as relações de ortogonalidade definidas pela Equação (2.6) entre as linhas da matriz \mathbf{C}_{MCW} , as quais são exploradas na decodificação wavelet, como poderá ser verificado na próxima seção.

Cabe observar que o algoritmo de codificação implementado em (TZANNES; TZANNES, 1992), definido pela Equação (2.14), é um caso particular do algoritmo apresentado na Figura 2.1.

comunicação sobre os símbolos wavelets transmitidos, assume-se estimativas dos bits dadas por $\hat{x}_{j+i-(mg-1)} = \text{sgn}(z_i^j)$

A simplicidade computacional do processo de decodificação é uma das principais vantagens da codificação com wavelets. A decodificação ótima pode ser conseguida se decisões suaves forem fornecidas pelo demodulador. Isto pode ser obtido facilmente utilizando modulação ASK (BPSK), entretanto deixa de ser trivial se for utilizado modulação PSK, APK ou FSK.

2.4 DISTRIBUIÇÃO DOS SÍMBOLOS GERADOS PELO CODIFICADOR WAVELET

A partir do processo de codificação wavelet apresentado na Seção 2.2, pode-se observar que os símbolos wavelets y_n , codificados por uma matriz MCW real plana de posto m e gênero g , pertencem ao conjunto

$$y_n \in \{-mg, -mg + 2, \dots, -mg + 2k, \dots, -2, 0, 2, \dots, mg - 2, mg\} \quad (2.18)$$

com cardinalidade $mg + 1$.

Mostra-se na Seção 4.2.1.1 que os símbolos wavelets têm uma distribuição de probabilidades dada por²

$$\Pr(y_n = 2k - mg) = \binom{mg}{k} 0,5^{mg}, \quad 0 \leq k \leq mg. \quad (2.19)$$

A partir da Equação (2.19), verifica-se que os símbolos têm média nula e variância mg .

Por outro lado, os sub-símbolos wavelets y_n^j , definidos pela Equação (2.10), podem assumir um dos $g + 1$ valores apresentados abaixo:

$$y_n^j \in \{-g, -g + 2, \dots, -g + 2k, \dots, -2, 0, 2, \dots, g - 2, g\} \quad (2.20)$$

Os sub-símbolos y_n^j seguem a distribuição de probabilidades

$$\Pr(y_n^j = 2k - g) = \binom{g}{k} 0,5^g, \quad 0 \leq k \leq g \quad (2.21)$$

²Note que os símbolos de menor módulo são os mais prováveis.

A dedução de (2.21) será apresentada na Seção 4.3.1.1. A partir desta expressão é fácil concluir que os sub-símbolos wavelets têm média nula e variância g .

2.5 TAXA DA CODIFICAÇÃO WAVELET

O processo de codificação apresentado até o momento tem taxa de codificação unitária (um bit de informação por símbolo codificado y_n). No entanto, a codificação com matrizes wavelets possibilita a obtenção de outros valores de taxa, modificando-se o nível de sobreposição das linhas da matriz de codificação wavelet. A sobreposição máxima ocorre quando o deslocamento entre linhas idênticas é igual a m , como pode ser observado na matriz em (2.15) para o caso de $m = 2$, o que resulta na taxa de codificação igual a 1. Variando-se a sobreposição das linhas wavelets, pode-se conseguir taxas de codificação tão pequenas quanto $1/g$. Neste caso limite, não há sobreposição dos elementos não nulos das linhas da MCW.

Neste ponto, cabe notar que a codificação com matrizes de grandes dimensões aumenta tanto a variância dos símbolos, quanto o número dos possíveis valores dos símbolos codificados, de acordo com as Equações (2.18) e (2.20). Porém, variando-se o nível de sobreposição das linhas da matriz de codificação wavelet, é possível controlar o aumento dessa variância, ao custo de uma diminuição na taxa da codificação wavelet.

2.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo foi apresentada a técnica da codificação de canal com matrizes de coeficientes wavelets. As principais propriedades da codificação com wavelets são resumidas a seguir:

1. Os vetores representados pelas linhas de uma matriz wavelet são estritamente ortogonais.
2. Codificação com taxa igual a 1 bit de informação por símbolo wavelet.
3. A taxa de codificação pode ser ajustável para valores inferiores a 1 bit/símbolo wavelet.

4. A decodificação dos símbolos wavelets é conseguida por um simples banco de correlatores.

Nos próximos capítulos serão apresentados resultados analíticos e de simulação para o desempenho da codificação wavelet em canais de comunicação com ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN), e em canais com desvanecimento. Será visto que em canais AWGN, a codificação wavelet apresenta o mesmo desempenho do BPSK coerente. Por outro lado, em canais com desvanecimento plano, a codificação wavelet supera o desempenho de outras abordagens propostas recentemente para o mesmo ambiente de transmissão.

CAPÍTULO 3

SISTEMAS BASEADOS NA CODIFICAÇÃO COM MATRIZES WAVELETS

Neste capítulo, o sistema proposto em (TZANNES; TZANNES, 1992), denominado a partir de agora *sistema com codificação wavelet*, será apresentado, e o seu desempenho será avaliado em dois tipos de canais de comunicação: em canais caracterizados apenas pelo ruído AWGN e em canais com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência com Doppler. Além disso, um novo sistema baseado na integração da codificação wavelet a um esquema de transmissão em diversidade temporal, denominado *sistema com codificação wavelet modificado*, será proposto e avaliado em canais caracterizados pelo desvanecimento Rayleigh plano.

Ambos os sistemas de transmissão sem-fio avaliados empregam constelações de sinais originais, especialmente projetadas para mapear os símbolos gerados pelos esquemas de codificação wavelet. A metodologia utilizada nesses projetos foi baseada na busca exaustiva por configurações de sinais que conseguissem minimizar a taxa de erro de bit do sistema sob avaliação. Foram obtidas constelações de sinais que pertencem a duas classes de modulações distintas, sendo elas: a modulação APK (*Amplitude Phase Keying*) e a modulação PSK (*Phase Shift Keying*).

O desempenho de ambos os sistemas apresentados neste capítulo são avaliados na presença de erros de estimação de canal no receptor. O algoritmo LMS (*Least Mean Square*) foi escolhido aqui para estimar o estado do canal de comunicação ao longo de cada transmissão, e o impacto dos erros dessa estimação, sobre o desempenho de ambos os sistemas, é avaliado por simulação computacional.

O restante deste capítulo está organizado como segue: na Seção 3.1, será apresentado o

desempenho do sistema com codificação wavelet em canais com ruído AWGN. Na Seção 3.2, o desempenho do sistema com codificação wavelet será avaliado em canais com desvanecimento Rayleigh plano. Na Seção 3.3, o sistema com codificação wavelet modificado é apresentado, e o seu desempenho é avaliado em canais com desvanecimento Rayleigh plano. Por fim, na Seção 3.4 serão apresentadas algumas conclusões.

3.1 SISTEMA COM CODIFICAÇÃO WAVELET EM CANAIS AWGN

Nesta seção, o desempenho do sistema com codificação wavelet, ilustrado na Figura 3.1, será avaliado em canais com ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN).

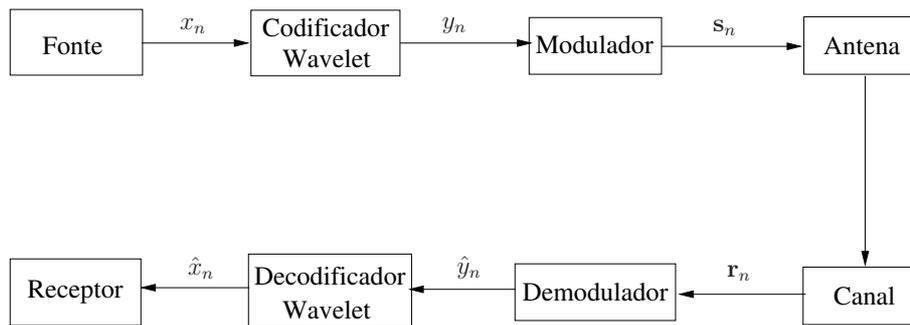


Figura 3.1. Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet.

Neste sistema, a fonte de informação gera uma seqüência x_n de bits de informação independentes e igualmente distribuídos. Essa seqüência de bits é então codificada por uma matriz de codificação wavelet \mathbf{C}_{MCW} , conforme definido em (2.14). Os símbolos wavelets y_n gerados nesta codificação pertencem ao alfabeto definido em (2.18), o qual tem cardinalidade $mg + 1$.

Os símbolos wavelets y_n são modulados por uma constelação ASK (*Amplitude Shift Keying*) com $mg+1$ pontos. De fato, a cada intervalo de sinalização nT_s um símbolo y_n é mapeado em uma forma de onda $s(t)$ com amplitude igual ao valor de y_n . Sendo assim, de acordo com a Seção 2.4, a energia média dos sinais ASK transmitidos é igual a mgT_s .

Supondo que o canal de comunicação seja caracterizado por um ruído aditivo Gaussiano branco, o equivalente passa-baixas do sinal recebido, denotado por $r_n(t)$, é dado por

$$r_n(t) = s_n(t) + n_n(t), \quad nT_s \leq t \leq (n+1)T_s, \quad (3.1)$$

em que $n_n(t)$ representa o ruído aditivo modelado por um processo Gaussiano branco complexo, com média nula e densidade espectral de potência (DEP) igual a $\aleph_0/2$ por dimensão.

Na recepção, um filtro casado converte o sinal $r_n(t)$ no vetor aleatório $\mathbf{r}_n = y_n + \mathbf{n}_n$, em que y_n é o próprio símbolo wavelet que modula o ASK transmitido, sendo portanto um número real. Os elementos do número complexo \mathbf{n}_n são variáveis aleatórias Gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média nula e variância $\aleph_0/2$. Em particular, considerando o esquema de modulação ASK definido anteriormente, a densidade espectral de potência do ruído é dada por

$$\aleph_0 = mg \cdot 10^{-0,1 \left(\frac{E_b}{\aleph_0} \right)_{\text{dB}}} \quad (3.2)$$

Note que este sistema tem eficiência espectral de 1 bit/s/Hz, portanto, as relações E_s/\aleph_0 e E_b/\aleph_0 são equivalentes.

A parte real de \mathbf{r}_n é então enviada ao decodificador wavelet, que procede como descrito na Seção 2.3. O esquema de modulação ASK utilizado neste sistema viabiliza a decodificação suave dos bits de informação gerados pela fonte.

As Figuras 3.2 e 3.3 apresentam os resultados de desempenho de erro obtidos a partir da simulação do sistema com matrizes de coeficientes wavelets de dimensões 2×8 e 4×16 (ver o Apêndice A para os detalhes de simulação). As Figuras também apresentam, como referência, o desempenho da modulação ASK binária (BPSK) sem codificação.

A partir das Figuras é possível observar que, em canais AWGN, um sistema com codificação wavelet e modulação ASK atinge o mesmo desempenho, em termos da probabilidade de erro de bit, que sistemas com modulação antipodal (ASK binária, BPSK) sem codificação, independente da dimensão das matrizes wavelets utilizadas na codificação.

Este é um resultado esperado, visto que o ganho de desempenho que pode ser obtido com a

codificação com matrizes wavelets decorre da disseminação da informação de cada bit ao longo de vários intervalos de sinalização, o que não tem efeito sobre um canal estático. Entretanto, como será visto posteriormente, em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh, os sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets apresentam ganhos de desempenho superiores aos obtidos por técnicas já consagradas de codificação.

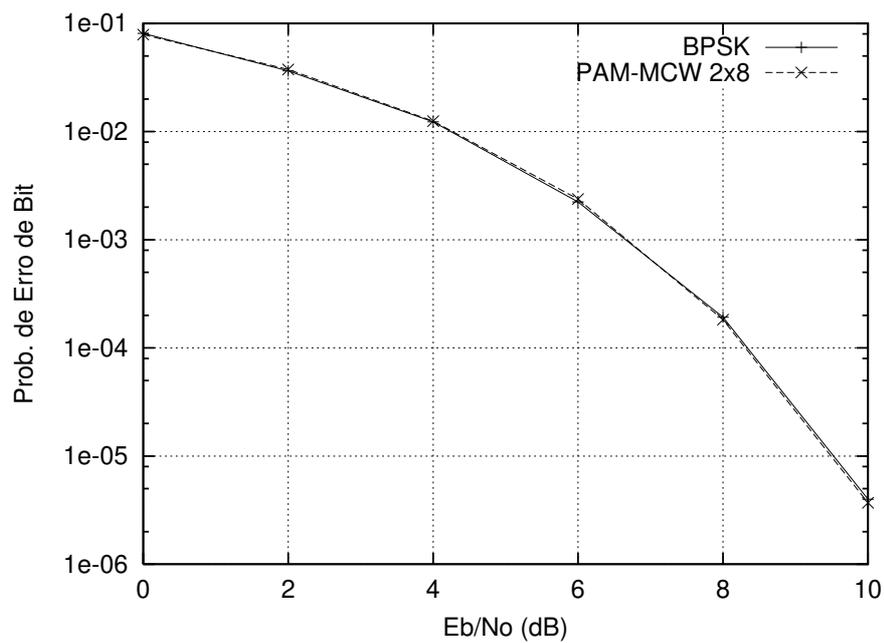


Figura 3.2. Desempenho do sistema com codificação wavelet e modulação ASK simulado com a MCW 2×8 em um canal AWGN.

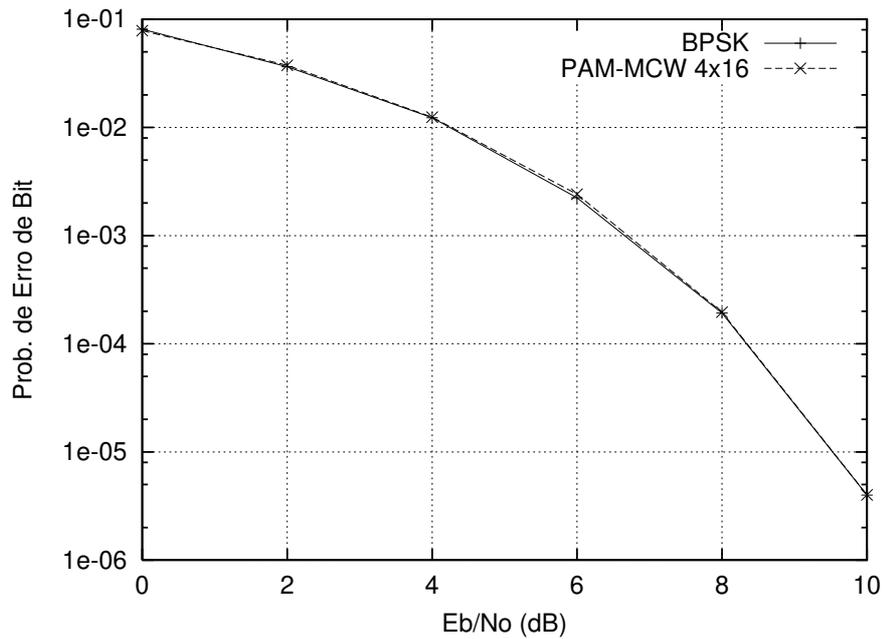


Figura 3.3. Desempenho do sistema com codificação wavelet e modulação ASK simulado com a MCW 4×16 em um canal AWGN.

3.2 SISTEMA COM CODIFICAÇÃO WAVELET EM CANAIS COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH

A Figura 3.4 ilustra o modelo do sistema com codificação wavelet simulado em um ambiente de transmissão sem-fio. Neste sistema, os símbolos wavelets y_n , codificados conforme definido em (2.14), são entrelaçados e transmitidos através de um canal com desvanecimento Rayleigh plano variante no tempo.

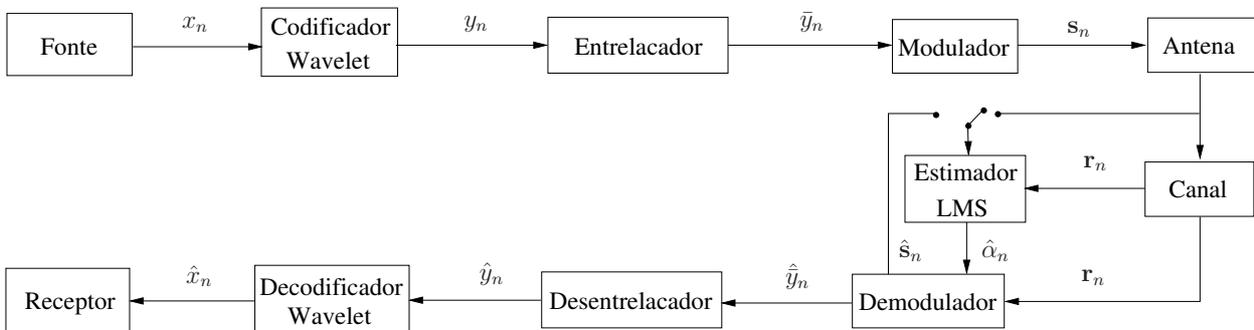


Figura 3.4. Diagrama de blocos do sistema com codificação wavelet com estimador de canal.

Considera-se aqui um entrelaçador de bloco definido por $E(I_d, L)$. Este entrelaçador con-

siste em uma matriz com I_d (profundidade do entrelaçamento) colunas e L linhas, em que $L \cdot I_d$ é o comprimento da palavra-código wavelet \mathbf{y} que será entrelaçada. O entrelaçamento dos símbolos wavelets é obtido em duas etapas. Na primeira etapa, a seqüência de símbolos wavelets y_n deve ser ordenada ao longo das linhas da matriz de entrelaçamento. Em seguida, a seqüência entrelaçada é obtida varrendo-se a matriz de entrelaçamento coluna por coluna. A título de exemplo, considere a matriz de entrelaçamento com $I_d = 4$, ilustrada na Tabela 3.1. Para essa matriz, a seqüência de símbolos entrelaçados é dada em (3.3).

Tabela 3.1. Matriz de entrelaçamento

y_0	y_1	y_2	y_3
y_4	y_5	y_6	y_7
y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}

$$y_0, y_4, y_8, y_{12}, y_1, y_5, y_9, y_{13}, \dots \quad (3.3)$$

A escolha do esquema de modulação é um fator crucial para o desempenho dos sistemas sem-fio que utilizam a codificação com matrizes wavelets. Aspectos desta técnica de codificação que devem ser levados em consideração no projeto das constelações são descritos a seguir:

De acordo com a Seção 2.4, os símbolos wavelets y_n , codificados por uma MCW com dimensão $m \times mg$, são multiníveis e têm uma distribuição de probabilidades muito desbalanceada, expressa por (2.19). Além disso, nos sistemas baseados em wavelets, um erro de demodulação entre símbolos wavelets com valores próximos pode resultar em nenhum erro de bit, enquanto que um erro de demodulação entre símbolos wavelets com valores distantes pode ocasionar um surto de erros (TZANNES; TZANNES, 1992).

Neste trabalho, foi dada atenção especial ao projeto de constelações adequadas aos sistemas baseados em MCW's que foram avaliados. Em particular, as constelações de sinais utilizadas ao longo deste trabalho foram projetadas empiricamente através de simulações computacionais. A metodologia utilizada nesses projetos é baseada na busca exaustiva por

constelações bidimensionais, apropriadas para um ambiente de comunicação sem-fio, que consigam minimizar a taxa de erro de bit dos sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets.

Foram avaliadas constelações de sinais que pertencem a duas classes de modulações distintas, sendo elas: a modulação APK (*Amplitude Phase Keying*) com duas amplitudes e a modulação PSK (*Phase Shift Keying*). Cada uma destas técnicas de modulação apresentaram suas vantagens e desvantagens quando utilizadas com a codificação wavelet, como detalhado na Seção 3.2.2.

A Tabela 3.2 sintetiza o algoritmo de busca exaustiva desenvolvido para projetar essas constelações. O tempo de processamento computacional requerido por este algoritmo (baseado na enumeração completa do espaço de busca discretizado) é diretamente proporcional ao tamanho do espaço de busca. Por outro lado, o tamanho desse espaço é uma função do número de sinais da constelação e do grau de discretização empregado. Assim, por exemplo, para uma discretização do círculo trigonométrico de $\delta = 1^\circ$ nos ângulos, o tamanho do espaço investigado no projeto de constelações PSK é 360^{Np} , em que Np é o número de pontos da constelação. Nestes termos, pode-se observar uma relação de compromisso entre o custo computacional de cada projeto, e a qualidade da solução encontrada. Visando a redução do tempo total de processamento requerido nos projetos executados aqui, optou-se por utilizar um grau de discretização do espaço de busca igual a $\delta = 3^\circ$.

Após a modulação, o sinal é enviado para a antena e transmitido. Da mesma forma que no sistema BPSK não codificado, o sistema com codificação wavelet e modulação bidimensional transmite um símbolo por bit de informação. Logo, a energia média por bit é igual à energia média da constelação, ou seja,

$$E_b = E_C = \sum_{i=1}^{mg+1} \Pr(s_i) E_{s_i} \quad (3.4)$$

Nas simulações, foram utilizadas constelações com energia média por bit igual a 1. Considerando a modulação PSK, esta restrição de energia unitária foi atendida por meio de uma constelação com raio unitário. Por outro lado, no caso APK, os sinais s_i foram inicialmente

Tabela 3.2. Algoritmo de busca exaustiva de constelações para sistemas wavelets.**INICIALIZAÇÃO:**

Seja $s_i \in \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$ os sinais de uma constelação e $\angle s_i$ seus respectivos ângulos. Rotule os sinais da constelação com os valores dos correspondentes símbolos wavelets. Localize todos os sinais da constelação sobre o eixo das abscissas.

ITERAÇÃO:

Passo 1 Faça $i = M$.

Passo 2 Simule o sistema wavelet com a constelação atual e armazene a configuração da constelação junto com o valor da BER obtido na simulação.

Passo 3 Incremente o ângulo $\angle s_i$ de δ graus.

Passo 4 Se $\angle s_i \geq 2\pi$, faça:

4.1 $\angle s_i = 0^\circ$;

4.2 $i = i - 1$;

4.3 Se $i = 0$ vá para o passo 6;

4.4 Retorne ao passo 3.

Passo 5 Retorne ao passo 1.

Passo 6 Selecione entre as constelações avaliadas aquela que leva à menor probabilidade de erro de bit para o sistema wavelet.

distribuídos entre os dois círculos da constelação de forma empírica (após a avaliação de várias configurações de constelações), e posteriormente os raios desses círculos foram calculados de forma a satisfazer a restrição $\sum_{i=1}^{mg+1} \Pr(s_i) E_{s_i} = 1$, seguindo um procedimento exaustivo similar ao apresentado na Tabela 3.2.

No modelo do canal de comunicação adotado, admite-se que o sinal transmitido é afetado por um desvanecimento Rayleigh não seletivo em frequência e pelo ruído aditivo Gaussiano branco. Dessa forma, a representação em banda básica do sinal recebido é dada por

$$r_n(t) = \alpha_n(t) s_n p_n(t) + n_n(t), \quad nT_s \leq t \leq (n+1)T_s, \quad (3.5)$$

Na Equação (3.5), s_n é o símbolo da constelação bidimensional que mapeia o símbolo wavelet y_n ; $p(t)$ é um pulso limitado em banda com energia unitária; o fator multiplicativo $\alpha_n(t)$ representa o ganho do canal no instante de tempo t , considerado constante durante o intervalo de sinalização $[nT_s, (n+1)T_s)$ e $n_n(t)$ é o ruído Gaussiano branco complexo.

Neste trabalho, $\alpha(t)$ é modelado por um processo Gaussiano complexo estacionário em

sentido amplo com densidade espectral de potência (DEP) dada por

$$G(f) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_D}\right)^2}}, & \text{se } |f| < f_D \\ 0, & \text{se } |f| \geq f_D \end{cases} \quad (3.6)$$

em que f_D é o desvio doppler máximo.

Na recepção, o sinal recebido $r_n(t)$ é convertido por um banco de filtros-casados em um número complexo $\mathbf{r}_n = r_{n_f} + jr_{n_q}$, dado por,

$$\mathbf{r}_n = \alpha_n \mathbf{s}_n + \mathbf{n}_n \quad (3.7)$$

sendo $\mathbf{s}_n = s_{n_f} + js_{n_q}$ o símbolo da constelação transmitido no intervalo de tempo $[nT_s, (n+1)T_s)$. Os elementos do ruído complexo \mathbf{n}_n são variáveis aleatórias Gaussianas independentes e identicamente distribuídas com média nula e variância $\aleph_0/2$, em que

$$\aleph_0 = 10^{-0,1\left(\frac{E_b}{\aleph_0}\right)_{\text{dB}}}. \quad (3.8)$$

O desempenho, em termos da probabilidade de erro de bit, do sistema com codificação wavelet foi avaliado em duas situações distintas de recepção. Na primeira, considera-se que o receptor tem perfeita informação sobre o estado do canal (*CSI-channel state information*), ou seja, ele conhece o exato valor do desvanecimento Rayleigh em cada intervalo de sinalização. Neste caso, deseja-se avaliar o efeito da correlação do canal com desvanecimento sobre o desempenho do sistema com codificação wavelet, aspecto que ainda não foi considerado na literatura. No segundo esquema de recepção, utiliza-se o algoritmo LMS (*Least Mean Square*) para realizar a estimação adaptativa do canal de comunicação. Neste caso, as estimativas do ganho do canal de comunicação, denotadas por $\hat{\alpha}(n)$, são obtidas recursivamente por:

$$\hat{\alpha}(n+1) = \hat{\alpha}(n) + \mu \mathbf{s}(n) \mathbf{e}^*(n) \quad (3.9)$$

no qual μ é definido como o passo do algoritmo LMS e $\mathbf{e}(n) = \mathbf{r}_n - \hat{\alpha}_n \hat{\mathbf{s}}(n)$. Sinais BPSK conhecidos com energia unitária foram usados com o objetivo de treinar o estimador. Depois de cada período de treinamento, reinicia-se o processo de estimação do canal a partir dos sinais bidimensionais recebidos.

Com relação à regra de decisão empregada pelo demodulador, o uso dos critérios MAP e de mínima distância euclidiana foram considerados neste trabalho. A partir das estimativas dos sinais \hat{s}_n , obtêm-se estimativas “bruscas”¹ dos símbolos wavelets entrelaçados \hat{y}_n . O desentrelaçamento da seqüência de símbolos wavelets é realizado em duas etapas: Inicialmente, a seqüência de símbolos deve ser ordenada ao longo das colunas da matriz de entrelaçamento. Em seguida, a seqüência desentrelaçada é obtida varrendo-se a matriz de entrelaçamento linha por linha. As estimativas \hat{y}_n são então decodificadas de acordo com o processo descrito na Seção 2.3.

3.2.1 Quantização dos Símbolos Wavelets

De acordo com a Seção 2.4, a codificação wavelet, definida por (2.14), gera símbolos wavelets que pertencem ao conjunto expresso em (2.18) com $mg + 1$ elementos. Uma vez que, no sistema com codificação wavelet, cada símbolo codificado é mapeado em um sinal da constelação de sinais, segue que o aumento no número de colunas mg das matrizes wavelets pode resultar na degradação de desempenho do sistema devido a uma aglomeração dos $mg + 1$ pontos na constelação.

Um possível procedimento para diminuir o tamanho do alfabeto de símbolos codificados, e conseqüentemente evitar a aglomeração de pontos na constelação de sinais, já foi mencionado na Seção 2.5, e diz respeito à variação do nível de sobreposição das linhas da matriz de codificação wavelet, porém, este procedimento tem como custo a diminuição da eficiência espectral do sistema, em termos de bits/s/Hz.

Entretanto, existe uma outra forma de se evitar uma aglomeração de pontos na constelação de sinais, sem alterar a eficiência espectral do sistema. Em (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998) foi proposto um esquema que limita a modulação a um número de níveis menor que o número de símbolos wavelets que podem ser gerados na codificação. Esse procedimento pode ser visto como um esquema de quantização dos símbolos wavelets.

¹Realiza-se um mapeamento inverso de \hat{s}_n em \hat{y}_n .

Como ilustração, apresenta-se na Tabela 3.3 o esquema de quantização utilizado para o sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×128 real e plana. Esse esquema de quantização foi obtido por simulação computacional após vários experimentos, onde foram avaliados diferentes mapeamentos e conjuntos de sinais representativos, utilizando-se como critério a minimização da probabilidade de erro de bit do sistema.

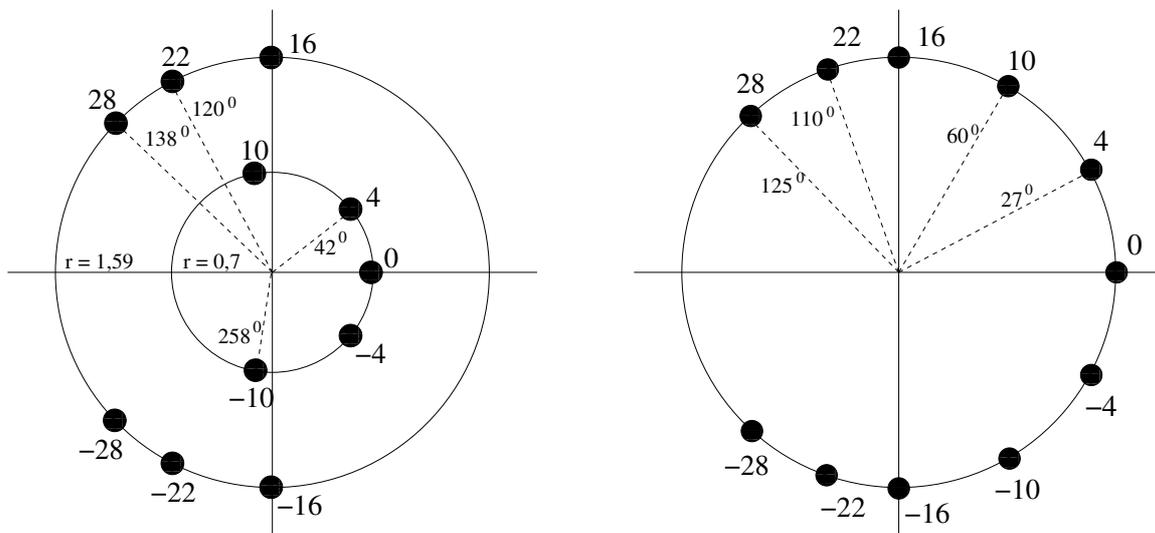
Em princípio a codificação wavelet com essa matriz precisaria de uma constelação com 129 sinais para representar todos os possíveis símbolos wavelets. Conseqüentemente, o desempenho deste sistema estaria completamente comprometido pelo acúmulo de pontos da constelação. Entretanto, após a utilização do esquema de quantização proposto na Tabela 3.3, verifica-se que o sistema codificado apresenta excelente desempenho em canais com desvanecimento Rayleigh plano, como poderá ser observado na Seção 3.2.2. Portanto, considerando o desempenho final do sistema com codificação wavelet, constata-se que o uso de uma constelação de sinais com menos pontos (que conduz a menores probabilidades de erros de demodulação) compensa de certa forma a perda de informação imposta pela quantização criteriosa dos símbolos wavelets.

Tabela 3.3. Quantização para MCW 2×128 .

Conjunto Truncado	Símbolo Representativo
{0}	0
{2,4,6}	4
{-2,-4,-6}	-4
{8,10,12}	10
{-8,-10,-12}	-10
{14,16,18}	16
{-14,-16,-18}	-16
{20,22,24}	22
{-20,-22,-24}	-22
{26,28,30,...,128}	28
{-26,-28,-30,...,-128}	-28

A partir da Tabela 3.3, pode-se observar que o esquema de quantização proposto requer uma constelação com 11 sinais. A Figura 3.5 apresenta as constelações 11-PSK e 11-APK projetadas para este sistema. Os sinais dessas constelações estão rotulados com os valores

dos símbolos wavelets correspondentes.



(a) Constelação 11-APK para a MCW 2×128 .

(b) Constelação 11-PSK para a MCW 2×128 .

Figura 3.5. Constelações APK e PSK utilizadas no sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×128 .

O esquema de quantização, apresentado aqui, será abordado novamente na Seção 4.2.3 sob um enfoque analítico.

3.2.2 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados os resultados de desempenho obtidos através da simulação computacional do sistema com codificação wavelet exibido na Figura 3.4 (ver o Apêndice A para os detalhes de simulação). O sistema foi simulado em canais com desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência com matrizes wavelets reais planas com dimensões iguais a 2×8 e 2×128 e esquemas de modulação PSK e APK. As constelações projetadas para esses sistemas encontram-se ilustradas nas Figuras 3.6 e 3.5, respectivamente.

O objetivo das primeiras simulações foi avaliar o impacto do efeito Doppler sobre o desempenho do sistema com codificação wavelet, considerando que o receptor estima perfeitamente os coeficientes do canal.

A Figura 3.7 apresenta os resultados obtidos com a simulação do sistema PSK codificado

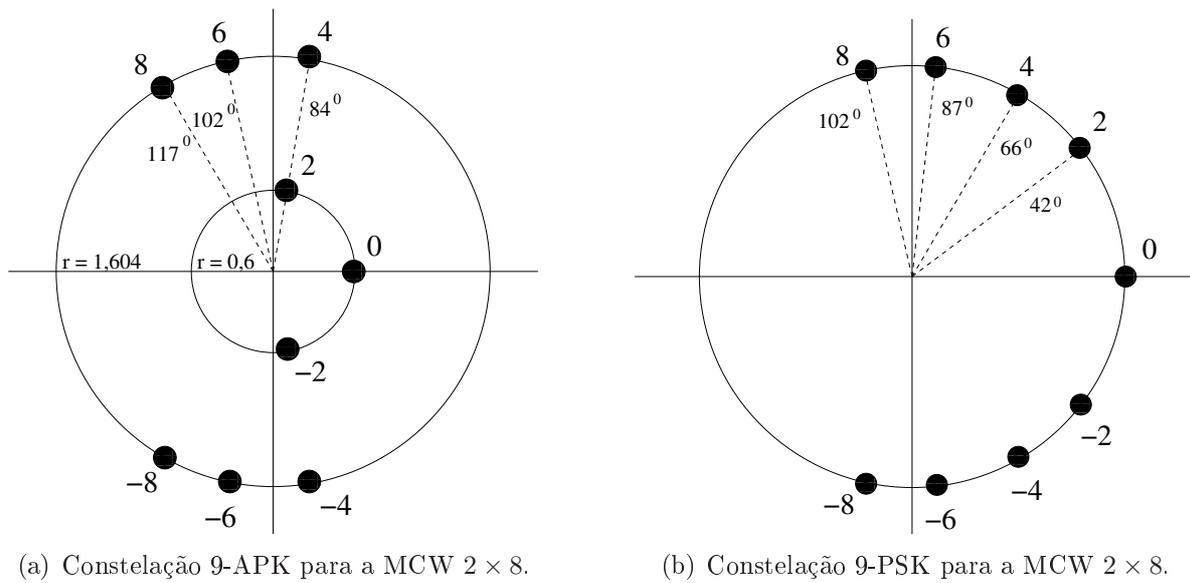


Figura 3.6. Constelações APK e PSK utilizadas no sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×8 .

pelos MCW's 2×8 e 2×128 em um canal com máximo desvio Doppler normalizado em $f_D T_s = 0,002$ para diferentes profundidades de entrelaçamento. Pode ser observado a partir desta figura que o sistema com codificação wavelet sem entrelaçamento não apresenta um bom desempenho sobre um canal com máximo desvio Doppler normalizado em $f_D T_s = 0,002$.

Na verdade, este resultado já era esperado, visto que o tempo de coerência do canal de comunicação simulado é muito maior que o espalhamento da informação no tempo, produzido pela codificação wavelet (8 intervalos de sinalização com a MCW 2×8 , e 128 intervalos de sinalização com a MCW 2×128). Entretanto, pode-se observar também a partir da Figura 3.7 que a utilização de esquemas de entrelaçamento com profundidades iguais a 10 símbolos, para o sistema com MCW 2×8 , e 130 símbolos, para o sistema com MCW 2×128 , permite obter bons ganhos de desempenho, similares aos conseguidos em canais com entrelaçamento perfeito (apresentados na Figura sob o rótulo “Doppler Inf.”).

De fato, o ganho conseguido com a codificação wavelet é devido principalmente à diversidade temporal intrínseca do código, ou seja, varia em função do “espalhamento” da informação de cada bit sobre mg intervalos de sinalização. Portanto, para se explorar todo o potencial da codificação wavelet em um canal com Doppler, têm-se que assegurar um determinado grau

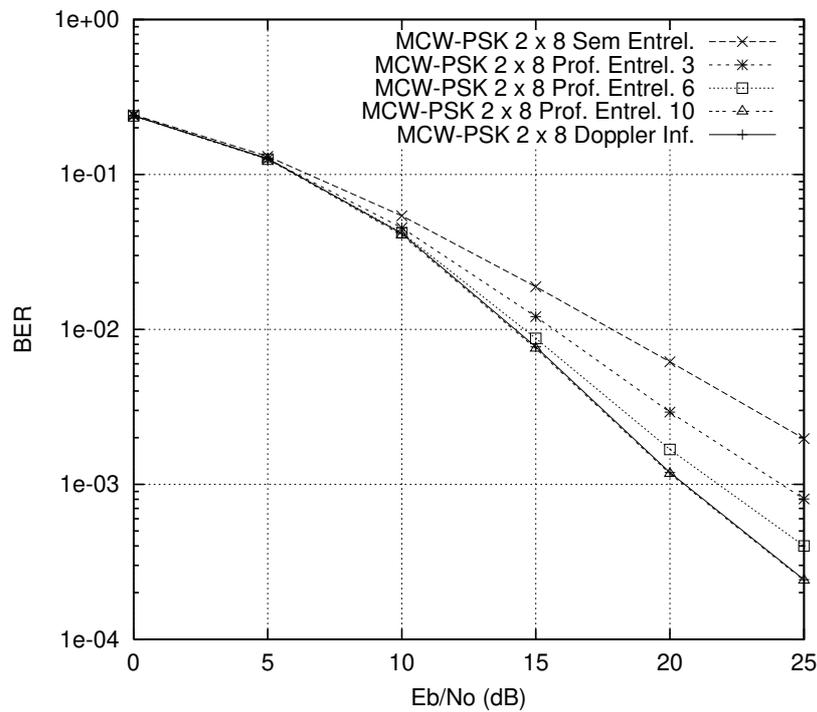
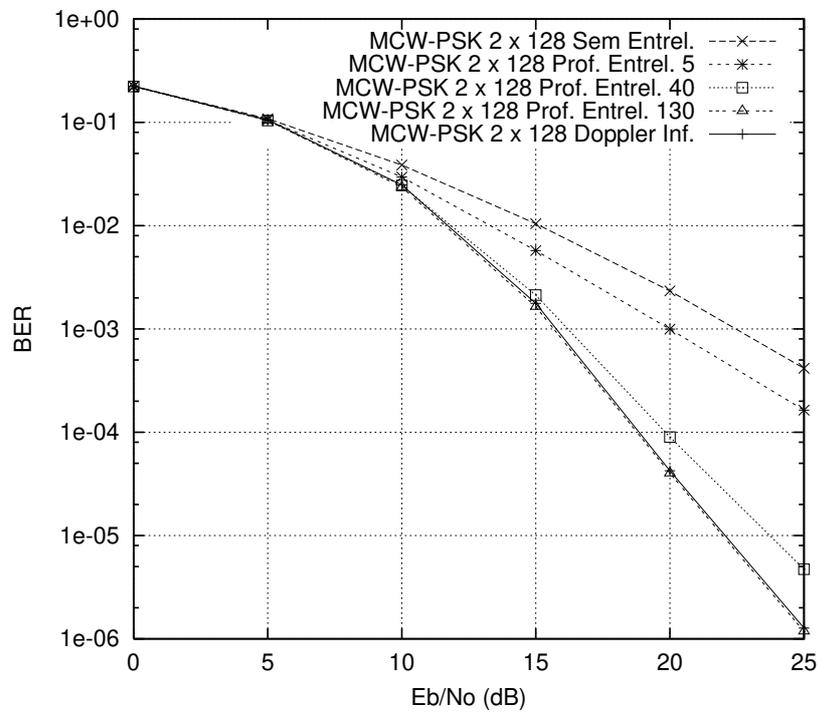
(a) Curvas para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×8 .(b) Curvas para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×128 .

