



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE - UFCG**  
**UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**ÊMYLE MYRELLE ALVES DOS SANTOS**

**APLICAÇÃO DE DOIS MODELOS DIFUSIVOS PARA A DESCRIÇÃO  
DA SECAGEM DE BAGAÇOS DE UMBU**

**CUITÉ - PB**  
**OUTUBRO 2023**

**ÊMYLE MYRELLE ALVES DOS SANTOS**

**APLICAÇÃO DE DOIS MODELOS DIFUSIVOS PARA A DESCRIÇÃO  
DA SECAGEM DE BAGAÇOS DE UMBU**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Área de Concentração: Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Aluizio Freire da Silva Júnior  
Coorientadora: Josefa Dayse Lima Silva

**CUITÉ – PB  
OUTUBRO 2023**

S237a Santos, Êmyle Myrelle Alves dos.

Aplicação de dois modelos difusivos para a descrição da secagem de bagaços de Umbu. / Êmyle Myrelle Alves dos Santos. - Cuité, 2023.  
26 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -  
Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2023.  
"Orientação: Prof. Dr. Aluizio Freire da Silva Júnior; Josefa Dayse Lima  
Silva".

Referências.

1. Secagem de produtos biológicos. 2. Secagem - bagaço de Umbu. 3.  
Umbu. 4. Umbu - secagem - descrição. I. Silva Júnior, Aluizio Freire da. II.  
Silva, Josefa Dayse Lima. III. Título.

CDU 547.9(043)

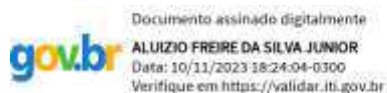
**ÊMYLE MYRELLE ALVES DOS SANTOS**

**APLICAÇÃO DE DOIS MODELOS DIFUSIVOS PARA A DESCRIÇÃO DA  
SECAGEM DE BAGAÇOS DE UMBU**

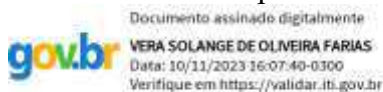
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado em: 25 de outubro de 2023.

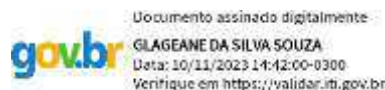
**BANCA EXAMINADORA**



**Aluizio Freire da Silva Júnior, Doutor em Engenharia de Processos (Orientador)**  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)



**Ver Solange de Oliveira Farias, Doutora em Engenharia de Processos (Examinadora)**  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)



**Glageane da Silva Souza, Doutora em Ciência e Engenharia de Materiais (Examinadora)**  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Dedico este trabalho ao meu Deus, meus pais, familiares e amigos, por me apoiarem durante esta preciosa etapa da minha vida.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, criador de tudo que há, razão do meu viver e merecedor de toda honra e toda glória. Obrigada por me dar graça e força para prosseguir.

Aos meus pais Miriam Alves de Oliveira Santos e Eliúd de Araújo Santos, pelo incentivo e apoio que têm me dado em todas as áreas da minha vida. Sou grata pela criação que me deram e pelos conselhos dados até aqui. Amo vocês!

À toda minha família, em especial minha tia Misaelba Alves de Oliveira, meus avós Cleonice Alves de Oliveira e Jete Alves de Oliveira. Obrigada pelo amor e cuidado que tiveram comigo durante todo esse processo. Sou muito feliz em ter vocês em minha vida.

Aos meus amigos, por terem tornado esse processo mais leve. Vocês não fazem ideia o quanto nossas conversas, resenhas e risadas transformaram esta jornada mais colorida! Vocês estarão em meu coração até o fim.

Ao Prof. Dr. Aluizio Freire da Silva Júnior, que durante esses anos, muito me ensinou, contribuindo para meu crescimento científico e intelectual.

Aos professores e funcionários da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité, que se esforçam para dar aos seus discentes um ensino de qualidade.

Aos meus professores do ensino fundamental e médio. A decisão de me tornar uma professora foi, em parte, influenciada por vocês.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concedida durante minha graduação na realização dos projetos PIBIC/CNPq-UFCG.

A Universidade Federal de Campina Grande, pela oportunidade de realização do curso.

Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.

(Paulo Freire)

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>11</b>
<b>3. METODOLOGIA</b>	<b>12</b>
3.1. METODOLOGIA EXPERIMENTAL	12
3.2. MODELAGEM MATEMÁTICA	13
3.3. <i>SOFTWARES</i>	17
<b>4. RESULTADOS</b>	<b>17</b>
<b>5. CONCLUSÃO</b>	<b>23</b>
<b>6. REFERÊNCIAS</b>	<b>25</b>



# APLICAÇÃO DE DOIS MODELOS DIFUSIVOS PARA A DESCRIÇÃO DA SECAGEM DE BAGAÇOS DE UMBU.

Êmyle Myrelle Alves dos Santos<sup>1</sup>  
Alúizio Freire da Silva Júnior<sup>2</sup>

## RESUMO

Este trabalho foi realizado com o objetivo de fornecer uma descrição do processo de secagem de bagaços de umbu através de modelos difusivos. Para isso, foi utilizado o *software Analitical* (Costa *et al.* 2020) para aplicação da solução analítica para a equação de difusão (geometria de uma parede infinita) admitindo as condições de contorno de primeiro e terceiro tipos. Além disso o programa *Lab Fit* foi utilizado para obtenção das cinéticas e taxa de secagem através do ajuste dos dados experimentais com base na utilização de modelos empíricos. Ademais, foi feito um teste de otimização com a solução numérica para a equação de difusão, com o intuito de melhorias nos resultados. Para a realização do experimento, os resíduos foram colocados em três cestos de arame galvanizado apresentando blocos com aproximadamente 13,59mm de espessura. Antes de iniciar o experimento, os cestos (com os resíduos) foram pesados a fim de saber o valor da massa inicial das amostras. Logo após, elas seguiram para o processo de secagem em estufa com circulação forçada de ar nas temperaturas de 70, 80 e 90°C. Com os resultados obtidos foi possível concluir que, desses modelos o que melhor descreveu os experimentos foi o modelo com a solução numérica em que se considera a variação da difusividade e encolhimento do produto. Logo, a metodologia utilizada neste trabalho pode ser aplicada na descrição da secagem de produtos biológicos cuja geometria seja aproximada a uma parede infinita.

**Palavras-chave:** Equação de difusão. Solução analítica. Solução numérica.

## ABSTRACT

This work was carried out with the objective of providing a description of the drying process of umbu bagasse through diffusive models. For this, the Analitical software (Costa *et al.* 2020) was used to apply the analytical solution for the diffusion equation (geometry of an infinite wall) admitting the boundary conditions of the first and third types. In addition, the Lab Fit program was used to obtain the kinetics and drying rate by adjusting the experimental data based on the use of empirical models. Furthermore, an optimization test was carried out with the numerical solution for the diffusion equation, in order to improve the results. To carry out the experiment, the waste was placed in three galvanized wire baskets with blocks approximately 13.59 mm thick. Before starting the experiment, the baskets (with the residues) were weighed in order to know the value of the initial mass of the samples. Soon after, they went to the drying process in an oven with forced air circulation at temperatures of 70, 80 and 90°C. With the results obtained, it was possible to conclude that of these models the one that best described the experiments was the model with the numerical solution in which the variation of the diffusivity and shrinkage of the product is considered.

