



UMA NOVA FORMULAÇÃO PARA O PROBLEMA DA COBERTURA MÁXIMA P-HUB COM ALOCAÇÃO r

Patrick Doglio (Universidade Federal Fluminense) patrickdoglio@id.uff.br
Marcos Costa Roboredo (Universidade Federal Fluminense) mcroboredo@id.uff.br

Resumo

No Problema da Cobertura Máxima p -Hub com Alocação r (r -PCM p H), duas decisões são tomadas: a localização de p hubs e a atribuição de cada ponto não hub a exatamente r hubs localizados ($r \leq p$). Essas decisões geram um custo de serviço para cada par origem-destino (O/D) da rede. Após as decisões de localização e alocação, o fluxo de cada par O/D é dito estar coberto se o seu custo não ultrapassa um raio pré-estabelecido. Neste contexto, o objetivo do problema é tomar as decisões de localização e alocação de modo a maximizar a soma total dos fluxos cobertos. Nós apresentamos uma nova formulação para o problema que utiliza um conjunto de desigualdades válidas propostas recentemente na literatura para um caso particular do r -PCM p H. Nós propomos que as desigualdades sejam geradas sob demanda, seguindo uma abordagem clássica de *branch-and-cut*. Para provar a robustez do nosso método, apresentamos vários experimentos computacionais que mostram que nosso método supera a melhor formulação exata encontrada na literatura para todas as instâncias comparadas, sendo capaz de obter soluções ótimas de várias instâncias grandes pela primeira vez.

Palavras-Chaves: Programação Inteira, Localização de Hubs, Cobertura Máxima

1. Introdução

Hubs são facilidades especiais designadas para atuarem como pontos de troca, transbordo e triagem em redes de transporte *many-to-many*. Os fluxos de diversos pares origem-destino (O/D) são consolidados e distribuídos através de rotas interhubs, explorando economias de escala. Esse tipo de modelo de sistema de distribuição é amplamente aplicado na aviação (Button, 2002), sistemas logísticos (Ishfaq e Sox, 2011) e redes de telecomunicações (Kim e O’Kelly, 2009).

O problema de localização de hubs (PLH) foi proposto primeiramente por O’Kelly (1986). No problema, duas decisões são tomadas: a localização de um número finito de hubs e a alocação de pontos não hub a hubs localizados. Campbell (1994) mostrou que essas decisões podem ser

tomadas a fim de otimizar diferentes objetivos associados ao custo de transporte ou ao grau de cobertura de uma rede. Cada PLH pode ser classificado de acordo com a sua estrutura de alocação da rede. Nesse sentido, três classificações clássicas são alocação simples (AS) PLH, alocação múltipla (AM) PLH e alocação r (Ar) PLH. Na AS, cada ponto não hub deve ser atribuído a um único hub localizado enquanto na AM, cada ponto não hub pode ser alocado a quantos hubs localizados forem necessários. Já no caso da alocação r , cada ponto não hub deve ser atribuído a r hubs localizados. Para mais detalhes a respeito de definições e classificações relativas a PLHs, ver O’Kelly (2019) e Farahani et al. (2013).

Dentre os PLHs apresentados por Campbell (1994), um deles é o Problema da Cobertura Máxima p -Hub (PCMpH). Neste problema, exatamente p hubs são localizados e um dos tipos de alocação definidas anteriormente (AS, AM ou r) é feita. As decisões de localização e alocação geram para cada par O/D um grau de cobertura, sendo 1 (totalmente coberto) ou 0 (não coberto) de acordo com o seu custo de serviço. Esse critério de cobertura é classificado como Critério Binário (CB). O PCMpH busca maximizar a soma dos fluxos associados aos pares O/D totalmente cobertos.