Figura 3.7. Desempenho de um sistema PSK com codificação wavelet, simulado com as MCW's 2×8 e 2×128 sobre um canal com $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.

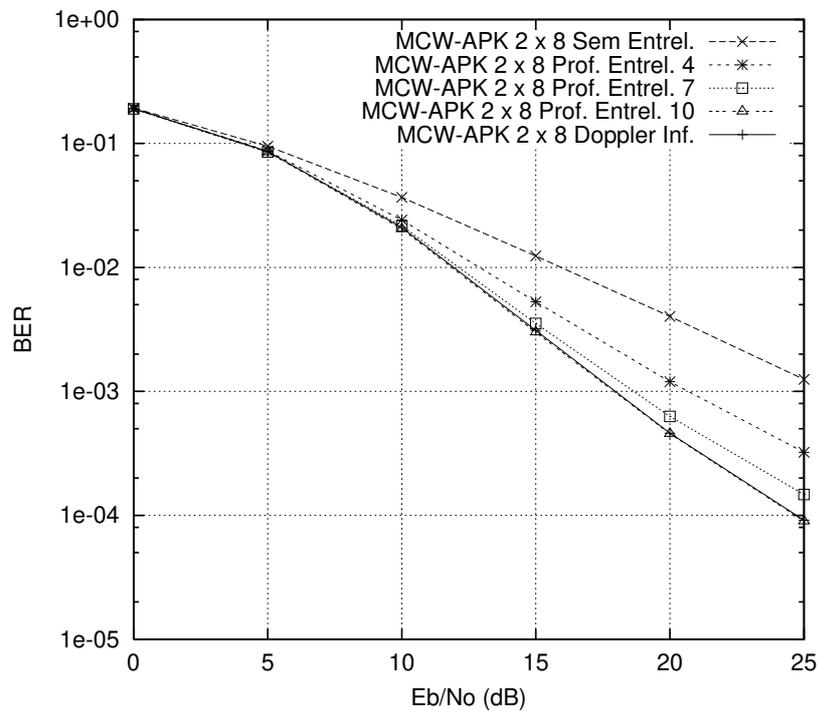
de decorrelação entre as amostras do desvanecimento que afetam os símbolos wavelets transmitidos. Para os sistemas simulados, verifica-se que esse grau de decorrelação é conseguido com uma profundidade de entrelaçamento igual a mg símbolos. Entretanto, como a taxa de variação do canal está intimamente ligada ao tempo de coerência do canal (nível de correlação), uma profundidade de entrelaçamento maior que mg símbolos pode ser requerida em canais com valores de $f_D T_s$ menores que 0,002.

A Figura 3.8 exibe os resultados de desempenho obtidos com a simulação do sistema com codificação wavelet baseado nas MCW's 2×8 e 2×128 também em um canal com desvanecimento Rayleigh plano com máximo desvio Doppler normalizado em $f_D T_s = 0,002$, sendo que agora para um esquema de modulação APK. Comparando os resultados apresentados nas Figuras 3.7 e 3.8, pode-se verificar que os sistemas que utilizam a modulação APK apresentam desempenhos melhores que aqueles com a modulação PSK. Isto ocorre porque a modulação APK utiliza uma constelação bidimensional multinível que apresenta propriedades melhores de distância euclidiana entre os seus pontos. Em particular, pode ser observado que os sistemas com modulação APK apresentam um ganho de desempenho de aproximadamente 2,5 dB quando comparados aos sistemas com modulação PSK, considerando-se um canal com entrelaçamento perfeito.

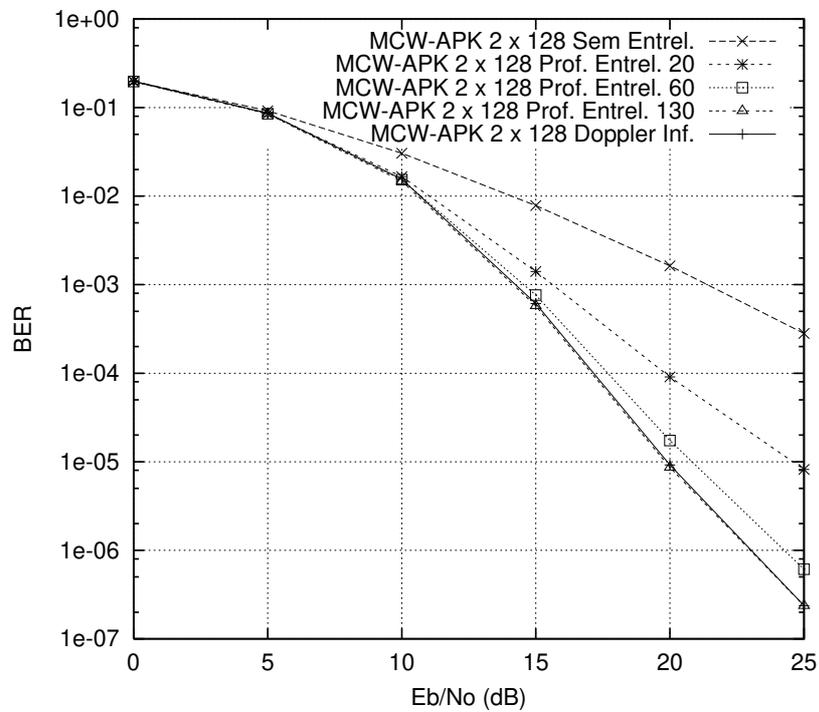
Apesar de a modulação APK garantir um ganho de desempenho superior ao conseguido pela modulação PSK com mesma eficiência espectral, ela apresenta algumas desvantagens de implementação prática, que podem ser minimizadas com a utilização da modulação PSK. Entre elas pode-se citar:

- Erros de demodulação ocasionados por distorções na amplitude dos sinais transmitidos quando os amplificadores de potência operam em regiões de não-linearidade² (LIANG et al., 1999);
- Sensibilidade a jitter e retardos de grupo não linear;

²Neste caso, existem esquemas de pré-processamento que podem ser utilizados com o objetivo de minimizar este problema (NASCIMENTO; FARIAS, 2004).



(a) Curvas para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×8 .



(b) Curvas para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×128 .

Figura 3.8. Desempenho de um sistema APK com codificação wavelet, simulado com as MCW's 2×8 e 2×128 sobre um canal com $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.

- Maior patamar de erro irreduzível ocasionado pela maior dificuldade em se estimar o estado do canal na recepção (SILVEIRA et al., 2004a).

Todos os resultados de desempenho que serão apresentados a seguir foram obtidos a partir da simulação dos sistemas com codificação wavelet em canais com desvanecimento perfeitamente entrelaçados.

Para auxiliar na avaliação do desempenho da codificação wavelet, um sistema proposto por Tarokh et al. (1999), baseado em uma técnica de codificação de bloco espaço-temporal (STBC), será utilizado como referência. Nesse sistema, em cada intervalo de tempo t , os símbolos c_t^i , $i = 1, 2$, codificados por uma matriz de codificação espaço-temporal, são modulados por sinais BPSK e transmitidos simultaneamente a partir de duas antenas suficientemente espaçadas de forma a garantir uma diversidade espacial. No tempo t , o sinal recebido r_t é dado por (TAROKH et al., 1999)

$$\mathbf{r}_t = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{c}_t^i + \mathbf{n}_t. \quad (3.10)$$

O coeficiente α_i é o ganho do percurso da antena transmissora i até a antena receptora. Assumindo uma estimação perfeita do canal, o receptor deve calcular a métrica de decisão

$$\sum_{t=1}^l |\mathbf{r}_t - \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{c}_t^i|^2$$

para todas as palavras-código e decidir em favor da palavra-código que minimiza esta métrica (TAROKH et al., 1999). A ortogonalidade dos STBC's viabiliza um processamento linear simples para a obtenção da decisão de máxima verossimilhança.

A escolha desse sistema de referência é apropriada, visto que ele têm um grau de complexidade similar ao do sistema com codificação wavelet³, além de apresentar a mesma eficiência espectral de 1 bit/s/Hz. Outro aspecto que também foi levado em consideração para a escolha desse sistema de referência é que tanto ele quanto o sistema com codificação wavelet foram idealizados para o mesmo tipo de ambiente de comunicação.

³Entende-se aqui por complexidade, os requisitos de *software* e *hardware* necessários para a implementação prática dos sistemas.

Vale ressaltar que a codificação de bloco espaço-temporal (STBC) também foi avaliada em outras configurações de sistemas (TAROKH et al., 1999), com diferentes esquemas de modulação (2-PSK, 4-PSK, 8-PSK, 16-QAM) e de transmissão (2 antenas Tx, 3 antenas Tx e 4 antenas Tx), se mostrando mais flexível quanto à eficiência espectral que a codificação baseada em matrizes wavelets. Em particular, o sistema STBC-BPSK com duas antenas transmissoras foi escolhido aqui como referência apenas por ter a mesma eficiência espectral dos sistemas wavelets.

A Figura 3.9 apresenta as curvas de probabilidades de erro de bit para o sistema com codificação wavelet simulado com a MCW 2×128 e para o sistema de referência.

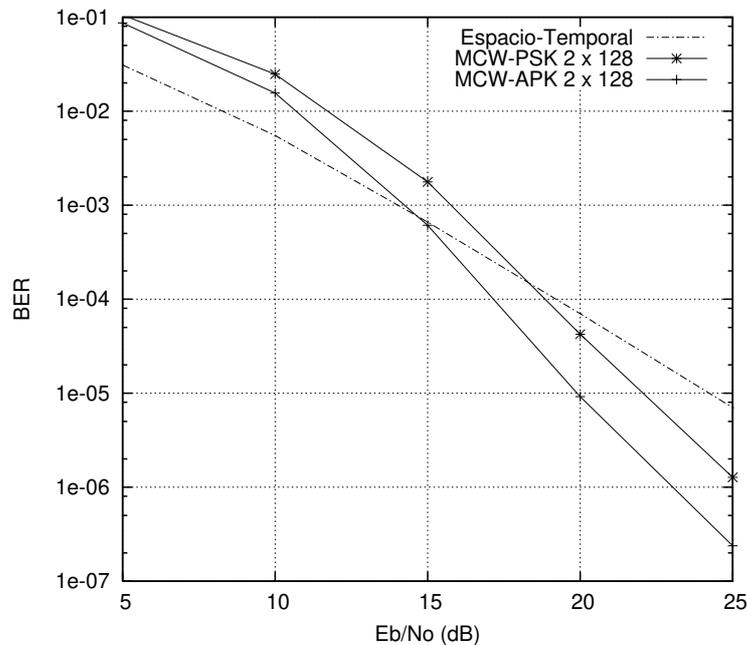


Figura 3.9. Desempenho do sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×128 com modulações 11-PSK e 11-APK.

Pode-se observar a partir dessas curvas que o desempenho do sistema APK com codificação wavelet supera o desempenho do sistema de referência (STBC-BPSK) para valores de SNR's maiores que 15 dB. Em particular, verifica-se para probabilidades de erros de bit em torno de 10^{-5} que o sistema com codificação wavelet apresenta um ganho de desempenho aproximadamente igual a 4,5 dB, quando comparado ao desempenho do sistema STBC-BPSK. Além disso, pode ser observado que o sistema PSK com codificação wavelet também apresenta

um ganho de E_b/N_0 em relação ao sistema STBC-BPSK para probabilidades de erros de bit inferiores a 10^{-4} . Mais especificamente, o sistema PSK com codificação wavelet apresenta um ganho aproximadamente igual a 2 dB em relação ao sistema STBC-BPSK para uma BER da ordem de 10^{-5} .

A vantagem de desempenho observada no sistema com codificação wavelet em relação ao sistema de referência pode ser explicada pelo maior ganho de diversidade que é obtido pela codificação wavelet. De fato, em canais com desvanecimento, o ganho de diversidade da codificação wavelet é uma função de mg (SILVEIRA et al., 2003). Logo, os resultados da Figura 3.9 indicam que o uso de uma MCW com posto $m = 2$ e gênero $g = 64$ pode obter uma melhora significativa de desempenho sobre o sistema STBC-BPSK.

A relação de dependência que existe entre o ganho de desempenho dos sistemas codificados por matrizes wavelets e o número de colunas mg da matriz de coeficientes wavelets utilizada na codificação é uma característica muito importante destes sistemas, visto que ela deixa margem para se conseguir ganhos de desempenho ainda maiores ao custo de um aumento relativamente pequeno na complexidade computacional dos sistemas.

Os resultados apresentados até o momento foram obtidos para um sistema de comunicação com estimação perfeita do estado do canal de comunicação (CSI), situação que é impossível de ocorrer na prática. De agora em diante, o desempenho do sistema com codificação wavelet será avaliado na presença dos erros de estimação do canal, condição que ainda não tinha sido considerada na literatura.

Mais uma vez, o sistema com codificação wavelet foi simulado com as MCW's 2×8 e 2×128 e esquemas de modulação PSK e APK, com constelações ilustradas nas Figuras 3.6 e 3.5. Nas simulações que seguem, foram considerados modelos de canais de comunicação com desvanecimento Rayleigh plano e máximos desvios Doppler normalizados em $f_D T_s = 0,002$ e $f_D T_s = 0,004$. Por conveniência, foi adotado em todas as simulações um esquema de entrelaçamento com profundidade de 150 símbolos, suficiente para atender os requisitos de todos os sistemas avaliados quanto ao grau de decorrelação do canal. A fim de se estimar o

estado do canal de comunicação sem-fio, utilizou-se o algoritmo LMS descrito na Seção 3.2.

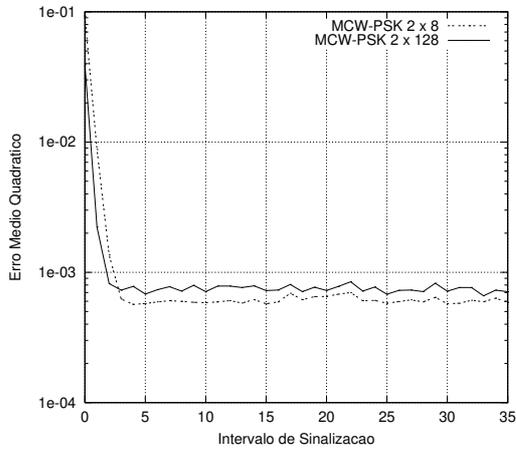
Os símbolos foram transmitidos em blocos com comprimento igual a 250, com 50 destes símbolos utilizados com o propósito de treinamento do algoritmo LMS, de forma que a vazão da informação foi de 80%. Em todas as simulações, o algoritmo LMS foi treinado sempre com a transmissão de um símbolo de treinamento antes de quatro símbolos de informação. A simulação de cada bloco de 250 símbolos foi realizada sobre uma amostra estatisticamente independente do canal variante no tempo, a fim de aumentar a precisão estatística dos resultados obtidos.

O valor do passo μ do LMS foi estabelecido com base em otimizações numéricas previamente realizadas no desempenho dos sistemas com codificação wavelet, para cada valor de espalhamento Doppler $f_D T_s$. Como a escolha do passo μ também depende da SNR (E_b/N_0), uma relação de compromisso foi estabelecida sobre a região de valores E_b/N_0 investigados. O parâmetro μ influencia diretamente na convergência do algoritmo LMS. Quanto maior for o passo μ maior será a velocidade de convergência, entretanto maior será o ruído gradiente em torno do parâmetro estimado. Por outro lado, se μ for muito pequeno, pode-se comprometer a estimação do canal. Deve haver portanto um compromisso entre a velocidade de convergência e a precisão dos resultados (HAYKIN, 1991).

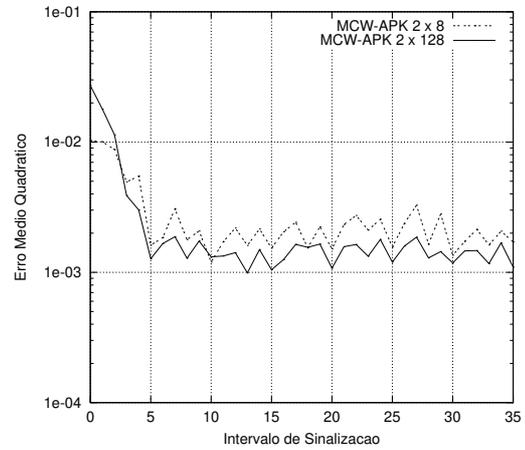
A Figura 3.10 exibe as curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os sistemas simulados com as MCW's 2×8 e 2×128 em um canal com desvanecimento com $f_D T_s = 0,002$. Em particular, as Figuras 3.10(a) e 3.10(b) apresentam os resultados obtidos com as modulações PSK e APK, respectivamente. Os valores do passo μ do algoritmo LMS utilizado em cada sistema encontram-se no rótulo de cada uma dessas figuras.

Também são ilustradas nesta seção as curvas de aprendizagem do algoritmo LMS quando os sistemas com codificação wavelet são simulados em um canal com desvanecimento Rayleigh e máximo desvio Doppler $f_D T_s = 0,004$. Estas curvas encontram-se esboçadas na Figura 3.11.

As curvas apresentadas nas Figuras 3.10 e 3.11 foram obtidas para uma SNR igual a 30 dB,

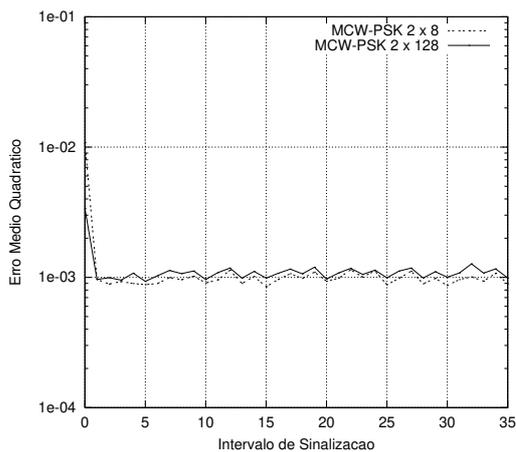


(a) MCW 2×8 com $\mu = 0,70$ e MCW 2×128 com $\mu = 0,80$.

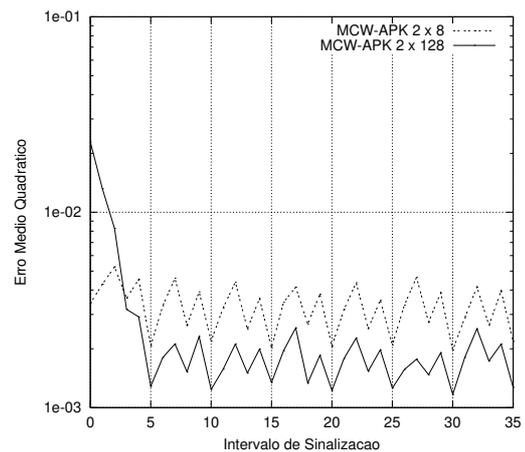


(b) MCW 2×8 com $\mu = 0,90$ e MCW 2×128 com $\mu = 0,85$.

Figura 3.10. Curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os sistemas com modulações PSK e APK simulados com as MCW's 2×8 e 2×128 em um canal com desvanecimento com $f_D T_s = 0,002$.



(a) MCW 2×8 com $\mu = 0,90$ e MCW 2×128 com $\mu = 0,95$.

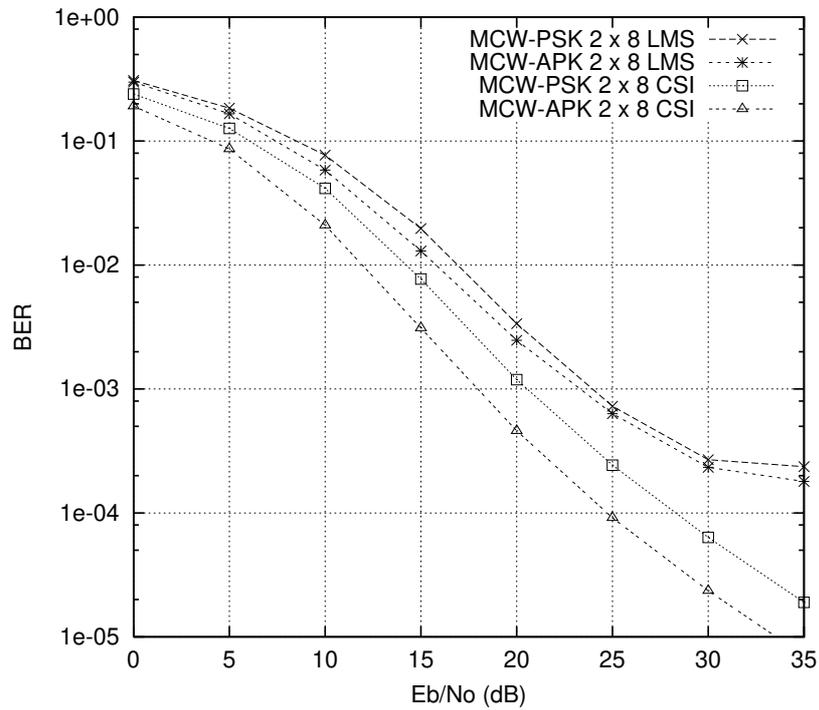


(b) MCW 2×8 com $\mu = 0,95$ e MCW 2×128 com $\mu = 0,85$.

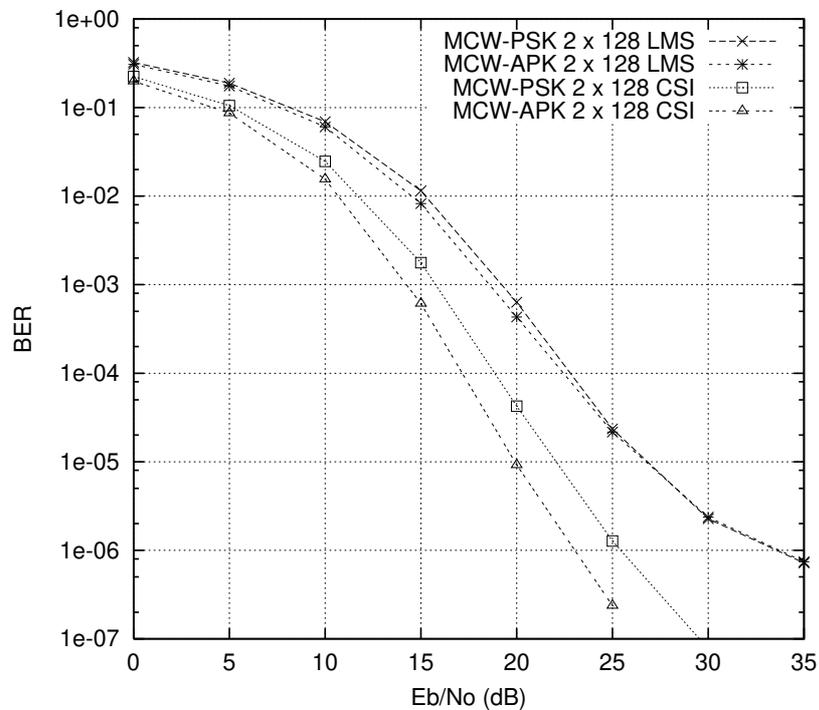
Figura 3.11. Curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os sistemas com modulações PSK e APK simulados com as MCW's 2×8 e 2×128 sobre um canal com desvanecimento com $f_D T_s = 0,004$.

e apresentam a evolução do erro médio quadrático (EMQ) durante os primeiros intervalos de sinalização. Contudo, foi verificado que o comportamento apresentado neste período inicial é mantido ao longo de todo o bloco. Devido ao esquema de treinamento utilizado, o EMQ oscila ao longo de todo o bloco ao redor de um valor médio, próximo à variância do ruído. Também pode ser verificado que a oscilação aumenta com o espalhamento Doppler. Isto ocorre porque quanto maior for a $f_D T_s$, maior será a variação do canal, e conseqüentemente mais intensos serão os erros de estimação. Além disso, comparando os resultados apresentados nas Figuras 3.10 e 3.11, pode-se observar que os sistemas que utilizam a modulação APK apresentam um patamar de erro médio quadrático mais elevado que os sistemas com modulação PSK, como também um maior nível de oscilação. Isto ocorre porque os sinais APK não possuem energia uniforme, o que dificulta a atualização das estimativas do canal pelo algoritmo LMS.

As Figuras 3.12 e 3.13 apresentam o desempenho dos sistemas PSK e APK com codificação wavelet, simulados com as MCW's 2×8 e 2×128 em canais com desvanecimento Rayleigh plano com máximos desvios Doppler normalizados em $f_D T_s = 0,002$ e $f_D T_s = 0,004$, respectivamente. Pode ser observado nessas Figuras que os sistemas apresentam um patamar de erro irreduzível (PEI). Este resultado é típico de sistemas suscetíveis a erros de estimação de canal. Este efeito pode ser reduzido através do uso de procedimentos de filtragem mais robustos e complexos, tais como os filtros de Kalman (HAYKIN, 1991; PROAKIS, 1989). Também pode-se verificar a partir das Figuras 3.12 e 3.13 que o ganho inicialmente apresentado pelo sistema com modulação APK sobre o sistema com modulação PSK é sensivelmente minimizado na presença de erros de estimação de canal. Este fato se deve ao maior EMQ na estimação do canal quando o esquema de modulação APK é adotado, como pôde ser visto nas Figuras 3.10 e 3.11. Entretanto, este efeito pode ser superado com a utilização de um procedimento de filtragem mais adequado para a modulação APK, como o algoritmo LMS normalizado (DINIZ, 1997).

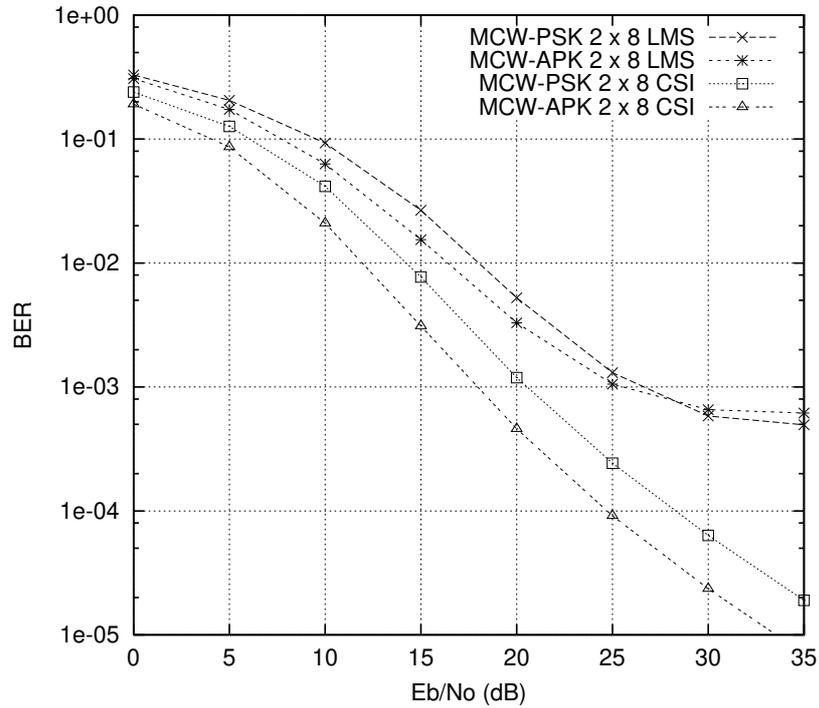


(a) Desempenho para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×8 .

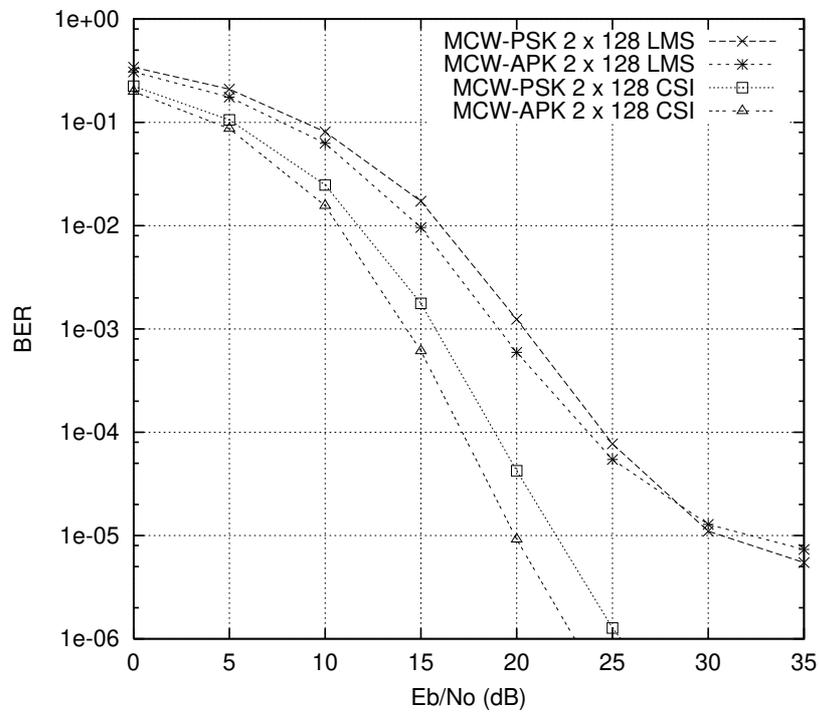


(b) Desempenho para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×128 .

Figura 3.12. Desempenho do sistema com codificação wavelet simulado com as MCW's 2×8 e 2×128 na presença de erros de estimação de canal para $f_D T_s = 0,002$.



(a) Desempenho para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×8 .



(b) Desempenho para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×128 .

Figura 3.13. Desempenho do sistema com codificação wavelet simulado com as MCW's 2×8 e 2×128 na presença de erros de estimação de canal para $f_D T_s = 0,004$.

3.3 SISTEMA COM CODIFICAÇÃO WAVELET MODIFICADO EM CANAIS COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH

Nesta seção, a codificação wavelet será combinada a um esquema de transmissão com diversidade temporal. A idéia principal aqui é utilizar a MCW com dimensão $m \times mg$ como um banco de m codificadores, como sugerido pela Figura 2.1(a). Neste sistema, os m sub-símbolos wavelets y_n^j , $0 \leq j < m$, gerados pelo codificador wavelet no n -ésimo intervalo de codificação, são mapeados em uma constelação bidimensional com energia média igual a $1/m$, e transmitidos separadamente no intervalo $[nT_s, (n+1)T_s)$ através de um canal com desvanecimento Rayleigh, ao invés da transmissão do símbolo wavelet y_n , dado em (2.12), conforme foi proposto em (TZANNES; TZANNES, 1992).

O esquema de transmissão avaliado neste trabalho emprega *slots* de tempo diferentes, com duração nT_s/m , para se transmitir separadamente os sub-símbolos wavelets, o que implica no aumento da banda espectral requerida pelo sistema. Uma evolução natural para este sistema, e que será avaliada em trabalhos futuros, consiste na utilização de múltiplas antenas de transmissão e uma única antena de recepção⁴, com o objetivo de tentar preservar a eficiência espectral obtida em (TZANNES; TZANNES, 1992).

A Figura 3.14 apresenta o sistema proposto. Este sistema utiliza o mesmo esquema de entrelaçamento definido na Seção 3.2. Neste entrelaçamento, a seqüência de sub-símbolos wavelets é inicialmente ordenada ao longo das linhas de uma matriz com I_d (profundidade do entrelaçamento) colunas e L linhas, e posteriormente, os sub-símbolos entrelaçados são obtidos fazendo-se uma varredura coluna por coluna da matriz $L \times I_d$.

O sistema com codificação wavelet modificado também foi implementado com duas técnicas de modulação distintas, sendo elas a modulação APK com duas amplitudes e a modulação PSK. As constelações foram projetadas seguindo-se a mesma metodologia apresentada na Seção 3.2, através do algoritmo de busca exaustiva descrito na Tabela 3.2. Todos os m

⁴Neste caso, por meio de uma codificação espaço-temporal, os m sub-símbolos wavelets y_n^j seriam transmitidos ao mesmo tempo por m antenas transmissoras durante o intervalo $[nT_s, (n+1)T_s)$.

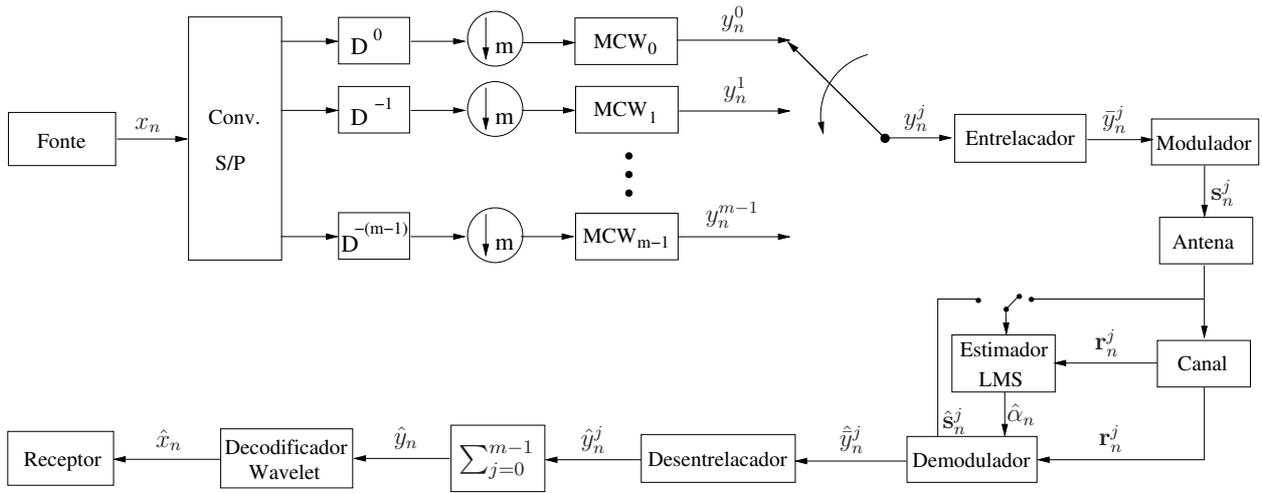


Figura 3.14. Sistema com codificação wavelet modificado com estimador de canal.

sub-símbolos \bar{y}_n^j são modulados por uma mesma constelação com $g + 1$ pontos (ver Equação (2.20)) e energia média igual a $1/m$.

No modelo do canal de comunicação adotado, considera-se que os sinais bidimensionais que modulam os sub-símbolos \bar{y}_n^j são afetados por um desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência, com DEP dada pela Equação (3.6), e por um ruído aditivo Gaussiano branco complexo com média nula e variância $\aleph_0/2$ por dimensão, em que

$$\aleph_0 = 10^{-0,1\left(\frac{E_b}{\aleph_0}\right)_{\text{dB}}}. \quad (3.11)$$

Admite-se ainda que o desvanecimento tem energia média unitária e amplitude constante durante o intervalo de sinalização.

Na recepção, os m sinais recebidos em cada intervalo de sinalização nT_s são convertidos em sinais complexos por um banco de filtros casados. Foram avaliadas duas situações distintas de recepção. Na primeira, considera-se que o receptor tem informação perfeita sobre o estado do canal (CSI). No segundo esquema de recepção, utiliza-se novamente o algoritmo LMS dado em (3.9) para se estimar o canal de comunicação. Neste caso, entretanto, o algoritmo LMS é treinado com sinais BPSK conhecidos com energia igual a $1/m$.

Com relação à regra de decisão empregada pelo demodulador, o uso dos critérios MAP e de mínima distância euclidiana também foram considerados aqui. De posse das estimativas dos

sinais transmitidos, obtém-se as estimativas dos sub-símbolos wavelets entrelaçados \hat{y}_n^j . Para desentrelaçar a seqüência de sub-símbolos wavelets, segue-se o mesmo procedimento utilizado no sistema com codificação wavelet.

Devido ao novo esquema de transmissão proposto, as estimativas \hat{y}_n^j devem ser somadas na recepção, uma vez que estas foram transmitidas separadamente no tempo⁵. O símbolo resultante dessa soma, denotado por \hat{y}_n , é então decodificado de acordo com o processo descrito na Seção 2.3.

3.3.1 Resultados Numéricos

Esta seção apresenta alguns resultados de desempenho do sistema com codificação wavelet modificado, ilustrado na Figura 3.14 (ver o Apêndice A para os detalhes de simulação).

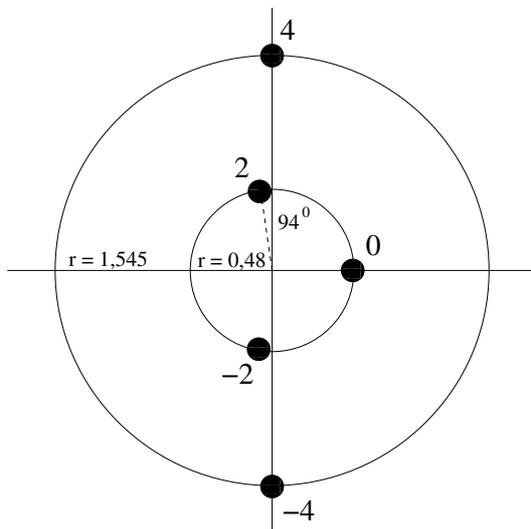
Esses resultados foram obtidos com matrizes wavelets reais planas com dimensões 2×8 e 4×16 , e esquemas de modulação 5-PSK e 5-APK, em canais com desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência. A Figura 3.15 exhibe as constelações projetadas para esses sistemas.