**Keywords:** Diffusion equation. Analytical solution. Numerical solution.

---

<sup>1</sup> Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, [emylepicui@gmail.com](mailto:emylepicui@gmail.com)

<sup>2</sup> Professor do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, [aluiziofsj.ces@gmail.com](mailto:aluiziofsj.ces@gmail.com)

## 1. INTRODUÇÃO

O umbuzeiro (*Spondias tuberosa*) é uma árvore nativa do semiárido brasileiro e pode ser encontrada do Piauí ao Norte de Minas Gerais (Albuquerque *et al.*, 2015). É uma planta resistente aos períodos de estiagem. A coleta do umbu é uma tradição repassada entre famílias, e também é uma atividade econômica importante, pois oferece ao extrativista uma oportunidade de renda todos os anos no período da safra da região (CONAB, 2017). No entanto, apesar da importância já destacada, a quantidade de resíduos produzidos no processamento deste fruto é considerável. Segundo Melo e Andrade (2010), o umbu é constituído por 22% de casca, 68% de polpa e 10% de caroço e, deste modo, os resíduos produzidos representariam cerca de 32% do fruto.

Cascas, sementes, talos e folhas, são componentes alimentícios que em sua grande maioria não são utilizados na alimentação humana, no entanto, se apresentam como subprodutos altamente nutritivos, atuando no enriquecimento alimentar e na diminuição do desperdício. Esses resíduos possuem altos valores nutricionais, muitas vezes semelhantes ou até mesmo maiores do que a própria polpa de fruta (Storck *et al.*, 2013). A produção de novos produtos alimentícios com base em resíduos de frutas possibilita uma maneira de incrementar a culinária diária, com a criação de novas receitas, ricas em vitaminas, minerais, lipídios e fibras, responsáveis por inúmeros benefícios à saúde (Tozatti *et al.*, 2013).

Como a secagem é uma etapa importante no processo de extração de alguns subprodutos dos resíduos de frutos (como acima citados), uma descrição adequada dessa etapa faz-se necessário. Assim como ocorre na descrição da secagem de outros produtos agrícolas, modelos difusivos têm sido aplicados para a descrição da secagem de diversos resíduos de frutos (Nascimento *et al.*, 2016; Filho *et al.*, 2020). No entanto, a maioria dos trabalhos consultados na literatura apresentam modelos simplificados para descrever a secagem de bagaços de frutos (Filho *et al.*, 2020; Kara e Doymaz, 2015), que é o produto proposto no presente projeto de pesquisa. Deste modo, torna-se imprescindível estudos que apresentem modelagens mais completas que permitam analisar, por exemplo, a melhor condição de contorno para descrever a secagem desse tipo de produto.

Diante do exposto, o presente projeto teve como objetivo utilizar duas soluções analíticas para equação de difusão (geometria de uma parede infinita), considerando as condições de contorno de primeiro e terceiro tipos, a fim de analisar qual a mais adequada para a descrição de secagem de bagaços de umbu.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como foi destacado anteriormente, a maioria dos trabalhos consultados na literatura, que tratam da secagem de bagaços de frutos, consideram simplificações de soluções analíticas para equação de difusão.

Koukouch *et al.* (2017) realizaram a secagem de resíduos de azeitona constituídos por azeitonas cruas e azeitonas após a extração de óleo. As secagens foram realizadas nas temperaturas de 40, 60 e 80°C com amostras com espessuras de 0,5, 1,0 e 1,5 cm. Para a determinação da difusividade efetiva de massa foi utilizado apenas o primeiro termo da série que representa a solução analítica da equação de difusão (geometria da parede infinita). Além disso, foi admitida uma condição de contorno do primeiro tipo. Os autores concluíram que o tempo de secagem diminuiu à medida que a temperatura de secagem do ar aumentou e quando a espessura da amostra diminuiu.

Em um estudo semelhante ao acima apresentado, Kayran e Doymaz (2017) realizaram a secagem de bagaços de damascos nas temperaturas de 40, 50, 60 e 70 °C em um secador de bandeja. Assim como foi realizado por Koukouch *et al.* (2017), para a determinação da difusividade efetiva de massa foi utilizado apenas o primeiro termo da série que representa a solução analítica e foi considerada uma condição de contorno do 1º tipo. Para descrever a cinética de secagem foram testados 10 modelos empíricos. Os autores concluíram que os melhores modelos usados para descrever cinética de secagem foram os de Aghbashlo *et al.* e Midilli *et al.* (Kayran e Doymaz, 2017).

Os trabalhos acima destacados apresentam metodologias semelhantes, que os diferenciam da presente proposta. Em ambos, apenas um termo da série que representa a solução analítica foi usado e a cinética de secagem é descrita por modelos empíricos, os quais são limitados, uma vez que são capazes apenas de representar dados em condições semelhantes aos quais estes foram desenvolvidos. No entanto, apesar das limitações já apontadas dessas metodologias, muitos trabalhos disponíveis na literatura ainda as utilizam para esse tipo de produto (Kara e Doymaz, 2015; Filho *et al.*, 2020).

Uma pesquisa semelhante a presente proposta foi realizada por Ferreira *et al.* (2021). Neste trabalho, os autores realizaram secagens de três tipos de resíduos de frutos do mandacaru: resíduo inteiro, resíduo triturado e resíduo na forma de espuma. As secagens foram realizadas nas temperaturas de 50, 60, 70 e 80 °C em um secador de leito fixo. Para descrever as cinéticas de secagem foram testados 10 modelos empíricos, e para determinar a difusividade efetiva de massa foram utilizados 16 termos da série que representa a solução analítica da equação de difusão para uma parede infinita (condição de contorno do 3º tipo). Os autores concluíram que

o melhor modelo empírico para descrever a secagem desse tipo de produto foi o de Midilli. Além disso, foi observado que a energia de ativação variou na seguinte ordem: resíduo na forma de espuma > resíduo triturado > resíduo inteiro.

Ao comparar a presente proposta com as pesquisas já existentes na literatura, concluiu-se que este projeto poderá contribuir para avanços no estudo do processamento desse tipo de resíduo, o qual pode ser uma alternativa para o desenvolvimento de novos produtos alimentícios.

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1. Metodologia Experimental

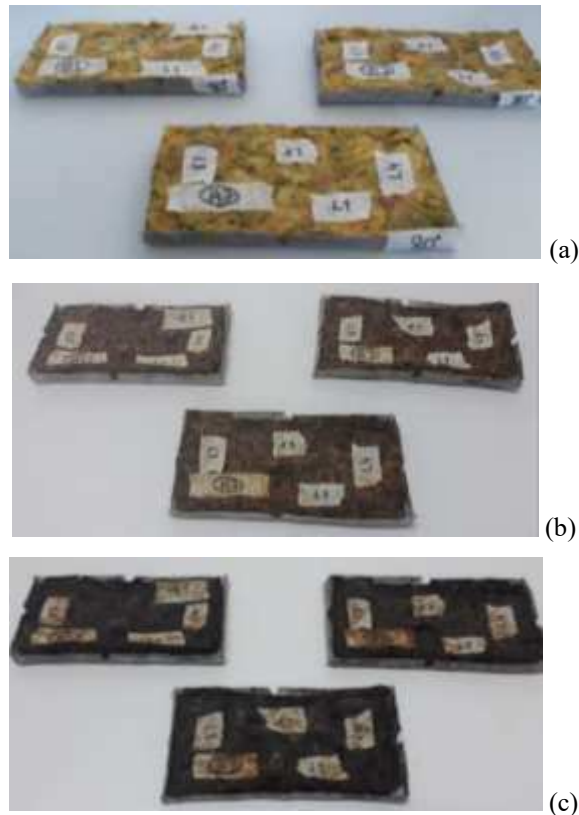
Os experimentos desta pesquisa foram realizados no Laboratório de Tecnologia de Alimentos (LTA) da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) – Campus Cuité. O resíduo utilizado nos experimentos foi adquirido na Cooperativa Agroindustrial do Seridó e Curimataú Paraibano LTDA – COOASC que está localizada no município de Picuí – PB.

