UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rafael Augusto Albuquerque Macedo

Sistema Lineares e Métodos Numéricos: uma proposta para o Ensino Médio

Campina Grande - PB
Agosto/2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Rafael Augusto Albuquerque Macedo

Sistema Lineares e Métodos Numéricos: uma proposta para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr(a). Deise Mara Barbosa de Almeida

Campina Grande - PB
Agosto/2023

Rafael Augusto Albuquerque Macedo

Sistemas Lineares e Métodos Numéricos: uma proposta para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 25 de agosto de 2023:

Profa.Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida-UFCG
Orientadora

Profa. Dra Emanuela Regia de Sousa Coelho -UEPB
Membro externo

Prof. Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo-UFCG
Membro interno

Campina Grande - PB
Agosto/2023

M141s Macedo, Rafael Augusto Albuquerque.
Sistemas lineares e métodos numéricos: uma proposta para o ensino médio / Rafael Augusto Albuquerque Macedo. – Campina Grande, 2023.
78 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação: Profa. Dra. Deise Mara Barbosa de Almeida".
Referências.

1. Matemática. 2. Equações Lineares. 3. Métodos Diretos. 4. Métodos Iterativos. 5. Linguagem Computacional Python. I. Almeida, Deise Mara Barbosa de. II. Título.

CDU 517.9(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

Dedico este trabalho em especial aos meus pais, Jonas e Vilma Macedo, que de forma direta sempre me ajudaram e ajudam para que eu possa conquistar meus sonhos e objetivos. À minha esposa Amanda Macedo, por ser meu porto seguro e que sem ela por perto os resultados não seriam os mesmos. E ao meu filho tão amado, Antônio Macedo, que a maior realização da minha vida é ver você feliz!

Agradecimentos

Agradeço este trabalho a Deus que, diante de tantos obstáculos, fez renascer em mim força e vontade para concluí-lo, guiando o meu caminho, ajudando-me na procura das respostas para a finalização do mesmo.

Agradeço em especial, aos meus pais, Jonas e Vilma Macedo, pelo amor, dedicação e apoio nas horas mais difíceis, inclusive aos meus irmãos, Ana Beatriz, Gabriel Henrique, Marcos Vinícius e Lucas Emanuel, amo vocês.

Este trabalho só foi possível através do apoio, suporte e incentivo da minha esposa Amanda Macedo. Amo você.

Ao meu pequeno Antônio Macedo, que me faz ser uma pessoa melhor a cada dia na função de pai. Te amo Meu Filho.

A minha família, Albuquerque Macedo, por tudo o que vocês representam para mim.

À minha orientadora, Dr(a). Deise Mara Barbosa de Almeida, pelo seu compromisso político e educacional do qual me acompanhou em todas as etapas deste trabalho e que por muitas vezes se fez na função de uma amiga, de uma mãe, de uma ouvinte, de uma conselheira. Obrigado querida Professora.

Aos meus amigos de turma, André Macedo, Andresson Alquino, Benildo Virgínio, Carlos Gonzaga, Cláudio Teodista, Eli Azevedo, Érico Andrade, Erivan Barbosa, Gilmar Veríssimo, Gilvandro Melo, Idalice Santiago, João Evayr, Wellington Rodrigues e Wirander Rosa, obrigado por tudo. Conseguimos. Vencemos.

À Universidade Federal de Campina Grande que, junto à Unidade Acadêmica de Matemática, oferta com imenso compromisso o curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT.

Aos docentes do Departamento de Matemática da UFCG, principalmente aos que estão vinculados ao PROFMAT. Quero agradecer também à secretária da UAMat, Isabela Souza, por toda prestatividade e cordialidade.

E a todos meus amigos e colegas que de forma direta ou indiretamente contribuíram para que chegasse até aqui.

"Não só isso, mas também nos gloriamos nas tribulações,
porque sabemos que a tribulação produz perseverança;
a perseverança, um caráter aprovado;
e o caráter aprovado, esperança.
(Bíblia Sagrada, Romanos 5, 3-4)

Resumo

A importância do estudo dos Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio se deve por sua utilização na modelagem de diversos problemas. Esses problemas vão desde os mais simples envolvendo duas equações e duas incógnitas até problemas de áreas tecnológicas e científicas dos quais abrange um número alto de variáveis necessitando de métodos mais elaborados e robustos de resolução. O presente trabalho tem como principal objetivo, apresentar e relacionar a historicidade, o conceito, a importância e as aplicações do estudo de Sistemas de Equações Lineares utilizando os métodos numéricos de resolução diretos e os iterativos. Aliando a isso, a utilização da linguagem computacional Python, como um recurso digital e tecnológico, propondo a utilização dos códigos desses métodos como ferramenta pedagógica a serem utilizadas nas aulas de Matemática com alunos do Ensino Médio. Além disso, este trabalho propõe uma Sequência Didática que explora os conceitos de programação, passa por matrizes, por conceitos de Sistemas de Equações Lineares e por fim, aborda a solução de sistemas numericamente.

Palavras-chave: Matemática. Equações Lineares. Métodos Diretos. Métodos Iterativos. Linguagem Computacional Python.

Abstract

The importance of studying Systems of Linear Equations in High School is due to their use in modeling various problems. These problems range from the simplest involving two equations and two unknowns to problems in technological and scientific areas which cover a high number of variables requiring more elaborate and robust methods of resolution. The main objective of this work is to present and relate the historicity, concept, importance and applications of the study of Systems of Linear Equations using direct and iterative numerical resolution methods. Combined with this, the use of the Python computational language, as a digital and technological resource, proposing the use of the codes of these methods as a pedagogical tool to be used in Mathematics classes with high school students. Furthermore, this work proposes a Didactic Sequence that explores programming concepts, goes through matrices, concepts of Systems of Linear Equations and finally, addresses the solution of systems numerically.

Keywords: Mathematics. Linear Equations. Direct Methods. Iterative Methods. Python Computational Language.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Os Sistemas de Equações Lineares além de estarem presentes em todos os ramos do conhecimento, também estão relacionados com muitos problemas importantes do dia a dia, dos quais são muito úteis para a resolução desses problemas. Por exemplo, como em um problema relacionado a tráfego de veículos, balanceamento de equações químicas, no controle de estoque e no teste de qualidade de um produto. Assim, é um tema de bastante relevância no ensino de Matemática, do qual a teoria de Sistemas de Equações Lineares é a base e uma parte fundamental da Álgebra Linear, um tema que é usado na maior parte da matemática moderna. Em diversos ramos da matemática aplicada e ciências naturais, podemos encontrar vários usos de sistemas lineares. Exemplos são a Física (Circuito Elétrico), a Economia (modelos fechado e aberto de Leontief), as Engenharias (Ruído Acústico), a Biologia (Relação entre dosagem do medicamento e peso), a Navegação (GPS) e a Aviação (Tripulação de Voo). Além disso, é ferramenta fundamental para trabalhar com os alunos outros conteúdos de Matemática, como Matrizes, Determinantes, Modelagem, Otimização, entre outros.