Os primeiros resultados de simulação apresentados a seguir têm por objetivo avaliar o impacto do efeito Doppler sobre o desempenho do sistema com codificação wavelet modificado. Para cumprir com o objetivo dessas primeiras simulações, admite-se que o receptor seja capaz de estimar perfeitamente o estado de cada canal de comunicação simulado.

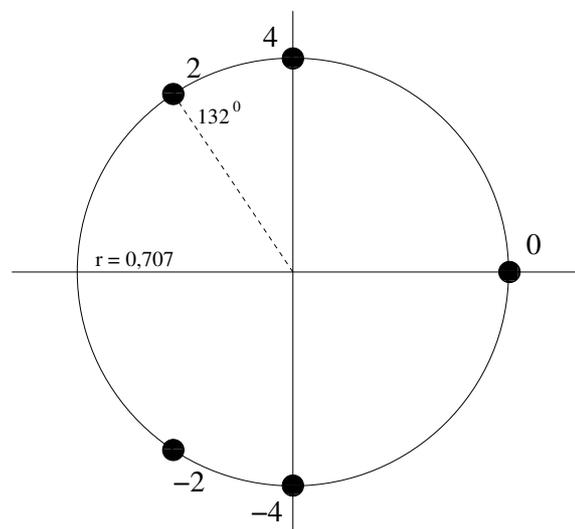
A Figura 3.16 apresenta o desempenho do sistema PSK com codificação wavelet modificado, simulado com as MCW's 2×8 e 4×16 em um canal com Desvanecimento Rayleigh e máximo desvio Doppler normalizado em $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.

Assim como foi observado na Seção 3.2.2 para o sistema com codificação wavelet, o desempenho do sistema com codificação wavelet modificado também sofre uma forte degradação sem

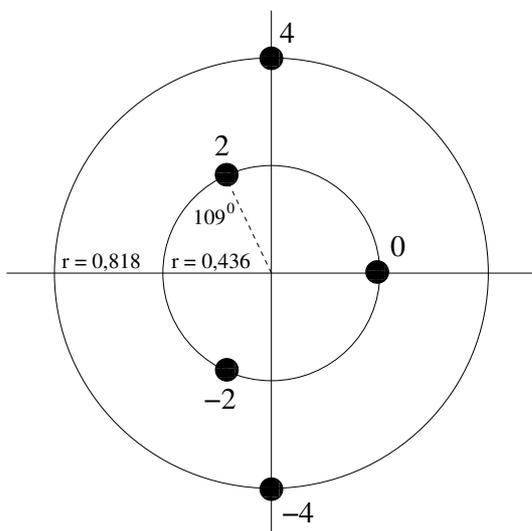
⁵Isso resulta em um ganho adicional de diversidade (diversidade temporal), como pode ser constatado na Seção 3.3.1.



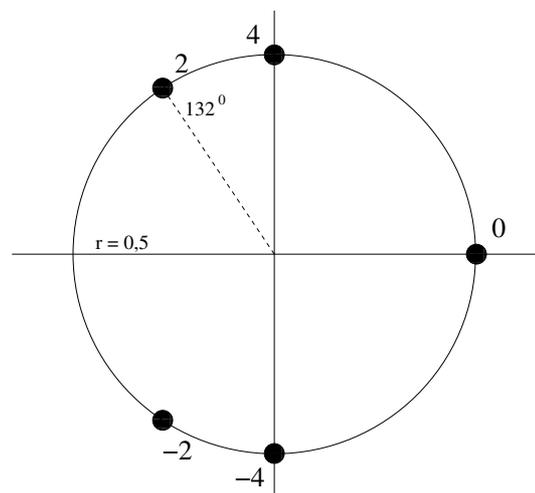
(a) MCW 2 × 8 — Constelação 5-APK.



(b) MCW 2 × 8 — Constelação 5-PSK.



(c) MCW 4 × 16 — Constelação 5-APK.



(d) MCW 4 × 16 — Constelação 5-PSK.

Figura 3.15. Constelações utilizadas nas simulações do sistema com codificação wavelet modificado.

o entrelaçamento da seqüência de sub-símbolos. Isto ocorre porque o esquema de transmissão com diversidade temporal proposto só suscita ganhos de desempenho quando os sub-símbolos wavelets são afetados por amostras de desvanecimento suficientemente descorrelacionadas, fato que pode ser alcançado através da utilização de um esquema de entrelaçamento.

A partir da Figura 3.16, verifica-se que esquemas de entrelaçamento com profundidades de 20 símbolos, para o sistema com MCW 2×8 , e 70 símbolos, para o sistema com MCW 4×16 , permitem obter bons ganhos de desempenho, similares aos conseguidos em canais com entrelaçamento perfeito (canais com Desvio Doppler infinito). Observe que estas profundidades de entrelaçamento não são suficientes para tornar as amostras de desvanecimento do canal estatisticamente independentes, mas proporcionam a descorrelação necessária para se explorar todo o potencial dos sistemas simulados.

Como mencionado anteriormente, o sistema com codificação wavelet modificado também foi implementado com um esquema de modulação APK. A Figura 3.17 ilustra os resultados obtidos com a simulação dos sistemas APK com matrizes MCW 2×8 e 4×16 em um canal com máximo desvio Doppler normalizado em $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.

A partir dos resultados apresentados nas Figuras 3.16 e 3.17, verifica-se que um esquema de entrelaçamento com profundidade de $m^2 g$ símbolos é suficiente para que os sistemas simulados obtenham praticamente a totalidade do ganho possível em um canal com desvanecimento Rayleigh com $f_D T_s = 0,002$. Ou seja, o aumento da profundidade de entrelaçamento além desse valor não proporciona ganho significativo de desempenho para esses sistemas⁶. Observe que a profundidade de entrelaçamento neste caso é m vezes maior que a constatada para os sistemas com transmissão de símbolos wavelets, o que pode ser justificado pela existência de m sub-símbolos extremamente correlatados em cada intervalo $[nT_s, (n+1)T_s)$. Também pode-se verificar que o ganho de 2,5 dB, obtido pelo sistema APK com codificação wavelet sobre o sistema PSK com codificação wavelet, se mantém, respectivamente, nas simulações

⁶Assim como mencionado anteriormente (Seção 3.2.2), também aqui a profundidade de entrelaçamento pode ser influenciada pelo tempo de coerência do canal de comunicação.

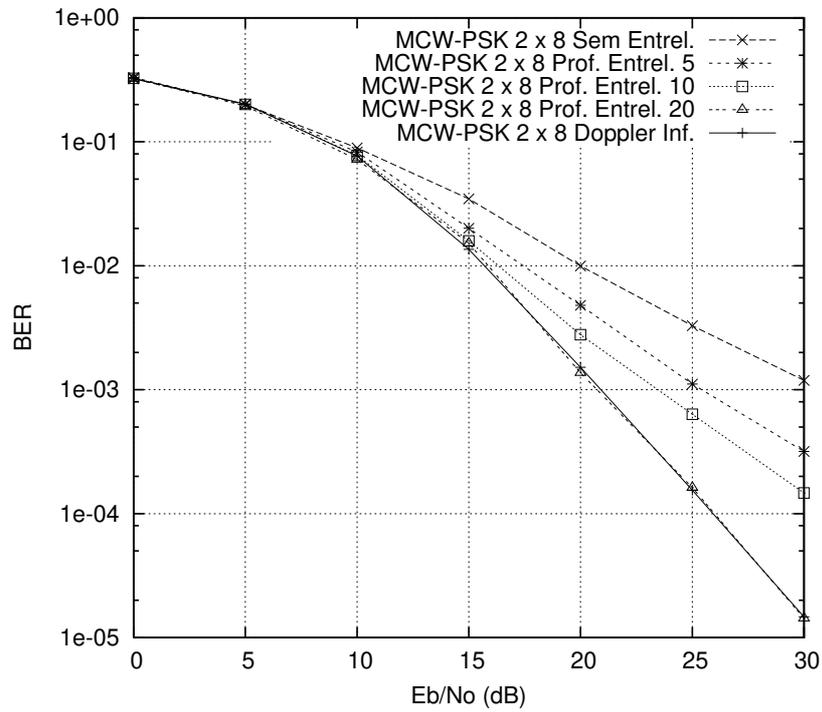
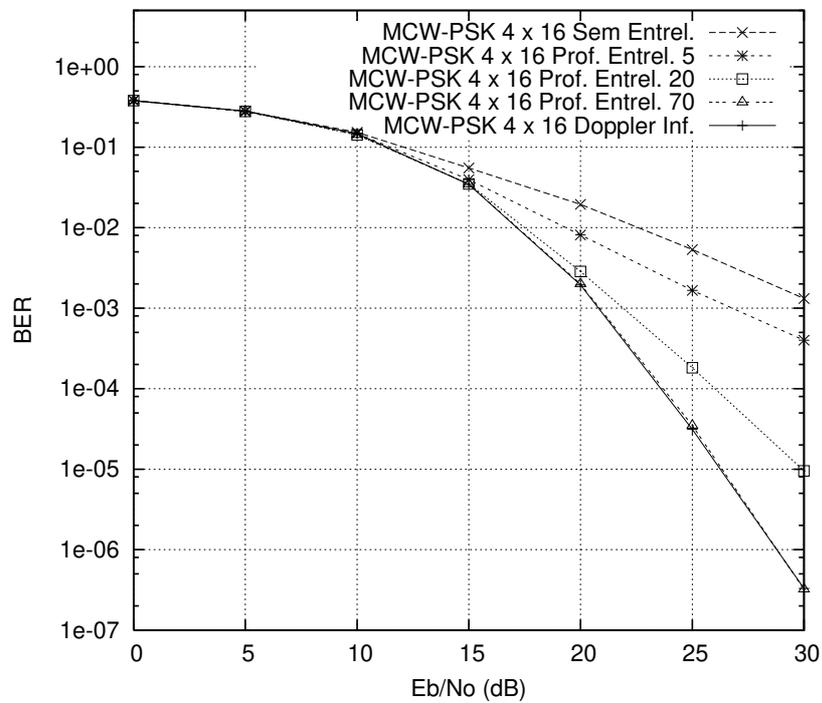
(a) Curvas para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×8 .(b) Curvas para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 4×16 .

Figura 3.16. Desempenho do sistema PSK com codificação wavelet modificada, simulado com as MCW's 2×8 e 4×16 sobre um canal com $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.

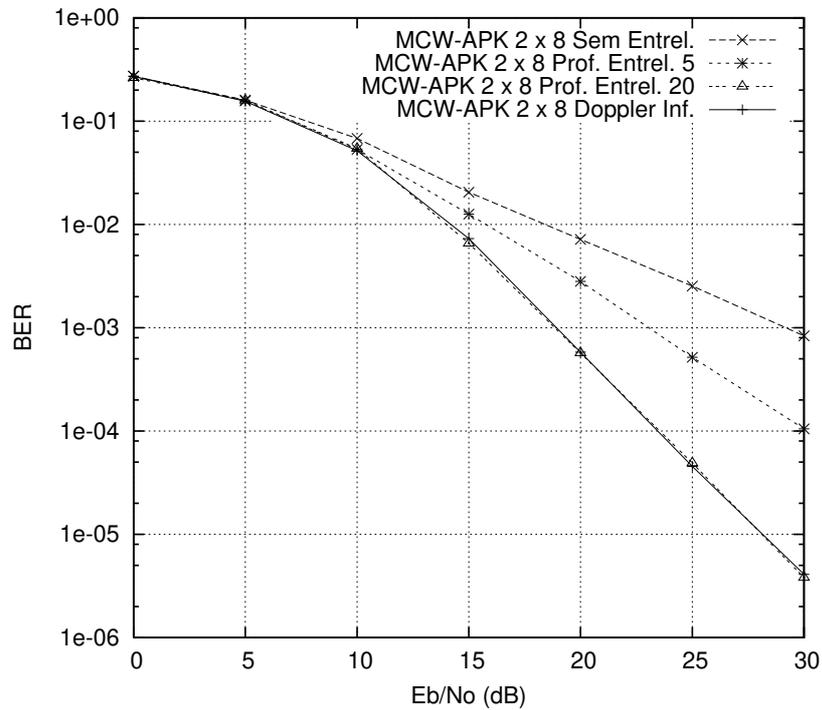
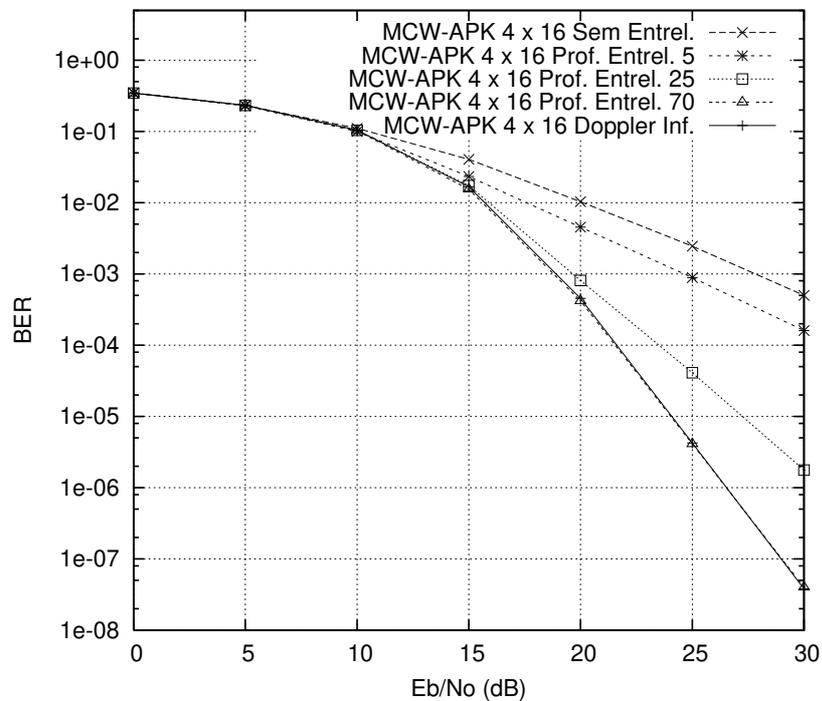
(a) Curvas para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×8 .(b) Curvas para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 4×16 .

Figura 3.17. Desempenho do sistema APK com codificação wavelet modificada, simulado com as MCW's 2×8 e 4×16 sobre um canal com $f_D T_s = 0,002$, para diferentes profundidades de entrelaçamento.

do sistema com codificação wavelet modificado.

Todos os resultados de desempenho que serão apresentados a seguir foram obtidos a partir de simulações do sistema com codificação wavelet modificado em canais com desvanecimento perfeitamente entrelaçados.

Inicialmente, a Figura 3.18 exibe as curvas de desempenho do sistema PSK com codificação wavelet modificado, simulado com as MCW's 2×8 e 4×16 sobre um canal perfeitamente estimado no receptor. Para auxiliar na avaliação de desempenho desse sistema, utiliza-se aqui como uma referência, o sistema PSK com codificação wavelet com MCW 2×8 . A partir desta figura, pode-se verificar que o sistema baseado na transmissão de sub-símbolos wavelets codificados pela MCW 2×8 apresenta um ganho de desempenho aproximadamente igual a 2 dB em relação ao sistema baseado na transmissão de símbolos wavelets codificados por esta mesma MCW, para uma probabilidade de erro de bit em torno de 10^{-4} . Considerando-se esta mesma faixa de valores para a probabilidade de erro de bit, observa-se que o sistema baseado na transmissão de sub-símbolos codificados pela MCW 4×16 apresenta um ganho de E_b/N_0 aproximadamente igual a 5 dB em relação ao sistema de referência.

Os ganhos de desempenho obtidos pelo sistema com codificação wavelet modificado ocorrem basicamente em função de dois fatores principais, sendo eles:

- O ganho de diversidade, conseguido com a transmissão dos sub-símbolos wavelets sobre canais descorrelacionados. Note que o esquema de transmissão empregado aqui, leva a uma diminuição da eficiência espectral do sistema. Entretanto, esquemas de transmissão baseados na utilização de múltiplas antenas transmissoras serão investigados em trabalhos subseqüentes, de forma a preservar essa eficiência espectral.
- A diminuição do número de pontos da constelação utilizada na modulação por um fator de aproximadamente m (em que m é o número de linhas da matriz MCW utilizada), de acordo com as Equações (2.18) e (2.20), o que leva a um aumento na distância euclidiana média entre os pontos da constelação e, conseqüentemente, a uma diminuição do número

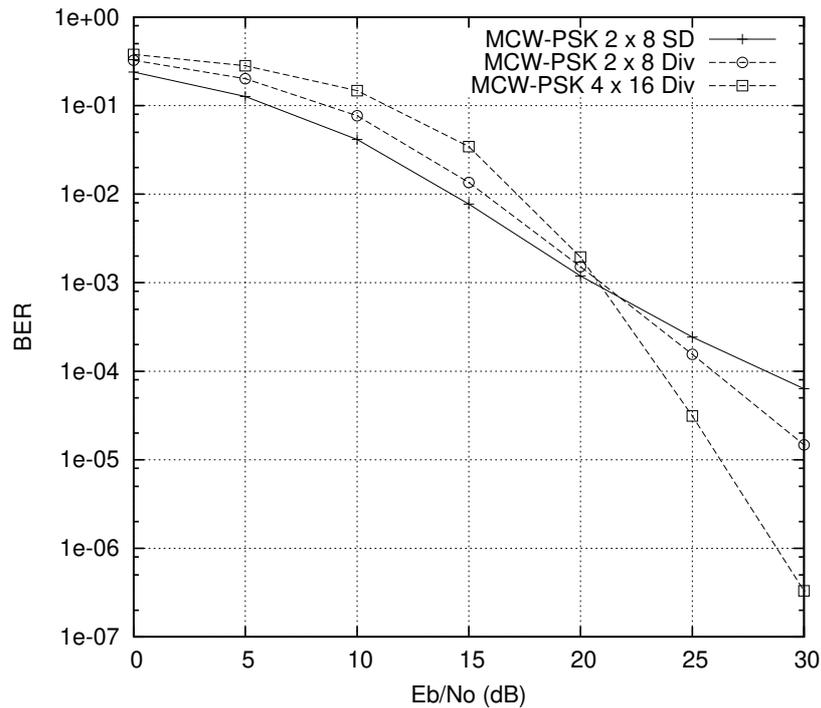


Figura 3.18. Desempenho do sistema PSK com codificação wavelet modificada na ausência de erros de estimação de canal.

de erros de demodulação⁷.

Os resultados apresentados até o momento foram obtidos para sistemas de comunicação com informação perfeita sobre o estado do canal. De agora em diante, o desempenho do sistema com codificação wavelet modificada será avaliado na presença dos erros de estimação do canal.

Foram simulados sistemas com MCW 2×8 e 4×16 , e esquemas de modulação 5-PSK e 5-APK, em um canal com desvanecimento Rayleigh plano com máximo desvio Doppler normalizado em $f_D T_s = 0,002$. Foi adotado um entrelaçamento com profundidade de 100 símbolos.

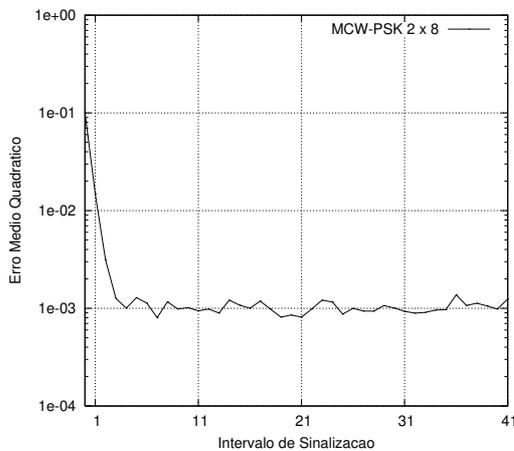
Os sub-símbolos de informação foram transmitidos em blocos com comprimento igual a 200, com 50 símbolos de treinamento intercalados entre esses sub-símbolos de informação,

⁷A princípio, o aumento dessa distância euclidiana poderia ser comprometido pela diminuição do raio das novas constelações, calculado em função da energia média de cada constelação. Entretanto, resultados de simulação em canais AWGN confirmam que os esquemas de modulação empregados pelos sistemas de transmissão de sub-símbolos wavelets apresentam propriedades melhores de distância euclidiana.

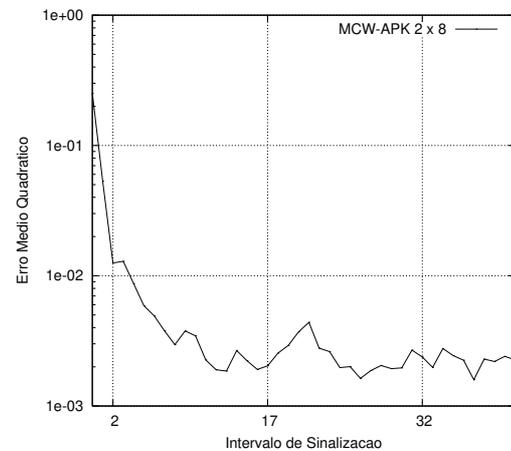
de forma que a vazão da informação foi de 80%. Com o objetivo de aumentar a precisão estatística dos resultados obtidos, a simulação de cada bloco foi realizada com uma amostra independente do canal variante no tempo.

O esquema de treinamento utilizado em cada sistema foi investigado de forma empírica, através de simulações, visando maximizar o desempenho dos sistemas. Para o sistema PSK com MCW 2×8 , cada par de símbolos de treinamento é seguido por oito sub-símbolos de informação, enquanto que para os demais sistemas, o algoritmo LMS foi treinado sempre com a transmissão de três símbolos de treinamento antes de doze sub-símbolos de informação.

Mais uma vez, o valor do passo μ do LMS foi otimizado numericamente para cada sistema e valor de espalhamento Doppler $f_D T_s$. Como a escolha do passo μ também depende da SNR (E_b/N_0), uma relação de compromisso foi estabelecida sobre a região de valores E_b/N_0 investigados.



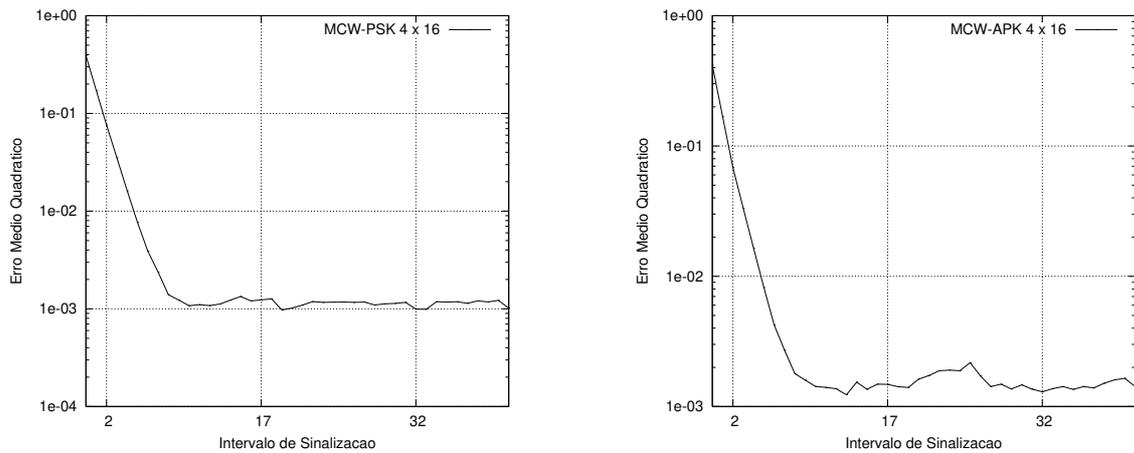
(a) Curva de aprendizagem para o sistema PSK com $\mu = 1,28$.



(b) Curva de aprendizagem para o sistema APK com $\mu = 1,06$.

Figura 3.19. Curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os sistemas com modulações 5-PSK e 5-APK simulados com a MCW 2×8 sobre um canal com desvanecimento com $f_D T_s = 0,002$.

As Figuras 3.19 e 3.20 ilustram as curvas de aprendizagem do LMS para os sistemas PSK e APK simulados, respectivamente, com as MCW's 2×8 e 4×16 em um canal com $f_D T_s = 0,002$. O valor do passo μ do algoritmo LMS utilizado em cada sistema encontra-se no rótulo de cada uma dessas figuras.



(a) Curva de aprendizagem para o sistema PSK com $\mu = 1,35$.

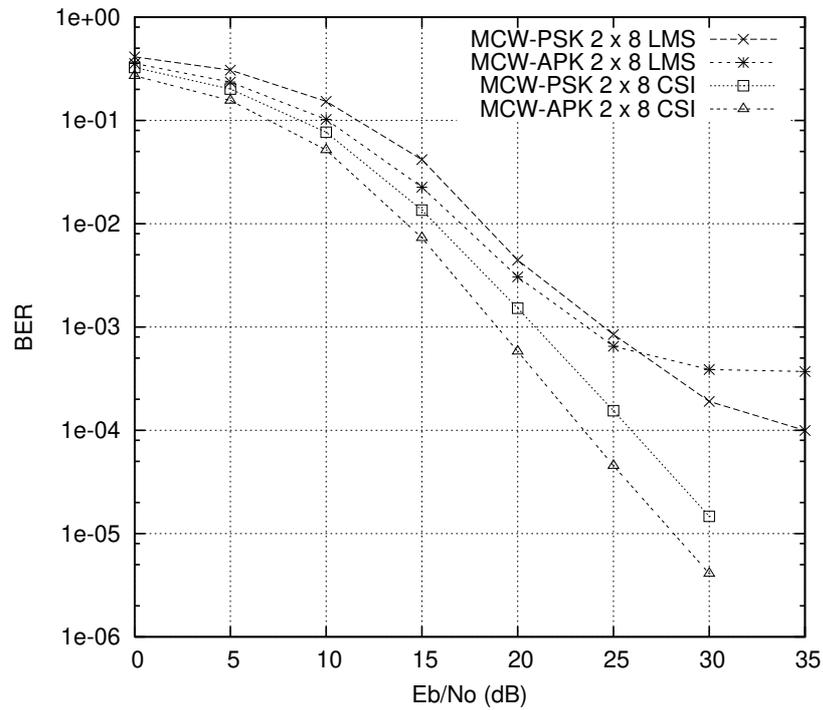
(b) Curva de aprendizagem para o sistema APK com $\mu = 1,46$.

Figura 3.20. Curvas de aprendizagem do algoritmo LMS para os sistemas com modulações 5-PSK e 5-APK simulados com a MCW 4×16 sobre um canal com desvanecimento com $f_D T_s = 0,002$.

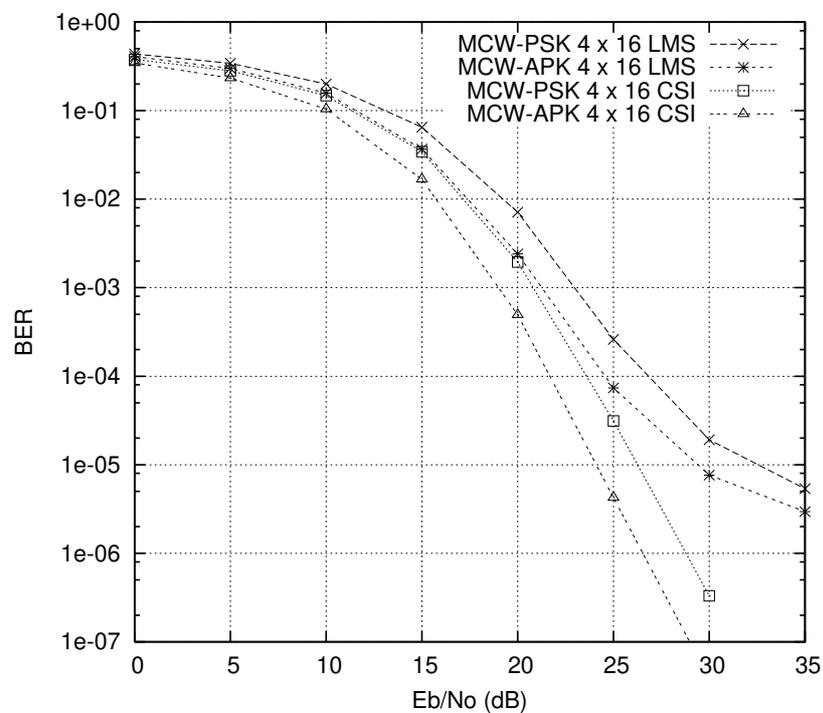
Essas curvas foram obtidas para uma SNR igual a 30 dB, e apresentam a evolução do erro médio quadrático (EMQ) durante os primeiros intervalos de sinalização. Assim como foi observado para o sistema com codificação wavelet, também aqui pode ser verificado que os sistemas baseados na transmissão de sub-símbolos que utilizam a modulação APK apresentam um patamar de erro médio quadrático mais elevado que os sistemas com modulação PSK, devido a uma distribuição desigual da energia média da constelação entre os seus sinais.

As Figuras 3.21(a) e 3.21(b) ilustram o desempenho do sistema com codificação wavelet modificado, simulado na presença de erros de estimação de canal com as MCW's reais planas com dimensões 2×8 e 4×16 em um canal com máximo desvio Doppler $f_D T_s = 0,002$. Essas Figuras também mostram, como referência, curvas de desempenho obtidas na ausência de erros de estimação de canal (CSI).

Pode ser observado na Figura 3.21(a), que o sistema APK apresenta um desempenho superior ao sistema PSK para SNR's inferiores a aproximadamente 25 dB, entretanto o patamar de erro irreduzível do sistema PSK é inferior ao do sistema APK. Este fato pode ser explicado pelo menor EMQ na estimação do canal do sistema PSK com MCW 2×8 . Por fim, pode ser verificado que o desempenho do sistema com codificação wavelet aumenta com a utilização de MCW's de maiores dimensões. Em particular, observa-se que o patamar de erro irreduzível



(a) Desempenho para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×8 .



(b) Desempenho para Matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 4×16 .

Figura 3.21. Desempenho do sistema com codificação wavelet modificado, simulado com as MCW's 2×8 e 4×16 na presença de erros de estimação de canal para $f_D T_s = 0,002$.

do sistema PSK passou de $8 \cdot 10^{-5}$ para $6 \cdot 10^{-6}$ quando se utilizou a MCW 4×16 , em substituição da MCW 2×8 nas simulações. Este comportamento ocorreu com maior evidência nos sistemas com modulação APK, no qual pôde ser constatado uma redução no patamar de erro de $4 \cdot 10^{-4}$ para $2 \cdot 10^{-6}$, quando a MCW 4×16 foi utilizada em substituição à MCW 2×8 .

3.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo foram apresentados sistemas de transmissão baseados na codificação de canal com matrizes wavelets. Os desempenhos desses sistemas, obtidos em termos da probabilidade de erro de bit, foram avaliados em canais com ruído aditivo Gaussiano branco e em canais com desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência, através de simulações computacionais.

Inicialmente se constatou que em canais AWGN, a codificação wavelet com modulação ASK e taxa igual a 1 bit/símbolo apresenta o mesmo desempenho que sistemas com modulação antipodal (ASK binária, BPSK), independente da dimensão das matrizes de coeficientes wavelets utilizadas na codificação⁸.

Entretanto, pôde-se observar que em canais caracterizados pelo desvanecimento Rayleigh plano, os sistemas de transmissão baseados na codificação com matrizes wavelets apresentaram bons desempenhos. Em particular, foi mostrado através de simulação computacional que o sistema baseado na transmissão de símbolos wavelets supera o desempenho do sistema STBC-BPSK proposto por Tarokh et al. (1999), o qual apresenta uma complexidade de implementação similar e produz a mesma eficiência espectral do sistema wavelet.

⁸Neste mesmo ambiente de comunicação, também foram realizadas algumas simulações com sistemas APK e PSK baseados na transmissão de símbolos e sub-símbolos wavelets, com regra de demodulação MAP. Em todas elas, o sistema não-codificado apresentou vantagens de desempenho.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DE DESEMPENHO DE SISTEMAS BASEADOS EM MCW'S

Em trabalhos anteriores, o desempenho dos sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets em canais com desvanecimento vinha sendo avaliado apenas por simulações computacionais (TZANNES; TZANNES, 1992; SILVEIRA et al., 2003, 2004a). Devido aos bons resultados de simulação conseguidos por esses sistemas em ambientes de comunicações sem fio, foi considerado pertinente apresentar neste trabalho um modelo analítico para formalizar o desempenho desses sistemas.

Sendo assim, as ferramentas analíticas necessárias para investigar o desempenho de sistemas de comunicações codificados por matrizes de coeficientes wavelets serão deduzidas neste capítulo, e validadas através de comparações com simulações computacionais. Vale salientar que ambos os sistemas wavelets avaliados no capítulo anterior, sendo eles: o sistema com codificação wavelet e o sistema com codificação wavelet modificado, serão analisados aqui em canais sujeitos apenas ao ruído AWGN e em canais com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência.

O restante deste capítulo está organizado como segue. Na Seção 4.1 apresenta-se a análise da probabilidade de erro de bit para o sistema ASK com codificação wavelet, derivada em (TZANNES; TZANNES, 1992) para canais com ruído AWGN. A Seção 4.2 apresenta a análise derivada aqui para o desempenho do sistema com codificação wavelet, e esquemas de modulação PSK e APK, em canais com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência. Na Seção 4.3 são apresentadas as ferramentas matemáticas necessárias para analisar o desempenho do sistema com codificação wavelet modificado, com esquemas de modulação PSK e APK, em canais com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh não-seletivo

em frequência. Resultados de simulação também são apresentados nas Seções 4.2 e 4.3, com o objetivo de validar as expressões analíticas desenvolvidas. Por fim, a Seção 4.4 apresenta as considerações finais do capítulo.

4.1 SISTEMA COM CODIFICAÇÃO WAVELET EM CANAIS AWGN

Nesta seção, será apresentada uma expressão analítica para a probabilidade de erro de bit do sistema com codificação wavelet em canais AWGN, apresentado na Seção 3.1.

Como foi visto na Seção 2.4, os símbolos wavelets gerados por uma MCW real plana com dimensão $m \times mg$ pertencem a um conjunto com $mg + 1$ valores, de acordo com a Equação (2.18), e têm variância mg . Portanto, quando a modulação ASK é utilizada, os símbolos codificados y_n são mapeados em $mg + 1$ formas de onda com amplitudes iguais a y_n , e energia média $mg \cdot T_s$.

Considere uma transmissão de símbolos wavelets sobre um canal AWGN. Nesse contexto, os símbolos corrompidos pelo ruído podem ser expressos por

$$\omega_n = y_n + n_n \quad (4.1)$$

em que y_n representa o símbolo wavelet transmitido e n_n , uma variável aleatória Gaussiana com média nula e variância $\aleph_0/2$, que representa a componente do ruído. Desta forma, os símbolos na saída do decodificador wavelet (correlator) são representados por

$$z_i = S_i + R_i \quad (4.2)$$

em que S_i e R_i correspondem, respectivamente, à soma das mg componentes do sinal (Equação (2.16)) e à soma das mg componentes do ruído na saída do decodificador.

Como $\{n_n\}$ é um ruído Gaussiano branco com média nula e variância $\aleph_0/2$, a componente R_i também tem média nula e variância dada por

$$\mathbb{E}[R_i^2] = mg \frac{\aleph_0}{2} \quad (4.3)$$

Desta forma, a probabilidade de erro de bit é dada por

$$\begin{aligned}
 P_e &= \frac{1}{2} \Pr(S_i + R_i > 0 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Pr(S_i + R_i < 0 \mid x_{i-(mg-1)} = +1) \\
 &= \frac{1}{2} \Pr(R_i > mg \mid x_{i-(mg-1)} = -1) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \Pr(R_i > mg \mid x_{i-(mg-1)} = +1)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Uma vez que o termo do ruído R_i é independente de $x_{i-(mg-1)}$, a probabilidade de erro de bit P_e pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
 P_e &= \Pr(R_i > mg) \\
 &= Q\left(\sqrt{\frac{2mg}{N_0}}\right)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como a energia média da constelação ASK é mg , tem-se

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \tag{4.6}$$

em que E_b representa a energia média transmitida sobre o canal por bit de informação.

Sendo assim, em canais AWGN um sistema com codificação wavelet com máxima sobreposição das linhas da MCW e modulação ASK atinge o mesmo desempenho de sistemas com modulação antipodal sem codificação, independentemente do comprimento das linhas da MCW utilizada na codificação. Esses resultados já tinham sido anunciados na Seção 3.1.

O mesmo não ocorre em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh, como poderá ser observado nas Seções que seguem.

4.2 SISTEMA COM CODIFICAÇÃO WAVELET EM CANAIS COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH

Esta seção aborda a análise da probabilidade de erro de bit do sistema com codificação wavelet apresentado na Seção 3.2.

A Figura 4.1 ilustra o sistema analisado. Neste sistema, cada símbolo wavelet y_n gerado pelo codificador no n -ésimo intervalo de codificação pode assumir um dos $mg+1$ valores dados por:

$$y_n \in \{-mg, -mg+2, \dots, -mg+2k, \dots, -2, 0, 2, \dots, mg-2, mg\} \quad (4.7)$$

Considera-se que a seqüência de símbolos wavelets é perfeitamente entrelaçada por um entrelaçador de bloco. A cada intervalo de sinalização $[nT_s, (n+1)T_s)$, um símbolo wavelet entrelaçado é modulado e transmitido pela antena.