Peker e Kara (2015) propuseram uma generalização do PCMpH que considera o assim chamado critério de cobertura parcial (CP) para um par O/D. Esse problema considera um conjunto discreto de graus de cobertura L com valores entre 0 e 1 e uma função não crescente que associa o custo de serviço de um par O/D a um valor em L . O objetivo do problema é maximizar a soma dos fluxos de cada par O/D ponderado pelo seu grau de cobertura. Quando $L = \{0, 1\}$, o problema é equivalente ao PCMpH com critério de cobertura binária.

Este trabalho foca no PCMpH com alocação r e cobertura binária (r -PCMpH). Nós propomos uma formulação que usa o conjunto de desigualdades válidas propostas por Doglio et al. (2020), que foram propostas pelos autores para o caso do problema com alocação simples, mas mostramos aqui que também podem ser utilizadas para a alocação r e cobertura binária. A abordagem proposta é comparada com a melhor modelo de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) encontrado para o problema, proposto por Stančić et al. (2022). Os resultados mostram que a nossa formulação supera a da literatura em todas as instâncias. Além disso, nós apresentamos soluções ótimas para muitas instâncias grandes pela primeira vez.

2. Revisão da literatura

Nesta seção, nós apresentamos a revisão de literatura sobre o PCMpH e suas variantes. Tais variantes se diferenciam entre si basicamente pelo tipo de alocação (AS, AM ou r) e pelo critério de cobertura (CB ou CP) considerado.

Os trabalhos mais antigos sobre o PCMpH trataram apenas sobre o critério de cobertura binária. Nesse contexto, o PCMpH foi proposto por Campbell (1994), onde o autor apresentou uma formulação PLIM com $O(n^4)$ variáveis e restrições. Mais tarde, Weng et al. (2006) propôs duas meta-heurísticas e uma formulação com $O(n^2)$ variáveis e restrições para o AM-PCMpH. Qu e Weng (2009) também lidou com o AM-PCMpH, onde os autores propuseram uma abordagem de religação de caminho para o AM-PCMpH. Hwang e Lee (2012) propuseram uma formulação PLIM com $O(n^4)$ variáveis e restrições para o AS-PCMpH.

Peker e Kara (2015) introduziram o conceito de cobertura parcial para o PCMpH. Os autores propuseram formulações PLIM para ambos AM-PCMpH e AS-PCMpH e que são válidas para os dois critérios de cobertura: binária e parcial. Para o critério de cobertura binária, os autores mostraram que suas formulações superam as propostas na literatura até aquele momento. Janković et al. (2017) também lidou com o AM-PCMpH e AS-PCMpH com os dois critérios de cobertura. Os autores propuseram algoritmos heurísticos e formulações PLIM para os problemas. Para o AM-PCMpH, a nova formulação superou a formulação proposta por Peker e Kara (2015), mas isso não aconteceu para o AS-PCMpH. Recentemente, Stančić et al. (2022) propuseram heurísticas e métodos exatos para o r -PCMpH com coberturas binária e parcial.

Embora recente, alguns trabalhos focaram no PCMpH apenas com o critério de cobertura binária. Nesse contexto, Silva e Cunha (2017) propuseram um algoritmo de busca tabu para o AS-PCMpH. Janković e Stanimirović (2017) lidou com o r -PCMpH. Os autores propuseram uma formulação PLIM com $O(n^4)$ variáveis e um algoritmo de Pesquisa em Vizinhança Variável para o problema.

A Tabela 1 resume a literatura para o PCMpH. Nela, as referências estão categorizadas de acordo com o tipo de alocação, o critério de cobertura e o algoritmo considerado.

Tabela 1 – Resumo da literatura para o PCMpH.

Referência	Alocação			Critério de cobertura		Algoritmo	
	AM	AS	r	Binária	Parcial	Exato	Heurística
Campbell (1994)	x	x		x		x	
Weng et al. (2006)	x			x		x	x

Qu e Weng (2009)	x		x			x
Hwang e Lee (2012)		x		x		x
Peker e Kara (2015)	x	x		x	x	
Jankovic et al (2017)	x	x		x	x	x
Jankovic e Stanimirovic (2017)			x			x
Silva e Cunha (2017)		x		x		
Stancic et al. (2022)			x	x	x	x
Este trabalho			x	x		x

Fonte: Elaborada pelo autor

3. O problema

Esta seção define formalmente o r-PCMpH. Seja $G = (N, A)$ um grafo completo, onde N e A denotam respectivamente o conjunto de nós e arcos. Seja ainda um conjunto H ($H \subseteq N$) representando os potenciais hubs. Cada arco $(i, j) \in A$ representa um par O/D e está associado com um custo $d_{i,j} > 0$ e um fluxo $w_{i,j} \geq 0$, que deveria ser transportado de i para j . O r-PCMpH possui duas decisões a serem tomadas: a primeira consiste em escolher p vértices em H para localizar os hubs e a segunda decisão é alocar cada nó em N a r hubs localizados.

Após as decisões de localização e alocação, o fluxo de cada par O/D (i, j) é transportado através de um caminho do tipo $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$, onde k e m são dois hubs localizados e temos i alocado a k e j alocado a m . A escolha de qual transporte é de acordo com o menor custo. O custo do caminho $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$ é denotado por c_{ij}^{km} e é calculado da maneira que segue:

$$c_{ij}^{km} = \chi d_{ik} + \alpha d_{km} + \delta d_{mj}, \quad (1)$$

onde $\chi \geq 1$, $\alpha \in [0, 1]$ e $\delta \geq 1$ representam taxas unitárias para respectivamente coleta, transferência e distribuição de itens de fluxo. A Equação (1) também é válida quando $k = m$, indicando que o transporte ocorre através da utilização de um único hub.

Sabendo o custo de transporte de cada par O/D (i, j) , dizemos que o fluxo desse par está coberto se o custo de transporte do par não ultrapassa um pré-estabelecido valor β_{ij} . O r-PCMpH busca maximizar a soma total de fluxos cobertos.

4. Metodologia proposta

Este trabalho propõe uma formulação para o r-PCMpH com cobertura binária. A formulação proposta usa uma variável binária z_{ij} para cada par O/D (i, j) indicando se o fluxo de (i, j) é coberto ($z_{ij} = 1$) ou não ($z_{ij} = 0$). A formulação também utiliza variáveis binárias x_{ik} , que assume valor 1 se o ponto não hub i é alocado no hub localizado k . Quando $i = k$, esta variável serve para indicar se um hub está localizado em k ($x_{ik} = 1$).

A formulação proposta usa as desigualdades válidas propostas por Doglio et al. (2020) para a versão do problema com alocação simples, mas que também pode ser usada para o problema aqui estudado. Assim, antes de apresentarmos a formulação, vamos apresentar o conjunto de desigualdades válidas propostas na literatura.

4.1. Desigualdades válidas propostas por Doglio et al. (2020)

Agora, apresentamos as desigualdades válidas propostas por Doglio et al. (2020) que são usadas neste trabalho. Por definição, cada variável z_{ij} só pode assumir valor 1 se existirem $k, m \in H$ tais que (k, m) cobrem o par O/D (i, j) e $x_{ik} = x_{jm} = 1$. Nós podemos ilustrar essa relação entre as variáveis x e z através de uma associação de cada variável z_{ij} com caminhos em um grafo orientado $G_{ij} = (V_{ij}, A_{ij})$ que é construído para cada par O/D (i, j) da maneira a seguir. O conjunto de vértices V_{ij} contém os vértices i e j , e os dois vértices k_h e m_h para cada $h \in H$. Os vértices i e j representam respectivamente os vértices de origem e destino. O conjunto de arcos A_{ij} é definido como $A_{ij} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, onde $A_1 = \{(i, k_h) | h \in H\}$, $A_2 = \{(m_h, j) | h \in H\}$ e $A_3 = \{(k_h, m_h) | a_{ijhh'} = 1\}$. Cada arco (i, k_h) em A_1 tem o valor atual da variável x_{ih} conforme sua capacidade. A capacidade de cada arco (m_h, j) é o valor atual da variável x_{jh} . Cada arco em A_3 tem uma capacidade unitária.

O grafo G_{ij} é construído de uma maneira na qual cada caminho de i para j é associado com exatamente duas variáveis x de tal modo que se elas forem iguais a 1 então $z_{ij} = 1$. Doglio et al. (2020) mostrou como extrair desigualdades válidas de G_{ij} . Seja $S \subset V_{ij}$ um (i, j) – corte para o grafo G_{ij} . Em outras palavras, S é um subconjunto de vértices tais quais $i \in S$ e $j \notin S$. Um (i, j) – corte tem a propriedade de que qualquer caminho de i para j utilize ao menos um arco de $\delta_+(S) = A_{ij} \cap (S \times (V_{ij} \setminus S))$.

Seja $S_{ij} = \{S | S \text{ é um } (i, j) \text{ – corte para } G_{ij} \text{ e } k \in S \Rightarrow m \in S \text{ sempre que } (k, m) \text{ cobrir } (i, j)\}$. As seguintes desigualdades são válidas:

$$z_{ij} \leq \sum_{h \in H: k_h \notin S} x_{ih} + \sum_{h \in H: m_h \in S} x_{jh}, \forall i, j \in N, \forall S \in S_{ij}. \quad (2)$$

4.2. Formulação proposta

A formulação proposta usa uma variável binária z_{ij} para cada par O/D (i, j) indicando se o fluxo de (i, j) é coberto ($z_{ij} = 1$) ou não ($z_{ij} = 0$). A formulação também utiliza variáveis binárias x_{ik} , que assume valor 1 se o ponto não hub i é alocado no hub localizado k . Quando $i = k$, esta variável serve para indicar se um hub está localizado em k ($x_{ik} = 1$). A formulação segue:

$$\text{Max} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} w_{ij} z_{ij} \quad (3)$$

$$\text{s.a.} \sum_{k \in H} x_{ik} = r \quad \forall i \in N \quad (4)$$

$$x_{ik} \leq x_{kk} \quad \forall i \in N, k \in H \quad (5)$$

$$\sum_{k \in H} x_{kk} = p \quad (6)$$

$$z_{ij} \leq \sum_{h \in H: k_h \notin S} x_{ih} + \sum_{h \in H: m_h \in S} x_{jh}, \forall i, j \in N, \forall S \in S_{ij} \quad (7)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N \quad (8)$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, k \in H \quad (9)$$

A função objetivo (3) busca maximizar a soma do total fluxo coberto. As restrições (4) garantem que cada ponto não hub é alocado a r hubs. As restrições (5) garantem que um ponto não hub

só pode ser alocado a um hub se este último estiver efetivamente localizado. A restrição (6) garante que p hubs são localizados. As restrições (7) representam o conjunto de desigualdades válidas da literatura descritas anteriormente e que garantem o cálculo correto das variáveis z . As demais restrições garantem o domínio das variáveis.

4.2.1. Adicionando as desigualdades válidas à formulação

O número de restrições em (7) é exponencial. Portanto, nós propomos solucionar a formulação (3) – (9) sem nenhuma restrição (7) através do resolvidor PLIM que permita a inclusão de novas restrições sob demanda em um *callback*.

O *callback* é chamado em cada nó da árvore de *branch-and-bound*, onde é possível acessar o valor da solução relaxada corrente. Então, faz-se necessário decidir quantas e quais restrições (7) são adicionadas à formulação.

A estratégia adotada neste trabalho é de incluir, para cada $i, j \in N$, a restrição associada com o conjunto $S \in S_{ij}$ que minimiza o lado direito de (7) se essa restrição for violada somente se o valor corrente da solução relaxada for inteiro. O problema de encontrar S com essa característica é conhecido como o Problema da Separação.

O Problema da Separação é formalmente definido como segue. Para um dado $i, j \in N$, seja (\bar{z}, \bar{x}) uma solução que satisfaça (3) – (9) com restrições de integralidade relaxadas e satisfaça algumas restrições em (2). O Problema da Separação visa encontrar o conjunto $S \in S_{ij}$ que minimiza o lado direito de (7). Esse problema é equivalente a encontrar o (i, j) – corte mínimo para o grafo G_{ij} tomando os valores \bar{x} como capacidades nos arcos.

5. Experimentos computacionais

Agora nós apresentamos resultados de diversos experimentos com o objetivo de provar a robustez do nosso método. Todos os experimentos foram conduzidos em um computador com processador Intel Core i7-4790U com 3.60GHz CPU e 16 GB de RAM. O sistema operacional utilizado foi o Ubuntu v18.04.2. O algoritmo foi programado na linguagem Julia v1.5.4 com a utilização do pacote JuMP v0.18.6. O gerenciamento da árvore de *branch-and-bound* foi feito pelo CPLEX v12.9. Nós definimos $\epsilon = 0,02$ para todos os experimentos. Ademais, as resoluções dos problemas de (i, j) – corte mínimo foram realizadas através de um algoritmo

especializado disponível no pacote *SparseMaxFlowMinCut*
(<https://github.com/artalvpes/SparseMaxFlowMinCut/>).

5.1. Geração de instâncias

As instâncias utilizadas neste trabalho foram geradas com base em dois conjuntos de dados frequentemente usados em problemas de localização de hubs: CAB (O’Kelly, 1986) e AP (Ernst e Krishnamoorthy, 1996).

O conjunto de dados CAB é gerado a partir de uma pesquisa realizada pelo Conselho de Aviação Civil dos Estados Unidos, que envolveu dados de viagens aéreas realizadas no ano de 1970 através de localidades norte-americanas. Ele fornece o fluxo transportado e a distância entre 25 cidades ($|N| = 25$). O conjunto de dados AP é gerado com base nas instalações do serviço postal da Austrália. O conjunto original contém fluxos e distâncias entre 200 vértices, mas geramos conjuntos com 25, 40, 50 e 100 vértices através do esquema de agregação proposto por (Ernst e Krishnamoorthy, 1996).

Para os dois conjuntos de dados CAB e AP, cada nó também é um potencial hub ($H = N$) e o cálculo dos custos c_{ij}^{km} (Equação (1)) é feito com base na matriz de distância, que é simétrica. Portanto, nós podemos agregar os pares O/D (i, j) e (j, i) em um único par com fluxo $w_{ij} + w_{ji}$. Além disso, nós dividimos o fluxo de cada par O/D pela soma total dos fluxos.

Para todas as instâncias, os valores de β_{ij} são os mesmos para cada par O/D (i, j) . Para instâncias CAB, nós tomamos esses valores de Peker e Kara (2015). Para instâncias AP, nós definimos o valor de β para ser igual ao valor da solução correspondente ao problema p-hub centro não capacitado com alocação múltipla (Ernst et al., 2009).

Como Janković et al. (2017) e Stančić et al. (2022), nós definimos $\chi = \delta = 1$, $\alpha \in \{0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8\}$ para instâncias CAB e $\alpha = 0, 75$ para instâncias AP.

5.2. Comparação com a literatura

Agora nós apresentamos a comparação entre o algoritmo proposto e a formulação proposta por Stančić et al. (2022). Para uma comparação justa, as formulações da literatura foram executadas na mesma máquina que o nosso código.

As Tabelas 2 e 3 resumem a comparação para respectivamente CAB e AP. As informações a seguir estão presentes em cada tabela: o número de nós da rede (coluna n); o número de hubs a serem localizados (coluna p); o número máximo de hubs localizados para os quais um ponto não hub pode ser alocado (coluna r); o valor da constante β (coluna β); o valor da constante α (coluna α); o valor ótimo para a função objetivo (coluna opt); o tempo total de CPU em segundos gasto por cada algoritmo (coluna Time(s)). Nós definimos o tempo limite de 7200s de execução. Para cada instância, nós marcamos em negrito o menor valor de tempo entre os algoritmos que estão sendo comparados.