Neste trabalho abordaremos o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, com métodos numéricos de resolução quase nunca utilizados no Ensino Básico, que no caso são os métodos diretos: (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e os métodos iterativos: (*Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel*). Esses métodos estarão aliados com a linguagem computacional Python objetivando a utilização dos códigos desses métodos como ferramenta pedagógica a serem utilizadas com alunos do Ensino Médio. A utilização desses métodos e de recursos tecnológicos são baseados nas Competências Gerais e Específicas encontradas na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e na Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba, voltada para sua utilização na educação básica. Para corroborar nossa proposta, fazemos uma análise relativa a esse assunto em alguns documentos oficiais de ensino, finalizando com uma Proposta de Aula para o Ensino Básico.

Assim, por meio do presente trabalho, espera-se que esses métodos de resolução de sistemas de equações lineares sejam ferramentas de estudo e que possa contribuir com a formação educacional de alunos e professores, e que se possível, tais professores possam levar tais métodos e o uso da linguagem computacional para o ambiente acadêmico, utilizando-as em aulas interativas, buscando maior participação dos alunos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo central deste trabalho é criar uma ferramenta de auxílio para o professor do qual possa introduzir de maneira mais clara o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares resolvidos através dos métodos diretos: (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e os métodos iterativos: (*Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel*) para facilitar o processo de ensino-aprendizagem, abordando suas importâncias e aplicações, relacionando a historicidade do estudo de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, com a prática do uso de novas tecnologias, através da Linguagem Computacional Python.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Auxiliar o professor no ensino de Sistemas de Equações Lineares através dos métodos de resolução diretos e os iterativos em aplicações práticas;

- Auxiliar a interpretação e compreensão do aluno e do professor no ensino-aprendizagem de sistemas equações lineares;

- Propor uma Sequência Didática aplicável ao Ensino Médio que utilize a linguagem de programação Python associada à linguagem matemática na abordagem de Sistemas de Equações Lineares.

1.2 Organização

Este trabalho está estruturado em 6 capítulos. O Capítulo 1 se encarrega de introduzir esta dissertação, expondo os seus objetivos, sua organização e estruturação. O Capítulo 2 trata da fundamentação teórica, onde é analisada a importância dos recursos tecnológicos na educação e onde também se encontra presente na BNCC que sugere o uso das tecnologias associadas à Linguagem Matemática. O Capítulo 3, por sua vez, aborda o contexto histórico das Matrizes e dos Sistemas Lineares. Já o Capítulo 4 define os Métodos de Resolução de Sistemas Lineares Diretos e Iterativos: Fatoração LU, Fatoração de Cholesky, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. O Capítulo 5 propõe uma sequência didática que orienta sobre o uso da Linguagem de Programação Python no ensino do Sistema de Equações Lineares através dos métodos de resolução diretos: (*Fatoração LU e Fatoração de Cholesky*) e os iterativos: (*Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel*).

2 Uso da Tecnologia na Educação

Neste início de século vivemos numa sociedade em constante mudança, na era digital, tecnológica, da informação e da comunicação, onde conseguimos levar os fatos que ocorrem em locais distantes do nosso país para qualquer lugar, de modo que estes fatos podem alterar e influenciar as nossas vidas, em que podemos, por exemplo, comunicar, debater e jogar com pessoas do mundo inteiro, numa interação jamais vista em outra época da História da Humanidade.

De acordo com Leite (2014), pode-se identificar a presença da tecnologia em quase todas as áreas de atividade humana; sua presença parece irreversível. Podemos presenciar, nos últimos anos, um grande avanço tecnológico o qual passou a fazer parte do cotidiano de muitas pessoas e, é claro, está presente em muitas escolas. É devido a essa grande potencialidade que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) contribuem para que as fronteiras entre o mundo cada vez mais globalizado sejam quebradas a todo instante. Segundo Macedo (2014), através dessas tecnologias, nós somos levados a um conhecimento cada vez mais rápido, fácil, interativo e acompanhado de um raciocínio lógico.

Num contexto educacional, todo e qualquer tipo de mudança traz grandes desafios, pois nesta nova configuração social, o universo da informação dos alunos (e professores) ampliou-se a uma escala nunca antes imaginada. As informações, saberes e conhecimentos são produzidos a partir de tantas fontes diferentes e com tanta velocidade que se torna impossível abrangerem tudo. De acordo com Leite (2014), assim como a tecnologia para o uso do homem expande suas capacidades, a presença dela na sala de aula amplia seus horizontes e seu alcance em direção à realidade.

É fundamental desenvolver competências relacionadas à tecnologia em alunos da Educação Básica. A maioria dos jovens consegue interagir com as novas tecnologias, porém, muitos não conseguem se expressar e criar coisas novas a partir dela.

A educação, assim como as demais organizações, sofre uma forte pressão por mudanças. Hoje, as formas de ensinar precisam ser atualizadas. O ambiente cultural tornou-se muito diferente do ambiente escolar: os alunos desmotivam-se e aprendem pouco. Pozo (2002) cita que, não só muda o que se aprende como também a forma como se aprende. A aprendizagem também precisa evoluir.

Segundo Saraiva (2022), com a pandemia do COVID-19, foram perceptíveis os enormes avanços que as tecnologias digitais trouxeram para a educação. O uso de recursos tecnológicos por meio de computadores e softwares, não foram apenas benéficos, mas também, a única alternativa para manter as aulas funcionando, de forma online.