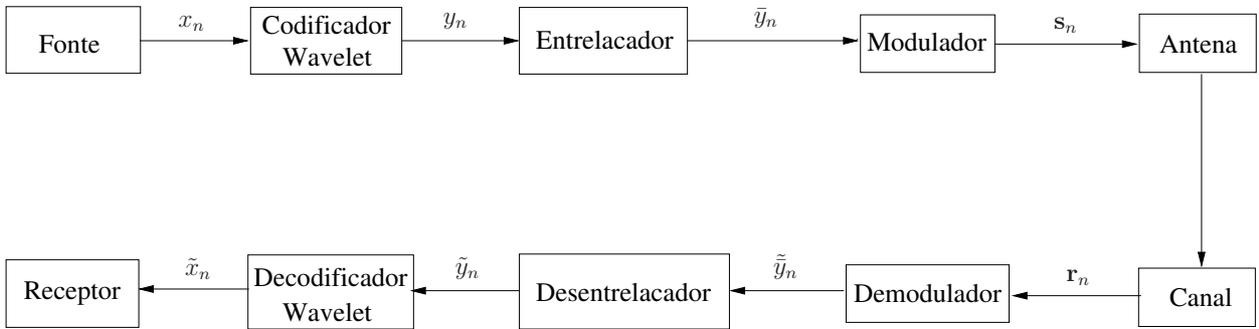


Figura 4.1. Sistema com codificação wavelet.

Na recepção, o sinal recebido é convertido à sua representação vetorial através de uma base apropriada, utilizando-se por exemplo um banco de correladores e amostradores. Desta forma, o vetor recebido \mathbf{r}_n é dado por

$$\mathbf{r}_n = \alpha_n \mathbf{s}_n + \mathbf{n}_n \quad (4.8)$$

em que \mathbf{s}_n é o símbolo da constelação bidimensional que mapeia o símbolo wavelet y_n . A variação de amplitude α_n ocasionada pelo desvanecimento do canal é considerada constante durante o intervalo de sinalização $[nT_s, (n+1)T_s)$, e perfeitamente estimada no receptor. As componentes do ruído complexo \mathbf{n}_n são variáveis aleatórias Gaussianas estatisticamente independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), com média nula e variância $\aleph_0/2$. Uma regra de decisão é aplicada na demodulação para se obter as estimativas dos sinais transmitidos.

Após a demodulação e desentrelaçamento, as estimativas dos sinais recebidos são inversa-

mente mapeadas nos símbolos \tilde{y}_n . A estimativa \tilde{y}_n é dada por

$$\tilde{y}_n = y_n + e_n \quad (4.9)$$

em que e_n é uma variável aleatória *discreta*, denominada *ruído de demodulação*.

Dessa forma, considerando a Equação (2.16), a saída de um correlator casado à linha \mathbf{a}^j da MCW no tempo $i = m(g + p) - 1$ pode ser expressa por

$$\begin{aligned} z_i^j &= \sum_{k=0}^{mg-1} a_{(mg-1)-k}^j \tilde{y}_{i-k} \\ &= \eta_i^j + \nu_i^j \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que η_i^j e ν_i^j são dados por

$$\eta_i^j = \sum_{k=0}^{mg-1} a_{(mg-1)-k}^j y_{i-k} \quad (4.11)$$

$$\nu_i^j = \sum_{k=0}^{mg-1} a_{(mg-1)-k}^j e_{i-k}, \quad (4.12)$$

sendo ν_i^j denominado aqui *ruído wavelet*. Note que $\nu_i^j \in \mathbb{Z}$.

Na presença de erros de demodulação, a v.a. z_i^j pode ser usada para estimar o bit $x_{j+i-(mg-1)}$ comparando-a com um limiar de decisão¹. Especificamente, o bit decodificado na presença de erros é $x_{j+i-(mg-1)} = -1$ se $z_i^j < 0$, ou $x_{j+i-(mg-1)} = +1$ se $z_i^j > 0$. Se $z_i^j = 0$, $x_{j+i-(mg-1)}$ é escolhido aleatoriamente. Portanto, a probabilidade de erro de bit do sistema com codificação wavelet pode ser expressa por

$$\begin{aligned} P_e &= P_e^{z^j} \\ &= \Pr(\eta_i^j + \nu_i^j > 0 \mid x_{j+i-(mg-1)} = -1) \cdot \Pr(x_{j+i-(mg-1)} = -1) + \\ &+ 0.5 \Pr(\eta_i^j + \nu_i^j = 0 \mid x_{j+i-(mg-1)} = -1) \cdot \Pr(x_{j+i-(mg-1)} = -1) + \\ &+ \Pr(\eta_i^j + \nu_i^j < 0 \mid x_{j+i-(mg-1)} = +1) \cdot \Pr(x_{j+i-(mg-1)} = +1) + \\ &+ 0.5 \Pr(\eta_i^j + \nu_i^j = 0 \mid x_{j+i-(mg-1)} = +1) \cdot \Pr(x_{j+i-(mg-1)} = +1). \end{aligned} \quad (4.13)$$

¹Note que $\mathbb{E}(z_i^j) = \mathbb{E}(\eta_i^j) + \mathbb{E}(\nu_i^j) = mg \cdot \text{sgn}(x_{j+i-(mg-1)})$, de forma que o estimador é não enviesado.

em que $P_e^{z^j}$ representa a probabilidade de erro de bit associada ao correlator z^j . A primeira igualdade segue do fato de que todos os m correlatores z^j decodificam a informação com a mesma probabilidade de erro. Sem perda de generalidade, a análise da probabilidade de erro de bit do sistema com codificação wavelet será desenvolvida tomando-se como referência o correlator wavelet z^0 . Além disso, com o objetivo de simplificar a notação, define-se $z_i := z_i^0$, $\eta_i := \eta_i^0$ e $\nu_i := \nu_i^0$, a partir deste ponto.

A partir das Equações (2.16) e (2.17), segue que $\eta_i = mgx_{i-(mg-1)}$. Considerando que os bits de informação são equiprováveis, o entrelaçamento é ideal e os símbolos wavelets são modulados por uma constelação de sinais simétrica, pode ser verificado que $\Pr(\nu_i > mg | x_{i-(mg-1)} = -1) = \Pr(\nu_i < -mg | x_{i-(mg-1)} = +1)$ e $\Pr(\nu_i = mg | x_{i-(mg-1)} = -1) = \Pr(\nu_i = -mg | x_{i-(mg-1)} = +1)$. Logo,

$$P_e = \Pr(\nu_i > mg | x_{i-(mg-1)} = -1) + 0.5 \Pr(\nu_i = mg | x_{i-(mg-1)} = -1) \quad (4.14)$$

A distribuição de probabilidade condicional do ruído wavelet ν_i , é derivada a partir da correspondente distribuição do ruído de demodulação e_n discutida na seqüência, a qual é influenciada pelas propriedades estatísticas dos símbolos wavelets, dos erros de demodulação e do canal.

4.2.1 Distribuição de Probabilidades do Ruído de Demodulação

A fim de tornar mais clara a análise que se segue, suponha que o esquema de codificação wavelet em questão utilize uma matriz MCW real e plana com dimensão 2×8 . Neste caso, os símbolos gerados a cada intervalo de codificação podem assumir os valores do conjunto $\{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$, como definido por (4.7). A partir da Equação (4.9) e levando-se em consideração todos os possíveis erros de demodulação, pode-se construir a Tabela 4.1. Nesse exemplo, a ausência de ruído de demodulação é denotada por $e_n = 0$.

Uma observação cuidadosa da Tabela 4.1 revela a existência de alguma dependência estatística entre valores sucessivos do ruído de demodulação e_n , devido à memória da seqüência

Tabela 4.1. Ruído de demodulação dos símbolos wavelets

Ruído e_n	(y_n, \tilde{y}_n)
2	(0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 8), (-2, 0), (-4, -2), (-6, -4), (-8, -6)
-2	(0, -2), (2, 0), (4, 2), (6, 4), (8, 6), (-6, -8), (-4, -6), (-2, -4)
4	(0, 4), (2, 6), (4, 8), (-8, -4), (-6, -2), (-4, 0), (-2, 2)
-4	(0, -4), (2, -2), (4, 0), (6, 2), (8, 4), (-4, -8), (-2, -6)
6	(0, 6), (2, 8), (-8, -2), (-6, 0), (-4, 2), (-2, 4)
-6	(0, -6), (2, -4), (4, -2), (6, 0), (8, 2), (-2, -8)
8	(0, 8), (-8, 0), (-6, 2), (-4, 4), (-2, 6)
-8	(0, -8), (8, 0), (2, -6), (4, -4), (6, -2)
10	(-8, 2), (-6, 4), (-4, 6), (-2, 8)
-10	(2, -8), (4, -6), (6, -4), (8, -2)
12	(-8, 4), (-6, 6), (-4, 8)
-12	(4, -8), (6, -6), (8, -4)
14	(-8, 6), (-6, 8)
-14	(6, -8), (8, -6)
16	(-8, 8)
-16	(8, -8)

dos símbolos wavelets $\{y_n\}$.

A fim de se investigar a intensidade de tal dependência, avaliações empíricas de informação mútua $I(e_n; e_{n+1})$ foram realizadas para o sistema com codificação wavelet com MCW 2×8 e esquemas de demodulação baseados na regra MAP e na demodulação por mínima distância euclidiana. Alguns resultados são apresentados na Tabela 4.2. Eles sugerem que esta dependência não é forte e que é mais intensa para o caso da demodulação MAP. Resultados numéricos similares foram obtidos em outros experimentos. A partir desses resultados, os valores sucessivos de e_n são assumidos independentes na seqüência².

Tabela 4.2. Medidas empíricas de informação mútua.

SNR (dB)	Métrica Euclidiana	Métrica MAP
0	2.9725e-04	5.5947e-03
5	1.2809e-04	2.2842e-03
10	8.4149e-05	6.8778e-04
15	4.7998e-05	1.5314e-04
20	8.8816e-06	2.4589e-05

Generalizando os resultados apresentados na Tabela 4.1 para um sistema com codificação wavelet baseado na MCW $m \times mg$, a probabilidade condicional do ruído de demodulação

²Esta suposição também é validada pela boa concordância observada entre os resultados analíticos e de simulação que serão apresentados na Seção 4.2.4.

$e_n = e$ pode ser expressa por

$$\Pr(e_n = e \mid x_{i-(mg-1)}) = \sum_{\mathcal{E}(e)} \Pr(\tilde{y}_n \mid y_n) \cdot \Pr(y_n \mid x_{i-(mg-1)}), \quad (4.15)$$

em que $e \in \{-2mg, \dots, -2k, \dots, 0, \dots, 2k, \dots, 2mg\}$ e $\mathcal{E}(e) = \{(y_n, \tilde{y}_n) : \tilde{y}_n - y_n = e\}$.

Para prosseguir com o cálculo de $\Pr(e_n \mid x_{i-(mg-1)})$ é necessário analisar individualmente as probabilidades condicionais $\Pr(\tilde{y}_n \mid y_n)$ e $\Pr(y_n \mid x_{i-(mg-1)})$. A seguir, será abordada inicialmente a distribuição de probabilidade dos símbolos wavelets condicionada ao bit de informação $x_{i-(mg-1)}$.

4.2.1.1 Distribuição de probabilidade dos símbolos wavelets A distribuição de probabilidades dos símbolos wavelets y_n depende da matriz wavelet utilizada na codificação. A fim de tornar mais clara a análise desta distribuição, considere novamente uma codificação wavelet com MCW 2×8 .

A partir do algoritmo de codificação wavelet, detalhado na Seção 2.2, pode-se construir a Tabela 4.3, que mostra os símbolos wavelets gerados nos primeiros 16 intervalos de codificação³.

A partir das Equações (2.16) e (2.17), pode-se observar que no tempo $i = m(g + p) - 1$, $p \in \mathbb{N}$, o correlator z_i decodifica o bit de informação $x_{i-(mg-1)}$ a partir do vetor de símbolos wavelets $(y_{i-(mg-1)}, y_{i-(mg-2)}, \dots, y_i)$, aqui denotado por $\mathbf{y}_{x_{i-(mg-1)}}$. Tomando o vetor \mathbf{y}_{x_8} como exemplo, e considerando conhecido o bit x_8 , pode-se encontrar a distribuição condicional de suas componentes, como mostrado a seguir.

Substituindo os valores dos coeficientes da matriz MCW 2×8 , definida em (4.16), e considerando que $x_8 = -1$, obtém-se as expressões dos símbolos wavelets do vetor \mathbf{y}_{x_8} , mostradas na Tabela 4.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

³Pode ser observada na Tabela 4.3 a existência de um período transitório, referente aos primeiros $mg - m$ intervalos de codificação, que não será objeto da presente análise.

Tabela 4.3. Símbolos wavelets

Intervalo n	Símbolo Wavelet y_n
0	$a_0^0x_0 + a_0^1x_1$
1	$a_1^0x_0 + a_1^1x_1$
2	$a_2^0x_0 + a_2^1x_1 + a_2^0x_2 + a_2^1x_3$
3	$a_3^0x_0 + a_3^1x_1 + a_3^0x_2 + a_3^1x_3$
4	$a_4^0x_0 + a_4^1x_1 + a_4^0x_2 + a_4^1x_3 + a_4^0x_4 + a_4^1x_5$
5	$a_5^0x_0 + a_5^1x_1 + a_5^0x_2 + a_5^1x_3 + a_5^0x_4 + a_5^1x_5$

6	$a_6^0x_0 + a_6^1x_1 + a_6^0x_2 + a_6^1x_3 + a_6^0x_4 + a_6^1x_5 + a_6^0x_6 + a_6^1x_7$
7	$a_7^0x_0 + a_7^1x_1 + a_7^0x_2 + a_7^1x_3 + a_7^0x_4 + a_7^1x_5 + a_7^0x_6 + a_7^1x_7$
8	$a_8^0x_2 + a_8^1x_3 + a_8^0x_4 + a_8^1x_5 + a_8^0x_6 + a_8^1x_7 + a_8^0x_8 + a_8^1x_9$
9	$a_9^0x_2 + a_9^1x_3 + a_9^0x_4 + a_9^1x_5 + a_9^0x_6 + a_9^1x_7 + a_9^0x_8 + a_9^1x_9$
10	$a_{10}^0x_4 + a_{10}^1x_5 + a_{10}^0x_6 + a_{10}^1x_7 + a_{10}^0x_8 + a_{10}^1x_9 + a_{10}^0x_{10} + a_{10}^1x_{11}$
11	$a_{11}^0x_4 + a_{11}^1x_5 + a_{11}^0x_6 + a_{11}^1x_7 + a_{11}^0x_8 + a_{11}^1x_9 + a_{11}^0x_{10} + a_{11}^1x_{11}$
12	$a_{12}^0x_6 + a_{12}^1x_7 + a_{12}^0x_8 + a_{12}^1x_9 + a_{12}^0x_{10} + a_{12}^1x_{11} + a_{12}^0x_{12} + a_{12}^1x_{13}$
13	$a_{13}^0x_6 + a_{13}^1x_7 + a_{13}^0x_8 + a_{13}^1x_9 + a_{13}^0x_{10} + a_{13}^1x_{11} + a_{13}^0x_{12} + a_{13}^1x_{13}$
14	$a_{14}^0x_8 + a_{14}^1x_9 + a_{14}^0x_{10} + a_{14}^1x_{11} + a_{14}^0x_{12} + a_{14}^1x_{13} + a_{14}^0x_{14} + a_{14}^1x_{15}$
15	$a_{15}^0x_8 + a_{15}^1x_9 + a_{15}^0x_{10} + a_{15}^1x_{11} + a_{15}^0x_{12} + a_{15}^1x_{13} + a_{15}^0x_{14} + a_{15}^1x_{15}$

Tabela 4.4. Vetor de símbolos wavelets \mathbf{y}_{x_8}

Intervalo n	$y_n \mid (x_8 = -1)$
8	$-x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 + x_9 - 1$
9	$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 - x_7 + x_9 - 1$
10	$-x_4 + x_5 + x_6 - x_7 + x_9 + x_{10} + x_{11} - 1$
11	$x_4 - x_5 + x_6 - x_7 - x_9 + x_{10} + x_{11} + 1$
12	$-x_6 + x_7 - x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} - 1$
13	$x_6 - x_7 - x_9 - x_{10} - x_{11} + x_{12} + x_{13} - 1$
14	$x_9 + x_{10} - x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + 1$
15	$-x_9 + x_{10} - x_{11} - x_{12} - x_{13} + x_{14} + x_{15} - 1$

Com base na Tabela 4.4, o símbolo wavelet y_n condicionado ao bit $x_{i-(mg-1)} = -1$ pode ser expresso por

$$y_n = \sum_{k=1}^{mg-1} b_k x_k + l$$

em que $\{x_k\}$ representa a seqüência de $mg - 1$ bits de informação desconhecidos que são codificados por y_n ; b_k é o coeficiente wavelet que pondera o bit de informação x_k , sendo igual a ± 1 para uma MCW real e plana; e $l = l(a_k^s) = -a_k^s$. Deve ser observado na mesma Tabela que apenas para o quarto e sétimo elementos do vetor \mathbf{y}_{x_8} tem-se $l(a_k^s) = +1$, uma

vez que somente nestes dois intervalos de sinalização o bit $x_{i-(mg-1)} = -1$ fica multiplicado pelos coeficientes negativos a_3^0 e a_6^0 da matriz wavelet, como pode ser observado a partir da Tabela 4.3.

Calculando a função geradora de momentos da variável aleatória y_n , tem-se (PAPOULIS, 1991; VINIOTIS, 1997):

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{y_n | x_{i-(mg-1)} = -1}(z) &= \mathbb{E} \left[z^{\sum_{k=1}^{mg-1} b_k x_k + l} \right] \\
&= z^l \prod_{k=1}^{mg-1} \mathbb{E} [z^{b_k x_k}] \\
&= 0.5^{mg-1} z^l (z + z^{-1})^{mg-1} \\
&= \sum_{k=0}^{mg-1} \binom{mg-1}{k} z^{2k-mg+l+1} 0.5^{mg-1} \tag{4.17}
\end{aligned}$$

em que na segunda igualdade utilizou-se o fato de que as v.a.'s $x_k \in \{+1, -1\}$ são estatisticamente independentes. Na terceira igualdade utilizou-se o fato de que as v.a.'s x_k são eqüiprováveis e identicamente distribuídas.

Da Equação (4.17), tem-se portanto:

$$\begin{aligned}
\Pr(y_n = 2k - mg + l + 1 | x_{i-(mg-1)} = -1) &= \binom{mg-1}{k} 0.5^{mg-1}, \quad 0 \leq k \leq mg-1, \\
& \quad l \in \{\pm 1\} \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Dessa forma, a distribuição condicional de y_n dado $x_{i-(mg-1)} = -1$ varia ao longo da transmissão com n , podendo assumir 2 formas distintas (uma para $l = -1$ e a outra para $l = +1$). Para o exemplo apresentado ($mg = 8$), tem-se:

$l = -1$	$l = +1$
$\Pr(y_n = -8 x_{i-(mg-1)} = -1) = 0.5^7$	$\Pr(y_n = -8 x_{i-(mg-1)} = -1) = 0.0$
$\Pr(y_n = -6 x_{i-(mg-1)} = -1) = 7 \cdot 0.5^7$	$\Pr(y_n = -6 x_{i-(mg-1)} = -1) = 0.5^7$
$\Pr(y_n = -4 x_{i-(mg-1)} = -1) = 21 \cdot 0.5^7$	$\Pr(y_n = -4 x_{i-(mg-1)} = -1) = 7 \cdot 0.5^7$
$\Pr(y_n = -2 x_{i-(mg-1)} = -1) = 35 \cdot 0.5^7$	$\Pr(y_n = -2 x_{i-(mg-1)} = -1) = 21 \cdot 0.5^7$
$\Pr(y_n = 0 x_{i-(mg-1)} = -1) = 35 \cdot 0.5^7$	$\Pr(y_n = 0 x_{i-(mg-1)} = -1) = 35 \cdot 0.5^7$
$\Pr(y_n = 2 x_{i-(mg-1)} = -1) = 21 \cdot 0.5^7$	$\Pr(y_n = 2 x_{i-(mg-1)} = -1) = 35 \cdot 0.5^7$
$\Pr(y_n = 4 x_{i-(mg-1)} = -1) = 7 \cdot 0.5^7$	$\Pr(y_n = 4 x_{i-(mg-1)} = -1) = 21 \cdot 0.5^7$
$\Pr(y_n = 6 x_{i-(mg-1)} = -1) = 0.5^7$	$\Pr(y_n = 6 x_{i-(mg-1)} = -1) = 7 \cdot 0.5^7$
$\Pr(y_n = 8 x_{i-(mg-1)} = -1) = 0.0$	$\Pr(y_n = 8 x_{i-(mg-1)} = -1) = 0.5^7$

A partir das Equações (4.15) e (4.18), segue que

$$\Pr_{l=-1}(e_n = e \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = \Pr_{l=+1}(e_n = -e \mid x_{i-(mg-1)} = -1). \quad (4.19)$$

em que o subscrito é usado para explicitar a influência de $l(a_k^s)$ sobre a distribuição de probabilidades $\Pr(e_n \mid x_{i-(mg-1)})$.

4.2.1.2 Distribuição de probabilidade dos erros de demodulação A distribuição de probabilidade dos erros de demodulação depende do esquema de modulação e do modelo do canal de comunicação adotado.

Em geral, as probabilidades condicionais $\Pr(\tilde{y}_n \mid y_n)$ podem ser obtidas por abordagens semi-analíticas⁴. Dependendo da geometria das regiões de demodulação, essas probabilidades podem ser avaliadas a partir de técnicas analíticas usuais e integração numérica (PROAKIS, 1989).

De acordo com a Seção 3.2, o sistema com codificação wavelet foi implementado com duas técnicas de modulação distintas. Na primeira implementação utilizou-se uma modulação em amplitude e fase (APK), e na segunda utilizou-se a modulação em fase (PSK). As Figuras 3.6 e 3.5 exibem as constelações APK e PSK propostas para o sistema com codificação wavelet baseado nas MCW's 2×8 e 2×128 , respectivamente.

Nos sistemas com modulação APK, as distribuições de probabilidades dos erros de demodulação podem ser obtidas a partir da simulação dos respectivos canais discretos, devido à geometria complexa das regiões de demodulação dessas constelações. Já nos sistemas PSK com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana, a distribuição de probabilidades condicionais $\Pr(\tilde{y}_n \mid y_n)$, em canais com desvanecimento Rayleigh plano, pode ser avaliada por meio da expressão analítica: (ver Apêndice B)

⁴Neste trabalho, as probabilidades condicionais $\Pr(\tilde{y}_n \mid y_n)$ foram obtidas por meio da simulação do canal discreto (bloco constituído pelo modulador, canal e demodulador) de cada sistema com codificação wavelet analisado.

$$\Pr(\tilde{y}_n | y_n) = \frac{2}{\pi \aleph_0} \int_0^\infty \int_{\Theta_{\tilde{y}_n}} \int_0^\infty \alpha V \cdot \exp \left[-\frac{V^2 - 2\alpha V \sqrt{E_b} \cos(\Theta_s - \Theta_r) + \alpha^2 (E_b + \aleph_0)}{\aleph_0} \right] \cdot dV d\Theta_r d\alpha \quad (4.20)$$

em que α é a variação na amplitude do sinal, provocada pelo desvanecimento do canal; s_{n_f} e s_{n_q} são as componentes em fase e quadratura do sinal que mapeia o símbolo y_n ; r_{n_f} e r_{n_q} são as componentes do sinal recebido \mathbf{r}_n ; $\Theta_{\tilde{y}_n}$ é a região angular de decisão pelo símbolo \tilde{y}_n ; $\Theta_s = \tan^{-1}(s_{n_q}/s_{n_f})$; $\Theta_r = \tan^{-1}(r_{n_q}/r_{n_f})$ e $V = \sqrt{r_{n_f}^2 + r_{n_q}^2}$. Neste modelo, considera-se ainda que o canal não produz alteração de potência e que a energia média de bit é igual a 1, ou seja, $E_b = E[\alpha^2] = 1$.

Todo o desenvolvimento analítico apresentado neste trabalho pode ser facilmente adaptado a qualquer esquema de modulação que venha a ser utilizado pelo sistema com codificação wavelet.

4.2.2 Distribuição de Probabilidades do Ruído Wavelet

Uma vez definida a distribuição de probabilidade do ruído de demodulação e_n , prosseguiremos com a análise da probabilidade de erro de bit da codificação wavelet avaliando-se agora a distribuição de probabilidade do ruído wavelet ν_i .

Considere inicialmente a função geradora de momentos do ruído wavelet ν_i , condicionada ao bit de informação $x_{i-(mg-1)} = -1$, expressa por

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-(mg-1)}=-1)}(z) &= \mathbb{E} [z^{\nu_i} | x_{i-(mg-1)} = -1] \\ &= \mathbb{E} \left[z^{\sum_{k=0}^{mg-1} a_{(mg-1)-k}^0 e_{i-k}} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=0}^{mg-1} z^{a_{(mg-1)-k}^0 e_{i-k}} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

Assumindo que as variáveis aleatórias $\{e_n\}$ são mutuamente independentes⁵, segue que

$$\mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-(mg-1)}=-1)}(z) = \prod_{k=0}^{mg-1} \mathbb{E} \left[z^{a_{(mg-1)-k}^0 e_{i-k}} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] \quad (4.22)$$

⁵Considere os argumentos apresentados na Seção 4.2.1.

De acordo com as Equações (4.15) e (4.18), a distribuição de probabilidade condicional da variável aleatória e_n pode assumir duas formas distintas. Uma destas formas corresponde a instantes em que a contribuição do bit $x_{i-(mg-1)}$ se dá através de um coeficiente wavelet a_k^s positivo, e a outra forma corresponde a instantes em que a contribuição do bit $x_{i-(mg-1)}$ se dá através de um coeficiente wavelet a_k^s negativo. Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(\nu_i | x_{i-(mg-1)} = -1)(z) &= \prod_{k=0}^{mg-1} \mathbb{E} \left[z^{a_{(mg-1)-k}^0 e_{i-k}} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] \\ &= \prod_{k: a_{(mg-1)-k}^0 = +1} \mathbb{E} \left[z^{e_{i-k}} | x_{i-(mg-1)} \right] \cdot \prod_{k: a_{(mg-1)-k}^0 = -1} \mathbb{E} \left[z^{-e_{i-k}} | x_{i-(mg-1)} \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

A partir de (4.19), $\mathbb{E} \left[z^{e_{i-k}} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right]_{a_k = +1} = \mathbb{E} \left[z^{-e_{i-k}} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right]_{a_k = -1}$, logo

$$\mathbb{G}(\nu_i | x_{i-(mg-1)} = -1)(z) = \left(\mathbb{E} \left[z^e | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] \right)^{mg} \quad (4.24)$$

Considerando (4.14), expandindo o polinômio em (4.24) e usando a igualdade expressa por

$$\mathbb{E} \left[z^{\nu_i} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] = \left(\mathbb{E} \left[z^e | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] \right)^{mg}$$

a seguinte expressão para a probabilidade de erro de bit na saída do decodificador wavelet é obtida:

$$P_e = \sum_{k=1}^{\frac{mg(2mg-1)}{2}} \Pr(\nu_i = mg + 2k | x_{i-(mg-1)} = -1) + 0.5 \Pr(\nu_i = mg | x_{i-(mg-1)} = -1) \quad (4.25)$$

4.2.3 Quantização de Símbolos Wavelets

Como foi visto na Seção 3.2.1, o aumento no número de colunas da MCW pode resultar na degradação de desempenho de um sistema com codificação wavelet, devido a uma aglomeração dos pontos da constelação de sinais. Com o objetivo de superar este problema, Tzannes & Tzannes (1992) propôs o uso de esquemas de quantização para os símbolos wavelets (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998). Nesta seção, os efeitos dessa quantização sobre o sistema com codificação wavelet é discutido.

Como ilustração, considere o exemplo já apresentado na Seção 3.2.1, referente a um sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×128 com máxima sobreposição das linhas da matriz de codificação. Para este sistema, o esquema de quantização utilizado foi obtido empiricamente por simulação computacional, após a avaliação de diversas configurações diferentes, e encontra-se apresentado na Tabela 4.5.

Tabela 4.5. Quantização para MCW 2×128 .

Conjunto Truncado	Símbolo Representativo
{0}	0
{2,4,6}	4
{-2,-4,-6}	-4
{8,10,12}	10
{-8,-10,-12}	-10
{14,16,18}	16
{-14,-16,-18}	-16
{20,22,24}	22
{-20,-22,-24}	-22
{26,28,30,...,128}	28
{-26,-28,-30,...,-128}	-28

A partir da Tabela 4.5, verifica-se que o sistema com MCW 2×128 proposto requer uma constelação com 11 sinais, sendo cada um deles responsável por modular um dos 11 símbolos representativos que constam nessa Tabela.

Considerando que esses sinais modulados são transmitidos através de um ambiente ruidoso, pode-se construir uma tabela, similar à Tabela 4.1, com todos os possíveis valores do ruído de demodulação e_n associados aos seus respectivos eventos de erros de demodulação. Em virtude do seu tamanho, esta tabela não pôde ser reproduzida nesta seção. Entretanto, tomando como exemplo apenas os eventos que podem ocorrer com a transmissão do sinal que modula o símbolo representativo de valor 4, definido na Tabela 4.5, pode-se construir o diagrama apresentado na Figura 4.2. Como o sinal representativo de valor 4 da constelação de sinais mapeia os símbolos wavelets $y_n \in \{2, 4, 6\}$, pode-se verificar a partir da Figura 4.2 que cada evento de erro de demodulação está associado a três valores de ruídos de demodulação e_k , que podem ocorrer com probabilidades diferentes, dependendo do valor do símbolo wavelet

y_n que efetivamente foi modulado pelo sinal da constelação no instante de tempo nT_s .

Cabe notar que nos sistemas com codificação wavelet que empregam quantização da constelação, o ruído de demodulação e_k pode assumir valores diferentes de 0 mesmo na ausência de erros na operação do demodulador. A partir da Figura 4.2, pode-se observar, por exemplo, que os valores de e_k no conjunto $\{-2, 0, 2\}$ estão associados ao evento ($y_k = 4, \tilde{y}_k = 4$), o qual corresponde a uma demodulação sem erro.

Define-se por *ruído de quantização* e_k^q , o ruído e_k advindo exclusivamente do uso de um esquema de quantização dos símbolos wavelets (supondo a ausência de erros de demodulação). A Tabela 4.6 apresenta todos os possíveis valores de ruídos de quantização e_k^q , com suas respectivas probabilidades de ocorrência, para a codificação wavelet com MCW real plana 2×128 e esquema de quantização definido pela Tabela 4.5.

Tabela 4.6. Ruído de quantização dos símbolos wavelets para uma MCW 2×128

Ruído de Quantização e_k^q	Probabilidade de Ocorrência $\Pr(y_n) \cdot \Pr(y_k \rightarrow y_k)$
2	$\Pr(2) \cdot \Pr(4 \rightarrow 4) + \Pr(8) \cdot \Pr(10 \rightarrow 10) + \Pr(14) \cdot \Pr(16 \rightarrow 16) + \Pr(20) \cdot \Pr(22 \rightarrow 22) + \Pr(26) \cdot \Pr(28 \rightarrow 28) + \Pr(-30) \cdot \Pr(-28 \rightarrow -28) + \Pr(-24) \cdot \Pr(-22 \rightarrow -22) + \Pr(-18) \cdot \Pr(-16 \rightarrow -16) + \Pr(-12) \cdot \Pr(-10 \rightarrow -10) + \Pr(-6) \cdot \Pr(-4 \rightarrow -4)$
-2	$\Pr(6) \cdot \Pr(4 \rightarrow 4) + \Pr(12) \cdot \Pr(10 \rightarrow 10) + \Pr(18) \cdot \Pr(16 \rightarrow 16) + \Pr(24) \cdot \Pr(22 \rightarrow 22) + \Pr(30) \cdot \Pr(28 \rightarrow 28) + \Pr(-26) \cdot \Pr(-28 \rightarrow -28) + \Pr(-20) \cdot \Pr(-22 \rightarrow -22) + \Pr(-14) \cdot \Pr(-16 \rightarrow -16) + \Pr(-8) \cdot \Pr(-10 \rightarrow -10) + \Pr(-2) \cdot \Pr(-4 \rightarrow -4)$
4	$\Pr(-32) \cdot \Pr(-28 \rightarrow -28)$
-4	$\Pr(32) \cdot \Pr(28 \rightarrow 28)$
6	$\Pr(-34) \cdot \Pr(-28 \rightarrow -28)$
-6	$\Pr(34) \cdot \Pr(28 \rightarrow 28)$
\vdots	\vdots
100	$\Pr(-128) \cdot \Pr(-28 \rightarrow -28)$
-100	$\Pr(128) \cdot \Pr(28 \rightarrow 28)$

O impacto ocasionado pela quantização da constelação sobre o desempenho do sistema com codificação wavelet pode ser de certa forma investigado se a suposição de ausência de erros de demodulação for admitida. Neste caso, a probabilidade de erro de bit do sistema

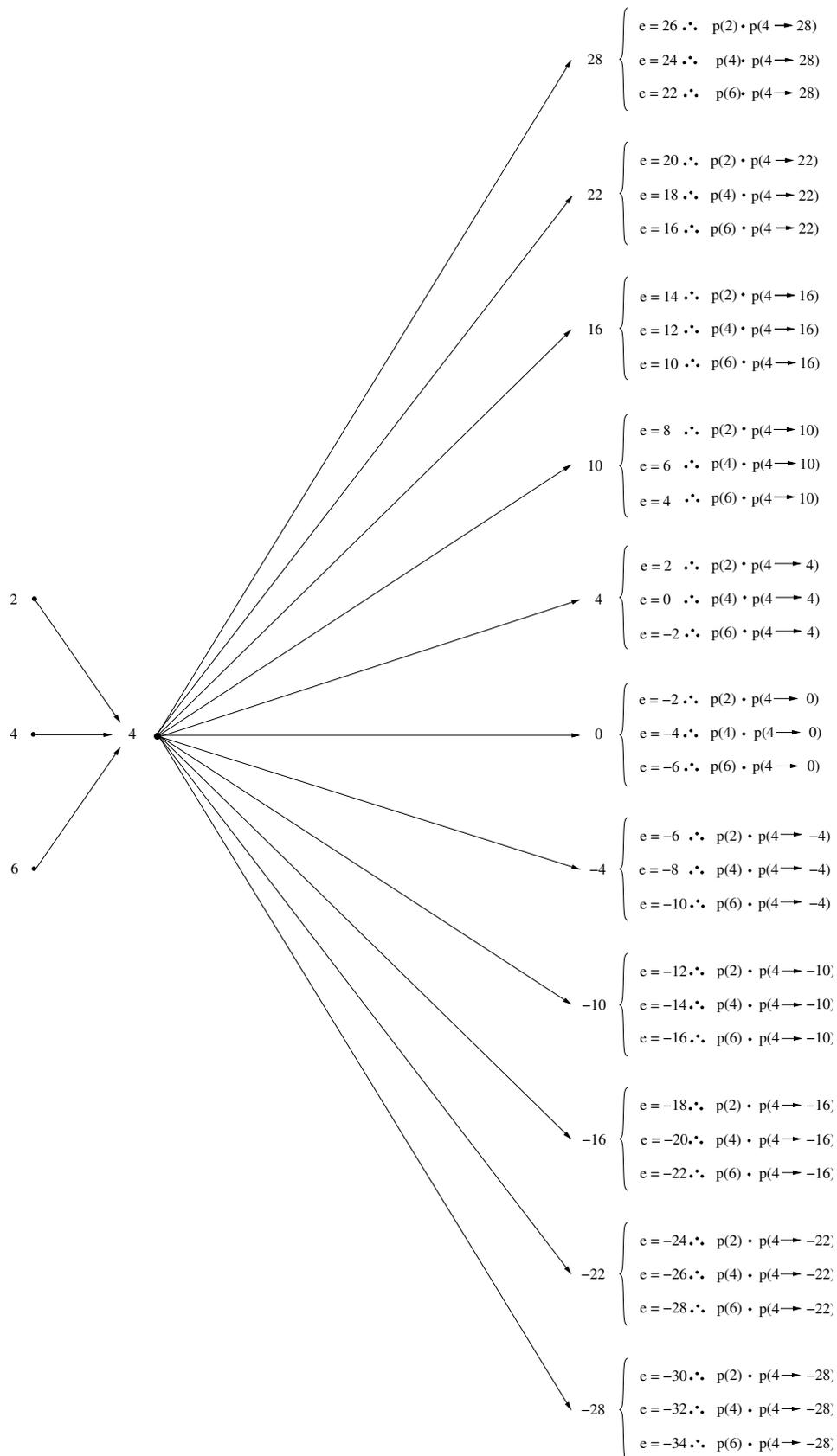


Figura 4.2. Diagrama com todos os possíveis eventos de erros de demodulação que podem ocorrer quando o sinal de rótulo 4 da constelação, que representa o conjunto $\{2, 4, 6\}$ como definido na Tabela 4.5, é transmitido através de um canal ruidoso.

estaria associada apenas à perda de informação provocada pela quantização dos símbolos wavelets durante o processo de modulação.

Tomando-se como exemplo o sistema codificado pela MCW 2×128 , se a distribuição de probabilidades do ruído de quantização e_k^q definida na Tabela 4.6 for utilizada no cálculo de (4.24), ao invés da utilização da distribuição de probabilidades do ruído de demodulação deste sistema, pode-se calcular um valor para a “probabilidade de erro de bit” do sistema usando-se a Equação (4.25). Este valor de “BER” pode ser visto como uma indicação da degradação de desempenho do sistema devido à quantização da constelação de sinais. Para o exemplo considerado, este valor é aproximadamente igual a $2,13 \cdot 10^{-10}$.

4.2.4 Aplicação

Com o objetivo de validar a análise desenvolvida para o sistema com codificação wavelet, alguns resultados obtidos pela simulação computacional deste sistema são comparados nesta seção com resultados obtidos a partir da análise apresentada.

Os resultados foram obtidos com as matrizes MCW's reais planas com dimensões 2×8 e 2×128 em um canal com desvanecimento Rayleigh plano. Foi admitida a utilização de um esquema de entrelaçamento perfeito de forma a descorrelacionar as amostras de desvanecimento do canal em sinalizações sucessivas. Na verdade, alguns resultados de simulação apresentados na Seção 3.2.2 mostram que um esquema de entrelaçamento em bloco com profundidade igual a mg símbolos é suficiente para que os sistemas analisados aqui mantenham os mesmos desempenhos conseguidos em canais perfeitamente entrelaçados.

A Figura 4.3 ilustra os resultados analíticos e de simulação, obtidos para os sistemas PSK e APK com MCW 2×8 e esquemas de demodulação baseado na regra de mínima distância euclidiana. Pode-se observar, a partir desta Figura, um ótimo casamento entre as curvas analíticas e as curvas obtidas por simulação, validando assim, a análise desenvolvida aqui.