Após o processamento feito pela cooperativa, os resíduos foram coletados e transportados para o laboratório, onde houve uma preparação das amostras, que consistiu na retirada da semente dentre o bagaço, que é o material de interesse para este trabalho, ou seja, os restos de cascas e de polpa do fruto remanescente do processamento do umbu. Em seguida, o bagaço do umbu foi armazenado e congelado em *freezer* na temperatura de -18°C para a utilização de acordo com o cronograma da pesquisa.

Para a realização do experimento, os resíduos foram colocados em três cestos de arame galvanizado, previamente pesados, apresentando blocos com aproximadamente 13,59mm de espessura. Antes de iniciar o experimento, os cestos (com os resíduos) foram pesados a fim de saber o valor da massa inicial das amostras. Logo após, elas seguiram para o processo de secagem em estufa com circulação forçada de ar nas temperaturas de 70, 80 e 90°C. As análises da variação de massa e espessura aconteceram simultaneamente nos intervalos de tempos 0, 2, 5, 10, 20, 30 60 e 120 minutos. O processo foi mantido até que as amostras atingissem a massa aproximadamente constante. Finalmente, após as amostras atingirem a massa constante, essas foram submetidas à secagem em estufa previamente estabilizada a 105°C durante 24 horas para a remoção total da água, isto é, para a obtenção da matéria seca.

A Figura 1 a seguir apresenta os cestos com resíduos de umbu (a) antes de serem submetidos a secagem, (b) após atingirem a massa constante e (c) após a obtenção da matéria seca.

**Figura 1:** Cestos com resíduos de umbu: (a) antes de serem submetidos a secagem; (b) após atingirem a massa constante; (c) após a obtenção da matéria seca.



Fonte: Autoria própria (2021)

Após a obtenção dos dados experimentais, foi calculada a razão de umidade ( $\bar{X}^*$ ) através da seguinte equação:

$$\bar{X}^* = \frac{\bar{X}(t) - X_{eq}}{X_i - X_{eq}} \quad (1)$$

onde  $X_{eq}$  é o teor de umidade de equilíbrio,  $\bar{X}(t)$  é o teor de umidade médio no tempo  $t$  e  $X_i$  é o teor de umidade no início do processo (tempo zero).

### 3.2. Modelagem Matemática

Uma das ferramentas disponíveis para análise de projeto e operação de processos ou sistema é a modelagem matemática e simulação. Essa pode ser útil para simular processos e experimentos de sistemas ou fenômenos físicos, representando características analisadas em sistemas reais proporcionando avaliar formas e aprimorar a operação (Adorno *et al.*, 2013).

O processo de secagem de produtos agrícolas, dependendo da técnica utilizada e seus parâmetros, pode demorar desde algumas horas até dias. E para a investigação e melhoria dessas técnicas são necessários testes para estabelecer qual o melhor tratamento a ser empregado.

Contudo, a simulação matemática de secagem permite fazer a otimização desses processos em tempo consideravelmente menor e de maneira mais econômica (Dapasquale; Sperandio, 2010).

Na literatura encontram-se alguns modelos empíricos que fazem uma correlação entre o teor de umidade médio e o tempo, com base nos dados experimentais, se apresentando como modelos que descrevem bem a cinética de secagem (Silva, 2007).

Dessa forma, os modelos empíricos utilizados nessa pesquisa encontram-se descritos na Tabela 1 a seguir, onde  $a$  e  $b$  são parâmetros de ajuste,  $t$  é o tempo (em minutos) e  $\bar{X}^*$  é o teor de umidade adimensional.

**Tabela 1:** Modelos empíricos

Modelo	Nome	Equação empírica	Referência
M1	Hernderson e Pabis	$\bar{X}^* = ae^{-bt}$	(Diamante <i>et al.</i> , 2010)
M2	Lewis	$\bar{X}^* = e^{-at}$	(Kaleta; Gornick, 2010)
M3	Page	$\bar{X}^* = e^{-at^b}$	(Diamante <i>et al.</i> , 2010)
M4	Peleg	$\bar{X}^* = 1 - t/(a+bt)$	(Mercali <i>et al.</i> , 2010)
M5	Silva <i>et al.</i>	$\bar{X}^* = e^{-at-b\sqrt{t}}$	(Silva <i>et al.</i> , 2012)
M6	Wang & Singh	$\bar{X}^* = 1 + at + bt^2$	(Kaleta; Gornick, 2010)

Apesar de descrever a curva de secagem para as condições experimentais, os modelos empíricos não fornecem indicação sobre o transporte de energia e água no interior do produto. Entretanto, os modelos difusivos podem descrever da forma razoável o perfil da distribuição de água no interior de um determinado produto biológico (Carlesso *et al.*, 2007).

Logo, a equação de difusão unidimensional, considerando a geometria da parede infinita, foi utilizada para descrever o processo de secagem de bagaços de umbu. Para isso, foram usadas duas soluções analíticas para a equação de difusão. A primeira admite a condição de contorno de primeiro tipo, e a segunda a condição de contorno de terceiro tipo. Deste modo, para que fosse possível aplicar tais soluções à secagem do bagaço de umbu, foram admitidas as seguintes hipóteses:

- O produto é homogêneo e isotrópico;
- A distribuição do teor de umidade, no início do processo, é uniforme;
- O único mecanismo de transporte de água dentro do produto é a difusão líquida;
- O encolhimento é negligenciável;
- A difusividade efetiva de água e o coeficiente de transferência convectiva de massa permanecem constantes em todo o processo.

A equação de difusão unidimensional para uma parede infinita pode ser escrita da seguinte forma (Luikov, 1968; Crank, 1992):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (2)$$

onde  $\Phi$  representa o teor de umidade em base seca (bs),  $D$  é a difusividade efetiva de massa e  $x$  a coordenada cartesiana da posição (m).

A primeira solução analítica da equação de difusão utilizada para o estudo das cinéticas de secagens de bagaços de umbu é a solução obtida considerando a condição de contorno de primeiro tipo para uma parede infinita de espessura  $L$ , que é expressa como (Silva, 2009):

$$\frac{\bar{\Phi} - \Phi_{eq}}{\Phi_i - \Phi_{eq}} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left( -(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{L^2} \Gamma^{\Phi} t \right) \quad (3)$$

no qual  $\bar{\Phi}$  representa o valor médio para  $\Phi$ ,  $\Phi_{eq}$  é o teor de umidade de equilíbrio da amostra,  $\Phi_i$  é o teor de umidade inicial e  $\Gamma^{\Phi} = D$  é a difusividade.