Se for colocada em prática de forma responsável e criativa, as novas tecnologias são uma grande aliada da educação, ao ponto de promover diversos benefícios para os alunos e professores, dos quais têm o poder de dinamizar o processo de ensino-aprendizagem. Porém, vale enfatizar, que as tais tecnologias não substituem o papel do professor, sendo fundamental que este saiba conduzir a utilização dessas novas mídias e softwares, pois, de acordo com Oliveira (2022), dotando das ferramentas e estratégias corretas é possível utilizar a tecnologia para promover o desenvolvimento escolar, sabendo que o uso desenfreado da mesma pode ocasionar problemas e atrapalhar a evolução dos alunos. Logo,

> "... o professor não se torna indispensável de forma alguma neste contexto, muito pelo contrário, com tantas informações disponíveis, é, por meio da mediação do professor com metodologias e intervenções pedagógicas adequadas, que os alunos terão condições de absorver as melhores informações, ter um olhar crítico, transformá-las em conhecimento." (CONTIN, 2016)

Para que uma nova tecnologia seja utilizada nas escolas é preciso que o professor esteja seguro e preparado para isso e do qual não implica dizer que a educação deva ser voltada exclusivamente para o uso de novas tecnologias e que a melhoria do aprendizado dependa delas. No caso específico de matemática, não é a simples utilização de algum recurso tecnológico que a tornará mais fácil ou que os alunos apreenderão mais.

A escola e os professores devem manter-se atualizados em seus meios de ensino, acompanhando o avanço das novas gerações, pois a escola está envolvida na globalização que exige transformações em todas as áreas e a tecnologia surge com novas maneiras de pensar e agir, transformando o nosso dia a dia. Já os professores, é preciso conscientização para potencializar suas aulas, organizando e acompanhando práticas que utilizem a tecnologia. Nesse sentido,

> "A tecnologia é de primordial necessidade, pois promove oportunidades de aprendizagem e interatividade tanto para o professor como para o aluno. A escola é um local de constante transformação e a tecnologia educacional é uma dessas ferramentas para a transformação." (MACHADO; LIMA, 2017)

Com o avanço tecnológico constante, os professores se deparam com um turbilhão de informações e recursos tecnológicos, tornando-se um desafio, do qual é difícil para o educador filtrar quais recursos escolher e como trabalhar o conteúdo matemático em questão para mediar o conhecimento a seus alunos.

> "Computador e internet na sala de aula nas mãos de professores treinados formam um importante instrumento de ensino. Ter acesso à internet não é mais uma questão de aumentar a capacidade de raciocínio. Passou a ser vital. É como saber ler e escrever nos anos 50." (KOCH, 2013)

A tecnologia tornou-se um novo meio para contribuir na construção de conhecimentos, porém, os alunos possuem conhecimento avançados nestes ambientes tecnológicos em relação aos seus professores, pelo fato de estarem diariamente em contato com tecnologias digitais, diferente de seus professores.

Segundo Camillo e Medeiros (2018), as tecnologias, no domínio da educação, trouxeram, além do acesso à informação de forma mais dinâmica a possibilidade de exercer um processo de ensino-aprendizagem mais inovador, moderno, atrativo e atento às demandas sociais. Não são ferramentas, apenas, do professor para que esses possam se capacitar, e, dessa forma, tornar as suas aulas mais modernas e atrativas. É algo a ser experienciado, também, pelo educando, visto que ambos, professor e aluno, comunicam-se, diariamente, a partir de redes e comunicações virtuais. Nesse sentido, o principal desafio é trazê-las para o contexto escolar.

> "A educação diz respeito ao "processo de desenvolvimento da capacidade física, intelectual e moral da criança e do ser humano em geral, visando à sua melhor integração individual e social". Para ocorrer essa integração é necessário que valores, conhecimentos, hábitos e comportamentos sociais sejam ensinados e aprendidos por meio da educação para ensinar sobre as tecnologias na base da identidade e da ação do grupo e que se faça uso destas mesmas tecnologias para ensinar as bases da educação." (SOUZA; PEREIRA; MACHADO, 2018)

2.1 A importância da tecnologia sobre o olhar da BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada pelo MEC em 2018, que define as aprendizagens necessárias para os estudantes brasileiros da Educação Básica, traz para a Formação Geral Básica 10 competências gerais para toda a Educação Básica e um conjunto de competências específicas para cada área de conhecimento e, para da uma dessas áreas, há varias habilidades a serem desenvolvidas. No caso para a área de Matemática, apresenta 8 competências específicas para o Ensino Fundamental e 5 para o Ensino Médio.

Nesse sentido, a BNCC contempla o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao uso crítico e responsável das tecnologias digitais tanto de forma transversal – presentes em todas as áreas do conhecimento e destacadas em diversas competências e habilidades com objetos de aprendizagem variados – quanto de forma direcionada – tendo como fim o desenvolvimento de competências relacionadas ao próprio uso das tecnologias, recursos e linguagens digitais –, ou seja, para o desenvolvimento de competências de compreensão, uso e criação de tecnologias digitais da informação e comunicação - TDICs em diversas práticas sociais, como destaca a competência geral 5:

> "Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva." (BRASIL, 2018)

No caso para a área de Matemática, a BNCC evidencia uma competência específica para o Ensino Fundamental afirmando que, processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.

- COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL - 5: Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

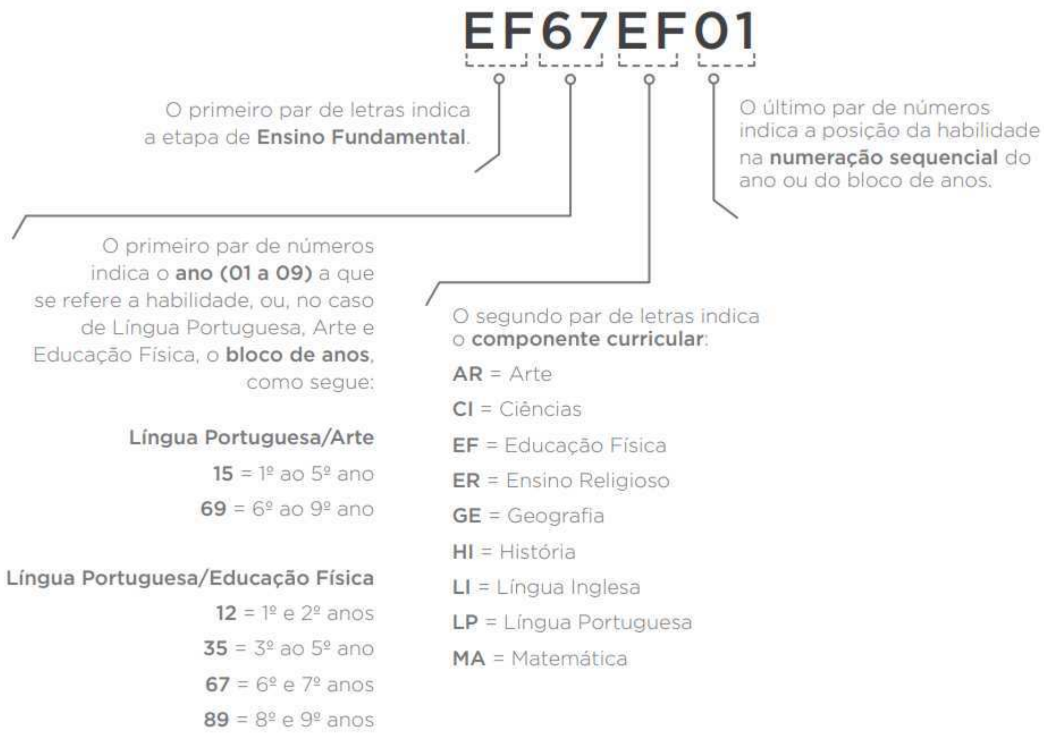
E evidencia uma competência para o Ensino Médio concluindo que os alunos possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas:

- COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO - 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

De acordo a com Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba, as tecnologias da informação e comunicação estão presentes em diversos setores de nossa sociedade, impactando de forma contundente a todos que atuam nas diversas áreas. Nessa perspectiva, a preparação dos estudantes, bem como de todos os demais indivíduos, precisa ser principiada no ensino básico. Ferramentas tecnológicas como o computador, os diversos softwares, a calculadora, o smartphone, o tablet, os vários Apps, os games, dentre outros, são utilizadas com intuito de aumentar a eficiência do ensino e desenvolver o senso crítico, o raciocínio lógico e dedutivo, a capacidade de observação, de pesquisa e estratégias de comunicação, Paraíba (2018).

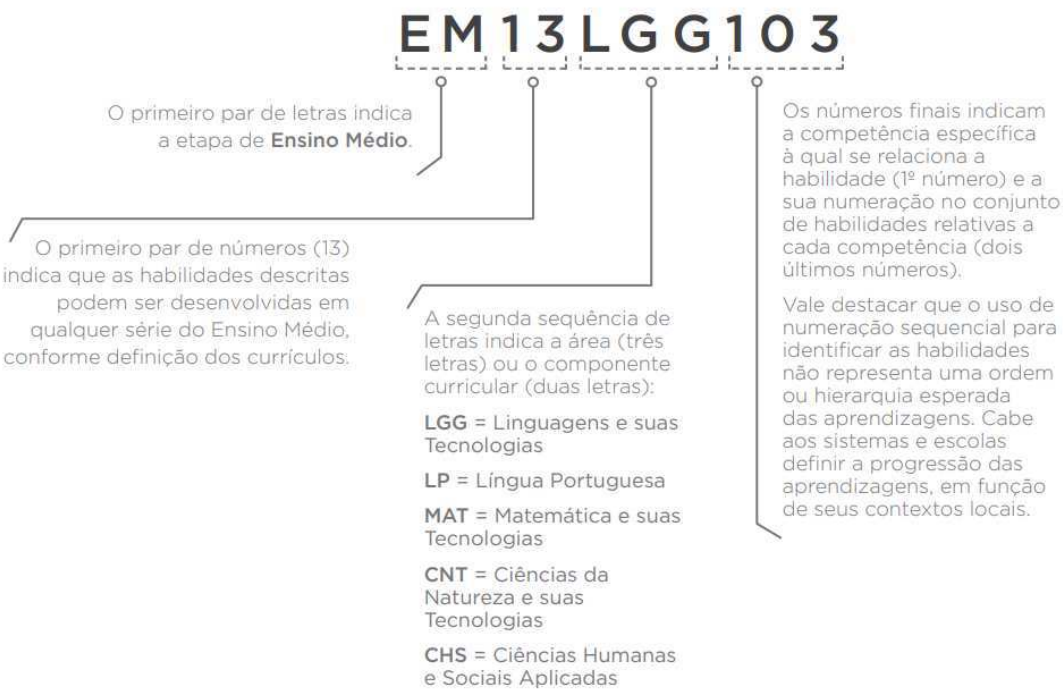
A BNCC e a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba esclarecem como as aprendizagens estão organizadas e explica a composição de códigos alfanuméricos criados para identificar tais aprendizagens, como podemos exemplificar:

Figura 1 – Código Alfanumérico do Ensino Fundamental



Fonte: (BRASIL, 2018)

Figura 2 – Código Alfanumérico do Ensino Médio



Fonte: (BRASIL, 2018)

Ainda de acordo com a BNCC, as possibilidades de organização curricular das aprendizagens de Matemática são várias, porém, algumas habilidades deixam evidente o uso das TDICs, como no caso das habilidades:

- **(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou **tecnologias digitais**.
- **(EF09MA05)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, **preferencialmente com o uso de tecnologias digitais**, no contexto da educação financeira.
- **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, **recorrendo ou não a softwares ou aplicativos** de álgebra e geometria dinâmica.
- **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma **linguagem de programação** na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Na direção de substituir o modelo único de currículo do Ensino Médio por um modelo diversificado e flexível, a Lei nº 13.415/2017[4] alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), estabelecendo que o currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, com isso, algumas habilidades foram retiradas da nova BNCC, como no caso da **EM13MAT410** e **EM13MAT411** que trata respectivamente, da associação do conceito e reconhecimento de matriz, determinantes e sistemas de equações lineares. Porém, seguindo as orientações da própria BNCC, a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba, implementou no seu sistema de ensino características regionais, diante da diversidade histórica, social, ambiental e cultural Paraíba (2018). Com isso, no que se refere a área de Matemática, a Proposta incluiu no seu currículo as habilidades que tratam de Matrizes e Sistemas Lineares, do qual será tema deste trabalho e garantirá a implementação do estudo.

De acordo com a BNCC, a área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas

[4] Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as Leis nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Ainda de acordo com Brasil (2018), também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade.

A preocupação com os impactos das transformações ocasionada pelas tecnologias na sociedade está expressa na BNCC e se explicita já nas competências gerais para a Educação Básica. Diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais são tematizadas, tanto no que diz respeito a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, tablets etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação.

Portanto, para a BNCC, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas, com isso, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho.