Observando as Tabelas 2 e 3, podemos notar que o nosso método foi mais rápido para todas as instâncias testadas, mostrando a robustez do método proposto.

Tabela 2 – Comparação com a literatura para instâncias CAB

n	p	r	α	β	opt	Time(s)	
						Stančić et al. (2022)	Este trabalho
25	3	2	0.2	1913	0.9658	25.98	15.42
25	3	2	0.4	2099	0.9624	16.07	6.10
25	3	2	0.6	2336	0.9317	11.13	5.53
25	3	2	0.8	2552	0.9008	15.23	4.37
25	4	2	0.2	1617	0.9571	17.41	10.09
25	4	2	0.4	1881	0.9501	14.45	8.71
25	4	2	0.6	2184	0.9362	10.37	4.83
25	4	2	0.8	2457	0.8960	10.31	5.23
25	4	3	0.2	1617	0.9571	17.30	9.53
25	4	3	0.4	1881	0.9501	15.55	7.83
25	4	3	0.6	2184	0.9363	8.30	6.16
25	4	3	0.8	2457	0.8961	8.20	4.87
25	5	2	0.2	1346	0.9270	14.67	11.49
25	5	2	0.4	1597	0.9145	9.12	6.53
25	5	2	0.6	2002	0.9012	9.52	7.72
25	5	2	0.8	2307	0.8903	8.18	4.56
25	5	3	0.2	1346	0.9270	10.45	7.84
25	5	3	0.4	1597	0.9184	8.05	5.62
25	5	3	0.6	2002	0.9019	11.32	6.18
25	5	3	0.8	2307	0.8905	6.98	4.23
25	5	4	0.2	1346	0.9270	11.37	11.01
25	5	4	0.4	1597	0.9184	7.96	6.15
25	5	4	0.6	2002	0.9019	9.74	5.72
25	5	4	0.8	2307	0.8905	6.36	4.08
Avg.						11.83	7.07

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 3 – Comparação com a literatura para instâncias AP

<i>n</i>	<i>p</i>	<i>r</i>	α	β	<i>opt</i>	Time(s)	
						Stančić et al. (2022)	Este trabalho
25	3	2	0.75	45552.50	0.9513	10.81	5.21
25	4	2	0.75	45552.50	0.9694	15.29	6.94
25	4	3	0.75	45552.50	0.9716	11.44	5.44
25	5	2	0.75	45552.50	0.9789	28.87	7.80
25	5	3	0.75	45552.50	0.9835	11.11	5.68
25	5	4	0.75	45552.50	0.9835	13.05	6.29
40	3	2	0.75	56309.88	0.9781	751.52	20.46
40	4	2	0.75	51279.14	0.9704	791.46	18.63
40	4	3	0.75	51279.14	0.9729	543.69	29.46
40	5	2	0.75	49741.20	0.9744	1352.91	30.61
40	5	3	0.75	49741.20	0.9775	608.41	18.09
40	5	4	0.75	49741.20	0.9780	322.83	13.43
50	3	2	0.75	56729.94	0.9832	6373.46	48.39
50	4	2	0.75	52905.77	0.9792	>7200	172.81
50	4	3	0.75	52905.77	0.9823	6082.97	32.73
50	5	2	0.75	50707.87	0.9795	>7200	127.96
50	5	3	0.75	50707.87	0.9822	>7200	84.38
50	5	4	0.75	50707.87	0.9822	>7200	54.56
Avg.						>2539.88	38.27

Fonte: Elaborada pelo autor

6. Conclusões

Neste trabalho nós propusemos uma nova formulação PLIM para o r-PCMpH com cobertura binária. A formulação proposta usou um conjunto de desigualdades existente na literatura, que foram incorporadas na formulação sob demanda durante o clássico algoritmo de *branch-and-bound*.

De modo a provar a robustez do nosso método, nós conduzimos diversos experimentos em muitas instâncias com variados tamanhos geradas a partir dos principais conjuntos de dados utilizados em problemas de localização de hubs. Nós comparamos a melhor formulação da literatura com a nossa formulação. Os resultados mostraram que nosso método foi mais rápido

em todas as instâncias. Consequentemente, nos pudemos apresentar diversas soluções ótimas pela primeira vez.

Para trabalhos futuros nós desejamos estudar novas desigualdades válidas para o problema, buscando solucionar instâncias ainda maiores.

REFERÊNCIAS

- BUTTON, K., 2002. Debunking some common myths about airport hubs. **Journal of Air Transport Management** 8 (3), 177 – 188.
- CAMPBELL, J. F., 1994. Integer programming formulations of discrete hub location problems. **European Journal of Operational Research** 72 (2), 387–405.
- CONTRERAS, I., O’KELLY, M., 2019. Hub location problems. In: **Location science**. Springer, pp. 327–363.
- DOGLIO, P., ROBOREDO, M. C., e PESSOA, A. A. (2020). Um modelo de programação linear inteira mista para um problema de localização de hubs com cobertura máxima. In **Anais do LII SBPO**, João Pessoa-PB. SOBRAPO.
- ERNST, A. T., HAMACHER, H., JIANG, H., KRISHNAMOORTHY, M., WOEGINGER, G., 2009. Uncapacitated single and multiple allocation p-hub center problems. **Computers & Operations Research** 36 (7), 2230–2241.
- ERNST, A. T., KRISHNAMOORTHY, M., 1996. Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. **Location science** 4 (3), 139–154.
- FARAHANI, R. Z., HEKMATFAR, M., ARABANI, A. B., NIKBAKSH, E., 2013. Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. **Computers & Industrial Engineering** 64 (4), 1096–1109.
- HWANG, Y. H., LEE, Y. H., 2012. Uncapacitated single allocation p-hub maximal covering problem. **Computers & Industrial Engineering** 63 (2), 382–389.
- ISHFAQ, R., SOX, C. R., 2011. Hub location–allocation in intermodal logistic networks. **European Journal of Operational Research** 210 (2), 213 – 230.
- JANKOVIĆ, O., MIŠKOVIĆ, S., STANIMIROVIĆ, Z., TODOSIJEVIĆ, R., Dec. 2017. Novel formulations and VNS-based heuristics for single and multiple allocation p-hub maximal covering problems. **Annals of Operations Research** 259 (1-2), 191–216.
- JANKOVIĆ, O., STANIMIROVIĆ, Z., Apr. 2017. A general variable neighborhood search for solving the uncapacitated r -allocation p -hub maximal covering problem. **Electronic Notes in Discrete Mathematics** 58, 23–30.
- KIM, H., O’KELLY, M. E., 2009. Reliable p-hub location problems in telecommunication networks. **Geographical Analysis** 41 (3), 283–306.
- O’KELLY, M. E., 1986. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. **European journal of operational research** 32 (3), 393–404.



PEKER, M., KARA, B. Y., 2015. The p-hub maximal covering problem and extensions for gradual decay functions. **Omega** **54**, 158–172.

QU, B., WENG, K., 2009. Path relinking approach for multiple allocation hub maximal covering problem. **Computers & Mathematics with Applications** **57 (11)**, 1890–1894.

SILVA, M. R., CUNHA, C. B., Nov. 2017. A tabu search heuristic for the uncapacitated single allocation p -hub maximal covering problem. **European Journal of Operational Research** **262 (3)**, 954–965.

STANČIĆ, O., STANIMIROVIĆ, Z., TODOSIJEVIĆ, R., MIŠKOVIĆ, S., 2022. Mathematical formulations and solution methods for the uncapacitated r-allocation p-hub maximal covering problem. **Discrete Optimization** **43**, 100672.

WENG, K., Yang, C., MA, Y., 2006. Two artificial intelligence heuristics in solving multiple allocation hub maximal covering problem. In: **International Conference on Intelligent Computing**. Springer, pp. 737–744.