Resultados obtidos sob as mesmas condições da Figura 4.3, exceto o uso de demodulação

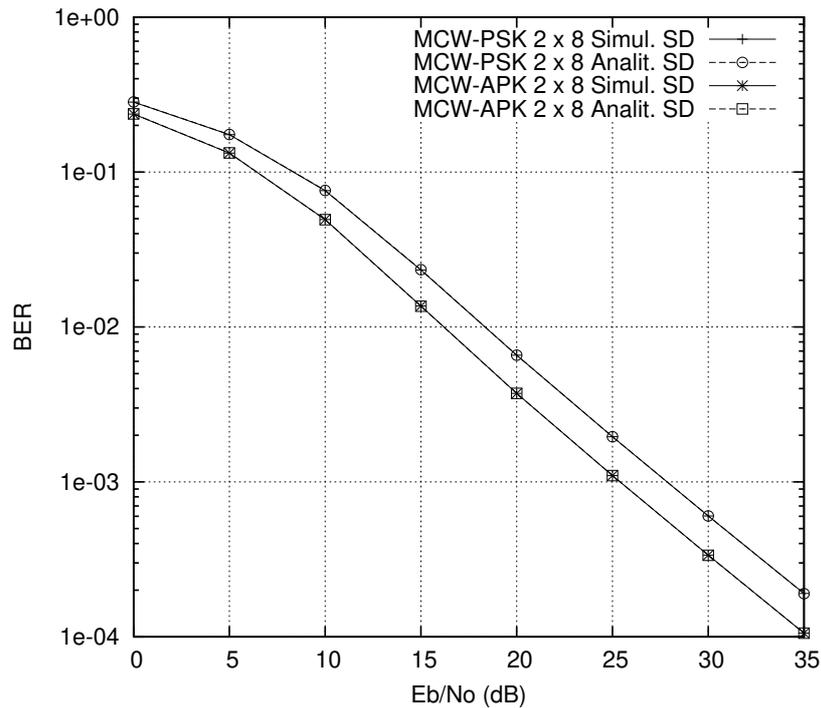


Figura 4.3. Sistema com codificação wavelet com MCW 2×8 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana.

MAP, são ilustradas na Figura 4.4. Neste caso, pode ser observado que as curvas analíticas são limitantes superiores bastante justos para as probabilidades de erros de bit desses sistemas. Este comportamento é devido ao aumento na dependência estatística entre as v.a.'s $\{e_n\}$ ⁶.

Também foram obtidas curvas de desempenho para o sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×128 , simulado com esquemas de modulação 11-PSK e 11-APK em canais com desvanecimento Rayleigh plano.

A Figura 4.5 ilustra essas curvas, apresentando novamente uma comparação similar entre resultados de análise e simulação, obtidos usando uma regra de mínima distância euclidiana na demodulação. Cabe observar mais uma vez que tanto no sistema PSK quanto no sistema APK as probabilidades de erros de bit obtidas por simulação e a partir da análise coincidem, para toda a faixa de valores de SNR considerada.

Na Figura 4.6 são apresentadas as curvas obtidas pelo uso da métrica de decisão MAP no esquema de recepção dos sistemas com codificação wavelet baseados na MCW 2×128 . Pode

⁶Note que essas variáveis são assumidas independentes na análise.

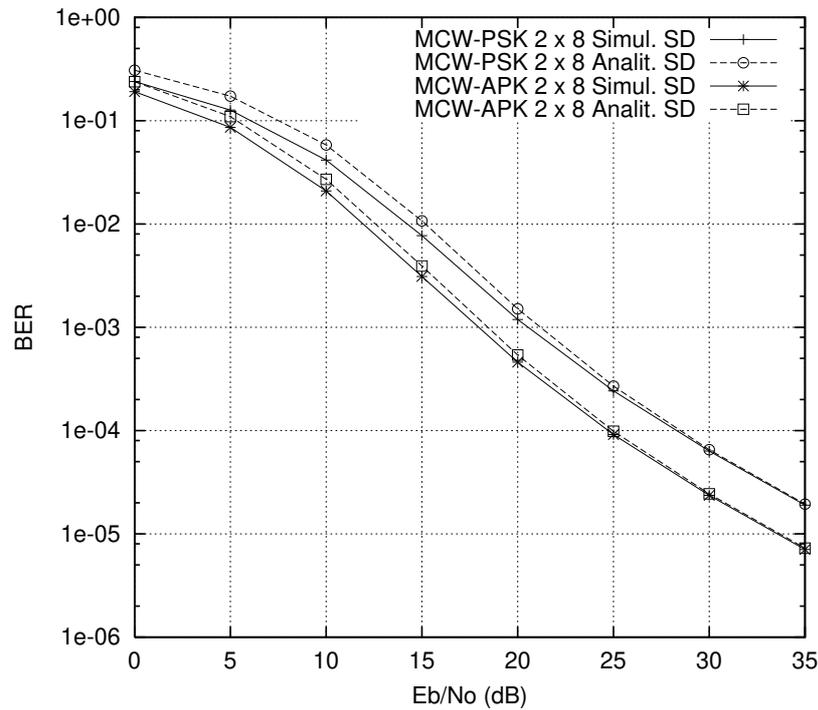


Figura 4.4. Sistema com codificação wavelet com MCW 2×8 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na métrica de decisão MAP.

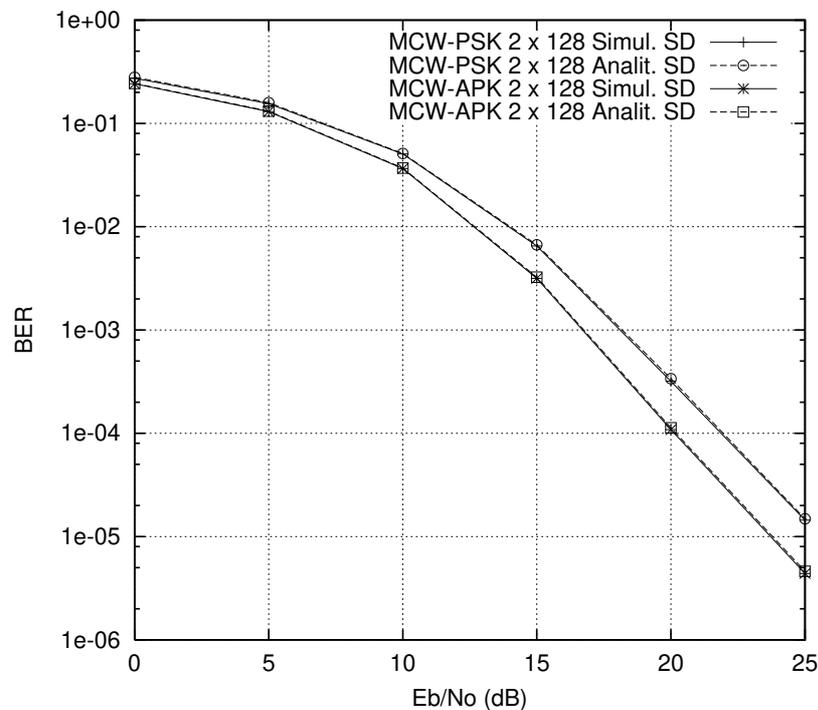


Figura 4.5. Sistema com codificação wavelet com MCW 2×128 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana.

ser observado a partir desta Figura que as curvas analíticas se comportam novamente como um limitante superior bastante justo para a probabilidade de erro de bit do sistema.

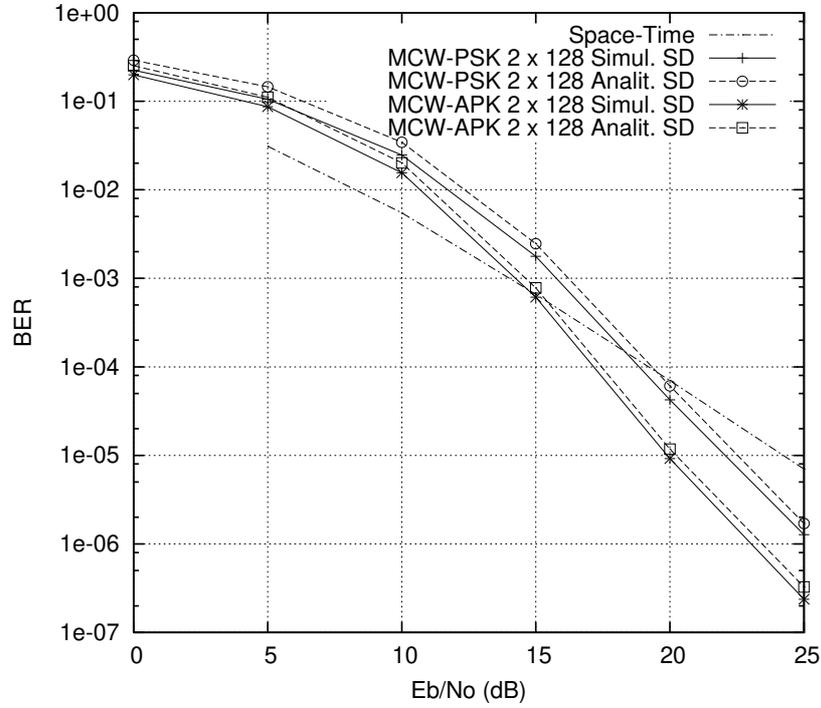


Figura 4.6. Sistema com codificação wavelet com MCW 2×128 : Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na métrica de decisão MAP.

A Figura 4.6 também mostra a curva de desempenho do sistema STBC-BPSK proposto em (TAROKH et al., 1999), utilizada aqui como uma referência de desempenho. Em particular, para valores de BER em torno de 10^{-5} , verifica-se a partir desta Figura que os sistemas com MCW 2×128 e esquemas de modulação 11-APK e 11-PSK apresentam ganhos de desempenho de 4,5 dB e 2,5 dB em relação, respectivamente, ao sistema de referência.

4.3 SISTEMA COM CODIFICAÇÃO WAVELET MODIFICADO EM CANAIS COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH

Esta seção é dedicada à análise da probabilidade de erro de bit do sistema com codificação wavelet modificado, o qual foi apresentado na Seção 3.3.

A Figura 4.7 ilustra o sistema analisado. Como foi visto na Seção 2.4, cada um dos m sub-

símbolos wavelet y_n^j , gerados pelo codificador no n -ésimo intervalo de tempo, pode assumir um dos $g + 1$ valores dados por:

$$y_n^j \in \{-g, -g + 2, \dots, -g + 2k, \dots, -2, 0, 2, \dots, g - 2, g\} \quad (4.26)$$

Considera-se aqui que a seqüência de sub-símbolos wavelets é perfeitamente entrelaçada por um entrelaçador de bloco. A cada intervalo de sinalização $[nT_s, (n+1)T_s)$, m sub-símbolos wavelets entrelaçados são modulados e transmitidos pela antena. Na recepção, o sinal recebido é convertido à sua representação vetorial através de uma base apropriada, utilizando um banco de filtros-casados e amostradores.

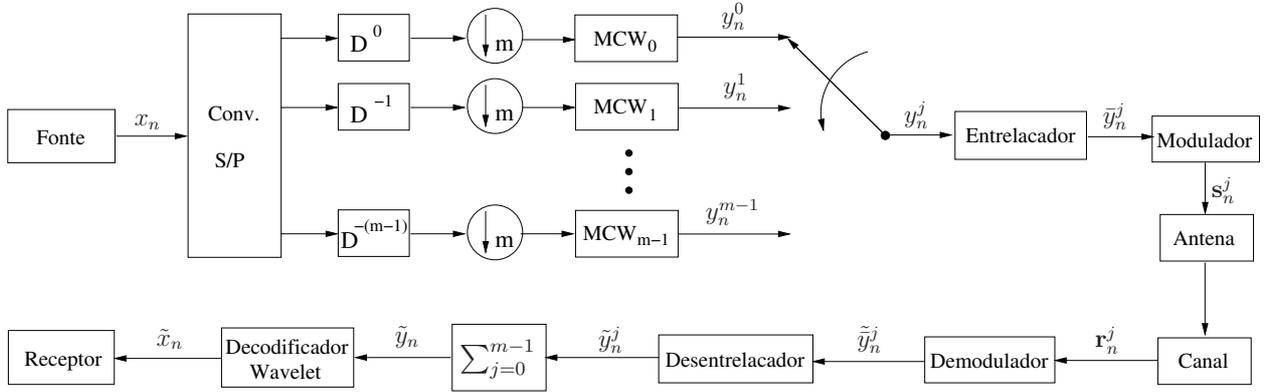


Figura 4.7. Sistema com codificação wavelet modificado.

Sendo assim, os m sinais complexos recebidos em cada intervalo de sinalização são dados por

$$\mathbf{r}_n^j = \alpha_n \mathbf{s}_n^j + \mathbf{n}_n, \quad 0 \leq j \leq m - 1 \quad (4.27)$$

em que \mathbf{s}_n^j é o símbolo da constelação bidimensional que mapeia o sub-símbolo wavelet \bar{y}_n^j no tempo nT_s . O parâmetro α_n representa a variação de amplitude do sinal devido ao desvanecimento do canal, a qual é considerada perfeitamente estimada no receptor. As componentes do ruído complexo \mathbf{n}_n são variáveis aleatórias Gaussianas estatisticamente independentes e identicamente distribuídas, com média nula e variância $\aleph_0/2$.

A cada intervalo de sinalização $[nT_s, (n+1)T_s)$, o demodulador gera m estimativas a partir dos sinais recebidos. Essas estimativas são então inversamente mapeadas nos sub-símbolos

\tilde{y}_n^j . Após o desentrelaçamento, os m sub-símbolos \tilde{y}_n^j , ($0 \leq j \leq m-1$), são somados para produzir as estimativas \tilde{y}_n , que são por fim decodificadas pelos correlatores wavelets.

A estimativa \tilde{y}_n é dada por

$$\tilde{y}_n = \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{y}_n^j = \sum_{j=0}^{m-1} (y_n^j + e_n^j) \quad (4.28)$$

em que e_n^j é uma variável aleatória *discreta*, denominada *ruído de demodulação do sub-símbolo wavelet*.

A partir da Equação (2.16), a saída de um correlator casado à linha \mathbf{a}^0 da MCW no tempo $i = m(g+p) - 1$ pode ser expressa por

$$z_i = \eta_i + \nu_i, \quad (4.29)$$

em que η_i e ν_i são dados por

$$\eta_i = \sum_{k=0}^{mg-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_{(mg-1)-k}^0 y_{i-k}^j \quad (4.30)$$

$$\nu_i = \sum_{k=0}^{mg-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_{(mg-1)-k}^0 e_{i-k}^j \quad (4.31)$$

A partir das Equações (2.17) e (4.29) segue que a probabilidade de erro de bit pode ser dada por

$$P_e = \Pr(\nu_i > mg \mid x_{i-(mg-1)} = -1) + 0.5 \Pr(\nu_i = mg \mid x_{i-(mg-1)} = -1) \quad (4.32)$$

A fim de obtermos a distribuição de probabilidade do ruído wavelet acima, seguiremos o mesmo procedimento já estabelecido na Seção 4.2. Sendo assim, a próxima seção é dedicada à obtenção da distribuição de probabilidades do ruído de demodulação e_n^j condicionada ao bit de informação $x_{i-(mg-1)}$.

4.3.1 Distribuição de Probabilidades do Ruído de Demodulação

A análise apresentada nesta seção é similar à apresentada na Seção 4.2.1, e por este motivo omitiremos os pontos redundantes entre as duas análises.

A partir da Equação (4.28), pode-se generalizar a definição apresentada em (4.15) como segue:

$$\Pr(e_n^j = e \mid x_{i-(mg-1)}) = \sum_{\mathcal{E}^j(e)} \Pr(\tilde{y}_n^j \mid y_n^j) \cdot \Pr(y_n^j \mid x_{i-(mg-1)}), \quad (4.33)$$

em que $e_n^j \in \{-2g, \dots, -2k, \dots, 0, \dots, 2k, \dots, 2g\}$ e $\mathcal{E}^j(e) = \{(y_n^j, \tilde{y}_n^j) : \tilde{y}_n^j - y_n^j = e\}$.

A seguir, a distribuição condicional dos sub-símbolos wavelets será analisada em detalhes.

4.3.1.1 Distribuição de probabilidade dos sub-símbolos wavelets Com o objetivo de facilitar a compreensão desta análise, considere o caso particular em que o esquema de codificação wavelet utiliza a matriz MCW real e plana 2×8 , apresentada a seguir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

A partir da Equação (2.10), pode-se construir a Tabela 4.7, que mostra os sub-símbolos wavelets gerados por este codificador nos primeiros 16 intervalos de codificação.

Tabela 4.7. Sub-símbolos wavelets

nT_s	y_n^0	y_n^1
0	$a_0^0 x_0$	$a_0^1 x_1$
1	$a_1^0 x_0$	$a_1^1 x_1$
2	$a_2^0 x_0 + a_0^0 x_2$	$a_2^1 x_1 + a_0^1 x_3$
3	$a_3^0 x_0 + a_1^0 x_2$	$a_3^1 x_1 + a_1^1 x_3$
4	$a_4^0 x_0 + a_2^0 x_2 + a_0^0 x_4$	$a_4^1 x_1 + a_2^1 x_3 + a_0^1 x_5$
5	$a_5^0 x_0 + a_3^0 x_2 + a_1^0 x_4$	$a_5^1 x_1 + a_3^1 x_3 + a_1^1 x_5$
6	$a_6^0 x_0 + a_4^0 x_2 + a_2^0 x_4 + a_0^0 x_6$	$a_6^1 x_1 + a_4^1 x_3 + a_2^1 x_5 + a_0^1 x_7$
7	$a_7^0 x_0 + a_5^0 x_2 + a_3^0 x_4 + a_1^0 x_6$	$a_7^1 x_1 + a_5^1 x_3 + a_3^1 x_5 + a_1^1 x_7$
8	$a_6^0 x_2 + a_4^0 x_4 + a_2^0 x_6 + a_0^0 x_8$	$a_6^1 x_3 + a_4^1 x_5 + a_2^1 x_7 + a_0^1 x_9$
9	$a_7^0 x_2 + a_5^0 x_4 + a_3^0 x_6 + a_1^0 x_8$	$a_7^1 x_3 + a_5^1 x_5 + a_3^1 x_7 + a_1^1 x_9$
10	$a_6^0 x_4 + a_4^0 x_6 + a_2^0 x_8 + a_0^0 x_{10}$	$a_6^1 x_5 + a_4^1 x_7 + a_2^1 x_9 + a_0^1 x_{11}$
11	$a_7^0 x_4 + a_5^0 x_6 + a_3^0 x_8 + a_1^0 x_{10}$	$a_7^1 x_5 + a_5^1 x_7 + a_3^1 x_9 + a_1^1 x_{11}$
12	$a_6^0 x_6 + a_4^0 x_8 + a_2^0 x_{10} + a_0^0 x_{12}$	$a_6^1 x_7 + a_4^1 x_9 + a_2^1 x_{11} + a_0^1 x_{13}$
13	$a_7^0 x_6 + a_5^0 x_8 + a_3^0 x_{10} + a_1^0 x_{12}$	$a_7^1 x_7 + a_5^1 x_9 + a_3^1 x_{11} + a_1^1 x_{13}$
14	$a_6^0 x_8 + a_4^0 x_{10} + a_2^0 x_{12} + a_0^0 x_{14}$	$a_6^1 x_9 + a_4^1 x_{11} + a_2^1 x_{13} + a_0^1 x_{15}$
15	$a_7^0 x_8 + a_5^0 x_{10} + a_3^0 x_{12} + a_1^0 x_{14}$	$a_7^1 x_9 + a_5^1 x_{11} + a_3^1 x_{13} + a_1^1 x_{15}$

lembrando que y_n^0 são os sub-símbolos gerados pela linha \mathbf{a}^0 da MCW definida em (4.34), e y_n^1 são os sub-símbolos gerados pela linha \mathbf{a}^1 , como pode ser verificado a partir da Figura 2.2.

A partir das Equações (2.16) e (2.17), pode-se observar que no tempo $i = m(g + p) - 1$, $p \in \mathbb{N}$, o correlator z_i decodifica o bit de informação $x_{i-(mg-1)}$ a partir do vetor de sub-símbolos wavelets $(y_{i-(mg-1)}^0, y_{i-(mg-1)}^1, y_{i-(mg-2)}^0, y_{i-(mg-2)}^1, \dots, y_i^0, y_i^1)$, aqui denotado por $(\mathbf{y}_{x_{i-(mg-1)}}^0, \mathbf{y}_{x_{i-(mg-1)}}^1)$. Tomando o vetor $(\mathbf{y}_{x_8}^0, \mathbf{y}_{x_8}^1)$ como exemplo, e considerando conhecido o bit x_8 , pode-se encontrar a distribuição condicional de suas componentes, como mostrado a seguir.

Inicialmente, deve ser verificado a partir da Tabela 4.7 que os sub-símbolos wavelets y_n^j , $j \in \{0, \dots, m-1\}$, gerados em um mesmo instante de tempo n , são estatisticamente independentes. Também deve ser verificado que apenas os sub-símbolos gerados pela mesma linha da MCW que codifica o bit conhecido podem ter informações sobre este bit. No exemplo que está sendo analisado, o bit de informação x_8 é codificado pela linha \mathbf{a}^0 da MCW, logo as componentes do vetor $\mathbf{y}_{x_8}^1$ são estatisticamente independente deste bit.

Será analisada a seguir a distribuição de probabilidades dos sub-símbolos wavelets estatisticamente dependentes do bit conhecido. Substituindo os valores dos coeficientes da matriz MCW 2×8 e considerando que $x_8 = -1$, obtêm-se as expressões dos sub-símbolos wavelets do vetor $\mathbf{y}_{x_8}^0$, mostradas na Tabela 4.8.

Tabela 4.8. Vetor de sub-símbolos wavelets $\mathbf{y}_{x_8}^0$

Intervalo n	$y_n^0 (x_8 = -1)$
8	$-x_2 + x_4 + x_6 - 1$
9	$x_2 + x_4 - x_6 - 1$
10	$-x_4 + x_6 + x_{10} - 1$
11	$x_4 + x_6 + x_{10} + 1$
12	$-x_6 + x_{10} + x_{12} - 1$
13	$x_6 - x_{10} + x_{12} - 1$
14	$x_{10} + x_{12} + x_{14} + 1$
15	$x_{10} - x_{12} + x_{14} - 1$

Com base na Tabela 4.8, o sub-símbolo wavelet y_n^0 condicionado ao bit $x_{i-(mg-1)} = -1$ pode ser expresso por

$$y_n^0 = \sum_{k=1}^{g-1} b_k x_k + l,$$

em que $l = l(a_k^s) = -a_k^s$.

Considerando (4.17), tem-se por analogia

$$\Pr(y_n^0 = 2k - g + l + 1 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = \binom{g-1}{k} 0.5^{g-1}, \quad 0 \leq k \leq g-1, \\ l \in \{\pm 1\}. \quad (4.35)$$

Dessa forma, a distribuição condicional de y_n^0 dado $x_{i-(mg-1)} = -1$ varia ao longo da transmissão com n , podendo assumir 2 formas distintas (uma para $l = -1$ e a outra para $l = +1$). Para o exemplo apresentado ($g = 4$), tem-se:

$l = -1$	$l = +1$
$\Pr(y_n^0 = -4 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 0, 5^3$	$\Pr(y_n^0 = -4 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 0, 0$
$\Pr(y_n^0 = -2 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 3 \cdot 0, 5^3$	$\Pr(y_n^0 = -2 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 0, 5^3$
$\Pr(y_n^0 = 0 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 3 \cdot 0, 5^3$	$\Pr(y_n^0 = 0 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 3 \cdot 0, 5^3$
$\Pr(y_n^0 = 2 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 0, 5^3$	$\Pr(y_n^0 = 2 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 3 \cdot 0, 5^3$
$\Pr(y_n^0 = 4 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 0, 0$	$\Pr(y_n^0 = 4 \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = 0, 5^3$

Considerando as Equações (4.33) e (4.35), segue que

$$\Pr_{l=-1}(e_n^0 = e \mid x_{i-(mg-1)} = -1) = \Pr_{l=+1}(e_n^0 = -e \mid x_{i-(mg-1)} = -1). \quad (4.36)$$

A seguir, será analisada a distribuição de probabilidades dos sub-símbolos wavelets y_n^j estatisticamente independentes do bit conhecido $x_{i-(mg-1)} = -1$.

Considerando novamente a Tabela 4.7, verifica-se que os sub-símbolos wavelets y_n^j estatisticamente independentes do bit $x_{i-(mg-1)}$ podem ser expressos por

$$y_n^j = \sum_{k=1}^g b_k^j x_k,$$

em que $x_k, b_k^j \in \{-1, +1\}$. No exemplo que está sendo analisado, cabe notar que estes sub-símbolos são as componentes do vetor $\mathbf{y}_{x_8}^1$.

Calculando a função geradora de momentos da variável aleatória y_n^j , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{y_n^j}(z) &= \mathbb{E}[z^{\sum_{k=1}^g x_k b_k^j}] = \mathbb{E}[z^x]^g = \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^{-1}\right)^g \\ &= \sum_{k=0}^g \binom{g}{k} z^{2k-g} \cdot 0.5^g \end{aligned} \quad (4.37)$$

Portanto, verifica-se a partir da Equação (4.37) que os sub-símbolos wavelets y_n^j , estatisticamente independentes de $x_{i-(mg-1)}$, têm distribuição dada por

$$\Pr(y_n^j = 2k - g) = \binom{g}{k} 0.5^g, \quad 0 \leq k \leq g \quad (4.38)$$

Para o exemplo apresentado, tem-se:

$$\begin{array}{l} \Pr(y_n^1 = -4) = 0.5^4 \\ \Pr(y_n^1 = -2) = 4 \cdot 0.5^4 \\ \Pr(y_n^1 = 0) = 6 \cdot 0.5^4 \\ \Pr(y_n^1 = 2) = 4 \cdot 0.5^4 \\ \Pr(y_n^1 = 4) = 0.5^4 \end{array}$$

A seguir será analisada a probabilidade de ocorrência dos erros de demodulação.

4.3.1.2 Distribuição de probabilidade dos erros de demodulação A análise da distribuição de probabilidade dos erros de demodulação no sistema com codificação wavelet modificado é análoga à apresentada na Seção 4.2.1.2. De fato, a única diferença entre as duas análises está relacionada ao esquema de modulação empregado.

O sistema com codificação wavelet modificado, baseado na transmissão de sub-símbolos wavelets, é analisado aqui com os esquemas de modulação apresentados na Figura 3.15. Entretanto, todo o desenvolvimento analítico deduzido nesta seção pode ser facilmente adaptado a qualquer outro esquema de modulação.

Nos sistemas com modulação APK, as distribuições de probabilidades dos erros de demodulação podem ser obtidas a partir da simulação dos respectivos canais discretos. Nos sistemas com modulação PSK e demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana, a probabilidade do demodulador se decidir pelo sub-símbolo \tilde{y}_n^j quando o sub-símbolo y_n^j for transmitido em um ambiente de comunicação caracterizado pelo desvanecimento Rayleigh plano, pode ser expressa como segue:

$$\Pr(\tilde{y}_n^j | y_n^j) = \frac{2}{\pi \aleph_0} \int_0^\infty \int_{\Theta_{\tilde{y}_n^j}} \int_0^\infty \alpha V \cdot \exp \left[-\frac{V^2 - 2\alpha V \sqrt{E_s} \cos(\Theta_s - \Theta_r) + \alpha^2 (E_s + \aleph_0)}{\aleph_0} \right] \cdot dV d\Theta_r d\alpha \quad (4.39)$$

em que, α é a variação de amplitude produzida pelo canal; $s_n^j(p)$ e $s_n^j(q)$ são as componentes em fase e quadratura do sinal que modula o sub-símbolo y_n^j ; $\Theta_s = \tan^{-1}(s_n^j(q)/s_n^j(p))$; $\Theta_{\tilde{y}_n^j}$ é a região angular de decisão pelo símbolo \tilde{y}_n^j ; $V = \sqrt{r_n^j(p)^2 + r_n^j(q)^2}$ e $\Theta_r = \tan^{-1}(r_n^j(q)/r_n^j(p))$. Neste modelo, considera-se que o canal não produz alteração de potência e que a energia média de bit é igual a 1, logo, $E_s = 1/m$.

As probabilidades condicionais $\Pr(\tilde{y}_n^j | y_n^j)$ associadas a cada sistema wavelet foram avaliadas aqui numericamente, através da simulação computacional dos respectivos canais discretos.

4.3.2 Distribuição de Probabilidades do Ruído Wavelet

Definida a distribuição condicional do ruído de demodulação e_n^j , a distribuição de probabilidade do ruído wavelet ν_i condicionada ao bit de informação $x_{i-(mg-1)} = -1$ pode ser obtida a partir de sua função geradora de momentos, como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-(mg-1)}=-1)}(z) &= \mathbb{E} [z^{\nu_i} | x_{i-(mg-1)} = -1] \\ &= \mathbb{E} \left[z^{\sum_{k=0}^{mg-1} \sum_{j=0}^{m-1} a_{(mg-1)-k}^0 e_{i-k}^j} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Assumindo mais uma vez que as variáveis aleatórias $\{e_n^j\}$ geradas em instantes de tempo nT_s consecutivos são estatisticamente independentes, tem-se que

$$\mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-(mg-1)}=-1)}(z) = \prod_{k=0}^{mg-1} \left\{ \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{m-1} \left(z^{a_{(mg-1)-k}^0 e_{i-k}^j} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right) \right] \right\} \quad (4.41)$$

Deve ser verificado a partir da Tabela 4.7 que os m sub-símbolos wavelets y_k^j , $\forall j \in \{0, \dots, m-1\}$ gerados em um mesmo instante de tempo nT_s são estatisticamente independentes. Também deve ser verificado que os sub-símbolos gerados pelas linhas da MCW que não codificaram o bit $x_{i-(mg-1)}$, não têm informações sobre este bit. Logo, considerando

a relação de dependência entre as v.a.'s e_n^j e y_n^j expressa em (4.33), tem-se:

$$\mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-(mg-1)}=-1)}(z) = \prod_{k=0}^{mg-1} \left\{ \mathbb{E} \left[z^{a_{(mg-1)-k}^j e_{i-k}^j} \right]_{j \neq 0}^{m-1} \cdot \mathbb{E} \left[z^{a_{(mg-1)-k}^0 e_{i-k}^0} | x_{i-(mg-1)}=-1 \right] \right\} \quad (4.42)$$

Como o primeiro valor esperado na Equação (4.42) é definido para as v.a.'s e_n^j estatisticamente independentes do bit $x_{i-(mg-1)}$, ele pode ser calculado considerando-se as Equações (4.33) e (4.38). Por outro lado, a partir das Equações (4.33) e (4.35) pode-se observar que a distribuição de probabilidade condicional das v.a.'s e_n^0 , dado $x_{i-(mg-1)}$, pode assumir duas formas distintas. Uma destas formas corresponde aos instantes em que a contribuição do bit $x_{i-(mg-1)}$ se dá através de um coeficiente wavelet a_k^s positivo, e a outra forma corresponde aos instantes em que a contribuição do bit $x_{i-(mg-1)}$ se dá através de um coeficiente wavelet a_k^s negativo. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-(mg-1)}=-1)}(z) &= \mathbb{E} \left[z^{e_n^j} \right]_{j \neq 0}^{mg(m-1)} \cdot \prod_{k: a_{(mg-1)-k}^0 = +1} \mathbb{E} \left[z^{+e_{i-k}^0} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] \cdot \\ &\cdot \prod_{k: a_{(mg-1)-k}^0 = -1} \mathbb{E} \left[z^{-e_{i-k}^0} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] \end{aligned}$$

Como $\Pr_{l=-1}(e_n^0 = e | x_{i-(mg-1)} = -1) = \Pr_{l=+1}(e_n^0 = -e | x_{i-(mg-1)} = -1)$, então $\mathbb{E} \left[z^{+e_{i-k}^0} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right]_{a_k=+1} = \mathbb{E} \left[z^{-e_{i-k}^0} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right]_{a_k=-1}$, e se tem

$$\mathbb{G}_{(\nu_i | x_{i-(mg-1)}=-1)}(z) = \mathbb{E} \left[z^{e_n^j} \right]_{j \neq 0}^{mg(m-1)} \cdot \mathbb{E} \left[z^{e_n^0} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right]^{mg} \quad (4.43)$$

Dessa forma, a distribuição de probabilidade do ruído wavelet pode ser obtida a partir da igualdade

$$\mathbb{E} \left[z^{\nu_i} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right] = \mathbb{E} \left[z^{e_n^j} \right]_{j \neq 0}^{mg(m-1)} \cdot \mathbb{E} \left[z^{e_n^0} | x_{i-(mg-1)} = -1 \right]^{mg} \quad (4.44)$$

Portanto, considerando as Equações (4.32) e (4.44), a probabilidade de erro de bit do sistema com codificação wavelet modificado pode ser expressa por:

$$P_e = \sum_{k=1}^{\frac{mg(2mg-1)}{2}} \Pr(\nu_i = mg + 2k | x_{i-(mg-1)} = -1) + 0.5 \Pr(\nu_i = mg | x_{i-(mg-1)} = -1) \quad (4.45)$$

4.3.3 Aplicação

Nesta seção, as curvas de desempenho obtidas a partir da análise do sistema com codificação wavelet modificado são apresentadas e validadas por comparação com resultados de desempenho obtidos através de simulações computacionais. Os sistemas foram simulados com as matrizes MCW's reais planas com dimensões 2×8 e 4×16 , apresentadas respectivamente em (2.8) e (2.9), em um canal com desvanecimento Rayleigh plano.

Na Figura 4.8, apresentam-se os resultados obtidos a partir da análise e simulação do sistema com codificação wavelet modificado, com constelações definidas em (3.15) e esquema de demodulação baseado na métrica de mínima distância euclidiana. Pode-se observar a partir desta Figura que as curvas analíticas e de simulação coincidem, validando assim, a análise desenvolvida neste trabalho.

A Figura 4.9 mostra uma comparação similar entre resultados de análise e de simulação, obtidos para o sistema com codificação wavelet modificado, com demodulação baseada na métrica de decisão MAP. A partir desta Figura, verifica-se que as curvas analíticas se comportam como um limitante superior bastante justo para a probabilidade de erro de bit destes sistemas. Esse comportamento ocorre devido ao aumento da dependência estatística entre as v.a.'s do ruído de demodulação, como já mencionado na Seção 4.2.4.

4.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo, foram derivadas as ferramentas analíticas necessárias para analisar o desempenho de sistemas de transmissão baseados na codificação wavelet em canais com ruído AWGN e desvanecimento Rayleigh plano.

A partir dos resultados de desempenho obtidos para ambos os sistemas de transmissão analisados, pôde-se observar um casamento ótimo entre as curvas analíticas e as curvas de simulação apresentadas, validando-se assim, a análise desenvolvida neste trabalho.

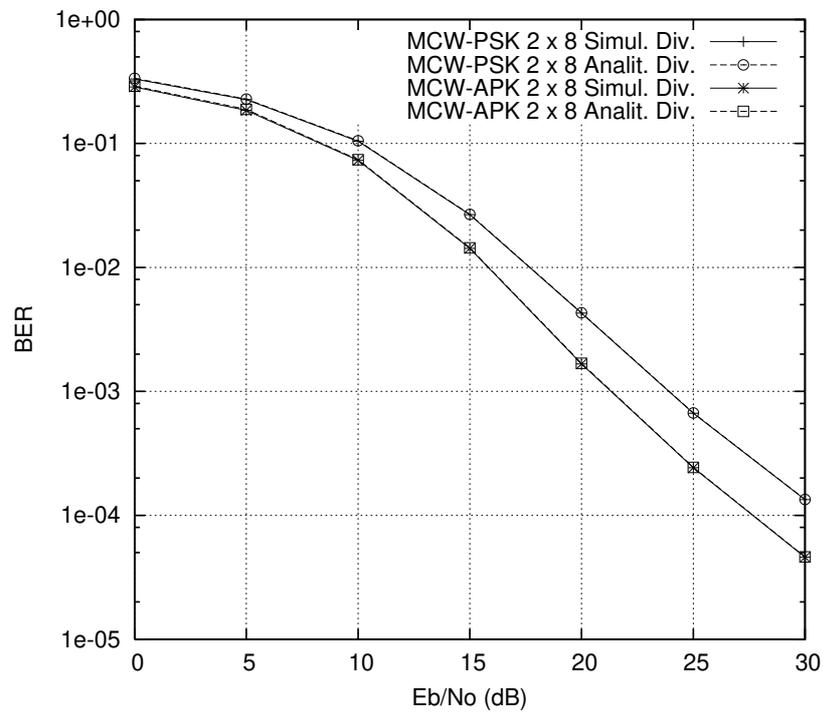
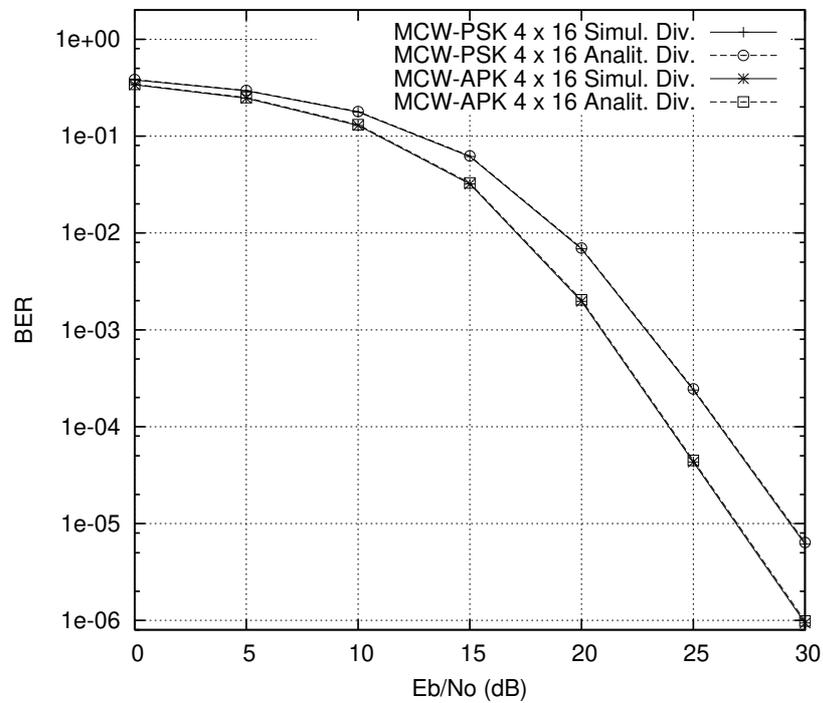
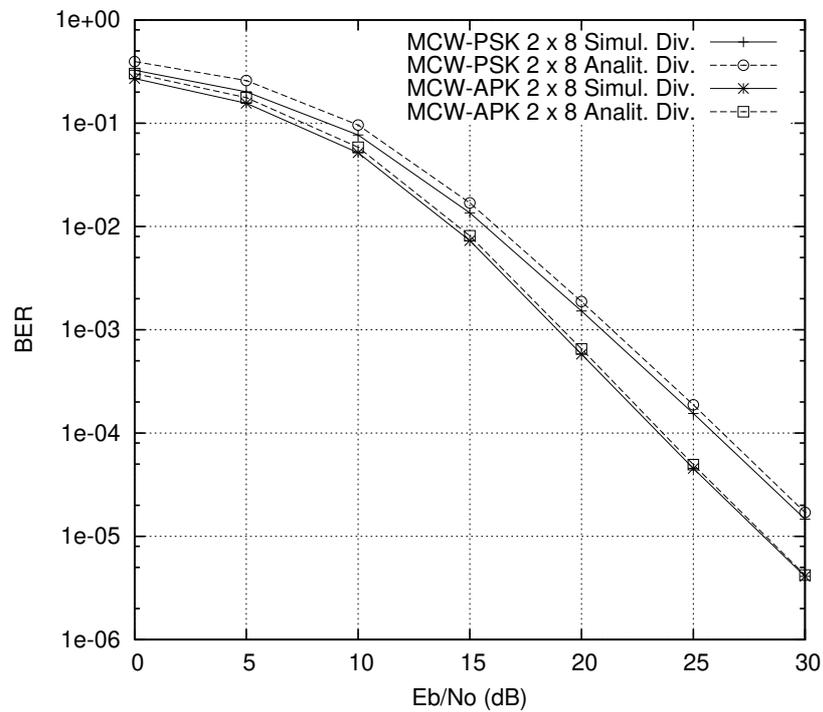
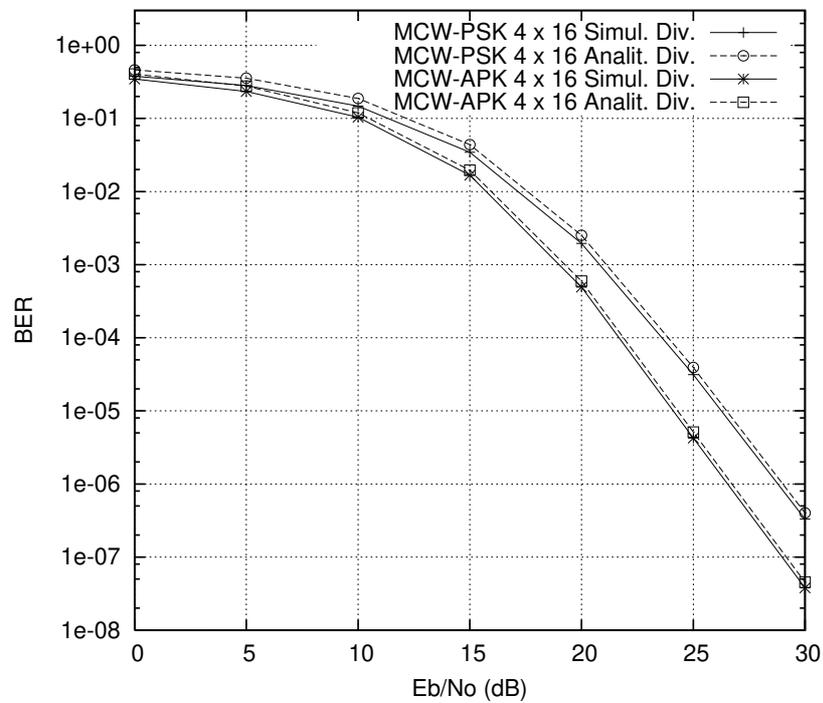
(a) BER para a matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2×8 .(b) BER para a matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 4×16 .