2.2 Linguagem computacional no ensino de matemática

Com bases nessas informações e orientações dos documentos normativos, este trabalho utilizará linguagem computacional Python como ferramenta pedagógica para ser utilizada com alunos do Ensino Médio em paralelo com o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares e também para favorecer e ampliar a visão de mundo dos alunos no processo de ensinar e aprender matemática. De acordo Souza (2023), a linguagem de programação pode ajudar os estudantes do Ensino Médio a abrir caminhos e oportunidades. Aprender a programar pode possibilitar o desenvolvimento das habilidades de raciocínio, organização do pensamento e comunicação ao elaborar estratégias para a resolução de problemas matemáticos.

A escolha da linguagem computacional Python dentre várias linguagens existentes se deu pelo fato que esta linguagem tem um grande potencial pedagógico, pela sua simplicidade e fácil entendimento, que facilita o ensino e a compreensão dos conceitos de codificação, alem do mais, seu uso é gratuito e livre.

> “A linguagem de programação Python é muito interessante como primeira linguagem de programação devido á sua simplicidade e clareza. Embora simples, é também uma, linguagem poderosa, podendo ser usada para administrar sistemas e desenvolver projetos. É uma linguagem clara e objetiva, pois vai direto ao ponto, sem rodeios.” (MENEZES, 2019)

Um dos objetivos desta pesquisa é propor atividades que envolvam programação e conteúdos matemáticos, oportunizando a alunos e professores descobertas e caminhos diferentes de uma aula tradicional, do qual é importante ressaltar que a matemática e a programação estão intimamente ligadas, a programação elevou a matemática a um novo patamar. Segundo Wolfram (2017), podemos evidenciar este fato, uma vez que os problemas reais do século XXI só puderam ser solucionados devido a existência do computador, esta é uma das justificativas que a programação deve entrar no sistema educacional como uma parte fundamental da disciplina de matemática.

3 Contexto Histórico das Matrizes e dos Sistemas Lineares

Segundo Santos (2017), os trabalhos com matrizes e determinantes iniciaram no século II a.C. Os babilônios estudaram problemas que tiveram como soluções sistemas lineares de duas variáveis, no qual estão preservados em tabletes de argila. Os Chineses, no início de seus estudos, que segundo Boyer (1996), surgiram 1000 a.C., desenvolveram livros relacionados ao tratamento de cálculos astronômicos, promoveram contribuições a respeito das propriedades relacionadas ao triangulo retângulo, frações, geometria relacionada à álgebra e a na aritmética, dos quais, tais conteúdos foram abordados em grande parte pelo livro chinês mais influente de matemática denominado de *"Chui-Chang Suan-Shu"* ou *"Nove capítulos sobre a arte matemática"*. Ainda de acordo com Boyer (1996) os Chineses gostavam especialmente de diagramas e apresentaram os primeiros registros de um quadrado mágico, disposto da seguinte forma:

Figura 3 – Quadrado Mágico

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: (BOYER, 1996)

Ainda segundo o autor, é interessante observar que o quadrado mágico teve seu primeiro registro efetuado pelos chineses. É provável que sua origem seja ainda mais antiga, porém, como não foi registrada, não foi dada a conhecer. Os chineses gostavam especialmente de diagramas e o livro *"Nove capítulos sobre a arte matemática"* contém 246 problemas dentre os quais, um é resolvido através desse quadrado mágico, o qual motivou os Chineses a relacionar esse diagrama à resolução de sistemas de equações lineares simultâneas. Como exemplo abaixo:

"Há três tipos de milho, dos quais três feixes do primeiro tipo, dois do segundo e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois feixes do primeiro tipo, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um feixe do primeiro tipo, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de milho há em um feixe de cada tipo?"

Nas notações de hoje esse problema se apresentaria como o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}.$$

Ainda de acordo com Boyer (1996) afirma que para resolver esse problema, eram efetuadas operações sobre colunas na matriz associada ao quadrado mágico:

Figura 4 – Quadrado Mágico referente ao Sistema de Equações

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Fonte: (BOYER, 1996)

Para reduzi-la a:

Figura 5 – Quadrado Mágico após operações efetuadas

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Fonte: (BOYER, 1996)

A fim de representar as equações na forma $36z = 99$; $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais calcula-se os respectivos valores de z, y e x. Nesse sentido, verifica-se uma caracterização inicial de matrizes, de forma intuitiva, associada ao diagrama do quadrado mágico. De acordo com Sousa, Sabino e Sabino (2017), a única diferença entre o método atual para o chinês (antigo) é que escrevemos as equações lineares como as linhas da matriz em vez de colunas. Além disso, as equações nas colunas são escritas da direita para a esquerda.

Ainda segundo os autores, a teoria dos determinantes surgiu simultaneamente através dos estudos de dois grandes matemáticos: Seki Shinsuke Kowa no Japão, e Gottfried Wilhelm Leibniz na Alemanha, ambos resolviam sistemas de equações lineares de maneiras diferentes, porém com o mesmo propósito: encontrar as soluções através de eliminações. O termo matriz veio com James Joseph Sylvester, em 1850, e com seu amigo Arthur Cayley, em 1858.

De acordo com Boyer (1996), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), faz referência pela primeira vez no Ocidente ao método de determinantes, onde em 1693, ele apresenta uma caracterização para indicar linhas e colunas, originadas a partir de equações lineares simultâneas:

$$\begin{matrix} 10+11x+12y=0 & & 1_0+1_1+1_2=0 \\ 20+21x+22y=0 & \text{ou} & 2_0+2_1+2_2=0. \\ 30+31x+32y=0 & & 3_0+3_1+3_2=0 \end{matrix}$$

Escreveríamos isso como:

$$\begin{aligned} a_1+b_1c+c_1y&=0 \\ a_2+b_2c+c_2y&=0. \\ a_3+b_3c+c_3y&=0 \end{aligned}$$

Se as equações fossem consistentes então:

$$\begin{gathered} 1_0 2_1 3_2 + 1_0 2_2 3_1 \\ 1_1 2_2 3_0 + 1_1 2_0 3_2 \\ 1_2 2_0 3_1 + 1_2 2_1 3_0, \end{gathered}$$

que equivalem ao enunciado atual referente ao do determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Assim como no estudo dos chineses, Leibniz evidenciava as matrizes a partir de equações lineares simultâneas.