No que diz respeito à solução analítica para a equação de difusão considerando a condição de contorno de terceiro tipo, essa pode ser expressa a partir da igualdade para o fluxo difusivo e o fluxo convectivo na fronteira da parede infinita:

$$-D \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pm \frac{L_x}{2}} = h \left( \Phi(x, t) \Big|_{\frac{L_x}{2}} - \Phi_{eq} \right) \quad (4)$$

onde  $h$  é o coeficiente de transferência convectiva de massa,  $\Phi(x, t)$  é o valor de  $\Phi$  na posição  $x$  no instante  $t$  e  $L_x$  é a espessura da parede infinita.

Atendendo as hipóteses acima citadas, a Equação (2) pode ser analiticamente resolvida. Para uma parede infinita com um valor inicial uniforme  $\Phi_i$  para  $\Phi$ , e considerando a condição de contorno definida pela Equação (4), a solução analítica  $\Phi(x, t)$  é dada por:

$$\Phi(x, t) = \Phi_{eq} + (\Phi_i - \Phi_{eq}) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left( \mu_n \frac{x}{L_x/2} \right) \exp \left( - \frac{\mu_n^2}{(L_x/2)^2} D t \right) \quad (5)$$

em que a origem do eixo  $x$  está localizada no ponto central da parede.

Na equação (5), o coeficiente  $A_n$  é dado por:

$$A_n = \frac{4 \sin \mu_n}{2\mu_n + \sin 2\mu_n} \quad (6)$$

Note que a solução descrita  $\Phi(x, t)$  trata-se do teor de umidade em base seca num ponto  $x$  da parede infinita num instante de tempo  $t$ . Mas, para esse estudo consideramos o teor de umidade médio, num instante  $t$  de tempo, que é exposto da seguinte forma:

$$\Phi(t) = \Phi_{\text{eq}} + (\Phi_i - \Phi_{\text{eq}}) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{(L_x/2)^2} Dt\right) \quad (7)$$

onde o parâmetro  $B_n$  é dado por:

$$B_n = \frac{2Bi^2}{\mu_n^2 (Bi^2 + Bi + \mu_n^2)} \quad (8)$$

e  $\mu_n$  são as raízes da equação transcendental:

$$\cot \mu_n = \frac{\mu_n}{Bi} \quad (9)$$

Nas Equações (8) e (9),  $Bi$  é o número de Biot, dado por:

$$Bi = \frac{hL_x/2}{D} \quad (10)$$

Com o objetivo de obter melhorias nos parâmetros do processo, utilizou-se também uma solução numérica (condição de contorno de terceiro tipo) para a equação de difusão. Esta solução está implementada *no software Infinite Slab Numerical* e considera a variação de parâmetros importantes como a difusividade e espessura do produto. O método utilizado para a resolução desta solução foi o Método dos Volumes Finitos, usando uma formulação totalmente implícita (Maliska, 2013). O formalismo matemático relacionado à obtenção dessa solução pode ser encontrado em Silva Junior *et al.* (2019).

Para o estudo com a solução numérica foi considerado três modelos distintos, com base em um trabalho realizado por Silva *et al.* (2012) na descrição do processo de secagem de bananas descascadas. Esses modelos estão descritos no Quadro 1 abaixo.

**Quadro 1:** Modelos estudados com a solução numérica.

Modelo	Condições
A1	Difusividade constante e espessura variável
A2	Difusividade e espessura constantes
A3	Difusividade e espessura variáveis

Fonte: Autoria própria (2022)

No Modelo A3 a expressão para a difusividade é expressa na Equação 11 abaixo.

$$D(X^*) = b \exp(aX^*) \quad (11)$$

Onde  $a$  e  $b$  são os parâmetros de ajuste e  $D$  é a difusividade efetiva de água em função do teor de umidade adimensional local.



### 3.3. Softwares

Para a obtenção dos resultados deste trabalho foram utilizados os *softwares Lab Fit, Analytical e Infinite Slab Numerical*. O primeiro foi utilizado para a descrição das cinéticas e taxas de secagem através dos modelos empíricos, e para a obtenção dos melhores modelos para definição do encolhimento do produto. Já o segundo foi utilizado para a obtenção dos parâmetros da difusividade e do coeficiente de transferência convectiva de massa. Para isso, foi acoplado um otimizador a solução descrita acima. Este otimizador foi desenvolvido por Silva Junior (2018) a partir de um método inverso, no qual são atribuídos valores iniciais aos parâmetros do processo e então estes são corrigidos a fim de minimizar uma função objetivo. A função objetivo foi o qui-quadrado (Taylor, 1997).

A solução numérica para a equação de difusão foi utilizada através do *software Infinite Slab Numérica*. Este *software* permite a obtenção das cinéticas de secagem considerando a variação da espessura e difusividade das amostras.

## 4. RESULTADOS

Após a realização do experimento de secagem nas temperaturas de 70, 80 e 90°C, foram obtidos os valores do teor de umidade em base seca de acordo com a Equação 1. Em seguida, através do *software Lab Fit*, foi possível determinar os parâmetros de ajuste aos dados experimentais, com base na utilização dos modelos empíricos descritos na Tabela 1. Na Tabela 2 a seguir, apresentam-se o ajuste dos dados experimentais para cada uma das equações estudadas.

**Tabela 2:** Resultados para a cinética de secagem descrita por modelos empíricos

T (°C)	Modelo	a	b	$\chi^2$	R <sup>2</sup>
70	1	1,00385	$2,92179 \times 10^{-3}$	$2,39885 \times 10^{-2}$	0,99702
	2	$2,90624 \times 10^{-3}$	-	$2,41596 \times 10^{-2}$	0,99714
	3	$1,70992 \times 10^{-3}$	1,09010	$1,65071 \times 10^{-2}$	0,99781
	4	$3,05913 \times 10^2$	$7,35808 \times 10^{-1}$	$3,54728 \times 10^{-2}$	0,99438
	5	$3,10748 \times 10^{-3}$	$-3,51386 \times 10^{-3}$	$2,18191 \times 10^{-2}$	0,99712
	6	$-1,86056 \times 10^{-3}$	$8,17238 \times 10^{-7}$	$9,46566 \times 10^{-2}$	0,99042
80	1	1,00556	$3,33183 \times 10^{-3}$	$2,89259 \times 10^{-2}$	0,99647
	2	$3,30583 \times 10^{-3}$	-	$2,92652 \times 10^{-2}$	0,99660
	3	$1,70496 \times 10^{-3}$	1,11553	$1,79336 \times 10^{-2}$	0,99780
	4	$2,50540 \times 10^2$	$7,84582 \times 10^{-1}$	$7,72709 \times 10^{-2}$	0,98890
	5	$-8,34709 \times 10^{-3}$	$2,33058 \times 10^{-2}$	$2,92652 \times 10^{-2}$	0,99660