Figura 4.8. Sistema com codificação wavelet modificado: Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana.



(a) BER para a matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 2 x 8.



(b) BER para a matriz de Coeficientes Wavelets com Dimensão 4 x 16.

Figura 4.9. Sistema com codificação wavelet modificado: Comparação entre os resultados analíticos e de simulação com demodulação baseada na métrica de decisão MAP.

Deve ser ressaltado ainda que os resultados analíticos apresentados aqui confirmam os resultados de simulação do capítulo anterior, quanto ao ganho de desempenho apresentado pelo sistema com codificação wavelet, em relação ao desempenho do sistema STBC-BPSK.

CAPÍTULO 5

PROJETO DE CONSTELAÇÕES ADEQUADAS À CODIFICAÇÃO WAVELET

O projeto de constelações de sinais para sistemas de transmissão digital pode ser visto como um problema típico de otimização, em que se busca minimizar uma função que calcula a probabilidade de erro do sistema, tendo-se como argumento a constelação do sistema.

A evolução dos recursos computacionais permitiu a implementação de métodos de otimização cada vez mais sofisticados, dentre os quais podem-se citar: métodos analíticos, métodos heurísticos e métodos baseados em inteligência artificial. Em especial, os métodos baseados em inteligência artificial têm demonstrado grande eficiência quando aplicados a diversos problemas de otimização. Como exemplos de métodos baseados em inteligência artificial, podem ser citados: algoritmos genéticos, lógica fuzzy e redes neurais artificiais.

Este capítulo trata do projeto de constelações de sinais para uso em sistemas de transmissão baseados na codificação com matrizes wavelets. Especificamente, essas constelações são projetadas por meio de um algoritmo genético guiado pelas ferramentas analíticas desenvolvida no Capítulo 4. Os códigos fontes que implementam o algoritmo genético utilizado aqui formam um *toolbox* para MATLAB[®] de distribuição pública (HOUCK et al., 1995).

O restante deste capítulo está organizado como segue. A Seção 5.1 descreve a forma como o algoritmo genético é utilizado no projeto de constelações para sistemas baseados na codificação com MCW's. Em particular, detalhes de implementação são abordados nesta seção, como o problema alvo do projeto, a função de aptidão e os operadores genético. A Seção 5.2 apresenta as soluções dos projetos (constelações) obtidas com o algoritmo genético. Além disso, alguns resultados de desempenho obtidos para os sistemas wavelets simulados com essas novas constelações também são apresentados, e comparados com aqueles que foram obtidos

no Capítulo 3, para constelações projetadas por um algoritmo exaustivo (com enumeração completa do espaço de busca discretizado). Por fim, a Seção 5.3 apresenta as considerações finais do capítulo.

5.1 APLICAÇÃO DE ALGORITMOS GENÉTICOS AO PROJETO DE CONSTELAÇÕES PARA SISTEMAS BASEADOS NA CODIFICAÇÃO COM MCW'S

Esta seção descreve os aspectos envolvidos na aplicação de algoritmos genéticos ao projeto de constelações de sistemas de transmissão baseados na codificação com matrizes wavelets. Uma introdução aos algoritmos genéticos pode ser encontrada no Apêndice C.

De forma geral, um algoritmo genético é caracterizado por meio de vários componentes: um problema alvo, uma representação cromossômica, um método de criação da população inicial, uma função de aptidão e os operadores genéticos. No restante desta seção são apresentados os detalhes de implementação de cada um desses componentes.

5.1.1 Formulação do Problema

O desempenho dos sistemas baseados na codificação com MCW's é sensivelmente influenciado pela escolha da constelação de sinais utilizada nos seus esquemas de modulação. Dessa forma, um projeto adequado destes esquemas de modulação deve ser o primeiro ponto a ser perseguido para a concepção dos sistemas wavelets.

Neste trabalho, dois tipos de esquemas de modulação foram avaliados quanto à viabilidade de uso em conjunto com a codificação wavelet: constelações PSK e constelações APK com duas amplitudes. A metodologia de projeto dessas constelações foi, até o momento, limitada a uma abordagem empírica, fundamentada na busca exaustiva computacional de constelações que maximizem o desempenho dos sistemas codificados.

Em particular, os parâmetros de projeto destas constelações são os ângulos dos sinais

no caso das constelações PSK, e os raios e ângulos das constelações APK, sob a restrição da energia média unitária. O objetivo é determinar qual é o conjunto de parâmetros que minimiza a probabilidade de erro de bit dos sistemas wavelets.

No caso da busca exaustiva, este conjunto de parâmetros pertence a um espaço de busca discretizado. Assim, por exemplo, considerando uma discretização de 1° nos ângulos dos sinais, o tamanho do espaço de busca é 180^{mg+1} para um sistema PSK com codificação wavelet sem quantização do esquema de modulação¹. Considerando uma modulação APK, este espaço de busca é igual a $N_r \cdot 180^{mg+1}$, em que N_r é o número de valores investigados para o raio interno da constelação. Devido ao tamanho deste espaço, a metodologia de projeto baseada no cálculo de cada uma das soluções possíveis do espaço de busca (algoritmo exaustivo) tem um alto custo computacional, sendo portanto inadequada para esta aplicação.

De fato, o projeto de constelações é um problema típico de otimização combinatória que consiste em minimizar uma função custo que modela o desempenho do sistema codificado, e que tem por argumento, os parâmetros da constelação de sinais. Os algoritmos genéticos, quando aplicados na solução de problemas desse tipo, podem encontrar soluções de alta qualidade, ainda que sem garantia de solução ótima, em um tempo muito reduzido quando comparado ao tempo necessário para avaliar todas as soluções possíveis.

5.1.2 Representação Cromossômica

Em qualquer algoritmo genético, uma representação cromossômica é necessária para se descrever cada indivíduo da população de interesse. Especificamente, cada indivíduo da população (ou cromossomo) é formado por uma seqüência de genes definidos em um certo alfabeto (ver Apêndice C). O alfabeto pode ser binário, de números em ponto-flutuante, de inteiros, de símbolos, etc. O tipo do alfabeto determina a forma como o problema é estruturado no AG, assim como os operadores genéticos que são utilizados.

¹Para configurações com simetria em relação ao eixo das abscissas.

Nos primeiros AGs, o alfabeto estava limitado a dígitos binários. Desde então, a representação cromossômica tem sido objeto de estudo. Em (MICHALEWICZ, 1994) foi realizada uma ampla comparação experimental entre AGs binários e em ponto-flutuante, sendo observado que o AG com representação em ponto-flutuante é uma ordem de magnitude mais eficiente em termos de tempo de processamento, além de levar a resultados com maior precisão e consistência.

O algoritmo genético desenvolvido por (HOUCK et al., 1995), e adotado neste trabalho, permite o uso de dois tipos de alfabeto: binário e em ponto-flutuante. Tomando-se por base os resultados de desempenho apresentados em (MICHALEWICZ, 1994), optou-se por utilizar aqui o AG com representação cromossômica em ponto-flutuante, ou seja, cada indivíduo é representado por um vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

5.1.3 População Inicial

O primeiro passo do algoritmo genético é a criação de uma população inicial de indivíduos. Neste trabalho, assim como na maioria das aplicações de AGs encontradas na literatura, a população inicial é criada de forma aleatória, selecionando-se os genes de cada cromossomo (indivíduo) a partir de uma distribuição uniforme $U(a_i, b_i)$, em que a_i e b_i são os extremos inferiores e superiores, respectivamente, para os valores de cada gene x_i do cromossomo \mathbf{x} . Note que para uma população com cromossomos k -dimensionais, deve-se fornecer ao algoritmo um vetor de extremos $\mathbf{l} = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k)$, o qual irá definir o espaço de soluções válidas para o problema.

Por outro lado, se houver algum conhecimento prévio de soluções potencialmente boas (provenientes, por exemplo, de técnicas heurísticas ou outros métodos de busca), a população inicial pode ser “semeada” com estas soluções, com o restante da população sendo obtido de forma aleatória.

5.1.4 Função de Aptidão

A função de aptidão avalia a adequabilidade dos indivíduos ao ambiente, guiando todo o processo de busca. Embora em muitos problemas a função de aptidão seja igualada à função objetivo (a função a ser otimizada), rigorosamente essas duas funções são diferentes. O algoritmo genético sempre maximiza a aptidão dos indivíduos, pois assim garante que os mais aptos se perpetuem. Frequentemente, a função de aptidão é calculada a partir da função objetivo. Em particular, nos problemas de minimização, a função de aptidão é modificada para crescer com a redução no valor de algum objetivo a ser minimizado.

No projeto de constelações para sistemas de transmissão, a função objetivo é definida em termos da probabilidade de erro do sistema, e a meta do método de otimização é a minimização desta função objetivo. Em se tratando dos sistemas de transmissão estudados neste trabalho, baseados na codificação com matrizes wavelets, a função objetivo a ser minimizada é dada por

$$P_e = \sum_{k=1}^{\frac{mg(2mg-1)}{2}} \Pr(\nu_i = mg + 2k | x_{i-(mg-1)} = -1) + 0.5 \Pr(\nu_i = mg | x_{i-(mg-1)} = -1) \quad (5.1)$$

em que $\Pr(\nu_i | x_{i-(mg-1)} = -1)$ denota a distribuição de probabilidade do ruído wavelet ν_i condicionada ao bit de informação $x_{i-(mg-1)} = -1$, m é o posto e g é o gênero da matriz de coeficientes wavelets utilizada no processo de codificação.

Como o projeto de constelações é um problema de minimização, a função de aptidão a ser maximizada é dada por $F = -P_e$. Note que para se projetar as constelações dos sistemas baseados na transmissão de símbolos wavelets, a função expressa pela Equação (5.1) deve ser calculada com base na análise desenvolvida na Seção 4.2. Por outro lado, para se projetar as constelações dos sistemas baseados na transmissão de sub-símbolos wavelets, essa função objetivo deve ser calculada com base na análise derivada na Seção 4.3.

Para se obter o argumento $\Pr(\nu_i | x_{i-(mg-1)} = -1)$ da Equação (5.1), alguns cálculos intermediários devem ser realizados. O mais difícil de ser completado é a distribuição de probabilidade dos erros de demodulação (ver Seções 4.2.1.2 e 4.3.1.2). No projeto das cons-

telações PSK, o cálculo desta distribuição de probabilidades requer a avaliação das Equações (4.20) e (4.39) por meio de uma integração numérica, a qual foi realizada pela função *triplequad*, definida no próprio ambiente MATLAB[®]. Já no projeto das constelações APK, as distribuições de probabilidades dos erros de demodulação foram obtidas a partir de simulações computacionais, pelo método de Monte Carlo, dos respectivos canais discretos que estavam sendo projetados.

5.1.5 Operadores Genéticos

O *toolbox* de algoritmos genéticos desenvolvido em (HOUCK et al., 1995) tem várias opções diferentes para os operadores genéticos (operadores de seleção, cruzamento e mutação). Esses operadores têm a função de implementar o processo reprodutivo simulado que ocorre nos AGs. Após a criação da população inicial, são realizadas operações específicas sobre esta população que tentam simular o que ocorre em um ambiente natural ao longo de vários anos. Como acontece na natureza, com o passar do tempo, a população se renova dando origem a uma nova geração. As operações de seleção natural, cruzamento e mutação são responsáveis pela criação de uma nova geração.

Os operadores genéticos usados aqui, associados com os seus respectivos parâmetros, são apresentados na Tabela 5.1. Nesta Tabela, *Gmax* representa o número máximo de gerações do processo evolucionário. Este parâmetro foi utilizado pelo algoritmo genético como critério de parada, sendo igual a 200 nos projetos das constelações PSK e 70 nos projetos das constelações APK. A seguir, cada operador da Tabela 5.1 será detalhado.

Tabela 5.1. Operadores genéticos empregados nos projetos.

Operador	Parâmetros
Seleção Geométrica Normalizada	q
Cruzamento Heurístico	$[\#Crz\ t]$
Mutação Não-Uniforme Multidimensional	$[\#Mut\ Gmax\ b]$

5.1.5.1 Seleção geométrica normalizada A operação de seleção ocorre em cada geração, antes do processo de cruzamento, indicando os indivíduos mais aptos para a reprodução. Na *seleção geométrica normalizada*, cada indivíduo da população é inicialmente ordenado de acordo com o seu valor de aptidão. A classificação do indivíduo (sua posição relativa na série ordenada) determina a probabilidade p_j do mesmo ser escolhido para se reproduzir naquela geração. Essa probabilidade é calculada por uma distribuição geométrica normalizada pela probabilidade de escolha do indivíduo mais apto. Mais especificamente, essa probabilidade de seleção é dada por (JOINES; HOUCK, 1994)

$$p_j = q'(1 - q)^{r_j - 1} \quad (5.2)$$

em que $q \in (0.0, 1.0)$ é um parâmetro fornecido ao algoritmo, sendo igual a 0,08 nesta aplicação; r_j é o posto do indivíduo j após a ordenação (o indivíduo com melhor aptidão tem $r_j = 1$); $q' = \frac{q}{1 - (1 - q)^P}$ é igual à probabilidade de seleção, p_j , do melhor indivíduo da população; e P é o tamanho da população.

5.1.5.2 Cruzamento heurístico A operação de cruzamento envolve uma recombinação de genes entre dois indivíduos, representados aqui pelos vetores reais k -dimensionais \mathbf{x} e \mathbf{y} , para produzir um par de filhos que, como no processo natural, traz a informação genética dos pais.

Nesse contexto, o *cruzamento heurístico* entre \mathbf{x} e \mathbf{y} é definido como uma extrapolação linear desses dois indivíduos. Especificamente, supondo que \mathbf{x} tem maior valor de aptidão que \mathbf{y} , um novo indivíduo, \mathbf{x}' , é criado por (HOUCK et al., 1995)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + r(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.3)$$

em que r é uma variável aleatória com distribuição uniforme $U(0, 1)$.

Note que o novo indivíduo \mathbf{x}' pode cair fora do domínio de busca desejado. Neste caso, este novo indivíduo é descartado e um novo cruzamento, definido por (5.3), é realizado. Este procedimento é repetido por um número de vezes igual a t , sendo este um parâmetro fornecido

ao AG. Nesta aplicação, adotou-se $t = 3$. Se após este número de tentativas não for criado nenhum novo indivíduo válido, então faz-se $\mathbf{x}' = \mathbf{y}$. O segundo “filho” desse cruzamento é sempre igual ao “pai” com melhor valor de aptidão, ou seja, $\mathbf{y}' = \mathbf{x}$.

O número de vezes em que o cruzamento heurístico é aplicado a cada geração do AG, denotado por $\#Crz$, é mais um parâmetro fornecido ao algoritmo. Nos projetos de constelações desenvolvidos aqui, este número foi calculado de forma a garantir uma taxa de cruzamento dos indivíduos da população igual a 50%.

5.1.5.3 Mutação não-uniforme multidimensional A etapa que conclui a formação de uma nova geração é a mutação. Com essa operação, um ou mais genes de cromossomos escolhidos aleatoriamente são modificados. Neste trabalho, optou-se por utilizar uma *mutação não-uniforme multidimensional*, definida como segue:

Sejam a_i e b_i valores extremos, inferiores e superiores, respectivamente, que cada gene x_i de um cromossomo \mathbf{x} da população pode assumir. A mutação não-uniforme multidimensional deste cromossomo \mathbf{x} é dada por (HOUCK et al., 1995)

$$x'_i = \begin{cases} x_i + (b_i - x_i)f(G) & \text{se } r_1 < 0,5, \\ x_i - (x_i - a_i)f(G) & \text{se } r_1 \geq 0,5, \end{cases} \quad (5.4)$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, em que k denota a dimensão do vetor que define o cromossomo \mathbf{x} , e

$$f(G) = \left(r_2 \left(1 - \frac{G}{Gmax} \right) \right)^b. \quad (5.5)$$

Nas Equações (5.4) e (5.5), r_1 e r_2 são variáveis aleatórias uniformes entre (0, 1); G é o índice de contagem da geração corrente; $Gmax$ é o número máximo de gerações (parâmetro que deve ser fornecido ao algoritmo); b é um parâmetro de formatação da função $f(G)$. Este parâmetro também deve ser fornecido ao algoritmo (nesta aplicação, adotou-se $b = 3$). A função $f(G)$ controla o grau de distorção (mutação) que é aplicado sobre cada gene do cromossomo. Note que $f(G)$ se aproxima de zero a medida que a geração corrente G se aproxima de $Gmax$.

O parâmetro $\#Mut$ define o número de vezes em que a mutação não-uniforme multidimensional

mensional deve ser aplicada a cada geração do AG. Neste trabalho, $\#Mut$ foi calculado em cada projeto de forma a garantir uma taxa de mutação de 5%.

5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

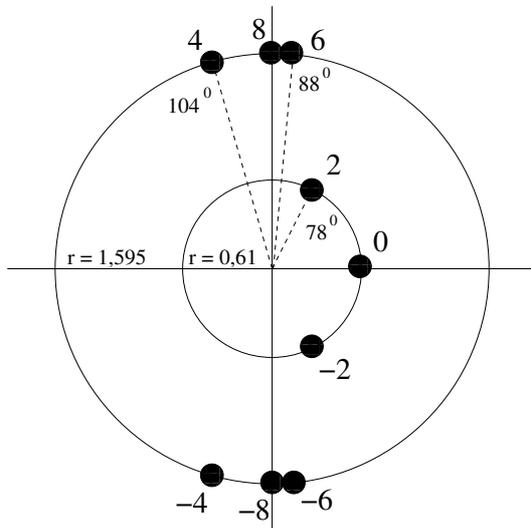
Nesta seção são apresentadas as constelações que foram projetadas neste trabalho via algoritmo genético, usando as ferramentas analíticas derivadas no Capítulo 4. De fato, cada sistema wavelet analisado anteriormente teve seu esquema de modulação reprojeto pelo AG detalhado na Seção 5.1.

Também são apresentados resultados de desempenho obtidos a partir dos sistemas wavelets simulados com essas novas constelações, sobre um canal com desvanecimento Rayleigh decorrelacionado e perfeitamente estimado na recepção. Estes resultados são comparados aqui com aqueles que tinham sido obtidos com as constelações projetadas pelo algoritmo de busca exaustiva (com enumeração completa do espaço de busca discretizado).

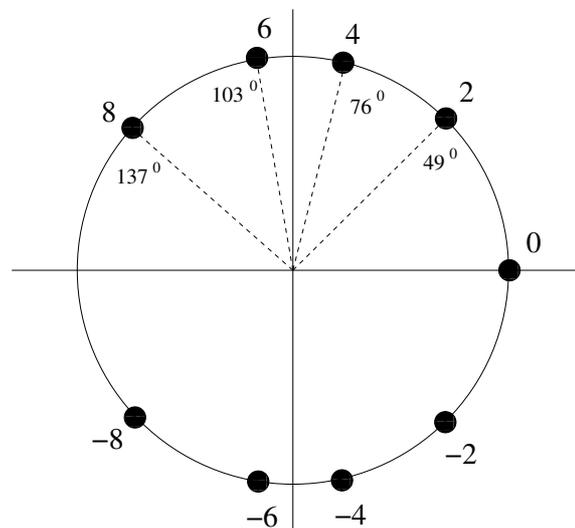
Inicialmente, o AG foi aplicado ao projeto de constelações para os sistemas com codificação wavelet, os quais são caracterizados pelas expressões analíticas derivadas na Seção 4.2. Neste caso, o problema de otimização consiste na minimização da função objetivo dada em (4.25). A princípio, esta função modela o desempenho de sistemas APK e PSK com esquemas de demodulação baseados tanto na regra de mínima distância euclidiana quanto na regra MAP. De fato, o que irá diferenciar cada um desses modelos será a distribuição de probabilidade dos erros de demodulação, calculada durante um passo intermediário da avaliação de (4.25).

Uma opção por projetar via AG apenas as constelações dos sistemas baseados na regra de demodulação por mínima distância euclidiana foi feita. Essa decisão foi tomada devido ao menor tempo de processamento necessário para o cálculo da distribuição de probabilidade dos erros de demodulação gerados por esta regra. A Figura 5.1 apresenta as constelações obtidas nesta etapa, para os sistemas com codificação wavelet e esquemas de modulação APK e PSK, baseados respectivamente nas MCW's 2×8 e 2×128 . Vale ressaltar que as constelações

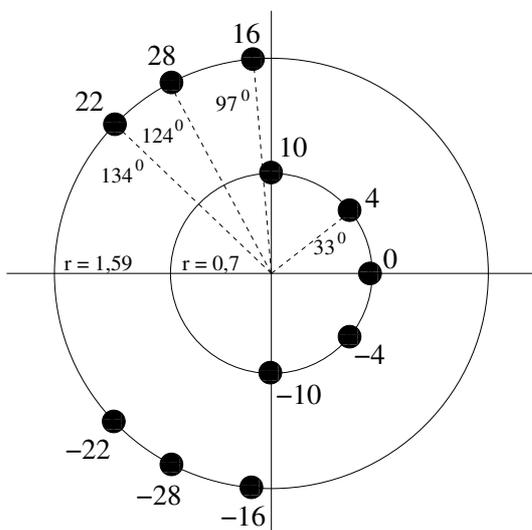
ilustradas nas Figuras 5.1(c) e 5.1(d), associadas à MCW 2×128 , foram projetadas para o mesmo esquema de quantização de símbolos wavelets definido na Tabela 4.5.



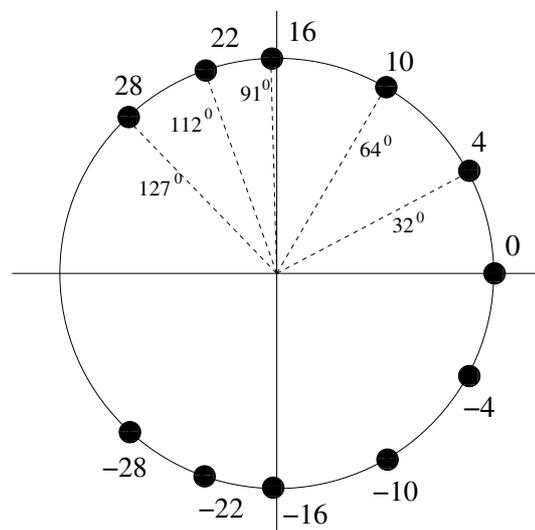
(a) MCW 2×8 — Constelação 9-APK.



(b) MCW 2×8 — Constelação 9-PSK.



(c) MCW 2×128 — Constelação 11-APK.



(d) MCW 2×128 — Constelação 11-PSK.

Figura 5.1. Constelações obtidas via AG para os sistemas com codificação wavelet.

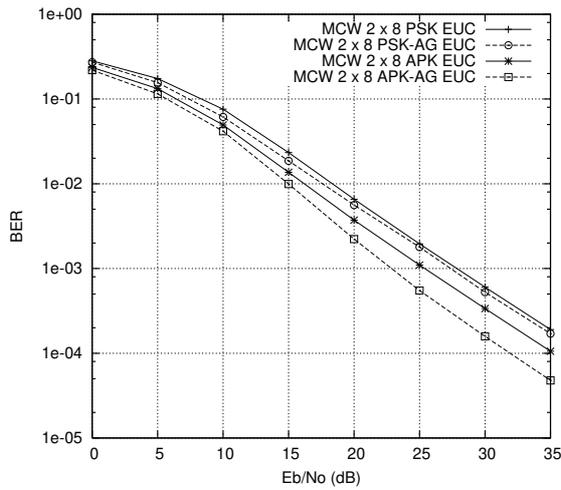
A Figura 5.2 apresenta as curvas de desempenho dos sistemas com MCW's 2×8 e 2×128 e demodulação euclidiana, obtidas com as novas constelações projetadas via AG (ilustradas na Figura 5.1). Também são apresentadas nesta figura, para efeito de comparação, curvas de desempenho desses mesmos sistemas simulados com as constelações projetadas no Capítulo 3,

por busca exaustiva. A partir desta figura, verifica-se que os sistemas que tiveram as constelações projetadas pelo AG apresentaram vantagens de desempenho no caso das constelações APK, e desempenhos similares para as constelações PSK. Este resultado mostra que o espaço de busca do algoritmo genético utilizado aqui tende a conter soluções de melhor qualidade que o espaço de busca do algoritmo exaustivo. A explicação para este fato decorre do processo de discretização do espaço investigado pelo algoritmo exaustivo. Note que uma opção por refinar essa discretização pode levar a um tempo de processamento proibitivo².

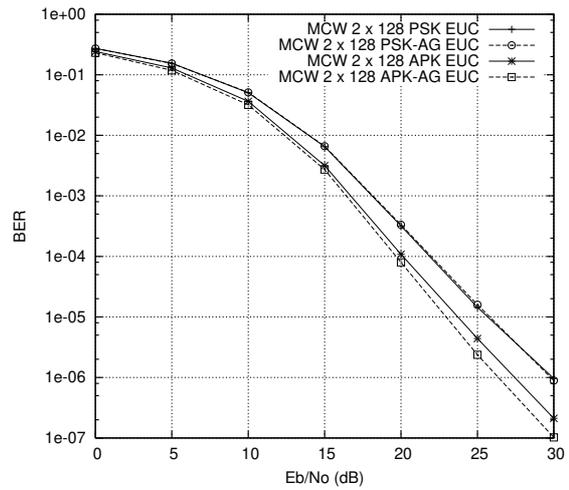
Por outro lado, uma análise cuidadosa da Figura 5.1(a) revela que a melhor constelação APK encontrada pelo AG para minimizar a BER do sistema baseado na MCW 2×8 apresenta uma tendência implícita à quantização dos símbolos wavelets com valores ± 6 e ± 8 . Este resultado indica que o AG pode ser uma ferramenta valiosa no projeto de esquemas de quantização de símbolos wavelets para sistemas com MCW de grandes dimensões. Nestes termos, por exemplo, ao invés de se projetar de forma empírica um esquema de quantização para o sistema com codificação wavelet baseado na MCW 2×128 , como aquele apresentado na Tabela 4.5, poderia-se aplicar o AG para se projetar diretamente uma constelação com $mg + 1$ pontos para o sistema. A melhor constelação encontrada pelo AG teria provavelmente uma configuração com sinais sobrepostos, que poderia ser utilizada então para se definir o esquema de quantização de símbolos wavelets. De fato, este ponto ainda não sofreu uma investigação criteriosa, e deve ser abordado posteriormente, em trabalhos futuros.

As constelações projetadas pelo AG para os sistemas com codificação wavelet e demodulação euclidiana foram ainda aplicadas a sistemas com demodulação MAP. A Figura 5.3 apresenta as curvas de desempenho obtidas a partir da simulação desses sistemas. Esta figura também apresenta, como referência, curvas para esses mesmos sistemas simulados com as constelações projetadas no Capítulo 3 por busca exaustiva. Verifica-se a partir da figura que, em ambos os casos, os resultados de desempenho são similares (a exceção do sistema com MCW 2×8 e constelação PSK-AG, que apresentou uma pequena desvantagem de desem-

²Mesmo para o grau de discretização adotado neste trabalho, igual a $\delta = 3^\circ$, o tempo de processamento do algoritmo exaustivo já supera, em média, o tempo de processamento do AG em 500%.



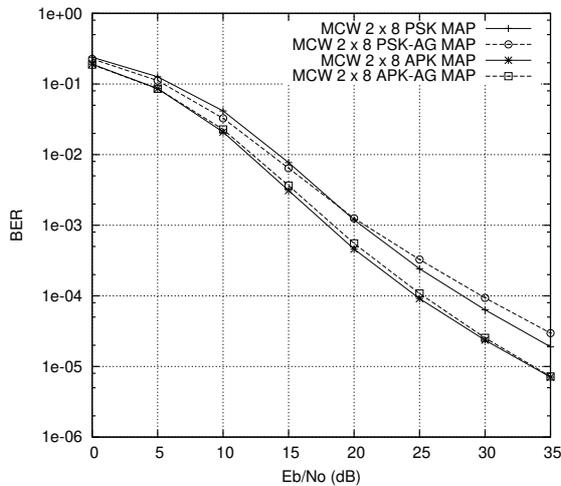
(a) MCW 2×8 — Demodulação Euclidiana.



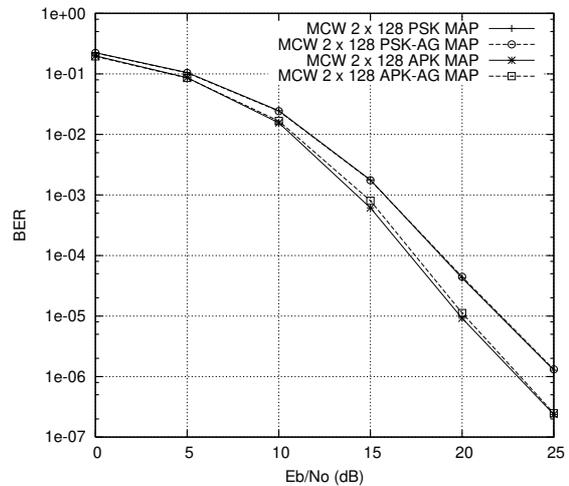
(b) MCW 2×128 — Demodulação Euclidiana.

Figura 5.2. Desempenho do sistema com codificação wavelet com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana e esquemas de modulação projetados via AG.

penho).



(a) MCW 2×8 — Demodulação MAP.



(b) MCW 2×128 — Demodulação MAP.

Figura 5.3. Desempenho do sistema com codificação wavelet com demodulação baseada na regra MAP e esquemas de modulação projetados via AG.

O AG também foi aplicado ao projeto de constelações para o sistema com codificação wavelet modificado. Neste caso, o problema de otimização consiste na minimização da função objetivo dada em (4.45), calculada com base na análise desenvolvida na Seção 4.3. Mais uma vez, foi feita uma opção por projetar via AG apenas as constelações dos sistemas com demodulação baseada na regra de mínima distância euclidiana. A Figura 5.4 apresenta as

constelações assim projetadas, para sistemas codificados pelas MCW's 2×8 e 4×16 com esquemas de modulação APK e PSK.

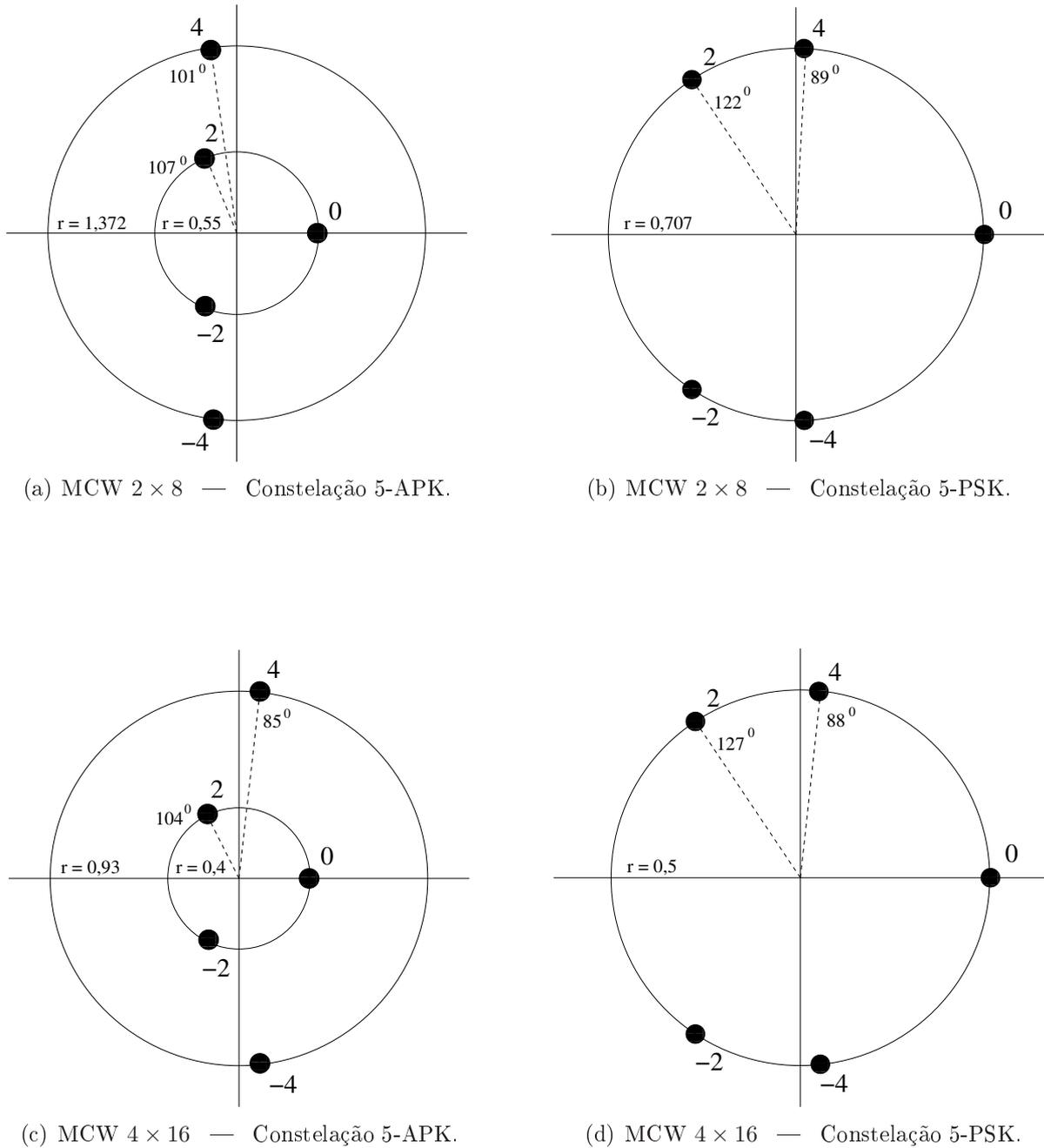


Figura 5.4. Constelações obtidas via AG para o sistema com codificação wavelet modificado.

As constelações projetadas pelo AG para os sistemas baseados na transmissão de sub-símbolos wavelets também foram avaliadas por meio de simulações computacionais, considerando esquemas de recepção com regra MAP e de mínima distância euclidiana. A Figura 5.5 apresenta as curvas de desempenho obtidas a partir dessas simulações. Também são apre-

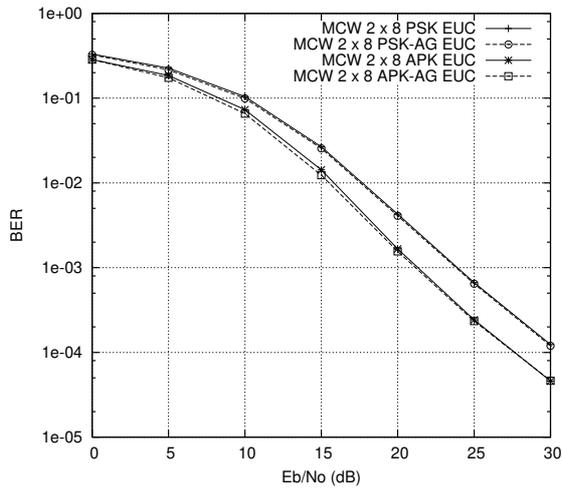
sentadas nesta figura as curvas de desempenho obtidas com as constelações projetadas no Capítulo 3 por busca exaustiva, para efeito de comparação.

Os resultados apresentados nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.5 mostram que o algoritmo genético utilizado neste trabalho, e descrito na Seção 5.1, obteve soluções de projeto (constelações) consistentes e de boa qualidade para ambos os sistemas de transmissão investigados. De fato, o algoritmo genético se mostrou tão eficaz quanto o algoritmo de busca exaustiva, com respeito à qualidade das soluções encontradas. Entretanto, o AG tem uma vantagem adicional, sua maior eficiência em termos de tempo de processamento.

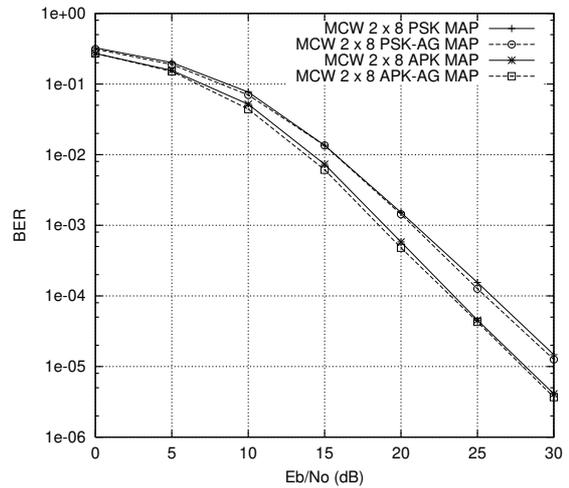
5.3 CONCLUSÃO

Este capítulo abordou o problema do projeto de constelações para sistemas de transmissão baseados na codificação com matrizes wavelets, sujeitos ao desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência. Especificamente, constelações de sinais foram projetadas usando-se um algoritmo genético e as ferramentas analíticas desenvolvida no Capítulo 4.

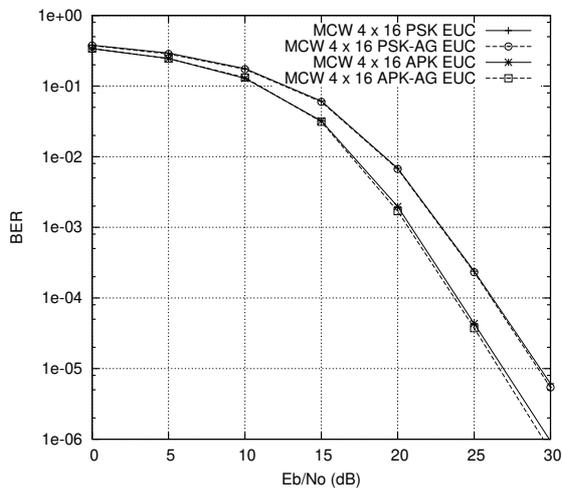
A partir dos resultados de desempenho obtidos, pôde-se constatar que o algoritmo genético utilizado neste trabalho se mostrou eficiente quanto ao projeto de constelações de boa qualidade. Além disso, alguns resultados indicam que o AG também pode ser utilizado com sucesso no projeto de esquemas de quantização de símbolos wavelets para sistemas com MCW de grandes dimensões. Este ponto deve ser investigado posteriormente, em trabalhos futuros.



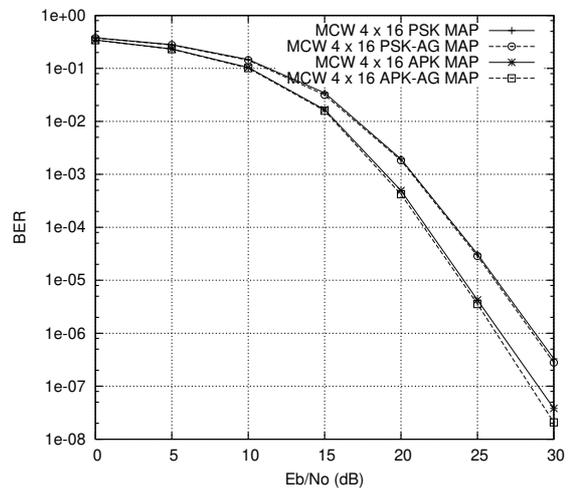
(a) MCW 2×8 — Demodulação Euclidiana.



(b) MCW 2×8 — Demodulação MAP.



(c) MCW 4×16 — Demodulação Euclidiana.



(d) MCW 4×16 — Demodulação MAP.

Figura 5.5. Desempenho do sistema com codificação wavelet modificado com esquemas de modulação projetados via AG.

CONCLUSÃO

Esta tese de doutorado abordou a concepção, o estudo e a análise de desempenho de sistemas de transmissão sem-fio baseados na codificação com matrizes wavelets.

Inicialmente, a técnica de codificação de canal com matrizes de coeficientes wavelets foi apresentada. Posteriormente, sistemas de transmissão sem-fio baseados nesta técnica de codificação foram avaliados em canais com desvanecimento Rayleigh plano. Resultados de simulação por Monte Carlo foram apresentados para esquemas de modulação APK e PSK, considerando diferentes níveis de entrelaçamento dos canais com desvanecimento. Discutiu-se ainda o desempenho desses sistemas sob os efeitos de erros de estimação das RI's dos canais, considerando cenários nos quais os canais de comunicação são estimados na recepção via algoritmo LMS.

Como importante contribuição deste trabalho, pode-se destacar as formulações analíticas apresentadas aqui para o desempenho dos sistemas baseados na transmissão de símbolos e sub-símbolos wavelets. Estas análises foram desenvolvidas para canais com desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência, e validadas através de comparações com resultados de desempenho obtidos via simulações computacionais.

Os resultados analíticos apresentados neste trabalho indicam que o uso de esquemas de transmissão em diversidade combinados à codificação com matrizes wavelets pode possibilitar um incremento no ganho de codificação sobre canais com desvanecimento plano. Em particular, este trabalho investigou a integração de um esquema de diversidade temporal à codificação wavelet, sendo observado um ganho de desempenho, em termos de probabilidade de erro de bit, nos sistemas avaliados. Entretanto, sabe-se que a técnica de diversidade temporal possui um custo operacional intrínseco: ela leva a uma diminuição da eficiência espectral

do sistema. Em trabalhos futuros, esquemas de diversidade espacial, baseados na utilização de múltiplas antenas de transmissão e uma única antena de recepção (ALAMOUTI, 1998), devem ser investigados com o objetivo de preservar a eficiência espectral obtida pelo sistema de Tzannes. Nesse caso, o desenvolvimento analítico apresentado neste trabalho, para o sistema baseado na transmissão de sub-símbolos wavelets, pode ser estendido para a análise desses novos sistemas.

Por outro lado, os resultados de desempenho obtidos com o sistema baseado na transmissão de símbolos wavelets em canais com desvanecimento também merecem destaque. Em particular, foi mostrado através de resultados analíticos que o sistema codificado pela MCW 2×128 supera o desempenho de uma outra abordagem proposta para esse mesmo ambiente de transmissão, o sistema STBC-BPSK (TAROKH et al., 1999), o qual apresenta uma complexidade de implementação similar e produz a mesma eficiência espectral do sistema com codificação wavelet.

Note que o ganho de desempenho dos sistemas baseados em matrizes wavelets é uma função do número de colunas da MCW utilizada na codificação. Esta é uma característica importante dos sistemas com codificação wavelet, visto que ela deixa margem para se conseguir ganhos de desempenho ainda melhores, a custo de um aumento relativamente pequeno na complexidade computacional desses sistemas.

A escolha do esquema de modulação tem um papel fundamental no desempenho dos sistemas wavelets. Inicialmente, as constelações usadas neste trabalho foram projetadas por meio de um algoritmo de busca exaustiva (porém restrita a um sub-espço discretizado). Posteriormente, com a formulação analítica para o desempenho dos sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets, pôde-se empregar uma metodologia de busca baseada em algoritmo genético, a fim de se projetar novas constelações de sinais.

6.1 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES

Diante da tese apresentada, foram alcançados os objetivos descritos a seguir, ressaltando-se as contribuições obtidas:

1. Concepção de um novo sistema baseado na integração de um esquema de transmissão com diversidade temporal à codificação com matrizes wavelets. Constatou-se que a diversidade temporal introduzida no sistema possibilita melhorar o ganho da codificação wavelet em canais com desvanecimento, a um baixo custo computacional. Este resultado incentiva a avaliação de novos esquemas de transmissão em diversidade para uso em sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets.
2. Avaliação da influência da correlação do canal com desvanecimento na probabilidade de erro de bit em sistemas wavelets. Por meio de simulações, constatou-se que uma profundidade de entrelaçamento igual a mg símbolos, em que m é o posto e g é o gênero da MCW utilizada na codificação, foi suficiente para que os sistemas com codificação wavelet avaliados em um canal com $f_D T_s = 0,002$ conseguissem desempenhos similares àqueles obtidos em canais perfeitamente descorrelacionados. No caso dos sistemas baseados na transmissão de sub-símbolos wavelets que foram avaliados, verificou-se que uma profundidade de entrelaçamento igual a m^2g símbolos foi suficiente para se conseguir praticamente a totalidade do ganho possível. Isto significa que o ganho marginal proporcionado pelo aumento da profundidade de entrelaçamento além desse valor é praticamente nulo neste ambiente de comunicação¹. Esses resultados são muito úteis, pois possibilitam a redução dos requisitos de memória e atraso do sistema.
3. Estudo da influência dos erros de estimação do canal em sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets. Diferentemente de abordagens comumente apresentadas na literatura, o presente trabalho considerou a ocorrência de erros na estimação do estado do canal, o que constitui uma questão relevante para avaliar o desempenho dos sistemas

¹Note, entretanto, que nada pode ser afirmado sobre a profundidade de entrelaçamento necessária em outros canais de comunicação.

wavelets. No trabalho foi apresentado um esquema de recepção baseado no algoritmo LMS. As simulações realizadas mostraram que os sistemas baseados na transmissão de símbolos e sub-símbolos wavelets mantiveram bons ganhos de desempenho, mesmo na presença de erros de estimação do canal.

4. Apresentação de ferramentas matemáticas para se investigar o desempenho do sistema com codificação wavelet e do sistema com codificação wavelet modificado, em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência. A formulação analítica derivada aqui pode ainda ser generalizada para analisar o desempenho de outras técnicas de transmissão baseadas na codificação com matrizes wavelets.
5. Apresentação de uma nova abordagem baseada em ferramentas analíticas para o projeto de constelações de sinais para os sistemas wavelets. Especificamente, algumas constelações de sinais utilizadas nestes sistemas foram projetadas por meio de um algoritmo genético, guiado pela formulação analítica derivada neste trabalho. Resultados de desempenho obtidos por simulação, indicam que o AG pode ainda ser utilizado com sucesso no projeto de esquemas de quantização de símbolos wavelets, para sistemas com MCW de grandes dimensões.

6.2 PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Diante do trabalho apresentado e com base nos objetivos já alcançados, podem ser apontadas as seguintes propostas para trabalhos futuros:

1. Analisar o desempenho da codificação wavelet integrada a outros esquemas de transmissão em diversidade. Em particular, esquemas de diversidade espacial, baseados na utilização de múltiplas antenas de transmissão e uma única antena de recepção, podem ser investigados com o objetivo de preservar a eficiência espectral obtida pelo sistema de Tzannes.

2. Investigar sistemas de transmissão baseados na integração da codificação wavelet a esquemas de recepção iterativos, nos quais existiria uma realimentação da informação extrínseca entre as etapas de demodulação e de decodificação wavelet.
3. Analisar o desempenho dos sistemas codificados com matrizes wavelets em outros ambientes de comunicação, tais como, canais com desvanecimento seletivo em frequência, inclusão de interferência intersimbólica, canais com distribuições de desvanecimento diferentes da Rayleigh, entre outros.
4. Implementar e avaliar, por simulação computacional, sistemas com codificação espaço-temporal, de forma a viabilizar uma ampla comparação entre o desempenho desses sistemas e o desempenho dos sistemas baseados na codificação com matrizes wavelets.
5. Projetar usando AG's e ferramentas matemáticas de análise esquemas de quantização de símbolos wavelet gerados por MCW's de grandes dimensões, com o objetivo de aumentar o ganho da codificação wavelet em canais com desvanecimento.
6. Analisar o desempenho da codificação wavelet com taxas de codificação inferiores a 1 bit/símbolo, através da variação do nível de sobreposição das linhas da MCW na matriz de codificação.
7. Avaliar o desempenho dos sistemas wavelets com outras famílias de matrizes, particularmente com matrizes wavelets complexas planas. Investigar como essas matrizes influenciam o esquema de mapeamento dos símbolos wavelets nos sinais de uma constelação bidimensional.

APÊNDICE A

SIMULAÇÃO DOS SISTEMAS BASEADOS NA CODIFICAÇÃO COM MCW'S

Uma parte significativa do tempo despendido neste trabalho foi consumida no desenvolvimento das simulações dos sistemas. Todas as simulações foram desenvolvidas seguindo-se o método de Monte Carlo, e implementadas em linguagem C para o ambiente LINUX.

Houve uma preocupação constante de se utilizar uma quantidade de dados suficiente para se obter curvas precisas de desempenho. Estritamente falando, para avaliar o desempenho dos sistemas nos canais com Doppler infinito (canais descorrelacionados), foram realizadas simulações com

$$N_{\text{Total}} = 100 \cdot \frac{1}{\text{BER da maior SNR simulada}} \quad (\text{A.1})$$

transmissões.

Já para avaliar o desempenho dos sistemas nos canais com Doppler finito (canais correlacionados), o número total de bits transmitidos, utilizado para fazer o levantamento de cada ponto da curva de desempenho, obedeceu a relação

$$N_{\text{Total}} = L \cdot N_{\text{Bloco}} \quad (\text{A.2})$$

em que

$$L = 10 \left(\frac{1}{\text{BER da maior SNR simulada}} \right)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

é o número de realizações de canais estatisticamente independentes e

$$N_{\text{Bloco}} = 100 \left(\frac{1}{\text{BER da maior SNR simulada}} \right)^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

é o número de bits transmitidos para cada realização de canal.

APÊNDICE B

MODULAÇÃO PSK: PROBABILIDADE DE ERRO

A modulação digital é o processo de mapeamento de símbolos digitais em formas de onda compatíveis com as características do canal (PROAKIS, 1989; SKLAR, 1988). De forma geral, o mapeamento é feito tomando-se blocos de $k = \log_2 M$ símbolos digitais de informação em um intervalo de tempo. Para cada bloco, o modulador seleciona uma das $M = 2^k$ formas de onda analógicas com energia finita, que será transmitida através do canal.

Dentre as técnicas de modulação existentes na literatura, a modulação PSK (*Phase Shift Keying*) é a mais adequada para canais de comunicação sem-fio, devido a sua estratégia de sinalização com envoltória constante. Esta característica possibilita a utilização de transmissores com amplificadores de potência não-lineares (classe C), largamente difundidos nos sistemas de comunicação sem-fio.

Na modulação PSK, os sinais são representados pela forma de onda

$$\mathbf{s}_m(t) = g(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_m), \quad (\text{B.1})$$

em que $g(t)$ é um pulso com duração $[nT_s, (n+1)T_s)$ e

$$\theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{M}, \quad m = 1, \dots, M \quad (\text{B.2})$$

são as M possíveis fases da portadora que transportam a informação.

Os sinais PSK têm uma representação vetorial dada por:

$$\mathbf{s}_m = \left[\sqrt{\mathcal{E}_s} \cos \frac{2\pi}{M}(m-1) \quad \sqrt{\mathcal{E}_s} \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \right] \quad (\text{B.3})$$

em que $\mathcal{E}_s = \frac{1}{2}\mathcal{E}_g$ é a energia em cada forma de onda.

B.1 PROBABILIDADE DE ERRO EM CANAIS AWGN

Considerando que os sinais são equiprováveis, segue que o detector ótimo, no sentido de mínima probabilidade de erro, para o canal AWGN calcula as métricas de correlação

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

e se decide pelo sinal \mathbf{s}_m que produz a maior métrica (PROAKIS, 1989). Em outras palavras, o sinal recebido $\mathbf{r} = [r_f \ r_q]$ é projetado sobre cada um dos M possíveis vetores de sinal \mathbf{s}_m e uma decisão é tomada em favor do sinal que produz a maior projeção.

O detector de correlação descrito acima é equivalente a um detector de fase que calcula a fase do sinal recebido \mathbf{r} e seleciona o vetor de sinal \mathbf{s}_m que tem a fase mais próxima do sinal \mathbf{r} , sendo a fase de \mathbf{r} dada por:

$$\Theta_r = \tan^{-1} \frac{r_q}{r_f} \quad (\text{B.4})$$

A seguir será determinada a função densidade de probabilidade (f.d.p) de Θ_r , e a partir desta será calculada a probabilidade de erro do sistema.

Considere que o sinal transmitido tem representação vetorial dada por:

$$\mathbf{s} = [s_f \ s_q] \quad (\text{B.5})$$

Logo o sinal recebido tem componentes

$$\begin{aligned} r_f &= s_f + n_f \\ r_q &= s_q + n_q \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Como n_f e n_q são variáveis aleatórias Gaussianas independentes e conjuntamente distribuídas, segue que r_f e r_q são variáveis aleatórias Gaussianas independentes e conjuntamente distribuídas, com $E[r_f] = s_f$, $E[r_q] = s_q$ e $\sigma_{r_f}^2 = \sigma_{r_q}^2 = \frac{1}{2}N_0 = \sigma_r^2$. Conseqüentemente,

$$p_r(r_f, r_q) = \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} \exp \left[-\frac{(r_f - s_f)^2 + (r_q - s_q)^2}{2\sigma_r^2} \right] \quad (\text{B.7})$$

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) da fase Θ_r é obtida através da troca de variáveis de (r_f, r_q) para

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{r_f^2 + r_q^2} \\ \Theta_r &= \tan^{-1}(r_q/r_f) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Logo, supondo que o sinal PSK \mathbf{s}_m é transmitido, considerando (B.3) e (B.8), tem-se

$$p_{V,\Theta_r}(V, \Theta_r) = \frac{1}{\pi\aleph_0} \exp \left[-\frac{V^2 - 2V\sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\Theta_r - \Theta_m) + \mathcal{E}_s}{\aleph_0} \right] \quad (\text{B.9})$$

A integração de $p_{V,\Theta_r}(V, \Theta_r)$ sobre a total região de V produz $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$. Logo,

$$\begin{aligned} p_{\Theta_r}(\Theta_r) &= \int_0^\infty p_{V,\Theta_r}(V, \Theta_r) V dV \\ &= \frac{1}{\pi\aleph_0} \int_0^\infty V \exp \left[-\frac{V^2 - 2V\sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\Theta_r - \Theta_m) + \mathcal{E}_s}{\aleph_0} \right] dV \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Considere que o sinal \mathbf{s}_1 tenha sido transmitido. Neste caso haverá erro de demodulação se o ruído do canal provocar um deslocamento na fase do sinal transmitido suficiente para deslocá-la para fora da região $-\pi/M \leq \Theta_r \leq \pi/M$. Conseqüentemente, a probabilidade de erro de símbolo é dada por

$$P_M = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p_{\Theta_r}(\Theta_r) d\Theta_r \quad (\text{B.11})$$

Em geral, a integral de $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$ é de difícil solução e deve ser avaliada numericamente, exceto para $M = 2$ e $M = 4$.

Para o sistema PSK binário ($M = 2$), também denominado de BPSK, a probabilidade de erro de bit é dada por (PROAKIS, 1989),

$$P_{\text{erro}} = Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{\aleph_0}} \right) \quad (\text{B.12})$$

em que

$$Q(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\infty e^{-y^2/2} dy \quad (\text{B.13})$$

Quando $M = 4$, tem-se dois sinais com modulação BPSK em quadratura. Como não existe interferência entre os sinais nas duas portadoras em quadratura, a probabilidade de erro de bit é idêntica a definida pela Equação (B.12). Por outro lado, a probabilidade de erro de símbolo para $M = 4$ é determinada observando-se que

$$\mathbf{P}_c = (1 - \mathbf{P}_2)^2 = \left[1 - Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \right) \right]^2 \quad (\text{B.14})$$

em que \mathbf{P}_c é a probabilidade de uma decisão correta para o símbolo de 2 bits. Esse resultado segue da independência estatística do ruído sobre as portadoras em quadratura. Portanto, a probabilidade de erro de símbolo para $M = 4$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_4 &= 1 - \mathbf{P}_c \\ &= 2Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \right) \left[1 - \frac{1}{2}Q \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Para $M > 4$, a probabilidade de erro de símbolo \mathbf{P}_M é obtida através da integração numérica definida em (B.10). Entretanto, pode-se obter uma aproximação para $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$ válida para valores elevados de M e de SNR. Para $\mathcal{E}_s/\mathcal{N}_0 \gg 1$ e $|\Theta_r| \leq \frac{1}{2}\pi$ a função $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$ é bem aproximada por

$$p_{\Theta_r}(\Theta_r) \approx \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{\pi\mathcal{N}_0}} \cos(\Theta_r - \Theta_m) e^{-\frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0} \sin^2(\Theta_r - \Theta_m)} \quad (\text{B.16})$$

Substituindo $p_{\Theta_r}(\Theta_r)$ na Equação (B.11) e realizando a mudança na variável Θ_r para $u = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0}} \sin(\Theta_r - \Theta_m)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_M &\approx 1 - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{\pi\mathcal{N}_0}} \cos(\Theta_r - \Theta_m) e^{-\frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{N}_0} \sin^2(\Theta_r - \Theta_m)} d\Theta_r \\ &\approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\mathcal{E}_b/\mathcal{N}_0} \sin(\Theta_1 - \Theta_m)}^{\sqrt{\mathcal{E}_b/\mathcal{N}_0} \sin(\Theta_2 - \Theta_m)} e^{-u^2} du \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} \left[\text{erfc} \left(\sqrt{\mathcal{E}_b/\mathcal{N}_0} \sin(\Theta_2 - \Theta_m) \right) - \text{erfc} \left(\sqrt{\mathcal{E}_b/\mathcal{N}_0} \sin(\Theta_1 - \Theta_m) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

em que θ_1 e θ_2 delimita a região de demodulação do sinal sem erro.

A probabilidade de erro de bit para o M-PSK é mais difícil de se obter. Isto ocorre devido a dependência que existe entre o mapeamento dos 2^k símbolos da constelação nas fases dos

sinais correspondentes. Quando um código Gray é usado no mapeamento, dois símbolos que correspondem a sinais de fase adjacentes diferem em um único bit. Como os erros mais prováveis ocorrem entre símbolos adjacentes, a maioria dos erros de demodulação originam um único erro de bit. Logo a probabilidade de erro de bit para a modulação M-PSK com mapeamento Gray pode ser aproximada para alta SNR por

$$\mathbf{P}_b \approx \frac{1}{k} \mathbf{P}_M \quad (\text{B.18})$$

B.2 PROBABILIDADE DE ERRO EM CANAIS COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH PLANO

Nesta seção será derivada a probabilidade de erro de sinais PSK em canais com desvanecimento Rayleigh plano e lento.

Os sinais transmitidos através de um canal com desvanecimento não-seletivo em frequência são afetados por uma distorção multiplicativa. Para o caso de um processo de desvanecimento que varia lentamente ao longo do tempo, pode-se assumir que o fator de desvanecimento é constante durante um intervalo de sinalização. Conseqüentemente, se o sinal transmitido for denotado por $s_m(t)$, o equivalente passa-baixa do sinal recebido é dado por

$$r(t) = \alpha e^{-j\phi} s_m(t) + n(t), \quad 0 \leq nT_s \leq T \quad (\text{B.19})$$

em que $n(t)$ representa o processo do ruído branco Gaussiano complexo que corrompe o sinal. No modelo do canal de comunicação adotado, considera-se ainda que o processo de desvanecimento é lento o suficiente para se estimar perfeitamente o deslocamento de fase ϕ do canal a partir do sinal recebido.

Um método que pode ser utilizado para calcular a probabilidade de erro do sistema com modulação PSK em canais com desvanecimento é avaliar, inicialmente, a probabilidade de erro do sistema condicionada a um fator fixo α e, posteriormente, retirar o condicionamento a partir da função de densidade de probabilidade da v. a. do desvanecimento α .

Dessa forma, considerando que o sinal transmitido $[s_f \ s_q]$ é afetado por um fator fixo α

conhecido, tem-se que o sinal recebido tem componentes

$$\begin{aligned} r_f &= \alpha s_f + n_f \\ r_q &= \alpha s_q + n_q \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Logo, a partir da Equação (B.7), segue que r_f e r_q são variáveis aleatórias Gaussianas conjuntamente distribuídas com f.d.p dada por

$$p_r(r_f, r_q|\alpha) = \frac{1}{2\pi\sigma_r^2} \exp \left[-\frac{(r_f - \alpha s_f)^2 + (r_q - \alpha s_q)^2}{2\sigma_r^2} \right] \quad (\text{B.21})$$

Considerando a mudança de variáveis definida em (B.8), tem-se

$$p_{V,\Theta_r}(V, \Theta_r|\alpha) = \frac{1}{\pi\aleph_0} \exp \left[-\frac{V^2 - 2\alpha V\sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\Theta_r - \Theta_m) + \alpha^2 \mathcal{E}_s}{\aleph_0} \right] \quad (\text{B.22})$$

A integração de $p_{V,\Theta_r}(V, \Theta_r|\alpha)$ sobre a região de V produz $p_{\Theta_r}(\Theta_r|\alpha)$. Logo,

$$\begin{aligned} p_{\Theta_r}(\Theta_r|\alpha) &= \int_0^\infty p_{V,\Theta_r}(V, \Theta_r|\alpha) V dV \\ &= \frac{1}{\pi\aleph_0} \int_0^\infty V \exp \left[-\frac{V^2 - 2\alpha V\sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\Theta_r - \Theta_m) + \alpha^2 \mathcal{E}_s}{\aleph_0} \right] dV \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Pode-se retirar o condicionamento em α calculando o valor médio de $p_{\Theta_r}(\Theta_r|\alpha)$ sobre a função densidade de probabilidade da v.a. α .

Considerando um canal com desvanecimento Rayleigh, tem-se (PROAKIS, 1989)

$$p_\alpha(\alpha) = \frac{2\alpha}{\Omega} \exp^{-\alpha^2/\Omega}, \quad \alpha \geq 0, \quad \Omega = \mathbb{E}[\alpha^2] \quad (\text{B.24})$$

Logo, assumindo $\Omega = 1$, segue que $p_{\Theta_r}^{\text{ray}}(\Theta_r)$ é expressa por

$$\begin{aligned} p_{\Theta_r}^{\text{ray}}(\Theta_r) &= \int_0^\infty p_{\Theta_r}(\Theta_r|\alpha) p(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi\aleph_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha V \exp \left[-\frac{V^2 - 2\alpha V\sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\Theta_r - \Theta_m) + \alpha^2(\mathcal{E}_s + \aleph_0)}{\aleph_0} \right] dV d\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Dessa forma, supondo que o sinal \mathbf{s}_m tenha sido transmitido, haverá erro de demodulação se as perturbações do canal provocarem um deslocamento na fase do sinal \mathbf{s}_m suficiente para

deslocá-la para fora de sua região de decisão, denotada por $[\Theta_1 \ \Theta_2]$. Logo, a probabilidade de erro de um sistema PSK com sinais equiprováveis em um canal com desvanecimento Rayleigh é dada por

$$P_M^{\text{ray}} = 1 - \frac{2}{\pi N_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha V \exp \left[-\frac{V^2 - 2\alpha V \sqrt{\mathcal{E}_s} \cos(\Theta_r - \Theta_m) + \alpha^2 (\mathcal{E}_s + N_0)}{N_0} \right] dV d\alpha d\Theta_r \quad (\text{B.26})$$

B.3 CONCLUSÃO

Neste apêndice foi apresentada uma breve revisão da técnica de modulação PSK. Além disso, as expressões de probabilidades de erros de demodulação de sinais PSK provenientes de uma constelação assimétrica foram deduzidas em canais com ruído aditivo Gaussiano branco e em canais sujeitos ao desvanecimento Rayleigh não-seletivo em frequência.

Essas expressões foram empregadas no Capítulo 4 para analisar a distribuição de probabilidades do ruído de demodulação.

APÊNDICE C

ALGORITMOS GENÉTICOS

Os algoritmos genéticos (AGs) são métodos probabilísticos de otimização e busca inspirados nos mecanismos de evolução natural. Foram introduzidos por John Holland em parceria com alguns de seus colegas e por estudantes da universidade de Michigan durante a década de 70 (HOLLAND, 1975), mas só se popularizaram a partir da publicação, em 1989, do livro *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, de autoria de um dos seus alunos, David Goldberg.

Os algoritmos genéticos emulam a teoria da evolução biológica, fundamentada no princípio da sobrevivência do mais apto, da forma como o naturalista e fisiologista Charles Darwin enunciou em seu livro *A origem das espécies* (1859). De acordo com Darwin, "Quanto melhor um indivíduo se adaptar ao seu meio ambiente, maior será a sua chance de sobrevivência e de gerar descendentes".

Desde a década de 90, os algoritmos genéticos têm sido aplicados com sucesso na resolução de diversos problemas de otimização combinatória em diferentes áreas do conhecimento. Os algoritmos genéticos têm sido aplicados com êxito a problemas com múltiplos objetivos, com grande número de restrições e problemas com espaços de busca muito grandes. Essa ampla aplicabilidade é resultado da capacidade que o algoritmo possui de realizar uma busca adaptativa, paralela e cega. Esta última se deve ao fato de que a operação do algoritmo é inerentemente independente da aplicação.

As principais características do AG, as quais o tornam um método de busca e otimização singular, são enumeradas na seqüência:

1. Realizam a busca sobre uma população de soluções, sendo portanto, paralelos;

2. Usam aptidões (geradas por funções de aptidão) para guiar a busca, e não derivadas ou outros conhecimentos prévios auxiliares;
3. Utilizam leis probabilísticas e não determinísticas.

O primeiro passo para a aplicação do AG a um problema qualquer é representar cada solução eventual x no espaço de busca do problema como uma seqüência s de símbolos, que assumem valores a partir de um dado alfabeto \mathbf{A} , que pode ser de dois tipos básicos: binário e ponto-flutuante. Cada seqüência s corresponde a um *cromossomo* e cada elemento de s é equivalente a um *gene*. Como cada gene pode assumir qualquer valor do alfabeto \mathbf{A} , cada elemento de \mathbf{A} é equivalente a um *alelo*, ou seja, um valor possível para um dado gene.

Tendo-se definido uma representação cromossômica, gera-se um conjunto aleatório de soluções possíveis para o problema. Este conjunto forma a chamada *população inicial*, em que cada solução eventual é denominada *indivíduo*. Em geral, cada indivíduo da população é constituído de um único cromossomo, razão pela qual é comum se usarem os termos indivíduo e cromossomo indistintamente nos textos científicos. A maioria dos AGs propostos na literatura opera com uma população com um número fixo N de indivíduos e cromossomos de tamanho constante.

Os algoritmos genéticos são algoritmos iterativos e a cada iteração a população é modificada. Cada iteração de um AG é denominada *geração*, embora nem todos os indivíduos de uma população sejam necessariamente “filhos” de indivíduos da população na iteração anterior. A população inicial deve cobrir a maior área possível do espaço de busca, pois os indivíduos devem ter diferentes graus de adaptação ao ambiente em que vivem. O princípio fundamental dos AGs é que todos os indivíduos da população evoluam, por meio de determinadas operações, até que sejam todos iguais e representem uma solução ótima.

Devido ao fato dos AGs terem sido inspirados na teoria da evolução das espécies, muitos termos foram importados da biologia. A Tabela C.1 mostra a equivalência entre os principais termos e os seus significados.

Tabela C.1. Termos biológicos usados no contexto dos AGs.

Termo Empregado	Significado no Contexto dos AGs
Indivíduo	Uma solução potencial do problema manipulada pelo AG.
Cromossomo	Representação do indivíduo, constituído por genes.
Gene	Elemento de informação integrante do cromossomo.
Alelo	Valor que um gene pode assumir.
Genótipo	Uma solução do problema no domínio do AG.
População	Um conjunto de indivíduos.
Geração	Cada iteração do processo evolutivo.
Aptidão	Uma característica de cada indivíduo que denota a capacidade de gerar descendentes.

C.1 OPERADORES BÁSICOS DE UM ALGORITMO GENÉTICO

Os operadores têm a função de implementar o processo reprodutivo simulado que ocorre nos AGs. Diversos operadores foram propostos na literatura, bem como diferentes estratégias para implementação. Contudo, serão abordados na seqüência os operadores mais simples e populares, sendo eles: seleção, cruzamento e mutação.

Após a criação da população inicial, são realizadas operações específicas sobre esta população que tentam simular o que ocorre em um ambiente natural ao longo de vários anos. Como acontece na natureza, com o passar do tempo, a população se renova dando origem a uma nova geração. As operações de seleção natural, cruzamento e mutação são responsáveis pela criação de uma nova geração. O princípio básico é que os indivíduos melhores adaptados ao ambiente tenham mais chances de perpetuar suas informações genéticas, passando-as adiante para as futuras gerações. O processo utilizado para se determinar qual é o indivíduo que se encontra melhor adaptado ao ambiente é a *seleção natural*.

A avaliação dos indivíduos mais adaptados ao ambiente é realizada por meio da função de aptidão do problema para o qual deseja-se encontrar um máximo ou um mínimo. Esta função atribui a cada indivíduo uma medida de quão bem adaptado ao ambiente ele está, chamada *aptidão*. Em populações naturais, a aptidão é determinada pela habilidade do indivíduo sobreviver a predadores, pestes e outros obstáculos à vida adulta e sua subsequente reprodução. A função que avalia a aptidão de cada indivíduo é, talvez, a parte mais importante

de um AG. Ela tem o potencial de afetar severamente o desempenho geral do algoritmo em termos da qualidade dos resultados e tempo de execução (BRAZ, 2003).

A seleção natural ocorre em cada geração, antes do processo de cruzamento, indicando os indivíduos mais aptos para a reprodução. Neste processo, um indivíduo da população pode ser selecionado mais de uma vez, além disso, todos os indivíduos da população têm chances de ser selecionados para se reproduzirem na geração seguinte.

Uma técnica de seleção comum consiste na atribuição de uma probabilidade de seleção, p_j , a cada indivíduo j , baseada na sua aptidão. Uma seqüência de N números aleatórios (em que N é o tamanho da população) com distribuição de probabilidades uniforme normalizada, $U(0,1)$, é então gerada e comparada com as probabilidades cumulativas, $C_i = \sum_{j=1}^i p_j$, da população. Um determinado indivíduo, i , é selecionado e copiado na nova população se $C_{i-1} < U(0,1) \leq C_i$. Existem alguns métodos para a atribuição de probabilidades aos indivíduos da população: método da roleta, posto linear, posto geométrico, entre outros (GOLDBERG, 1989; MICHALEWICZ, 1994).

Após a seleção, aparece o mecanismo de cruzamento, o qual emula um processo de reprodução sexuada (ou seja, envolve a iteração de dois indivíduos) no qual ocorre a troca de fragmentos entre pares de cromossomos. O número de cruzamentos que ocorre em cada geração é determinado pela taxa de cruzamento, um percentual da população que indica o número de indivíduos que participarão deste processo. Geralmente este percentual situa-se entre 50% e 80% do número de indivíduos da população (ALMEIDA, 2004).

Os genes representam a informação genética mais elementar do indivíduo e são encadeados para formar o cromossomo. A operação de cruzamento envolve uma recombinação de genes entre dois indivíduos para produzir um par de filhos que, como no processo natural, traz a informação genética dos pais.

Os cruzamentos dão origem a uma população intermediária, que é incluída na população inicialmente selecionada. Como o número de indivíduos de uma geração para outra é mantido constante e igual a N , faz-se a redução da população aumentada através da técnica de torneio,

que consiste em selecionar aleatoriamente um par de cromossomos e descartar o que tiver o pior valor de aptidão, repetindo o processo até que a população volte ao número inicial N de indivíduos.

A etapa que conclui a formação de uma nova geração é a mutação. O número de indivíduos que participam deste processo é definido pela taxa de mutação que geralmente varia entre 1% e 5%. A mutação consiste em alterar um gene de um cromossomo. A escolha do cromossomo que sofrerá mutação e do gene a ser alterado é feita de forma aleatória. O novo valor que o gene assumirá também é escolhido aleatoriamente. A natureza aleatória de todas as operações realizadas (seleção natural, cruzamento e mutação) garante que o processo não se torne tendencioso e se aproxime do que realmente ocorre na natureza.

Finalmente, após a aplicação das operações descritas, tem-se a formação de uma nova geração de indivíduos. Todo o processo é então repetido até que praticamente todos os indivíduos da população sejam idênticos e iguais a uma solução ótima. É como se ficasse estabelecido o domínio de um indivíduo muito forte (o qual representa a solução ótima) sobre os demais indivíduos da população. Este indivíduo, que possui grandes chances de perpetuar suas informações genéticas, acaba por espalhar, ao longo das gerações, suas características em todos os indivíduos. A população, por fim, torna-se homogênea.

C.2 CONVERGÊNCIA DO MÉTODO

A convergência de um algoritmo genético depende de uma série de fatores, sendo os mais determinantes: o tamanho da população, a taxa de cruzamento e a taxa de mutação. Quanto maior o número de indivíduos na população, maior será a diversidade de material genético e mais gerações serão necessárias para que a população se torne homogênea. Por outro lado, populações muito pequenas podem resultar em convergência prematura, impedindo que o AG realize uma busca satisfatória por falta de diversidade na população. Contudo, aumentar a população indefinidamente não implica em melhora de desempenho.

As taxas de cruzamento e mutação interferem diretamente na velocidade com que o algoritmo converge. Quanto maior for a taxa de cruzamento, devido ao maior número de reproduções e conseqüente mistura de material genético, mais rapidamente a população se tornará homogênea. A mutação age no sentido contrário, como sendo uma perturbação no processo. Quanto maior a taxa de mutação, mais indivíduos com novas características são formados a cada geração. A mutação contribui para diversificar o material genético da população, realizando uma exploração mais ampla do espaço de busca. Entretanto, atrasa o processo de tornar a população mais homogênea.

Uma outra interpretação para as operações de cruzamento e mutação é entendê-las como mecanismos de busca local e global, respectivamente. Enquanto que os cruzamentos conduzem o processo para encontrar um ótimo local, as mutações, se bem sucedidas, desviam a busca na direção de um possível ótimo global (ARAÚJO, 2002). Caso uma mutação seja mal sucedida, dificilmente as características do indivíduo que sofreu esta mutação se perpetuarão. Logo, a busca continua no mesmo sentido em que estava antes.

A função de aptidão também afeta a velocidade de convergência do algoritmo, desde que esteja mal condicionada ao problema. Uma taxa de variação muito grande nesta função pode privilegiar excessivamente algumas soluções em detrimento de outras, provocando uma convergência prematura. Efeito contrário é obtido com taxas de variação pequenas. Nestes casos, o método de seleção pode degenerar para uma seleção aleatória com probabilidades aproximadamente iguais, fazendo com que o algoritmo não evolua.

A convergência de um algoritmo se dá quando não mais ocorrer um melhoramento significativo na diversidade da população entre gerações, ou seja, quando a maior parte dos cromossomos forem idênticos, indicando alto índice de homogeneidade, o que normalmente acontece para um valor acima de 95% (BRAZ, 2003).

C.3 CONCLUSÃO

Este apêndice abordou conceitos relacionados à técnica de otimização por algoritmos genéticos. Foi introduzido a origem desses algoritmos, seus princípios de funcionamento e fatores que influenciam diretamente no seu desempenho.

APÊNDICE D

MATRIZES E SISTEMAS WAVELETS

Uma matriz wavelet é uma generalização das matrizes unitárias (quadradas) para matrizes retangulares. No contexto da engenharia elétrica, as matrizes wavelets correspondem aos bancos de filtros digitais multitaxas, em que cada linha da matriz corresponde a um filtro passa-faixa do banco. Cada matriz wavelet contém a informação básica necessária para se definir um sistema wavelet. De fato, várias propriedades analíticas dos sistemas wavelets dependem das propriedades algébricas das matrizes wavelets. (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998).

Várias são as matrizes wavelets usadas na matemática aplicada e no processamento de sinais. Como exemplos, podem-se citar: as matrizes da transformada de Fourier discreta, as matrizes da transformada do cosseno discreta, as matrizes de Walsh e Hadamard, matrizes de Rademacher, e matrizes de Chebyshev (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998). Todas estas matrizes são unitárias (ortogonais se forem reais).

O restante deste apêndice é organizado como segue: Na Seção D.1 será apresentada a definição de matrizes wavelets, seus fundamentos, propriedades elementares e alguns exemplos. Na Seção D.2, as matrizes wavelets são caracterizadas a partir de suas respectivas matrizes de Haar. Na Seção D.3, define-se a expansão de funções discretas em séries finitas de coeficientes wavelets. Uma importante propriedade apresentada nesta seção estabelece que toda a energia de uma função discreta, expandida em coeficientes wavelets, fica concentrada nos próprios coeficientes da série finita. Na Seção D.4, as funções de escala e wavelets serão definidas a partir dos coeficientes das matrizes wavelets. Na Seção D.5, os sistemas wavelets serão definidos a partir de suas matrizes wavelets correspondentes. Finalmente, na Seção D.6, são apresentadas algumas conclusões.

D.1 AS MATRIZES WAVELETS

Seja \mathbb{F} um corpo arbitrário. O corpo \mathbb{F} pode ser definido no conjunto \mathbb{Q} dos números racionais, \mathbb{R} dos números reais, \mathbb{C} dos números complexos ou em algum conjunto algébrico. Considere uma matriz $\mathbf{A} = (a_k^s)$, com $m \geq 2$ linhas (vetores) de comprimento possivelmente infinito, dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cdots & a_{-1}^0 & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\ \cdots & a_{-1}^1 & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{-1}^{m-1} & a_0^{m-1} & a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

em que m é definido como o *posto* da matriz e cada elemento $a_k^s \in \mathbb{F}$ e $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$. São definidas submatrizes \mathbf{A}_l de \mathbf{A} de dimensão $m \times m$ da forma

$$\mathbf{A}_l = (a_{lm+r}^s), \quad r = 0, \dots, m-1, \quad s = 0, \dots, m-1 \quad (\text{D.2})$$

para $l \in \mathbb{Z}$. Assim, a matriz \mathbf{A} pode ser expressa em termos de blocos de matrizes na forma

$$\mathbf{A} = (\dots, \mathbf{A}_{-1}, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \dots), \quad (\text{D.3})$$

em que, por exemplo,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_{m-1}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^{m-1} & \cdots & a_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Da teoria de variáveis complexas, a partir da matriz \mathbf{A} , pode ser construída uma série de potências

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_l z^l, \quad (\text{D.5})$$

denominada de série de Laurent da matriz (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998). $\mathbf{A}(z)$ também pode ser escrita como uma matriz $m \times m$ tendo como elementos os coeficientes da série de Laurent

$$\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} \sum_k a_{mk}^0 z^k & \cdots & \sum_k a_{mk+m-1}^0 z^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k a_{mk+r}^s z^k & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_k a_{mk}^{m-1} z^k & \cdots & \sum_k a_{mk+m-1}^{m-1} z^k \end{pmatrix}, \quad (\text{D.6})$$

sendo também denotada de matriz de Laurent de \mathbf{A} . Ambas as representações (D.5) e (D.6) serão denominadas de representações de Laurent da matriz \mathbf{A} .

Supondo que há um número finito de matrizes não-nulas na Equação (D.5), tem-se que

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{l=N_1}^{N_2} \mathbf{A}_l z^l, \quad (\text{D.7})$$

considerando que \mathbf{A}_{N_1} e \mathbf{A}_{N_2} são matrizes não-nulas. Seja $g = N_2 - N_1 + 1$, denominado de *gênero* da matriz \mathbf{A} , o número de termos não nulos da série representada pela Equação (D.7).

Finalmente, é definida a adjunta $\tilde{\mathbf{A}}(z)$ da matriz de Laurent $\mathbf{A}(z)$ por

$$\tilde{\mathbf{A}}(z) = \mathbf{A}^*(z^{-l}) = \sum_l \mathbf{A}_l^* z^{-l}, \quad (\text{D.8})$$

em que $\mathbf{A}_l^* = \overline{\mathbf{A}}^t$ é a transposta conjugada da matriz \mathbf{A}_l .

Supondo que \mathbf{A} tem m linhas e possivelmente, um número infinito de colunas, a matriz \mathbf{A} é denominada de matriz wavelet de posto m se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$\mathbf{A}(z) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(z) = mI, \quad (\text{D.9})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^s = m\delta_{s,0}, \quad 0 \leq s \leq m-1. \quad (\text{D.10})$$

em que $\delta_{s,0}$ é o símbolo de Kronecker.

Na maioria das vezes, o número de colunas da matriz \mathbf{A} é finito. Nesses casos, a matriz wavelet \mathbf{A} terá uma dimensão finita $m \times mg$, em que g , como dito antes, é o gênero da matriz \mathbf{A} . O gênero pode ser visto como o número de blocos de matrizes $m \times m$ que formam a matriz \mathbf{A} .

O conjunto de todas as matrizes wavelets de posto m e gênero g será representado por $WM(m, g; \mathbb{F})$. Geralmente \mathbb{F} forma um corpo nos números reais ou nos complexos.

A Equação (D.9) tem uma representação equivalente em termos dos coeficientes da matriz wavelet \mathbf{A} , dada por

$$\sum_k a_{k+ml'}^{s'} \bar{a}_{k+ml}^s = m\delta_{s',s}\delta_{l',l}. \quad (\text{D.11})$$

As relações (D.9) e (D.10) ou equivalentemente (D.11) e (D.10) são denominadas, respectivamente, de condições quadrática e linear das matrizes wavelets. A condição quadrática assegura que as linhas de uma matriz wavelet $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_k^s) = (a_0^s, \dots, a_{mg-1}^s)$ têm comprimento igual a \sqrt{m} e que são ortogonais entre si, mesmo quando deslocadas por um múltiplo arbitrário de m . O vetor \mathbf{a}^0 é denominado de vetor de escala e cada um dos vetores \mathbf{a}^s , $1 < s < m$, é denominado de vetor wavelet. A condição de linearidade ou de escalonamento, dada pela Equação (D.10), estabelece que a soma dos elementos do vetor de escala é igual ao posto m da matriz wavelet, enquanto que, a soma dos elementos de cada vetor wavelet é igual a zero. As matrizes wavelets de posto m podem ser vistas como um banco de filtros digitais com m -bandas, em que a primeira linha equivale a um filtro passa-baixas e as $m - 1$ linhas restantes equivalem a filtros passa-faixa. Dessa forma, para uma dada matriz wavelet, os elementos do vetor de escala e dos vetores wavelets são também chamados de coeficientes de filtro passa-baixas e coeficientes de filtros passa-faixa, respectivamente.

Dada uma matriz wavelet com gênero finito, $a_k^s \neq 0$, para $0 \leq k < mg$, suas linhas serão representadas por

$$a_k := a_k^0 \quad b_k^s := a_k^s, \quad (\text{D.12})$$

em que $0 < s < m$ e $0 \leq k < mg$. Dessa forma, os vetores de escala e wavelets serão denotados, respectivamente por:

$$\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{m-1}) \quad (\text{D.13})$$

$$\mathbf{b}^s = (b_0^s, \dots, b_{m-1}^s) \quad (\text{D.14})$$

A seguir serão apresentados alguns exemplos simples de matrizes wavelets (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998).

Exemplo D.1 Matrizes de Haar de posto 2: *As matrizes abaixo, denominadas de matrizes de Haar, são as únicas matrizes wavelets quadradas de posto 2 com coeficientes reais*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.15})$$

De forma geral, uma matriz de Haar com elementos complexos é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.16})$$

Exemplo D.2 **Matriz Wavelet de Daubechies de posto 2 e gênero 2:** A matriz D_2

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} & -3 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{D.17})$$

é uma das matrizes de posto 2 descobertas por Daubechies (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998).

Exemplo D.3 **Matriz Wavelet de posto 2 e gênero 2:** Seja $a_k(\theta)$, as componentes de uma família de vetores de escala

$$a_0(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} \cos \left[\theta + \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad (\text{D.18})$$

$$a_1(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} \cos \left[\theta - \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad (\text{D.19})$$

$$a_2(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{2} \cos \left[\theta + \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad (\text{D.20})$$

$$a_3(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{2} \cos \left[\theta - \frac{\pi}{4} \right] \right), \quad (\text{D.21})$$

em que $0 \leq \theta < 2\pi$ e o correspondente vetor wavelet associado $b_k(\theta) = (-1)^{k+1} a_{3-k}(\theta)$. Então a matriz

$$A := \begin{pmatrix} a_0(\theta) & a_1(\theta) & a_2(\theta) & a_3(\theta) \\ b_0(\theta) & b_1(\theta) & b_2(\theta) & b_3(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{D.22})$$

é uma família de matrizes wavelets de posto 2 e gênero 2 definida por um único parâmetro θ , segundo as relações a_k e b_k . A matriz D_2 é um caso especial deste exemplo para $\theta = \pi/6$.

D.2 MATRIZES WAVELETS DE HAAR

O conjunto das matrizes wavelets com gênero igual a 1 é de especial importância na teoria das wavelets. Este conjunto é denotado por

$$H(m; \mathbb{F}) = MW(m, 1; \mathbb{F}). \quad (\text{D.23})$$

Os elementos de $H(m; \mathbb{F})$ são denominados de matrizes wavelets de Haar de posto m . A importância das matrizes de Haar na teoria das wavelets se deve ao fato que essas matrizes

são capazes de caracterizar todas as demais matrizes wavelets. Nas seções seguintes são discutidas algumas propriedades das matrizes de Haar e algumas operações que possibilitam a construção de matrizes de maior dimensão a partir de matrizes de menor dimensão.

D.2.1 A Matriz de Haar Canônica

Seja $U(m)$ o conjunto unitário de posto m , formado por todas as matrizes complexas \mathbf{U} de dimensão $m \times m$, em que, $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I}$ (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998).

Teorema D.1 *Uma matriz complexa \mathbf{H} $m \times m$ é uma matriz de Haar se, e somente se,*

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \mathbf{H}, \quad (\text{D.24})$$

em que $\mathbf{U} \in U(m-1)$ é uma matriz unitária e \mathbf{H} é a matriz de Haar canônica de posto m , definida por

$$\mathbf{H} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -(m-1)\sqrt{\frac{1}{m-1}} & \sqrt{\frac{1}{m-1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sqrt{\frac{1}{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -s\sqrt{\frac{m}{s^2+s}} & \sqrt{\frac{m}{s^2+s}} & \cdots & \cdots & \sqrt{\frac{m}{s^2+s}} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{m}{2}} & \sqrt{\frac{m}{2}} & \end{pmatrix} \quad (\text{D.25})$$

em que $s = (m - k)$ e $k = 0, 1, \dots, m - 1$ são os números das linhas da matriz.

Lema D.1 *Seja $\mathbf{H} = (h_r^s)$ uma matriz de Haar. Então,*

$$h_r := h_r^0 = 1, \quad 0 \leq r \leq m. \quad (\text{D.26})$$

Corolário D.1 *Sejam \mathbf{H}' , $\mathbf{H}'' \in H(m; \mathbb{C})$ duas matrizes de Haar. Então, existe uma matriz unitária $\mathbf{U} \in U(m-1)$ de modo que*

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \mathbf{H}''. \quad (\text{D.27})$$

Corolário D.2 *Seja \mathbf{A} uma matriz wavelet real, ou seja, $a_k^s \in \mathbb{R}$, então \mathbf{A} é uma matriz de Haar se, e somente se,*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{H}, \quad (\text{D.28})$$

em que $\mathbf{O} \in O(m-1)$ é uma matriz ortogonal e \mathbf{H} é a matriz de Haar canônica de posto m .

D.2.2 Matriz de Haar Característica de uma Matriz Wavelet

Considere \mathbf{A} uma matriz wavelet e seja $\mathbf{A}(z)$ sua matriz de Laurent. Defina a matriz de Haar característica $\chi(\mathbf{A})$ da matriz wavelet \mathbf{A} por:

$$\chi(\mathbf{A}) := \mathbf{A}(1). \quad (\text{D.29})$$

O teorema seguinte estabelece uma relação entre as matrizes wavelets e as matrizes de Haar.

Teorema D.2 *Se $\mathbf{A} \in MW(m, g; \mathbb{F})$, então $\chi(\mathbf{A}) \in H(m; \mathbb{F})$, ou seja, χ é um mapeamento bem definido de matrizes wavelets de posto m em matrizes de Haar de posto m*

$$MW(m, g; \mathbb{F}) \xrightarrow{\chi} H(m; \mathbb{F}). \quad (\text{D.30})$$

Prova Os elementos da matriz $\mathbf{H} = \chi(\mathbf{A})$ são da forma

$$h_s^r = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{ml+s}^r. \quad (\text{D.31})$$

A matriz \mathbf{H} deve satisfazer as condições (D.9) e (D.10) que definem uma matriz wavelet. Pela condição da linearidade e usando (D.31), é obtido

$$\sum_{s=0}^{m-1} h_s^r = \sum_{s=0}^{m-1} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{ml+s}^r \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^r = m\delta_{r,0}. \quad (\text{D.32})$$

A condição quadrática para $\mathbf{H} = \chi(\mathbf{A})$ segue da condição quadrática geral, dada pela Equação (D.9), calculada em $z = 1$. ■

Corolário D.3 *Seja \mathbf{A} uma matriz wavelet de posto m e $\chi(\mathbf{A})$ a matriz de Haar característica da matriz \mathbf{A} . Então, existe uma matriz unitária $\mathbf{U} \in U(m-1)$ de modo que*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \mathbf{A} \quad (\text{D.33})$$

é uma matriz wavelet cuja matriz de Haar característica $\chi(\mathbf{B})$ é a matriz de Haar canônica, e

$$\chi(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \chi(\mathbf{A}). \quad (\text{D.34})$$

D.2.3 Produto Tensorial entre Matrizes de Haar

O produto tensorial entre duas matrizes de Haar resulta em outra matriz de Haar.

Teorema D.3 Se $\mathbf{A} \in H(m'; \mathbb{F})$ e $\mathbf{B} \in H(m''; \mathbb{F})$, então

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in H(m'm''; \mathbb{F}). \quad (\text{D.35})$$

O teorema acima será ilustrado com um exemplo. Seja $m' = m'' = 2$ e

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 \\ a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_0^0 & b_1^0 \\ b_0^1 & b_1^1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.36})$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_0^0 b_0^0 & a_0^0 b_1^0 & a_1^0 b_0^0 & a_1^0 b_1^0 \\ a_0^0 b_0^1 & a_0^0 b_1^1 & a_1^0 b_0^1 & a_1^0 b_1^1 \\ a_0^1 b_0^0 & a_0^1 b_1^0 & a_1^1 b_0^0 & a_1^1 b_1^0 \\ a_0^1 b_0^1 & a_0^1 b_1^1 & a_1^1 b_0^1 & a_1^1 b_1^1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.37})$$

Aplicando o produto tensorial na matriz de Haar

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.38})$$

e definindo

$$\mathbf{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathbf{H} \otimes \cdots \otimes \mathbf{H}}_{n \text{ fatores}}, \quad (\text{D.39})$$

então, $\mathbf{H}^{\otimes n}$ é uma matriz de Haar de posto 2^n e também um exemplo de uma classe especial de matrizes de Hadamard.

Para $n = 2$ é obtido

$$\mathbf{H}^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ 1 \times (-1) & 1 \times 1 & 1 \times (-1) & 1 \times 1 \\ -1 \times 1 & -1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ -1 \times (-1) & -1 \times 1 & 1 \times (-1) & 1 \times 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.40})$$

$$\mathbf{H}^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.41})$$

$$\mathbf{H}^{\otimes 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{H} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.42})$$

D.2.4 O Operador Extensão

Através do operador extensão, uma matriz wavelet de maior gênero é construída a partir de uma matriz wavelet de menor gênero, ou seja, é feito um mapeamento de uma matriz de menor gênero em uma matriz de maior gênero. De forma a simplificar a apresentação da operação de extensão, serão consideradas apenas matrizes wavelets de posto par. Define-se o operador extensão para a matriz $\mathbf{A} \in MW(m, g; \mathbb{F})$, como

$$E : MW(m, g) \rightarrow MW(m, 4g). \quad (\text{D.43})$$

Seja \mathbf{a}^i , $i = 0, 1, \dots, m-1$ as linhas da matriz \mathbf{A} , i.e.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.44})$$

Então a operação extensão $m \times 4m$ de \mathbf{A} é definida por

$$E(\mathbf{A}) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^0 & \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^0 & -\mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^0 & \mathbf{a}^1 & -\mathbf{a}^0 & \mathbf{a}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}^{m-2} & \mathbf{a}^{m-1} & \mathbf{a}^{m-2} & -\mathbf{a}^{m-1} \\ \mathbf{a}^{m-2} & \mathbf{a}^{m-1} & -\mathbf{a}^{m-2} & \mathbf{a}^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.45})$$

Teorema D.4 Se $\mathbf{A} \in MW(m, g; \mathbb{F})$, então $E(\mathbf{A}) \in MW(m, 4g; \mathbb{F})$.

O operador E pode ser aplicado repetidamente sobre uma matriz wavelet, obtendo-se assim, matrizes wavelets com dimensões cada vez maiores.

Corolário D.4 *Seja n um inteiro positivo. Se m é par e $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbb{F})$, então $E^n(\mathbf{A}) \in WM(m, 4^n g; \mathbb{F})$.*

D.3 EXPANSÃO ORTONORMAL DISCRETA

Qualquer função discreta pode ser representada por uma série finita de coeficientes wavelets.

Teorema D.5 *Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função arbitrária definida sobre os inteiros, e seja \mathbf{A} uma matriz wavelet de posto m e gênero g . Então f tem uma única expansão em termos da matriz \mathbf{A} , expressa por*

$$f(n) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^r a_{n+mk}^r \quad (\text{D.46})$$

em que

$$c_k^r = \frac{1}{m} \sum_n f(n) \bar{a}_{n+mk}^r \quad (\text{D.47})$$

A expansão em matriz wavelet é localmente finita; ou seja, para um determinado n , somente uma quantidade finita de termos na série são diferentes de zero.

A expansão ortonormal discreta é um dos principais elos de ligação entre a teoria matemática das wavelets e suas aplicações práticas.

D.3.0.1 Teorema de Parseval O teorema de Parseval afirma que a energia de uma função discreta expandida em uma série de coeficientes wavelets fica totalmente concentrada nos coeficientes da série.

Teorema D.6 *Se*

$$f(n) = \sum_{0 \leq r < m} \sum_l c_l^r a_{ml+n}^r, \quad (\text{D.48})$$

então

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 = m \left\{ \sum_{0 \leq r < m} \sum_l |c_l^r|^2 \right\}. \quad (\text{D.49})$$

Desde que a expansão em matriz wavelet é localmente finita, a função pode ser eficientemente representada por um número finito de coeficientes wavelets.

Define-se a norma da função discreta $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\|f\|^2 := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 \quad (\text{D.50})$$

Logo, a partir do teorema de Parseval, segue:

Teorema D.7 Se

$$f(n) = \sum_{0 \leq r < m} \sum_l c_l^r a_{ml+n}^r, \quad (\text{D.51})$$

então

$$\|f\|^2 = m \left\{ \sum_{0 \leq r < m} \sum_l |c_l^r|^2 \right\}. \quad (\text{D.52})$$

D.4 FUNÇÕES WAVELETS E DE ESCALA

Para qualquer matriz wavelet $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbb{C})$, existe uma *função de escala* $\varphi(x)$ e $m - 1$ *funções wavelets* $\psi^1(x), \dots, \psi^{m-1}(x)$ definidas no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, em que \mathbb{R} é o conjunto dos números reais (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998). Uma função $f(x)$ definida em \mathbb{R} pertence ao espaço $L^2(\mathbb{R})$ se $|f(x)|^2$ for integrável, ou seja,

$$\int_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (\text{D.53})$$

As funções de escala e wavelets satisfazem relações específicas, definidas em termos da matriz wavelet \mathbf{A} , como segue:

Considere a equação

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi(mx - k) \quad (\text{D.54})$$

em que a_k^0 é o vetor de escala de uma matriz wavelet $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbb{C})$.

Esta equação é chamada de *equação de escala* associada à matriz wavelet $\mathbf{A} = (a_k^s)$. Se $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ é uma solução dessa equação, então φ é chamada de *função de escala* associada à matriz \mathbf{A} . Da mesma forma, pode-se definir as *funções wavelets* $\{\psi^1(x), \dots, \psi^{m-1}(x)\}$ associadas à matriz \mathbf{A} e à função de escala φ pela equação

$$\psi^s(x) := \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^s \varphi(mx - k) \quad (\text{D.55})$$

O teorema a seguir estabelece que cada matriz wavelet possui apenas uma função de escala com suporte compacto.

Teorema D.8 *Seja $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbb{C})$ uma matriz wavelet. Então existe uma única função $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que:*

- (a) φ satisfaz a Equação (D.54);
- (b) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$;
- (c) $\hat{\varphi} \in C^0(\mathbb{R})$;
- (d) $\text{supp } \varphi \subset [0, (g-1) \left(\frac{m}{m-1}\right) + 1]$.

em que $\hat{\varphi}$ denota a transformada de Fourier de φ .

Na prática, pode-se obter uma solução aproximada para a Equação (D.54) como segue. Seja

$$\varphi^0 := \chi_{[0,1)} \quad (\text{D.56})$$

uma função característica, definida por

$$\chi_K = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K \\ 0, & \text{c.c} \end{cases} \quad (\text{D.57})$$

A partir da Equação (D.56), pode-se obter aproximações sucessivas para a função de escala definida pela Equação (D.54) através da equação recursiva:

$$\varphi^\nu(x) := \sum_{k=0}^{mg-1} a_k^0 \varphi^{\nu-1}(mx - k), \quad \nu \geq 1 \quad (\text{D.58})$$

A seqüência $\varphi^\nu(x)$ converge para a solução $\varphi(x)$ quando $\nu \rightarrow \infty$ (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998). Uma vez obtida a função de escala aproximada, as funções wavelets podem ser calculadas pela Equação (D.55). Dessa forma, pode-se obter, para qualquer matriz wavelet \mathbf{A} , as correspondentes funções wavelets e de escala.

D.5 SISTEMAS WAVELET

Considere uma matriz wavelet \mathbf{A} de posto m , e seja φ e ψ^s , $s = 1, \dots, m - 1$, as respectivas funções de escala e wavelets associadas à essa matriz. Para $k, j \in \mathbb{Z}$, define-se

$$\varphi_{jk}(x) := m^{j/2} \varphi(m^j x - k), \quad (\text{D.59})$$

$$\psi_{jk}^s(x) := m^{j/2} \psi^s(m^j x - k), \quad s = 1, \dots, m - 1. \quad (\text{D.60})$$

As Equações (D.59) e (D.60) representam uma família de funções geradas a partir de translações e escalonamentos das funções wavelets e de escala fundamentais. O *sistema wavelet* $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$, associado à matriz wavelet \mathbf{A} , pode então ser definido como o conjunto de funções

$$\mathbb{W}[\mathbf{A}] := \{\varphi_k(x), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{jk}^s(x), j, k \in \mathbb{Z}, j \geq 0, s = 1, \dots, m - 1\}. \quad (\text{D.61})$$

em que,

$$\varphi_k(x) := \varphi_{0k}(x) \quad (\text{D.62})$$

Teorema D.9 *Considere a matriz $\mathbf{A} \in WM(m, g; \mathbb{C})$, o sistema wavelet $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$ associado à \mathbf{A} , e uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$. Existe uma expansão convergente em média quadrática em L^2 da forma*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x) + \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk}^s \psi_{jk}^s(x), \quad (\text{D.63})$$

sendo os coeficientes expressos por

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_k(x) dx, \quad (\text{D.64})$$

$$d_{jk}^s = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{jk}^s(x)dx. \quad (\text{D.65})$$

Para a maioria das matrizes wavelets, o sistema wavelet $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$ é um sistema ortonormal completo e conseqüentemente uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Entretanto, para algumas matrizes wavelets, o sistema $\mathbb{W}[\mathbf{A}]$ não forma uma base ortonormal, embora o Teorema D.9 continue válido (RESNIKOFF; WELLS-JR, 1998).

D.6 CONCLUSÃO

Neste apêndice, as matrizes wavelets foram definidas e algumas de suas propriedades foram apresentadas. Um enfoque especial foi dado às matrizes wavelets de Haar, visto que a codificação wavelet discutida neste trabalho utiliza uma classe de matrizes construídas a partir das matrizes de Haar. As duas ferramentas matemáticas utilizadas neste trabalho, para construção das matrizes wavelets empregadas na codificação, também foram definidas, sendo elas: a operação de extensão e o produto tensorial de matrizes.

Além disso, também foi discutido neste apêndice, a relação unívoca entre cada matriz wavelet e o seu respectivo sistema wavelet associado. Essa relação fica evidente na medida que cada sistema wavelet é construído a partir dos coeficientes de sua respectiva matriz wavelet.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGHAMOHAMMADI, A.; MEYR, H. “On the Error Probability of Linearly Modulated Signals on Rayleigh Frequency-Flat Fading Channels”. *IEEE Transactions on Communications*, v. 38, n. 11, p. 1966–1970, Novembro 1990.
- ALAMOUTI, S. M. “A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications”. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 16, n. 8, p. 1451–1458, Outubro 1998.
- ALMEIDA, A. M. F. “Algoritmos Genéticos para Localização e Ajustes Ótimos de Reguladores de Tensão em Sistemas de Distribuição”. *Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG*, Agosto 2004.
- ALOUINI, M. S.; GOLDSMITH, A. J. “A Unified Approach for Calculating Error Rates of Linearly Modulated Signals over Generalized Fading Channels”. *IEEE Transactions on Communications*, v. 47, n. 9, p. 1324–1334, Setembro 1999.
- AQUINO, L. C. F.; ASSIS, F. M. “Generating Fading-Resistant Constellations using Genetic Algorithm”. *International Microwave and Optoelectronics Conference, SBMO'97/IEEE MTT-S*, p. 719–723, 1997.
- ARAÚJO, A. L. “Algoritmo Genético Guiado por Códigos Algébricos”. *Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG*, Setembro 2002.
- ASSIS, F. M.; SOUSA, E. S. “Rotated Constellation MC-CDMA Systems”. *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference - GLOBECOM'99*, p. 996–1001, 1999.
- BENEDETTO, S.; BIGLIERI, E. *Principles of Digital Transmission: with Wireless Applications*. New York, USA: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999.

BERROU, C.; GLAVIEUX, A.; THITIMAJSHIMA, P. “Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes. 1”. *IEEE International Conference on Communications - ICC'93*, p. 1064–1070, 1993.

BRAZ, H. D. M. “Algoritmos Genéticos para Configuração Ótima de Redes de Distribuição de Energia Elétrica”. *Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG*, Dezembro 2003.

DINIZ, P. S. R. *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. New York, USA: Kluwer Academic Publishers, 1997.

DOYLE, A. C. *A Study in Scarlet*. Beeton's Christmas Annual, 1887.

GOLDBERG, D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. New York, USA: Addison-Wesley, 1989.

GOWDA, C. H.; ANNAMPEDU, V.; VISWANATHAN, R. “Diversity Combining in Antenna Array Base Station Receiver for DS/CDMA System”. *IEEE Communications Letters*, v. 2, n. 7, Julho 1998.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. New York, USA: Academic Press, 1979.

HAGENAUER, J.; OFFER, E.; PAPKE, L. “Iterative Decoding of Binary Block and Convolutional Codes”. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 42, n. 2, p. 429–445, Março 1996.

HAYKIN, S. S. *Adaptive Filter Theory*. New York, USA: Prentice Hall, 1991.

HAYKIN, S. S. *Digital Communications*. New York, USA: John Wiley, 1992.

HOLLAND, J. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Michigan, USA: The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

HOUCK, C.; JOINES, J. A.; KAY, M. G. “Genetic Algorithm for Function Optimization: A Matlab Implementation”. *NCSU-IE TR 95-09*—<http://www.ie.ncsu.edu/mirage/GAToolBox/gaot/papers/gaotv5.ps>, 1995.

JOHNSON, J. M.; RAHMAT-SAMII, Y. “Genetic Algorithms in Engineering Electromagnetics”. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 39, n. 4, p. 7–21, Agosto 1997.

JOINES, J.; HOUCK, C. “On The Use of Non-Stationary Penalty Functions to Solve Constrained Optimization Problems with Genetic Algorithms”. *IEEE Internation Symposium Evolutionary Computation*, p. 579–584, 1994.

KARABOGA, N.; CETINKAYA, B. “Design of Minimum Phase Digital IIR Filters by Using Genetic Algorithm”. *6th Nordic Signal Processing Symposium - NORSIG'2004*, p. 29–32, 2004.

KERPEZ, K. J. “Constellations for Good Diversity Performance”. *IEEE Transactions on Communications*, v. 41, n. 9, p. 1412–1421, Setembro 1993.

LIANG, C.; JONG, J.; STARK, W. E.; EAST, J. R. “Nonlinear Amplifier Effects in Communications Systems”. *Transaction on Microwave Theory and Techniques*, v. 47, n. 8, Agosto 1999.

LOPES, W. T. A. “Diversidade em Modulação Aplicada à Transmissão de Imagens em Canais com Desvanecimento”. *Exame de Qualificação – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG*, Julho 2002.

MALLAT, S. G. “A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation”. *IEEE Transactions on Patters Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 674–693, Julho 19.

MICHALEWICZ, Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. New York, USA: AI Series. Springer-Verlag, 1994.

MULLER, A. "Simulation of Multipath Fading Channels Using the Monte Carlo Method". *IEEE International Conference - ICC'94, SUPERCMM/ICC'94, Conference Record, Serving Humanity Through Communications*, p. 1536–1540, 1994.

NAGUIB, A.; TAROKH, V.; SESHADRI, N.; CALDERBANK, A. R. "Space-time Coded Modulation for High Data Rate Wireless Communications". *IEEE Global Telecommunications Conference - GLOBECOM'97*, v. 1, p. 102–109, Novembro 1997.

NAGUIB, A. F.; TAROKH, V.; SESHADRI, N.; CALDERBANK, A. R. "A Space-Time Coding Modem for High-Data-Rate Wireless Communications". *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 16, n. 8, p. 1459–1478, Outubro 1998.

NASCIMENTO, V. V.; FARIAS, J. E. P. "Compensating Nonlinear Amplifier Effects on a DVB-T Link". *Lecture Notes in Computer Science, Heidelberg*, v. 3124, p. 958, 2004.

NORRIS, A. "Multivariate Analysis and Reverse Engineering of Signal Transduction Pathways". *Dissertação de Mestrado – University of British Columbia*, Abril 2002.

PAPOULIS, A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. New York, USA, third edition: McGraw-Hill, 1991.

PARSONS, J. D. *The Mobile Radio Propagation Channel*. New York, USA: John Wiley, 1992.

PROAKIS, J. G. *Digital Communications*. New York, USA: McGraw-Hill, 1989.

RESNIKOFF, H. L.; WELLS-JR, R. O. *Wavelet Analysis: The Scalable Structure of Information*. New York, USA: Springer-Verlag, 1998.

SILVA, G. A. "Contribuições para Análise de Desempenho de Sistemas de Transmissão em Diversidade por Codificação Espaço-Temporal e o Projeto de Sequências para Espalhamento Espectral Usando Códigos Algébrico-Geométricos". *Tese de Doutorado – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG*, Fevereiro 2001.

SILVA, G. A.; ASSIS, F. M. "Using Space-Time TCM with Rotated Constellations for Transmission over Mobile Communications Channels". *IEE Electronic Letters*, v. 35, n. 6, p. 454–455, Março 1999.

SILVA, V. M.; SOUSA, E. S. "Fading-Resistant Transmission from Several Antennas". *6th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, p. 1218–1222, 1995.

SILVEIRA, L. F. Q. "Desempenho de Sistemas com Codificação Wavelet e Diversidade Espaço-Temporal em Canais Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh Plano". *Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG*, Maio 2002.

SILVEIRA, L. F. Q. "Desempenho da Codificação Wavelet em Sistemas com Diversidade na Presença de Erros de Estimacão de Canal". *Relatório Técnico – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG*, Junho 2003.

SILVEIRA, L. F. Q. "Desempenho de Sistemas com Codificação Wavelet e Diversidade sobre Canais Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh Plano". *Relatório Técnico – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG*, Junho 2003.

SILVEIRA, L. F. Q. "Análise da Probabilidade de Erro de Bit de Sistemas com Codificação Wavelet sobre Canais AWGN". *Relatório Técnico – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG*, Outubro 2004.

SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M.; PINTO, E. L. "Desempenho da Codificação Wavelet em Sistemas com Diversidade sobre Canais Sujeitos ao Desvanecimento Plano e Rápido". *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT'2001*, 2001.

SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M.; PINTO, E. L. "Desempenho da Codificação Wavelet com Hamming e Diversidade Espaço-Temporal sobre Canais Sujeitos ao Desvanecimento Rayleigh". *X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica - SBMO 2002*, 2002.

SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M.; PINTO, E. L. “Performance of a PSK System with Wavelet Time Diversity over Flat Rayleigh Fading Channels”. *International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC'2003*, 2003.

SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M.; PINTO, E. L. “A New Wavelet Coded PSK System over Time-varying Flat Fading Channels”. *Fifth IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications - SPAWC'2004*, 2004.

SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M.; PINTO, E. L. “On The Error Rate of Wavelet Coded PSK System over AWGN Channels”. *11th International Conference on Telecommunications-ICT'2004*, 2004.

SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M.; PINTO, E. L. “Análise de Desempenho de Sistemas com Codificação Wavelet e Diversidade em Canais com Desvanecimento Plano”. *XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT'2005*, 2005.

SILVEIRA JUNIOR, L. G. Q.; SILVEIRA, L. F. Q.; ASSIS, F. M.; PINTO, E. L. “Soft-Decision Demodulation of Wavelet-Coded PSK Signals over Flat Rayleigh Fading Channels”. *Sixth IEEE International Telecommunications Symposium - ITS'2006*, 2006.

SKLAR, B. *Digital Communications, Fundamentals and Applications*. New York, USA: Prentice-Hall, Inc., 1988.

SKLAR, B. “Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication Systems - Part I: Characterization”. *IEEE Communications Magazine*, v. 35, n. 7, p. 90–100, Julho 1997.

SKLAR, B. “Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication Systems - Part II: Mitigation”. *IEEE Communications Magazine*, v. 35, n. 7, p. 102–109, Julho 1997.

SMITH, D. B.; AUBREY, T. “Generalized Space-Time Modelling of the MIMO Channel Applied to Analysing and Optimising Transmit Antenna Configurations”. *IEEE International Conference on Communications - ICC'03*, p. 1978–1982, 2003.

TAROKH, V.; JAFARKHANI, H.; CALDERBANK, A. “Space-Time Block Coding for Wireless Communications: Performance Results”. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 17, n. 3, p. 451–460, Março 1999.

TAROKH, V.; NAGUIB, A.; SESHADRI, N.; CALDERBANK, A. R. “Space-time Codes for High Data Rate Wireless Communication: Mismatch Analysis”. *IEEE International Conference on Communications - ICC'97*, v. 1, p. 309–313, Junho 1997.

TAROKH, V.; SESHADRI, N.; CALDERBANK, A. R. “Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communications: Performance Criterion and Code Construction”. *IEEE Transactions on Communications*, v. 44, p. 744–765, Março 1998.

TEPE, K. E.; ANDERSON, J. B. “Turbo Coding Behavior in Rayleigh Fading Channels without Perfect Interleaving”. *Military Communications Conference - MILCOM*, p. 1157–1164, 2001.

TROTT, M. D.; WORNELL, G. W.; NARULA, A. “Performance Limits of Coded Diversity Methods for Transmitter Antenna Arrays”. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 45, n. 7, p. 2418–2433, Novembro 1999.

TZANNES, M. A.; TZANNES, M. C. “Bit-by-Bit Channel Coding using Wavelets”. *Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference - GLOBECOM'92*, p. 684–688, 1992.

VALENTI, M. C. “Iterative Detection and Decoding for Wireless Communications”. *Tese de Doutorado – Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University*, Julho 1999.

VINIOTIS, Y. *Probability and Random Processes*. New York, USA: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1997.

VLEUTEN, R. J. V. D.; WEBER, J. H. “Optimized Signal Constellations for Trellis-Coded Modulation on AWGN Channels”. *IEEE Transactions on Communications*, v. 44, n. 6, p. 646–648, Junho 1996.