Ainda segundo Boyer (1996), Josep Louis Lagrange, considerado ao lado de Euler o maior matemático do século XVIII, o artigo intitulado *"Solutions Analytiques de qualques problèms sur les pyramides triangulares"*, publicado em 1975, apresentou resultados analíticos para o cálculo de área de um triangulo e o volume de um tetraedro, denotados respectivamente por A e V, como temos a seguir:

$$A = \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } V = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Com isso, ele concluiu que os elementos que compõe as matrizes (denominação atual), representavam os vértices do triangulo e do tetraedro e caracterizam coordenadas de pontos no espaço, como verifica-se na fórmula para o cálculo de A e V. Assim, verifica-se que Lagrange buscou artifícios analíticos para caracterizar os elementos que compõem as linhas e colunas das matrizes.

Segundo Eves (1997), o matemático que mais desenvolveu estudos acerca dos Determinantes e consequentemente apresentou considerações significativas a respeito das matrizes foi Algustin Louiz Cauchy, nascido no ano de 1789 em Paris, e dentre as suas obras destacam-se as produções em Séries Infinitas, Teoria das Funções Reais Complexas, Equações Diferenciais, Probabilidade e Física-Matemática. Entre as principais contribuições temos a demonstração de um teorema que envolvem os conteúdos de Matrizes e Determinantes, que também foi citada por Leibniz, o qual foi proposto da seguinte maneira:

"Se A e B são matrizes $n \times n$, então $|A\ .\ B| = |A|\ .\ |B|$".

De acordo com Lima, Pereira e Chaquiam (2018), a partir do teorema exposto, verifica-se que apesar de ele não citar a nomenclatura *"ordem"*, mas considera que A e B são matrizes $n \times n$ (classificação intuitiva das matrizes quadradas), caracterizando mais um elemento para as matrizes. Além disso, destaca-se a relação entre o determinante e as matrizes, a qual, também foi citada na abordagem feita por Leibniz.

Segundo Boyer (1996), Arthur Cayley, em sua grande obra *"Menoir on the Theory of Matrices"* a respeito da teoria das matrizes, do ano de 1858, revela o poder da álgebra matricial. A qual surge a partir da Teoria das Transformações Lineares Simultâneas, onde a partir dessa construção, Cayley mostrou que ao inverter a ordem das matrizes com letras maiúsculas pelas minúsculas o produto era diferente. Ou seja, não conseguia-se retornar ao sistema de origem. Com isso, mostrou que a multiplicação matricial não é comutativa, como no exemplo abaixo, consideremos a transformação T_1:

$$T_1 = \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

do qual aplicaremos uma outra transformação, denotada T_2:

$$T_2 = \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases} \quad .$$

Observemos que em T_2 existem variáveis presentes em T_1. Assim, se aplicarmos T_1 em T_2, teremos um resultado equivalente a transformação composta, do tipo:

$$T_1T_2 = \begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y, \end{cases}$$

Porém, se invertêssemos a ordem de T_1 e T_2, de modo que T_2 seja a transformação:

$$T_2 = \begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = Cx + Dy, \end{cases}$$

e T_1 é a transformação:

$$T_1 = \begin{cases} x'' = ax' + by' \\ y'' = cx' + dy', \end{cases}$$

e novamente se aplicarmos T_1 em T_2, teremos:

$$T_1T_2 = \begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y. \end{cases}$$

Expressando na linguagem de matrizes os resultados das transformações, verifica-se que os resultados são diferentes:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix} \text{ e}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}.$$

Mostrando que ao inverter a ordem das matrizes com letras maiúsculas pelas minúsculas o produto seria diferente. Ou seja, não conseguia-se retornar ao sistema de origem. Com isso, provou que a multiplicação matricial não é comutativa.

Cayley também apresentou uma álgebra para adição de matrizes (de dimensões iguais). A qual, é obtida somando-se os elementos correspondentes das matrizes, expôs a multiplicação de uma matriz por um escalar k, definiu a matriz identidade, denotada por I, a qual pode ser associada ao elemento neutro da multiplicação matricial e a matriz quadrada nula, como o elemento neutro da adição de matrizes.

Segundo Lima, Pereira e Chaquiam (2018), evidenciou-se a Arthur Cayley, como o matemático que apresentou a álgebra para o estudo das matrizes, além do fato, de considerar que a abordagem de matrizes deve preceder determinante.

De acordo com Sousa, Sabino e Sabino (2017), o termo Matriz foi introduzido pelo matemático inglês James Joseph Sylvester em 1850, e que anos depois, recebeu grandes contribuições de seu amigo Arthur Cayley, o qual, deu o primeiro significado da palavra Matriz, como sendo o lugar onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como:

> "[...]um bloco retangular de termos [...] que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número "p" e escolher a vontade "p" linhas e "p" colunas[...]" (TAYLOR, 1850)

De acordo com Neto (2016), a descoberta da álgebra matricial consiste na formulação de uma metodologia para que muitos números sejam operados ao mesmo tempo. Mais tarde, as matrizes se tornaram bastante úteis na programação de computadores. Atribui-se a existência dos computadores pessoais à utilização das matrizes para realização das tarefas de processamento das máquinas, o que diminui, e muito, o tamanho dos componentes necessários para seu funcionamento. Nesse processo, pessoas como Bill Gates e Steve Jobs tiveram papel importante.

Bernardes (2019) afirma que, historicamente, a noção de matriz foi a última a surgir, isto é, as matrizes foram introduzidas após determinantes, sistemas lineares, transformações lineares e formas quadráticas. Os momentos históricos de Sylvester e de Cayley mostram que sua introdução e desenvolvimento foram motivados pela necessidade de uma representação em forma de tabela. Assim, um possível encaminhamento seria introduzir o conceito de matriz quando houver necessidade da representação matricial, por exemplo, durante o estudo de sistemas lineares.

Tal desenvolvimento promoveu o conhecimento da origem e dos fatores que levaram o objeto matemático matriz a ser definido do modo como conhecemos hoje e as escolhas que o elegeram como ferramenta para resolver determinados problemas e diante disso, este trabalho busca despertar uma visão mais crítica e repassar alternativas sobre o ensino e resolução de sistemas lineares no nível básico, considerando que para uma melhor compreensão, o leitor, precisa ter um conhecimento prévio do contéudo de Matrizes.

4 Métodos para resolução de sistemas lineares

Os métodos para resolução de sistemas lineares podem ser classificados em duas categorias: métodos diretos e métodos iterativos. Os métodos diretos são aqueles que, após uma quantidade finita e conhecida de passos, fornecem a solução exata do sistema linear (caso exista). Já os métodos iterativos, constroem uma sequência de aproximações da solução do sistema linear que, sob certas condições, esta sequência converge para solução exata.