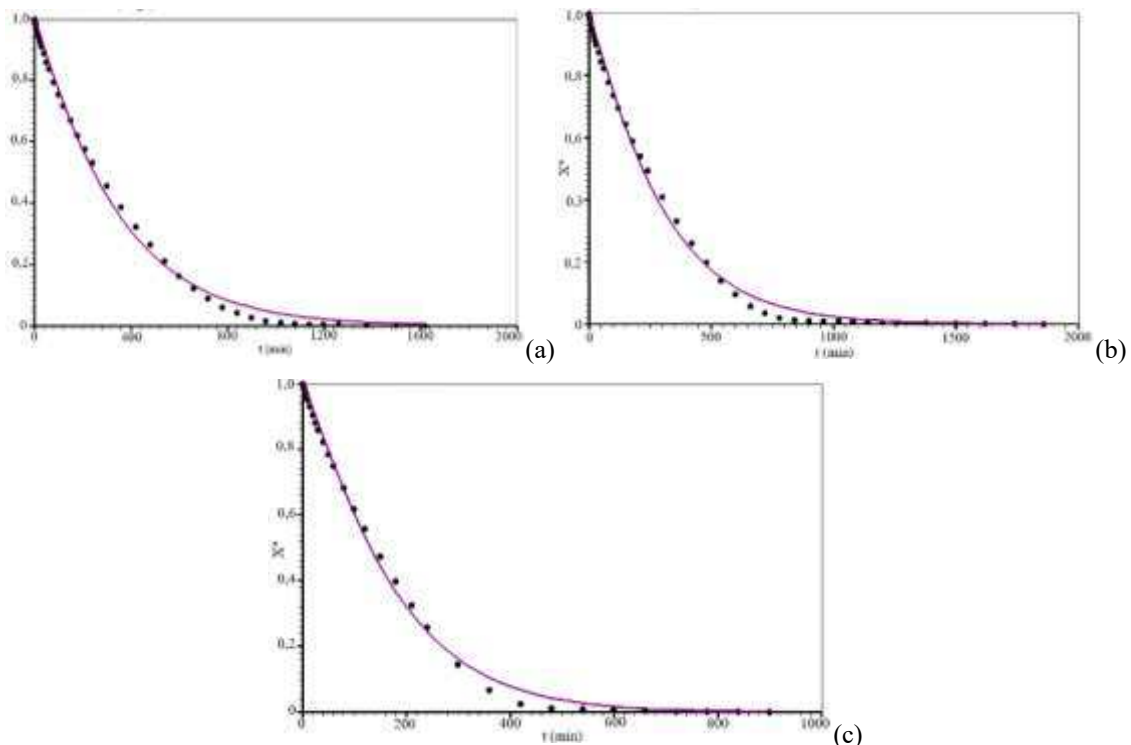
	6	$-1,83490 \times 10^{-3}$	$7,54734 \times 10^{-7}$	$2,79011 \times 10^{-1}$	0,97198
	1	1,01967	$5,65426 \times 10^{-3}$	$2,72994 \times 10^{-2}$	0,99543
	2	$5,49057 \times 10^{-3}$	-	$3,06835 \times 10^{-2}$	0,99594
90	3	$2,23576 \times 10^{-3}$	1,17552	$1,15007 \times 10^{-2}$	0,99799
	4	$1,61083 \times 10^2$	$7,46864 \times 10^{-1}$	$5,75651 \times 10^{-2}$	0,98896
	5	$6,43244 \times 10^{-3}$	$-1,12396 \times 10^{-1}$	$2,06035 \times 10^{-2}$	0,99641
	6	$-3,54256 \times 10^{-3}$	$2,86635 \times 10^{-6}$	$8,88018 \times 10^{-2}$	0,98608

Fonte: Autoria própria (2021)

Com base nos parâmetros de coeficiente de determinação ( $R^2$ ) e qui-quadrado ( $\chi^2$ ) apresentados na Tabela 2, conclui-se que o modelo que melhor descreveu as cinéticas de secagem (em todas as temperaturas estudadas) foi o modelo de Page (M3). Os modelos de Peleg (M4) e Wang & Singh (M6) apresentaram os piores ajustes para as condições experimentais.

A Figura 2 apresenta as curvas de ajustes do modelo de Page (M3), aos dados experimentais

**Figura 2:** Curvas de ajuste do modelo de Page (M3) aos dados experimentais. Cinética de secagem de bagaços de umbu na temperatura de: (a) 70°C; (b) 80°C; (c) 90°C.



Fonte: Autoria própria (2021)

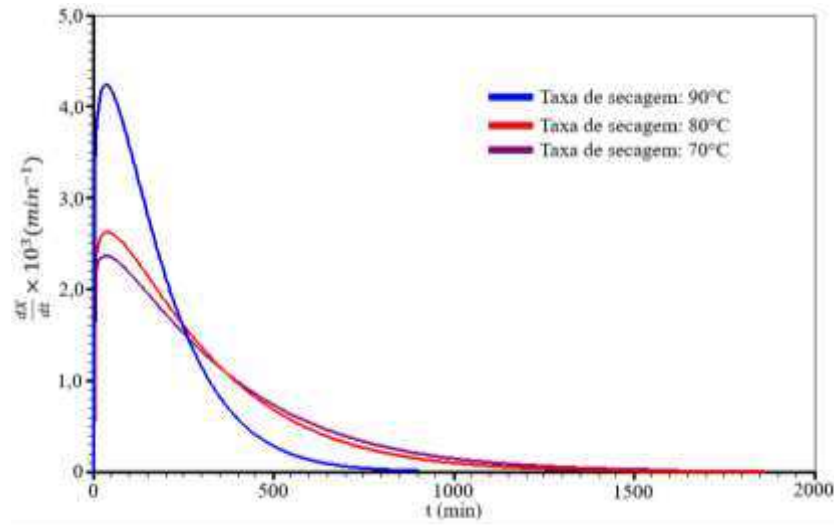
Os gráficos da figura acima certificam com o observado na Tabela 2, indicando que o modelo de Page descreveu bem os dados experimentais.

Após a definição do melhor modelo de descrição dos dados, esse foi utilizado para a obtenção da taxa de secagem através da derivada do modelo de Page representada pela Equação 12 descrita abaixo:

$$\frac{dX^*}{dx} = -abt^{(b-1)}e^{-at^b} \quad (12)$$

A Figura 3 apresenta as taxas de secagem obtidas para as três temperaturas estudadas.

**Figura 3:** Taxas de secagem



Fonte: Autoria própria (2022)

Comparando os gráficos da Figura 3, percebe-se que a elevação da temperatura influenciou no aumento da taxa de secagem analisando seus valores no início do processo. A maior taxa inicial foi obtida através do experimento de secagem a 90°C, que consequentemente influenciou no tempo total de secagem.

Um ponto importante a observar é o aumento da taxa de secagem dos resíduos submetidos a 70°C em relação as outras temperaturas a partir dos 350 min de secagem mantendo-se até o alcance do equilíbrio. Esse fenômeno pode ter acontecido devido ao atraso provocado pelo período de indução implicando na redução da taxa de secagem e consequente aumento do tempo na amostra submetida a 80°C.

Os dados experimentais também foram implementados no *software Analytical* para a determinação dos parâmetros do processo, via otimização, utilizando as duas soluções analíticas propostas.

A Tabela 3 abaixo contém os valores dos indicadores estatísticos (qui-quadrado e coeficiente de determinação) e os valores do número de biot, da difusividade de água e do coeficiente de transferência convectiva de massa.

**Tabela 3:** Parâmetros e indicadores estatísticos obtidos através de otimizações das amostras secas à 70, 80 e 90°C.

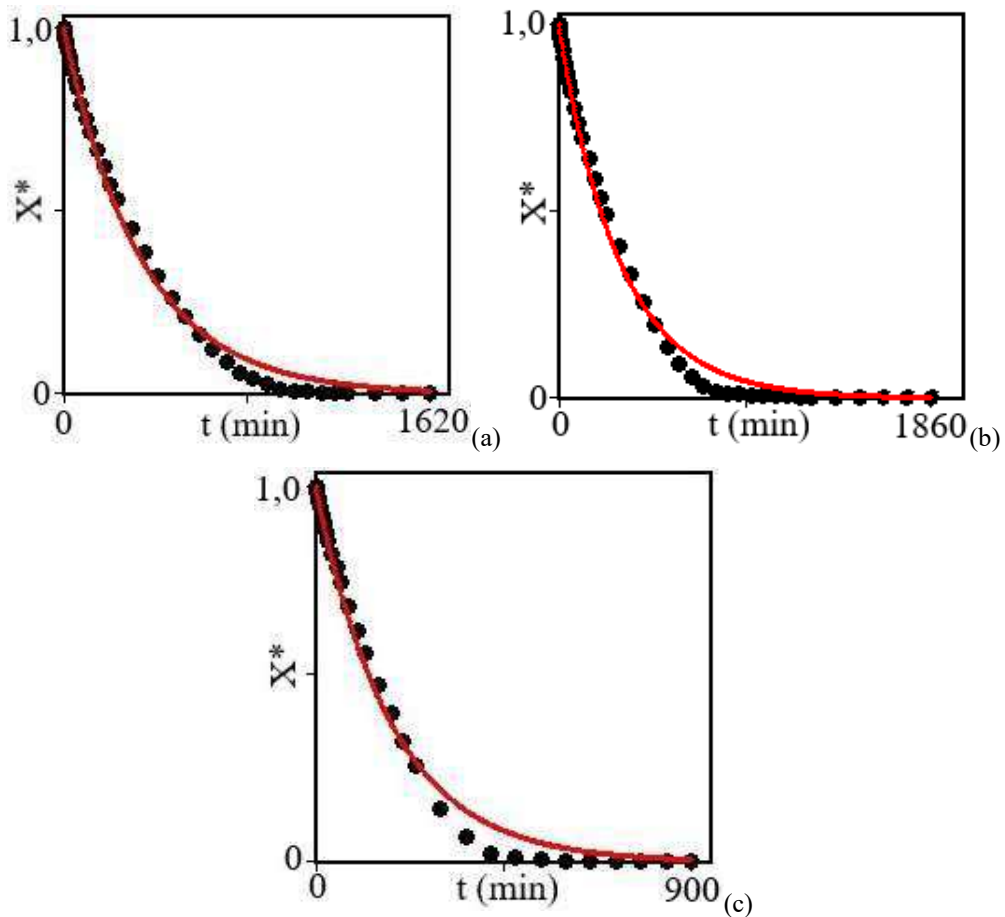
Condição de contorno	T (°C)	Parâmetros e indicadores estatísticos	
		Parâmetros e indicadores estatísticos	Valores obtidos
Primeiro tipo	70	D	$3,73658 \times 10^{-8}$
		$\chi^2$	$1,93035 \times 10^{-1}$
		R <sup>2</sup>	0,95875
	80	D	$7,83965 \times 10^{-10}$
		$\chi^2$	$2,01402 \times 10^{-1}$
		R <sup>2</sup>	0,96127
	90	D	$7,06816 \times 10^{-8}$
		$\chi^2$	$2,07133 \times 10^{-1}$
		R <sup>2</sup>	0,94229
Terceiro tipo	70	D	$6,73759 \times 10^{-6}$
		h	$1,88448 \times 10^{-5}$
		Bi	$1,80404 \times 10^{-2}$
		$\chi^2$	$2,41603 \times 10^{-2}$
		R <sup>2</sup>	0,99590
	80	D	$1,90465 \times 10^{-6}$
		h	$3,74614 \times 10^{-7}$
		Bi	$1,33745 \times 10^{-3}$
		$\chi^2$	$2,92653 \times 10^{-2}$
		R <sup>2</sup>	0,99546
	90	D	$1,29375 \times 10^{-5}$
		h	$3,61807 \times 10^{-5}$
		Bi	$1,83176 \times 10^{-2}$
		$\chi^2$	$3,06861 \times 10^{-2}$
		R <sup>2</sup>	0,99314

Fonte: Autoria própria (2022)

Analisando os dados contidos na tabela acima, conclui-se que as otimizações realizadas considerando a condição de contorno de terceiro tipo apresentou os melhores indicadores estatísticos para o coeficiente de determinação (R<sup>2</sup>) e qui-quadrado ( $\chi^2$ ), em todas as temperaturas estudadas.

Na Figura 4 abaixo, encontram-se os gráficos de ajuste aos dados experimentais através da solução analítica para a equação de difusão considerando a condição de contorno de terceiro tipo.

**Figura 4:** Gráficos de ajuste para a temperatura de: (a)70°C; (b)80°C; (c)90°C.



Fonte: Autoria própria (2022)

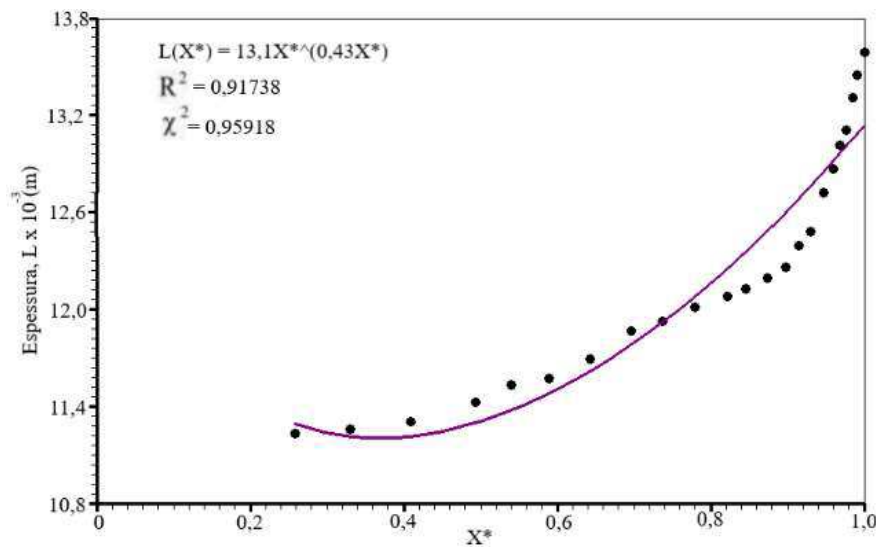
Apesar de ter apresentado os melhores indicadores estatísticos, o modelo não apresentou resultados físicos coerentes para a temperatura de 80°C. Quando comparados os valores para o coeficiente de transferência convectiva de massa ( $h$ ) e difusividade ( $D$ ) percebe-se que a resistência externa para a saída de água é maior do que a resistência interna do produto, o que não faz sentido fisicamente.

Além disso, o valor para o número de biot é considerado muito pequeno. Um resultado semelhante foi observado em um estudo de secagem de fatias de Kiwi realizado por Moreira *et al* (2018), que encontrou valores baixos para este parâmetro. Isso se deve ao fato do produto possuir um alto teor de umidade, implicando em uma distribuição uniforme de água, ou seja, a umidade é perdida sem gerar gradientes de umidade consideráveis.

Ademais, quando um produto possui uma distribuição uniforme, o modelo empírico pode se mostrar mais eficaz para a descrição das cinéticas de secagem. Esse fato pode ser observado nos dados das Tabelas 2 e 3, em que o modelo de Page (M3) apresentou os melhores indicadores se comparado com a solução analítica.

Conseqüentemente, com o objetivo de obter resultados melhores, utilizou-se a solução numérica para a equação de difusão. Como fora destacado na metodologia, essa modelagem considera a variação do encolhimento do produto e da difusividade efetiva de água. Logo, para descrever o encolhimento do bagaço de umbu, as funções obtidas através do *software Lab Fit* (Silva; Silva, 2009) foram ajustadas aos dados experimentais do encolhimento. A Figura 5 apresenta os ajustes obtidos aos dados experimentais do encolhimento. Feito isso, essa expressão foi acoplada à solução numérica.

**Figura 5:** Evolução do encolhimento das amostras para a temperatura de 80°C



Fonte: Autoria própria (2022)

A Tabela 4, a seguir, mostra os valores dos parâmetros obtidos nos processos de otimização com a solução numérica para a temperatura de 80°C. Cabe salientar que para esse estudo foram consideradas malhas com 1000 volumes de controle e 1000 *steps* de tempo.

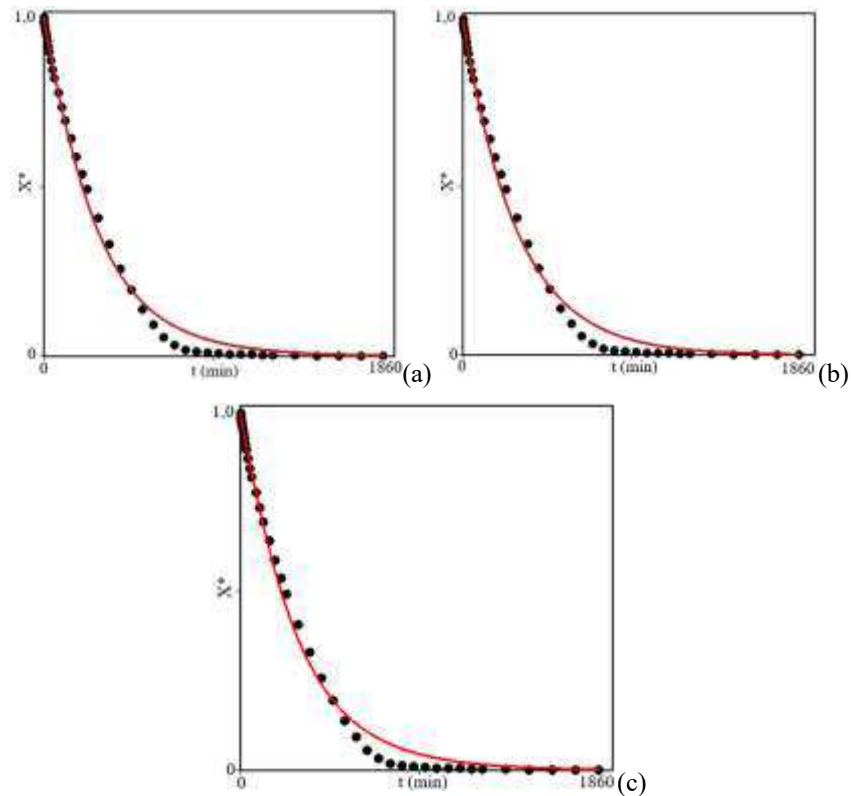
**Tabela 4:** Resultado das otimizações com a solução numérica

M	Parâmetros do processo (T=80°C)				
	a	b	h	$\chi^2$	R <sup>2</sup>
A1	-	$8,19927 \times 10^{-9}$	$3,53899 \times 10^{-7}$	$2,59491 \times 10^{-2}$	0,99604
A2	-	$4,12553 \times 10^{-8}$	$3,83618 \times 10^{-7}$	$2,92761 \times 10^{-2}$	0,99546
A3	$1,18183 \times 10^{-10}$	$5,09978 \times 10^{-9}$	$3,72873 \times 10^{-7}$	$2,59207 \times 10^{-2}$	0,99603

Fonte: Autoria própria (2022)

Comparando os dados das Tabelas 4 e 3 percebe-se claramente uma melhora nos parâmetros da difusividade e coeficiente de transferência convectiva de massa. Demonstrando a importância de considerar a variação dos fenômenos citados anteriormente. No entanto, observa-se também que não houve diferença significativa entre os modelos A1 e A3. Uma vez que a é muito pequeno, a difusividade também fica constante. A Figura 6 mostra os gráficos obtidos por cada modelo estudado.

**Figura 6:** Gráfico de ajuste considerando o modelo: (a) A1; (b) A2; (c) A3.



Fonte: Autoria própria (2022)

Comparando os resultados das Tabelas 2 e 4 percebe-se que o modelo empírico de Page ainda apresentou valores melhores para o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) e qui-quadrado ( $\chi^2$ ), demonstrando mais uma vez o fato da grande concentração de umidade no interior do produto. Sendo assim, para processos de secagem com distribuição de umidade similares a esta, muitos pesquisadores desconsideram o modelo difusivo, substituindo-os por modelos mais simples, como uma equação empírica. Isso ocorre porque não existem gradientes de umidade significativos no interior do produto em um determinado momento (Moreira *et al.*, 2018).

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foram testadas soluções analíticas e numéricas para a equação de difusão na descrição de secagens de bagaços de umbu. Foi possível concluir que desses modelos, o que melhor descreveu os experimentos foi o modelo com a solução numérica que considera a variação da difusividade e encolhimento do produto.

Entretanto, o modelo empírico de Page ainda apresentou valores melhores para o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) e qui-quadrado ( $\chi^2$ ), mostrando a eficácia dos modelos empíricos para casos em que o produto em estudo possui um alto teor de umidade em seu

interior. Ademais, observou-se que as amostras secas à 90°C apresentaram uma menor resistência a perda de água no produto, implicando em uma redução no tempo de secagem.

Portanto, a metodologia utilizada neste trabalho pode ser aplicada na descrição da secagem de produtos biológicos cuja geometria seja aproximada a uma parede infinita.



## 6. REFERÊNCIAS

- ADORNO, W. T. Modelagem matemática aplicada a transferência de massa em alimentos. **Enciclopédia Biosfera**. Centro Científico Conhecer, Goiânia, v. 9, n. 16, p. 1465-1478, 2013.
- ALBUQUERQUE, E. M. et al. Production of - peanut milk based beverages enriched with umbu and guava pulps. **Jornal Of The Saudi Society Of Agricultural Sciences**, v. 14, n. 1, p.61-67, 2015.
- CARLESSO, V. O. et al. Avaliação de modelos de secagem em camada fina de sementes de maracujá amarelo. **Revista Brasileira de Sementes**, Londrina, v. 29, n. 2, p. 28-37, 2007.
- CONAB (2017) - **Companhia Nacional de Abastecimento**. Conjuntura mensal umbu (fruto), janeiro de 2017. Disponível em <[http:// https://www.conab.gov.br/info-agro/analises-do-mercado-agropecuário-e-extrativista/analises-do-mercado/historico-mensal-de-umbu](http://https://www.conab.gov.br/info-agro/analises-do-mercado-agropecuário-e-extrativista/analises-do-mercado/historico-mensal-de-umbu)>.
- COSTA, A. M., SILVA JÚNIOR, A. F., OLIVEIRA, T. M. Q., NOGUEIRA, G. T., FARIAS, V. S. O., LIMA, J. I., LIMA, I. F., ATAÍDE, J. S. P., AZEVEDO, H. B., FLORÊNCIO JÚNIOR, M. S., ARAÚJO, M. W. S., MEDEIROS, R. A. Um estudo dos efeitos da geometria sobre os parâmetros termo-físicos em processos de secagem de gengibre. In: Aplicação e aprofundamento de conhecimentos nas áreas das engenharias. Ponta Grossa: **Atena**, pp. 118-130, 2020.
- CRANK, J. The Mathematics of Diffusion. 2. ed. New York: **Oxford University Press**, 1992.
- DAPASQUALE, V. A.; SPERANDIO, D. Modelo de simulação de secagem e produtos agrícolas usando entalpia do ar constante. **Engenharia Agrícola**, São Paulo, v. 30, n. 4, p. 726-731, 2010.
- DAPASQUALE, V. A.; SPERANDIO, D. Modelo de simulação de secagem e produtos agrícolas usando entalpia do ar constante. **Engenharia Agrícola**, São Paulo, v. 30, n. 4, p. 726-731, 2010.
- DIAMANTE, L. M. et al. A new mathematical model for thin layer drying of fruits. **International Journal of food science & technology**, v. 45, n. 9, p. 1956-1962, 2010.
- FILHO, M. T. L.; MARTINS, J. H.; MATA, M. E. R. M. C.; SILVA, A. L. C.; MARTINS, I. T. A. Drying kinetics of pineapple agro-industrial residues: a new approach. **Brazilian Journal of Development**. V. 6, p. 3928-3949, 2020.
- FERREIRA, J. P. L.; QUEIROZ, A. J. M.; FIGUEIRÊDO, R. M. F.; SILVA, W. P.; GOMES, J. P.; SANTOS, D. C.; SILVA, H. A.; ROCHA, A. P. T.; PAIVA, A. C. C.; CHAVES, A. D. C. G.; LIMA, A. G. B.; ANDRADE, R. O. Utilization of Cumbeba (Tacinga inamoena) Residue: Drying Kinetics and Effect of Process Conditions on Antioxidant Bioactive Compounds. **Foods**. v. 10, p. 1–28, 2021
- KALETA, A.; GÓRNIICK, K. Evaluation of drying models of apple (var. McIntosh) dried in a convective dryer. **International Journal of food science & technology**, v. 45, n. 5, p. 891-898, 2010.

KARA, C.; DOYMAZ, I. Effective moisture diffusivity determination and mathematical modelling of drying curves of apple pomace. **Heat and Mass Transfer**. v. 51, p. 983-989, 2015.

KAYRAN, S.; DOYMAZ, I. Determination of drying kinetics and physicochemical characterization of apricot pomace in hot-air dryer. **Journal of Thermal Analysis and Calorimetry**. v. 130, p. 1163–1170, 2017.

KOUKOUCH, A.; IDLIMAM, A.; ASBIK, M.; SARH, B.; IZRAR, B.; BOSTYN, S.; BAH, A.; ANSARI, O.; ZEGAOU, O.; AMINE, A. Experimental determination of the effective moisture diffusivity and activation energy during convective solar drying of olive pomace waste. **Renewable Energy**. v. 101, p. 565-574, 2017.

LUIKOV, A. V. Analytical Heat Diffusion Theory. 2. ed. Moscow: **Academic Press**, 1968.

MALISKA, C. R. Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional. **LTC**: Rio de Janeiro, 2013, 453 p.

MELO, E. A.; ANDRADE, R. A. M. DE S. Compostos bioativos e potencial antioxidante de frutos do umbuzeiro. **Alimentos e Nutrição**, v. 21, n. 3, p.453-458, 2010.

MERCALI, G. D. et al. Mass transfer Kinetic during osmotic dehydration of bananas (musa sapientum, shum). **International Journal of food science & technology**, Wiley Online Library, v. 45, n. 11, p. 2281-2289, 2010.

MOREIRA, I. S. SILVA, W. P.; CASSTRO, D. S.; SILVA, L. M. M.; GOMES, J. P.; SILVA, C. M. D. P. S. Production of kiwi snack slice with different thickness: Drying kinetics, sensory and physicochemical analysis. **Australian Journal of Crop Science**. p. 778-787, 2017.

NASCIMENTO, E. M. G. C.; MULET, A.; ASCHERI, J. L. R.; CARVALHO, C. W. P.; CÁRCEL, J. A. Effects of high-intensity ultrasound on drying kinetics and antioxidante properties of passion fruit peel. **Journal of Food Engineering**. V. 170, p. 108-118, 2016.

SILVA, W. P. Discretizações em fenômenos de transporte computacional, Cursos 1 e 2 (2009) **Apresentações em Powerpoint**, online disponível no endereço eletrônico: <Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional I e II (ufcg.edu.br) >. Data de acesso: 11/1/2022.

SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S.; FARIAS, V. S. O.; GOMES, J. P. Diffusion Models to Describe the Drying Process of Peeled Bananas: Optimization and Simulation. **Drying Technology**. v. 30: 164-174, 2012.

SILVA, W. P. et al. Empirical and diffusion models to describe water transport into chickpea (Cicer arietium L.). **International Journal of food science & technology**, 21 de set. 2012.

SILVA, W. P.; SILVA, C.A.M.D.P.S. **LAB Fit curve fitting software**, V.7.2.46. (2009); Online. Disponível em:<www.labfit.net>. Acesso em: jan. 2022.

SILVA, W. P. Transporte difusivo em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas generalizadas. 2007. Tese de Doutorado. **Tese** (Doutorado em Engenharia de Processos) Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande - PB.

SILVA JÚNIOR, A. F.; FARIAS, V. S. O.; ATAÍDE, J. S. P.; FRANCO, C. M. R.; SILVA, W. P.; SILVA, C. M. D. P. S. Description of convective drying of carrot circular slices including shrinkage and variation of effective diffusivity. **Sylwan**. V. 163, p. 243-269, 2019.

SILVA JUNIOR, A. F.; SILVA, W. P.; AIRES, J. E. F.; AIRES, K. L. C. A. Numerical approach to describe complementary drying of banana slices osmotically dehydrated. **Heat Mass Transfer**. v. 54, p. 267-276, 2018.

STORCK, C. R. et al. Folhas, talos, cascas e sementes de vegetais: composição nutricional, aproveitamento na alimentação e análise sensorial de preparações. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 43, n. 3, p. 537-543, 2013.

TAYLOR, J. R. An introduction to error analysis. Sausalito, California: **University Science Books**, 1997.

TOZATTI, P.; RIGO, M.; BEZERRA, J. R. M. V.; CÓRDOVA, K. R. V.; TEIXEIRA, A. M. Utilização de resíduo de laranja na elaboração de biscoitos tipo cracker. **Revista Ciências Exatas e Naturais**, Curitiba, PR, v. 15, n. 1, p. 135-150, 2013.