Neste trabalho iremos abordar os métodos diretos Fatoração LU e Fatoração de Cholesky; e os métodos iterativos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Esses métodos serão aliados a linguagem computacional Python objetivando a utilização dos códigos desses métodos como ferramenta pedagógica a serem utilizadas com alunos do Ensino Médio.

4.1 Métodos Diretos

Segundo Ruggiero e Lopes (1996), os métodos diretos fornecem a solução exata do sistema linear (caso ela exista) após um número finito de operações. Em outras palavras, se o sistema tem solução, os métodos diretos nos dão a solução exata do problema com somente erros de arredondamento gerados devido a aritmética do ponto flutuantes utilizada por computadores para realizar os cálculos.

Os métodos diretos abordados neste trabalho são baseados no processo de fatoração que consiste em decompor uma dada matriz no produto de duas outras matrizes mais simples com o objetivo de facilitar os cálculos. Assim, a resolução de um sistema linear será dada por resolver uma sequência de sistemas lineares mais simples.

4.1.1 Fatoração LU:

A Fatoração LU de uma matriz A quadrada de ordem m consiste em escrever A como o produto de duas matrizes L e U, ambas de mesma ordem que a matriz A; sendo L uma matriz triangular inferior e com os elementos da diagonal principal sendo 1 e U uma matriz triangular superior, ou seja, $A = LU$. Daí vem o nome desta fatoração, L de *Lower* (inferior) e U de *Upper* (superior).

Lembremos que a diagonal principal de uma matriz quadrada, que é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas, são os elementos da matriz em que o número da linha é igual ao número da coluna, ou seja, são os elementos a_{ii}, em que $i = j$, como destacaremos no Exemplo a seguir.

Exemplo 1. *Observe as matrizes quadradas abaixo, de ordem 2 e 3, respectivamente. Os elementos da diagonal principal estão destacados em vermelho.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Com isso, recordemos agora que uma matriz triangular inferior é uma matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero; e uma matriz triangular superior é uma matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero, ou seja, quando tivermos uma matriz quadrada A tal que os elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ a definiremos com uma matriz triangular inferior, do mesmo modo, se $a_{ij} = 0$ para $i > j$, definiremos A como uma matriz triangular superior, conforme no exemplo abaixo.

Exemplo 2. *Observe as matrizes A_1 e A_2 quadradas de ordem 3, sendo que a matriz A_1 é uma matriz triangular inferior e a matriz A_2 uma matriz triangular superior.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Uma condição para que uma matriz possa ser decomposta no produto LU é que o determinante de todas as submatrizes principais devem ser diferentes de zero. De acordo com Soares (2012), dada uma matriz A quadrada de ordem n, qualquer submatriz quadrada cuja diagonal faça parte da diagonal de A, das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A, onde $1 \leq k \leq n$, é chamada uma submatriz principal (A_k). Os determinantes das submatrizes principais, simbolizado por $\det(A_k)$, são chamados menores principais de A.

No exemplo a seguir, mostraremos uma matriz quadrada A, de ordem 3, e seus menores principais .

Exemplo 3. *Uma matriz A quadrada de ordem 3*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

possui 3 submatrizes principais, consequentemente 3 menores principais.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix};\ A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};\ A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

e devemos ter $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ *e* $\det(A_3)$ *não nulos para utilizar a fatoração LU.*

Conforme Franco (2006), vamos enunciar formalmente a Fatoração LU com o Teorema a seguir.

Teorema 4.1 (Fatoração LU)**.** *Seja $A = a_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem n, e A_k o menor principal, constituído das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A. Assumimos que o $det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, 3, ..., n-1$. Então existe uma única matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, com $l_{11} = l_{22} = ... = l_{nn} = 1$, e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$, tal que $LU = A$. Além disso, $det(A) = u_{11}u_{22}...u_{nn}$.*

Demonstração. De acordo com Anton e Rorres (2012), como as submatrizes A_k de A são todas não singulares, isto é, $\det(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, 3, ..., n$, sempre que necessário podemos permutar as linhas para obter pivôs não nulos no processo de escalonamento. Assim, podemos aplicar o escalonamento na matriz A até obtermos uma matriz triangular superior U. Isto é, existem matrizes elementares $E_1, E_2, ..., E_m$, ou seja, matrizes que representam as operações elementares aplicadas sobre as linhas de A durante o processo, tais que:

$$(E_m...E_3E_2E_1)A = U$$

Logo, as matrizes inversas $E_1^{-1}, E_2^{-1}, ..., E_m^{-1}$ existem e temos:

$$A = (E_m...E_3E_2E_1)^{-1}U \Leftrightarrow A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}...E_m^{-1}U$$

Chamamos $L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}...E_m^{-1}$, temos portanto $A = LU$. Pelo modo como foi construído, o fator L é triangular inferior com diagonal principal unitária e seus elementos l_{ij}, para $i > j$, são os multiplicadores m_{ij} obtidos durante o processo de escalonamento e como ja vimos acima, o fator U é a matriz triangular superior obtida no final processo.

∎

A seguir, conforme Franco (2006), mostraremos o processo para a construção das matrizes L e U aplicando a definição de produto e de igualdade de matrizes, isto é, impondo que $LU = A$ e, para isso, consideraremos a seguinte matriz A, quadrada de ordem n abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Seja então:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para obtermos os elementos da matriz L e da matriz U devemos calcular os elementos das linhas de U e os elementos da colunas de L na seguinte ordem:

1ª linha de U: Fazendo o produto da primeira linha de L por todas as colunas de U e igualando com os elementos da primeira linha de A, obtemos:

$1 \cdot u_{11} = a_{11} \Rightarrow a_{11} = u_{11}$
$1 \cdot u_{12} = a_{12} \Rightarrow a_{12} = u_{12}$
$\vdots$
$1 \cdot u_{1n} = a_{1n} \Rightarrow a_{1n} = u_{1n}$

Portanto, $u_{1j} = a_{1j}$ para $j = 1, 2, 3, ..., n$.

1ª coluna de L: Fazendo o produto de todas as linhas de L, da segunda linha até n, pela primeira coluna de U e igualando com os elementos da primeira coluna de A, abaixo da diagonal principal, obtemos:

$l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$
$l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$
$\vdots$
$l_{n1} \cdot u_{11} = a_{n1} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}} = \frac{a_{n1}}{a_{11}}$

Assim, $l_{i1} = \dfrac{a_{n1}}{u_{11}} = \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}$ para $i = 2, 3, ..., n$.

2ª linha de U: Fazendo o produto da segunda linha de L por todas as colunas de U, da segunda coluna até n, e igualando com os elementos da segunda linha de A, da diagonal principal em diante, obtemos:

$l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12}$
$l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}$
$\vdots$
$l_{21} \cdot u_{1n} + u_{2n} = a_{2n} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21} \cdot u_{1n}$

Logo, $u_{2j} = a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j}$, para $j = 2, 3, ..., n$.

2ª coluna de** L**: Fazendo o produto de todas as linhas de L, da terceira linha até n, pela segunda coluna de U e igualando com os elementos da segunda coluna de A, abaixo da diagonal principal, obtemos:

$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}}$
$l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} = a_{42} \Rightarrow l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41} \cdot u_{12}}{u_{22}}$
$\vdots$
$l_{n1} \cdot u_{12} + l_{n2} \cdot u_{22} = a_{n2} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2} - l_{n1} \cdot u_{12}}{u_{22}}$

Desse modo, $l_{i2} = \dfrac{a_{i2} - l_{i1} \cdot u_{12}}{u_{22}}$, para $i = 3, 4, ..., n$.

Logo, se continuarmos calculando a terceira linha de U, a terceira coluna de L, a quarta linha de U, a quarta coluna de L, assim por diante, obteremos as seguintes fórmulas gerais:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, & i \leq j, \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj})/u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

Os sistemas lineares são formados por um conjunto de equações lineares de n incógnitas. Todos os sistemas possuem uma representação matricial, isto é, constituem matrizes envolvendo os coeficientes numéricos e a parte literal na forma $Ax = b$. De um modo geral um sistema de n equações lineares é escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right. ,$$

e é representado na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ou simplesmente,

$$Ax = b,$$

onde A é uma matriz dos coeficientes quadrada de ordem n, x é uma matriz vetor das variáveis, de ordem $n \times 1$ e b é uma matriz vetor dos termos constantes, de ordem $n \times 1$.

Para resolvermos um sistema linear, $Ax = b$ usando a Fatoração LU na matriz A, podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b \Leftrightarrow L(Ux) = b,$$

com isso temos:

$$Ly = b \text{ e } Ux = y.$$

Isto significa que, ao invés de resolvermos o sistema original, podemos resolver o sistema triangular inferior $Ly = b$ e, então, o sistema triangular superior $Ux = y$, o qual nos fornece a solução de $Ax = b$.

De acordo com Vasconcellos (2021), dada uma matriz A quadrada, não sabemos se haverá necessidade de permutações e, portanto, não sabemos, a princípio, se a fatoração $A = LU$ existe. Caso seja necessário, para evitar o pivô nulo e que os multiplicadores tenham valores grandes, basta multiplicar a matriz A por uma matriz P de permutações construída das linhas de uma matriz identidade I, colocadas na mesma ordem das linhas pivotacionais que geram a matriz U, que realize a permutação e, então, aplicar a Fatoração LU normalmente. Fatoramos, portanto, $PA = LU$. Ainda segundo o autor, P é inversível e $P^{-1} = P^T$, logo, $A = P^T LU$. Segundo Campos (2018), para resolver o sistema $Ax = b$, tem-se:

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb,$$

fazendo,

$$Ux = y, \text{ então } Ly = Pb.$$

Esse processo contribui bastante para diminuir os erros de arrendondamento, produzindo, portanto, soluções melhores. A demonstração desse método $PA = LU$ poderá ser encontrada em Campos (2008).

Agora, assumindo que a matriz A possua a Fatoração LU focaremos em como resolver o sistema. A seguir, mostraremos os procedimentos da Fatoração LU para resolução de um sistema linear:

1. Verificar se a matriz A do sistema linear satisfaz as condições da Fatoração LU;
2. Decompor a matriz A na fatoração LU utilizando as fórmulas gerais;
3. Resolver o sistema $Ax = b$ usando a fatoração LU.

Veremos a seguir um exemplo de como resolver um sistema linear utilizando a Fatoração LU e seus procedimentos.

Exemplo 4. *Utilizando a Fatoração LU, qual a solução do sistema linear abaixo?*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Solução. Escrevendo o sistema linear na forma matricial do tipo $Ax = b$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Para que a matriz A, de ordem 3, satisfaça as condições da Fatoração LU, devemos ter os menores principais da matriz A diferente de zero, ou seja, $\det(A_1) \neq 0$ e $\det(A_2) \neq 0$. Temos que:

- $\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$;
- $\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$

Agora que sabemos que a matriz A satisfaz as condições do Teorema 4.1, ou seja, que pode ser decomposta no produto LU. Iremos construir as matrizes L, triangular inferior com valores numéricos 1 na diagonal principal e U, triangular superior, ambas de mesma ordem de A, ou seja, de ordem 3 do tipo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Com isso, aplicando as fórmulas gerais definidas, obtemos:

Tabela 1 – Cálculo dos elementos da 1ª linha de U

j	a_{1j}	u_{1j}
1	$a_{11} = 3$	u_{11}
2	$a_{12} = 2$	u_{12}
3	$a_{13} = 4$	u_{13}

Fonte: Autor

Tabela 2 – Cálculo dos elementos da 1ª coluna de L

i	$\frac{a_{n1}}{u_{11}}$	l_{i1}
2	$\frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{3}$	l_{21}
3	$\frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{4}{3}$	l_{31}

Fonte: Autor

Para a **1ª linha de** U, temos o $i = 1$:

Para a **1ª coluna de** L, temos $j = 1$:

Com isso, definimos alguns elementos da matriz L e da matriz U, que agora são formadas por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Como alguns elementos não foram definidos, continuemos a aplicação das fórmulas gerais, obtendo:

Para a **2ª linha de** U, temos $i = 2$:

Tabela 3 – Cálculo dos elementos da 2ª linha de U

j	$a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j}$	u_{2j}
2	$a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = \frac{1}{3}$	u_{22}
3	$a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = \frac{2}{3}$	u_{23}

Fonte: Autor

Para a **2ª coluna de** L, temos $j = 2$:

Tabela 4 – Cálculo dos elementos da 2ª coluna de L

i	$\frac{a_{i2} - l_{i1} \cdot u_{12}}{u_{22}}$	l_{i2}
3	$\frac{a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}} = 1$	l_{32}

Fonte: Autor

Assim, construímos por completa a matriz L triangular inferior e definiremos outros elementos da matriz U triangular superior, do formato: