FILTRAÇÃO E FLUXO DE ÁGUA CONFINADA SOB CORTINAS IMPERMEÁVEIS EM ESCAVAÇÕES

ITAQUE MENDES CAMARA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE POS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DO CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLO GIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA COMO PARTE DOS REQUISI TOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovado por:

COMISSÃO 0 PROF. Ph.D. VAJAPEYAM SRIRANGACHAR SRINIVASAN

- Presidente -

C. Baver ~

PROF. Ph.D. GUNTHER ERWIN BAUER PROF. M.Sc. MANDEL GILBERTO DE BARROS

CAMPINA GRANDE ESTADO DA PARAÍBA - BRASIL FEVEREIRO - 1977



C172f	Câmara, Itaquê Mendes. Filtração e fluxo de água confinada sob cortinas impermeáveis em escavações / Itaquê Mendes Câmara Campina Grande, 1977. 69 f.
	Dissertação (Mestrado em Ciências) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 1977. "Orientação : Prof. Dr. Vajapeyan Srirangachar Srinivasan". Referências.
	<ol> <li>Escoamento - Hidráulica. 2. Água - Filtração e Fluxo.</li> <li>Escavações em Meios Porosos. 4. Dissertação - Ciências.</li> <li>Srinivasan, Vajapeyam Srirangachar. II. Universidade</li> <li>Federal da Paraíba - Campina Grande (PB). III. Título</li> </ol>
	CDU 626.24(043)

À minha esposa GLORIA MARIA e a nossos filhos RODRIGO e ALESSANDRA pelos momentos de renúncia e compreensão.

#### AGRADECIMENTOS

Agradecemos

ao nosso orientador e amigo, Prof.Ph.D. VAJAPEY AM SRIRANGACHAR SRINIVASAN, do Centro de Ciências e Tecnolo gia da Universidade Federal da Paraíba, o qual nos distinguiu com o máximo de sua atenção, dedicação e amizade, não só na orientação deste trabalho, bem como durante todo o nosso cur so de mestrado;

ao co-orientador, Professor Ph.D. GUNTHER ERWIN BAUER, pela dedicação com que nos orientou, pelas valiosíss<u>i</u> mas sugestões e especialmente pela interpretação da referê<u>n</u> cia de sua autoria;

ao Prof.M.Sc.MANOEL GILBERTO DE BARROS, da Un<u>i</u> versidade Federal da Paraíba, pelo estímulo à conclusão deste trabalho;

aos nossos pais, pelo muito que lhes devemos;

à Diretoria da Companhia de Águas e Esgotos do. Maranhão - CAEMA, que nos permitiu freqüentar o curso de me<u>s</u> trado da Universidade Federal da Paraíba;

e a todas as pessoas de nossas relações, cujo apoio e compreensão humanos foram de grande valor ao longo da execução deste trabalho.

### RESUMO

Este trabalho estuda experimentalmente as ca racterísticas do fluxo de água sob cortinas verticais imperme áveis em escavações realizadas em meios porosos. O estudo ana lisa e compra a quantidade de filtração obtida na escavação com os valores propostos nos trabalhos experimentais de DAVI DENKOFF & FRANKE apresentados em (1) e o trabalho teórico de KOZLOV em (20).



#### ABSTRACT

This work is an experimental study of the characteristics of flow of water into excavations in saturated porous media under sheet piles. The study mainly concerns with the variation of discharge into the excavation and the results are compared with the studies of DAVIDENKOFF & FRANKE and the theorical solution of KOZLOV.

## I N D I C E

		Página
AGRADECIMENTOS		i
RESUMO		ii
ABSTRACT		iii
INDICE		iv
LISTA DE SÍMBOLOS		V
CAPÍTULO I	INTRODUÇÃO	l
CAPÍTULO II	ANÁLISE TEÓRICA PRELIMINAR	3
	2.1 - Aspectos Gerais de Escoamen	
	tos Planos em Meios Permeá	
	veis	3
	2.1.1 - Histórico	3
	2.1.2 - Considerações Bás <u>i</u>	
	cas	4
	2.1.3 - Equação Geral dos	
	Escoamentos Lentos	4
	2.1.4 - Escoamentos Planos	
Stat.	Permanentes	8
and the second second	2.1.5 - Condições Limites	10
	2.2 - A transformação Conforme	13
	2.3 - Transformação de SCHWARZ &	
	CRISTOFFEL	16

iv

## Página

CAPÍTULO III	FILTRAÇÃO SOB CORTINAS IMPERMEÁ	
	VEIS EM ESCAVAÇÕES	19
	3.1 - Considerações Gerais	19
	3.2 - Formulação do Problema	19
	3.3 - Soluções Analíticas e Nu	
	méricas	20
	3.4 - Investigações Experime <u>n</u>	
	tais Anteriores	23
	3.5 - Objeto do Estudo	27
CAPÍTULO IV	INVESTIGAÇÕES EXPERIMENTAIS	33
	4.1 - Materiais e Equipamentos	
	Utilizados	33
	4.2 - Construção do Modelo Expe	
	rimental	33
	4.3 - Método de Condução dos Tes	
	tes	38
	4.4 - Programa dos Ensaios	40
	4.4.1 - Estudo da Vazão	40
	4.4.2 - Estudo da Estabil <u>i</u>	
	dade	47
CAPÍTULO V	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	48
	5.1 - Comportamento do Modelo	4.8
	5.2 - Efeito de Largura	48
	5.3 - Variação da Vazão de Fil	49

iv

# Página

	tração com os Parâmetros	49
	5.3.1 - Parâmetros Considera	
	dos	49
	5.4.2 - Variação da Vazão com	
	a Profundidade de E <u>s</u>	
	cavação e Penetração	
	da Cortina	50
	5.4 - Estudo Comparativo	51
	5.5 - Aspectos de Estabilidade	54
Γ	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	67
	6.1 - Conclusões	67
	6.2 - Recomendações	67
	REFERÊNCIAS	69

CAPÍTULO VI

## LISTA DE SÍMBOLOS

Os seguintes símbolos são usados neste trabalho:

A <sub>1</sub> e B <sub>1</sub>	Ξ	constantes complexas
В	=	semilargura da escavação
C1, C	=	constantes arbitrárias
D	=	profundidade da escavação
d	=	densidade
F	=	coeficiente de segurança
G	=	peso
f	=	função
h	=	carga hidráulica causando fluxo
K	=	coeficiente de permeabilidade
L	=	largura da cortina
nc	=	direção da normal a uma curva
n <sub>t</sub>	=	direção da tangente a uma curva
P	=	profundidade de penetração da cortina no meio per
		meável
P	=	pressão
Q	=	vazão total
R e R <sub>1</sub>	=	região no plano z
ReR <sub>1</sub> R'	= =	região no plano z região transformada no plano t
R e R <sub>1</sub> R' (r,s)	пп	região no plano z região transformada no plano t coordenadas
R e R <sub>1</sub> R' (r,s) T	II II II II	região no plano z região transformada no plano t coordenadas espessura do meio permeável após a escavação
R e R <sub>1</sub> R' (r,s) T T'	II II II II II	região no plano z região transformada no plano t coordenadas espessura do meio permeável após a escavação espessura do meio permeável antes da escavação
R e R <sub>1</sub> R' (r,s) T T' t	II II II II II	região no plano z região transformada no plano t coordenadas espessura do meio permeável após a escavação espessura do meio permeável antes da escavação plano auxiliar
R e R <sub>1</sub> R' (r,s) T T' t t <sub>1</sub> , t <sub>2</sub> t	= = = = 3,	região no plano z região transformada no plano t coordenadas espessura do meio permeável após a escavação espessura do meio permeável antes da escavação plano auxiliar t <sub>n</sub> = parâmetros no plano t
R e R <sub>1</sub> R' (r,s) T T' t t <sub>1</sub> , t <sub>2</sub> t <sub>2</sub> U	= = = = 3,	região no plano z região transformada no plano t coordenadas espessura do meio permeável após a escavação espessura do meio permeável antes da escavação plano auxiliar t <sub>n</sub> = parâmetros no plano t função potencial
R e R <sub>1</sub> R' (r,s) T T' t t <sub>1</sub> , t <sub>2</sub> t; U ∛	= = = = 3 % =	região no plano z região transformada no plano t coordenadas espessura do meio permeável após a escavação espessura do meio permeável antes da escavação plano auxiliar t <sub>n</sub> = parâmetros no plano t função potencial velocidade vetorial
R e R₁ R' (r,s) T T' t t1, t2 t; U V V (x,y)	= = = = 3 , = =	<pre>região no plano z região transformada no plano t coordenadas espessura do meio permeável após a escavação espessura do meio permeável antes da escavação plano auxiliart<sub>n</sub> = parâmetros no plano t função potencial velocidade vetorial coordenadas</pre>
R e R₁ R' (r,s) T T' t t₁, t₂ t; U V (x,y) z = x + z	= = = = = 3, = = =	região no plano z região transformada no plano t coordenadas espessura do meio permeável após a escavação espessura do meio permeável antes da escavação plano auxiliar t <sub>n</sub> = parâmetros no plano t função potencial velocidade vetorial coordenadas = variável complexa
R e R <sub>1</sub> R' (r,s) T T' t t <sub>1</sub> , t <sub>2</sub> t <sub>3</sub> U $\vec{v}$ (x,y) z = x + z W = u - z	= = = = = ; ; ; ; ; ; ;	<pre>região no plano z região transformada no plano t coordenadas espessura do meio permeável após a escavação espessura do meio permeável antes da escavação plano auxiliart<sub>n</sub> = parâmetros no plano t função potencial velocidade vetorial coordenadas = variável complexa = velocidade complexa</pre>

V

α1	e a <sub>2</sub>	Ξ	curvas no plano z
α1'	eα <sub>2</sub> ′	=	curvas no plano t
Δ		Ξ	operador de diferença
γ <sub>a</sub>		=	peso específico da água
ω =	Φ + i Ψ	=	potencial complexo
Φ		=	função potencial
Ψ		н	função corrente
μ		=	coeficiente de viscosidade dinâmica
ρ		=	massa específica
θ1,	θ <sub>2</sub> ,θ <sub>n</sub>	=	ângulos em radianos
⊽ =	$\frac{\partial x}{\partial x}$ +	-	$\frac{\partial}{\partial y}$ + $\frac{\partial}{\partial z}$ = operador diferencial vetorial
<b>₽</b>		=	gradiente de p
∇.ở		=	divergente de v
√xv		=	rotacional de $\vec{v}$
<b>∇</b> <sup>2</sup>	$=\frac{\partial^2}{\partial x^2} +$	97	$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = operador Laplaciano$

#### CAPÍTULO I

#### INTRODUÇÃO

O problema do escoamento em meios porosos é de suma importância na solução de grande número de problemas em várias áreas da Engenharia, entre as quais, citamos: hidráuli ca (barragens), irrigação e drenagem (canais), mecânica dos solos (fundações), engenharia sanitária (escavações) e ou tros. Historicamente, podemos considerar como marco inicial dos estudos de escoamento em meios permeáveis as experiências realizadas por DARCY, em 1856. Inúmeros outros pesquisadores, estudaram estes problemas utilizando métodos analíticos, num<u>é</u> ricos e experimentais.

Em particular, o fluxo de água em estruturas re baixadas, como,por exemplo, escavações, é de ocorrência muito comum e,conseqüentemente,vários problemas podem ser investiga dos, tais como:

- quantidade de água fluindo na escavação

- estabilidade do leito da escavação, etc.

Neste trabalho, propomo-nos, portanto, estudar experimentalmente as características do fluxo de água confina da sob cortinas verticais impermeáveis em escavações, util<u>i</u> zando um tanque de filtração em "plexiglass" para simulação do escoamento.

No capítulo II, fazemos uma análise teórica ini cial sobre escoamento em meios permeáveis, cujo fenômeno é <u>go</u> vernado pela equação de LAPLACE (8) e pode ser resolvido mat<u>e</u> maticamente através de transformações conformes, especialme<u>n</u> te a de Schwarz-Cristoffel (8).

No capítulo III, analisamos o problema particu lar de filtração sob cortinas impermeáveis em escavações, on de destacamos as soluções matemáticas desenvolvidas por KOZLOV e FILCHAKOV apresentadas por KOCHINA (20), bem como os trabalhos experimentais realizados por MARSLAND (18), DAV<u>I</u> DENKOFF e FRANKE transcritos por BAUER (1).

No capítulo IV, descrevemos a técnica de con<u>s</u> trução do modelo experimental utilizado, assim como a metod<u>o</u> logia empregada na condução dos testes.

No capítulo V, fazemos a análise e comparação dos resultados obtidos com os de KOZLOV, DAVIDENKOFF e FRANKE já referidos.

No capítulo VI, apresentamos as conclusões e r<u>e</u> comendações.

#### CAPÍTULO II

#### ANÁLISE TEÓRICA PRELIMINAR

2.1 - Aspectos Gerais dos Escoamentos Planos em Meios Perme<u>a</u> veis

2.1.1 - Histórico

A origem do estudo do fenômeno da filtração em meios porosos reporta-se aos estudos de Darcy, em 1856, que realizou experiências acerca do fluxo de água em tubos cheios de areia, estabelecendo a lei do movimento uniforme para este tipo de escoamento (8).

Mais tarde, experimentos similares foram reali zados em larga escala por muitos outros investigadores.Dupuit e Boussinesq desenvolveram a teoria hidráulica do fluxo de água subterrânea, a qual foi reproduzida por Harr (8). Forch heimer (segundo Kochina (20)) desenvolveu a teoria hidráulica dos poços. Datam de 1888 (conforme referido por Kochina (20)) as primeiras investigações teóricas e experimentais de Zjou kovsky sobre o fluxo de águas de subsolo.

A teoria matemática rigorosa do fluxo de água subterrânea sob estruturas hidráulicas foi estabelecida por Pavlovsky em 1922 e transcrita por Kochina (20). Suas investi gações foram continuadas e desenvolvidas em numerosos traba lhos de estudantes e seguidores.

Os trabalhos desenvolvidos por Pavlovsky atraí ram a atenção de Zjoukovsky, que novamente começou a traba lhar na teoria do fluxo de água subterrânea e, em 1920, deduziu um metódo de solução dos problemas de fluxos confinados e não confinados, reproduzida por Kochina (20).

#### 2.1.2 - Considerações Básicas

Diz-se que um meio é poroso quando é continua mente constituído por um sistema complexo de pequenos canais que permitem a percolação da água.

No entanto, o estudo do escoamento de fluido em meio poroso não pode ser feito no domínio próprio dos canais, deixando-se de lado a fase sólida.

Através dos poros, um complicado movimento re sulta, com a velocidade e aceleração variando em grandeza e direção de ponto a ponto, sendo portanto impossível examinar a velocidade de partículas isoladas. Por conseguinte, a re presentação quantitativa de um escoamento em meio poroso não é dada através da velocidade das partículas do fluido e, sim, através de valores médios hipotéticos das velocidas passando por uma área total do meio poroso. Na teoria da filtração é usual considerar-se não a velocidade, mas a vazão através de uma secção do meio.

Fisicamente a quase totalidade dos sistemas de fluxo é tridimensional, contudo muitos problemas de escoame<u>n</u> to em meios porosos são essencialmente planos, com o movime<u>n</u> to sendo substancialmente o mesmo em planos paralelos. Para estes problemas é conveniente tratá-los como bidimensionais pois facilita-se a solução analítica. Felizmente, em Engenh<u>a</u> ria Civil, uma grande maioria dos problemas pode ser enqu<u>a</u> drada nesta categoria.

2.1.3 - Equação Geral dos Escoamentos Lentos

Por definição, um escoamento é dito "lento" se as forças de inércia são pequenas em comparação com as fo<u>r</u> ças de atrito viscoso.

Os valores críticos do número de Reynolds, para

o qual o fluxo em meios porosos muda de laminar para turb<u>u</u> lento, tem sido encontrado por vários investigadores (19) c<u>o</u> mo variando entre l e 12.

Nestes movimentos, a resistência é usualmente proporcional à primeira potência da velocidade.

A equação dinâmica geral do movimento dos flui dos incompressíveis, deduzida da equação de Navier - Stokes, na forma vetorial se escreve (4):

 $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v}$ (2.1)

Nesta equação aparecem as diversas forças exer cidas sobre uma partícula de volume unitário.

ρŦ	=	forças	de	campo
-∇p	=	forças	de	pressão
u∆v	=	forças	de	viscosidade

onde:

v	= velocidade de uma partícula com componen
	tes cartesianas u, v, w, ou seja: $\vec{v} = \vec{v}$ (u, v, w)
μ	= coeficiente de viscosidade dinâmica
ρ	= massa específica do fluido
∆v	= vetor de componentes cartesianas u, v, w,
	ou seja (4)
	$\Delta \vec{v} = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v}). \qquad (2.1a)$

Se as forças de campo derivam de um potencial U, por definição, temos:

Resultando para (2.1)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p + \rho U) + \mu \Delta \vec{v}$$

No caso de U ser unicamente o campo gravitacio nal, ou seja, U = gh, teremos:

$$\nabla(p + \rho gh) = \mu \Delta \vec{v}$$

Calculando-se agora o divergente dos dois mem bros da expressão anterior e substituindo-se  $\vec{v}$  pelo valor d<u>a</u> do na equação (2.1a), vem

$$\nabla \cdot \nabla (p + \rho gh) = \mu \nabla \cdot (\nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla x (\nabla x \vec{v})) \quad (2.3)$$

Considerando-se agora a equação da continuidade dos fluidos incompressíveis,

∇.ỷ.= 0

e fazendo-se

$$P_1 = p + \rho gh$$
,

a equação (2.3) se escreverá:

$$7^2 P_1 = 0$$
 (2.4)

Ou seja a pressão  $p_1$  num escoamento lento satisfaz a equação de LAPLACE.

(2.2)

É muito conveniente no estudo do fluxo de água subterrânea introduzir a velocidade potencial  $\Phi$ , definida como:

$$\Phi(x, y, z) = -K(\frac{p}{\rho g} + z) + C = -Kh + C$$
 (2.5)

Onde C é uma constante arbitrária. Assim sendo,

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$
 (2.6)

As equações (2.5) e (2.6) representam a lei de Darcy,generalizada para um meio isotrópico, que na forma veto rial se escreve como:

$$\vec{v} = - K \nabla \Phi \tag{2.7}$$

onde:

K = coeficiente de permeabilidade do meio poro\_
so.

Esta equação proporciona a ferramenta dinâmica para todas as investigações em fluxo de água subterrânea. Da equação da continuidade segue-se que a velo cidade potencial satisfaz a equação de LAPLACE:

$$\nabla^{2} \Phi = \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial z^{2}} = 0 \qquad (2.8)$$

Da equação (2.7) podemos concluir que, para flu xos permanentes e fluxos laminares, o movimento de água subter rânea pode ser completamente determinado pela solução desta equação, sujeita às condições limites no domínio do fluxo. A velocidade "média" de um escoamento em meio permeável provém, portanto, de um potencial escalar e determi na um campo vetorial de fluxo conservativo.

Portanto, a solução de um problema de escoamen to através de meio poroso concentra-se na solução da equação de LAPLACE.

#### 2.1.4 - Escoamentos Planos Permanentes

As equações fundamentais de fluxos bidimensio nais de água subterrânea no plano xy, a partir da equação de Darcy generalizada, equações (2.5) e (2.6) podem ser escritas na forma:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -K \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -K \frac{\partial h}{\partial y}$$
(2.9)

pois que a velocidade de filtração e o gradiente são nulos per pendicularmente ao plano considerado.

Correspondentemente, a equação de LAPLACE se reduz a:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$
 (2.10)

e a equação da continuidade torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
(2.11)

Dessas duas equações, podemos deduzir a existên cia de uma função harmônica conjugada chamada função fluxo  $\Psi(x, y)$  tal que as condições de Cauchy-Riemann sejam satisfeitas:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.12)$$

e portanto a equação de LAPLACE,

$$\nabla^2 \Psi = C$$

Em particular, mostra-se que, se a equação de LAPLACE é satisfeita por funções harmônicas conjugadas  $\Phi \in \Psi$ , então as curvas  $\Phi(x, y) = constante$  são trajetórias ortogo nais das curvas  $\Psi(x, y) = constante$ .

A combinação linear da função potencial  $\Phi(x, y)$ e da função fluxo  $\Psi(x, y)$  da a função  $\omega(x, y)$  característica do escoamento, chamada potencial complexo do escoamento.

$$\omega(x, y) = \Phi(x, y) + i \Psi(x, y)$$
(2.13)

a derivada (8),

$$W(x, y) = \frac{dW}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = u - iv$$

$$(2.14)$$

$$W(x, y) = \frac{dW}{dz} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} - i \frac{\partial\Phi}{\partial y} = u - iv$$

é também uma função analítica denominada velocidade complexa do escoamento. Ela é o conjugado complexo do vetor  $\vec{v}$  neste ponto.

Decorrem da teoria do escoamento potencial as propriedades:

a) a curva  $\Psi(x, y) = constante$  define uma linha de fluxo;

 b) a diferença do valor de duas linhas de fluxo dá a vazão de escoamento;

c) a função  $\Phi(x, y) = constante$  define uma linha equipotencial e a diferença de duas linhas equipotenciais da a queda de potencial ao longo de qualquer linha ligando essas duas equipotenciais.

2.1.5 - Condições Limites

A definição de um escoamento dentro de um domi nio qualquer é obtida pela solução da equação de I .- LACE:

 $\nabla^2 \Phi = 0$  ou  $\nabla^2 \Psi = 0$ 

A solução desta (s) equação (ões) necessita do conhecimento dos valores da função  $\Phi(\text{ou }\Psi)$  sobre o contorno do domínio. No caso geral de escoamentos planos permanentes através de solos homogêneos, quatro tipos de limites são en contrados, a saber:

a) superficies impermeáveis - são os contornos subterrâneos de estruturas hidráulicas e também os limites da região de fluxo com solos impermeáveis. Elas constituem uma linha de fluxo, e portanto, a velocidade é tangente a esta l<u>i</u> nha. Definindo  $n_c$  e  $n_t$  como as direções normal e tangencial respectivamente, em um ponto do limite, temos da equação 2.12

 $\frac{\partial \Phi}{\partial n_c} = \frac{\partial \Psi}{\partial n_+} = 0, \quad \Psi = \text{constante}$ 

b) as superfícies que delimitam o dominio de filtração, mas em contato com a massa do líquido em repouso.

A pressão ao longo dessas superfícies pode ser tomada como obedecendo à lei hidrostática. Portanto, em um ponto P ao longo do limite AB da figura 2.1, a pressão na água é:

$$p = \gamma_{a}(h_{1} - y)$$
 (2.15)

substituindo-se o valor de p da equação 2.15 em

$$= - K(\frac{p}{\gamma_a} + y) + C_1$$
 (2.16)

resulta:

$$\Phi$$
 = constante,

pois que K, C e h<sub>1</sub> são todos constantes. Assim os limites do domínio de filtração, tal como AB e FD da figura 2.1 são  $l\underline{i}$  nhas equipotenciais.

c) as superficies livres sobre as quais a pres são é atmosférica, em contato com o ar. A velocidade é tangen te a essas superficies e portanto são linhas de fluxo, com o potencial variando de acordo com a expressão

$$\Phi = - Ky + constante$$
(2.17)

Algumas vezes pode acontecer que um fluxo d<u>e</u> vido à infiltração atinja a superfície livre e faça parte do escoamento. Esse fenômeno significa que o fluxo de água atr<u>a</u> vés de duas linhas de corrente é proporcional à projeção s<u>o</u> bre o eixo de um arco de curva da superfície livre, ou seja, figura 2.2.

$$q = \Psi - \Psi_{o} = \varepsilon(x - x_{o})$$
(2.18)



Figura - 2.1



Figura - 2.2

Assim  $\Psi \in \Psi_0$  são os valores da função corren te correspondente aos pontos da superfície livre com abscis sas x e x<sub>0</sub> e "ɛ" o total de água atravessando a unidade de comprimento da projeção horizontal do arco da superfície l<u>i</u> vre na unidade de tempo. O coeficiente pode ser positivo, no caso de infiltração, e negativo, no caso de evaporação.

Também as curvas de depressão que separam as regiões de solo saturado da região não saturada, através do qual o fluxo ocorre, como em BC na figura 2.1, segue a cond<u>i</u> ção expressa pela equação 2.17.

d) as superficies de exudação - neste caso a agua não escoa dentro de um reservatório e,sim,ao ar livre. A condição de pressão é igual ao caso "c", onde "p" é a pressão atmosférica, mas estas superficies não são superficies de correntes. Como exemplo, CD na figura 2.1.

Para este caso teremos:

 $\Phi$  + Ky = constante

2.2 - A Transformação Conforme

Em muitos problemas de escoamento em meios per meáveis as regiões de domínio do fluxo apresentam fronteiras que definem figuras geométricas complexas, tornando a análise do problema muito difícil.Na maioria das vezes, é conveniente transformar essa região (ou curva) R de forma complicada nu ma outra região (ou curva) R' satisfazendo as mesmas condi ções de contorno, porém com forma geométrica mais simples, fa cilitando, por conseguinte, a análise do problema. Assim, pa ra um determinado ponto em R', obtem-se o correspondente pon to em R. Seja, por exemplo, a região R da figura 2.3a no pla no xy que é transformada na região R' da figura 2.3b no pla



Fig. 2.3a

y



Fig. 2.4



Fig. 2.5

uma so curva, existe uma função z = f(t) que realiza a trans formação conforme de R em R'; esta função f(t) admite três constantes arbitrárias.

2.3 - Transformação de Schwarz-Cristoffel

Consideraremos um polígono (figura 2.6) no pla no z com vértices em  $z_1, z_2, \ldots, z_n$  e correspondentes ângu los interiores  $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ , os quais são levados respect<u>i</u> vamente nos pontos  $t_1, t_2, \ldots, t_n$  sobre o eixo real do plano t (figura 2.7).

Uma transformação que leva o interior R do pol<u>í</u> gono do plano z na metade superior R' do plano t e a fronte<u>i</u> ra do polígono no eixo real, é dada por:

$$\frac{dz}{dt} = A_1 (t-t_1)^{(\theta_1/\pi)-1} \dots (t-t_n)^{(\theta_n/\pi)-1} (2.20)$$

ou

$$z = A_1 \int (t-t_1)^{(\theta_1/\pi)-1} \dots (t-t_n)^{(\theta_n/\pi)-1} + B_1(2.21)$$

onde A e B são constantes complexas,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , ...,  $\theta_n$  são os ângulos interiores do polígono em radianos no plano z e  $t_1$ ,  $t_2$ , ...,  $t_n$  pontos no eixo real do plano t, tais que:

$$t_1 < t_2 \cdots < t_n$$

correspondem aos vértices  $z_1, z_2, \ldots, z_n$ . Observamos os seguintes fatos:

a) Quaisquer três pontos  $t_1$ ,  $t_2$ , ...,  $t_n$  podem ser escolhidos;

b) as constantes  $A_1 \in B_1$  determinam a forma, or<u>i</u> entação e posição do polígono:



Fig. 2.6



Fig. 2.7

c) a constante complexa B corresponde ao ponto do perimetro do polígono que tem sua imagem em t = 0;

d) é conveniente escolher um ponto, a saber  $t_n$ , no infinito. Neste caso o último fator de (2.20) e (2.21), en volvendo  $t_n$  não está presente;

e) polígonos abertos infinitos podem ser conside rados como caso limite de polígonos fechados.

A equação (2.21) é chamada transformação de Schwarz-Cristoffel em honra a dois matemáticos, o alemão H. A Schwarz e o suíço E. B. Christoffel, que a descobriram ind<u>e</u> pendentemente. Esta "transformação conforme" é a mais util<u>i</u> zada na solução dos problemas de escoamento em meios porosos. Convém ressaltar que esta técnica de solução envolve duas <u>a</u> plicações separadas das transformações de Schwarz-Cristoffel, onde as regiões  $R \in R'$  dos planos  $z \in w$  são levadas na m<u>e</u> tade superior ou inferior do plano auxiliar t', mantendo co<u>r</u> respondência entre os vértices, os quais terão imagem no eixo real do plano t. Assim sendo, as regiões  $R \in R'$  com formas complicadas nos planos  $z \in w$  são transformadas em regiões simples no plano t, facilitando a análise do problema. Obt<u>i</u> das as transformações:

$$z = f(t)$$
 (2.22)  
 $w = f'(t)$ 

pcdemos facilmente encontrar a relação

$$w = F(z)$$

(2.23)

solução do problema.

### CAPÍTULO III

#### FILTRAÇÃO SOB CORTINAS IMPERMEÁVEIS EM ESCAVAÇÕES

#### 3.1 - Considerações Gerais

A implantação de estruturas rebaixadas em solos arenosos saturados é um problema freqüentemente encontrado na prática. Em tais situações, o engenheiro precisa realizar as escavações, atendendo a certos padrões de segurança do traba lho, bem como precisa, em outras ocasiões, fazer o rebaixamen to do nivel d'água para execução da estrutura prevista, como, por exemplo, concretagem de uma fundação. Um dos problemas frequentes encontrado pelo engenheiro diz respeito à estabili dade das paredes laterais e do fundo da escavação, assim como a quantidade de água que flui através da base e das paredes laterais da escavação, a qual ele precisa conhecer para que possa providenciar corretamente os equipamentos de sucção. Pa ra a estabilidade das paredes da escavação é usual o emprego de cortinas impermeaveis que funcionam também como redutores da vazão. Nestes problemas é de grande importância prática e econômica conhecer a profundidade de penetração da cortina pa ra um determinado fator de segurança, a fim de evitar-se desmoronamento do fundo da escavação e diminuir a vazão de filtração. Convém ressaltar que estes problemas são também freqüentemente encontrados nas escavações realizadas para co locação de tubulações de água e esgotos, sobretudo na orla ma rítima, onde a mesma técnica e os cuidados devem ser seguidos.

#### 3.2 - Formulação do Problema

O problema especificamente aqui considerado con cerne ao estudo das características de fluxo bidimensional as sociado com duas cortinas impermeaveis imersas num meio poro so de espessura finita, no qual se produziu uma escavação con forme é ilustrado na figura 3.1.. Procurou-se, no início, esta belecer a quantidade de filtração fluindo na escavação, para diversos valores da profundidade de penetração da cortina, car ga hidráulica, largura da escavação, espessura do meio poroso antes da escavação e dentro da escavação, profundidade da esca vação, respectivamente P, h, 2B, T', T, D da figura 3.1.

3.3 - Soluções Analíticas e Numéricas

A solução matemática rigorosa para o problema de filtração sob cortinas impermeáveis em meios porosos de espessura finita (camada impermeável numa profundidade fini ta), como descrito anteriormente, foi desenvolvida com a utili zação das transformações de Schwarz-Cristoffel pelo matemático KOZLOV, em 1939, para um meio homogêneo e isotrópico, e ref<u>e</u> renciada por KOCHINA (20).

Esta solução apresentada por KOZLOV para o po tencial complexo envolve integrais elípticas completas e in completas de primeira, segunda e terceira ordem; contudo KOZLOV não apresentou nenhum nomograma para este caso, em vir tude das dificuldades de calcular as integrais elípticas de terceira ordem incompletas.

De Wiest (5) notou que este problema é um caso particular da estrutura generalizada resolvida por FILCHAKOV e apresentada por KOCHINA (20). Nesta solução de FILCHAKOV as integrais elípticas de terceira ordem são desenvolvidas em te<u>r</u> mos de funções Jacobianas Teta e Zeta, as quais são avaliadas através de séries infinitas de produtos de funções trigonom<u>é</u> tricas e hiperbólicas propostas por ele. Também neste caso n<u>e</u> nhum nomograma foi elaborado.

McNamee (17) apresenta uma solução numérica deste tipo de problema para o caso de profundidade finita de meio poroso e para casos particulares quando a largura da es



Fig. 3.1 – Ilustração geometrica do problema. Nota: \_ m· n' p' q' = área critica de acordo com Terzaghi

cavação tende para o infinito. Curvas são apresentadas para o gradiente de saída (exit gradient) e para o potencial na ex tremidade da cortina. Entende-se por gradiente de saída (exit gradient) o máximo gradiente hidráulico ao longo dos limites de descarga, o qual implica uma maior velocidade e portanto o problema de entubamento (piping). McNamee ainda sintetizou os resultados dos modelos de testes na forma de gráficos. Na figura 3.2 temos a profundidade de penetração requerida para escavações em areia de diferentes larguras para fatores de s<u>e</u> gurança, variando de 1.0 a 2,5 (17),que será explicado post<u>e</u> riormente.

Ainda para o caso de espessura finita do meio per meável, Schneebeli (23) apresenta uma solução analítica apro ximada para o cálculo da quantidade de filtração fluindo na escavação, consider ndo que as linhas de fluxo são semi-elip ses.

No caso da camada impermeavel situada a uma pro fundidade infinita, várias soluções têm sido propostas. O pro prio KOZLOV apresentou a expressão inversa para o potencial complexo em termos de integrais elípticas completas de primei ra e segunda ordens e integrais elípticas incompletas de se gunda ordem. O módulo destas funções é relacionado com a geo metria da escavação e da cortina. Esta relação funcional en volve funções elípticas Jacobianas em adição às integrais elí pticas ja mencionadas. KOZLOV também apresentou nomogramas com parâmetros adimensionais para o fluxo de filtração e a veloci dade máxima e mínima na superfície de saída (em m' e r' da fi gura 3.1) que foram transcritos por KOCHINA (20) e que apre sentamos na figura 3.3.

Harr (8) também obteve uma solução do problemacom profundidade infinita do meio poroso em termos das mesmas fun ções usadas por KOZLOV. Harr também apresentou nomogramas pa ra o cálculo do fluxo de filtração e para a determinação do máximo gradiente de saída (exit gradient) ao longo da base da

escavação (m' e s' na figura 3.1) em função do módulo destas funções e dos parâmetros geométricos da escavação.

Rama Rao (21) analisou também este problema para o caso de profundidade infinita do meio poroso em termos das funções Zeta de Weierstrass e funções P de Weierstrass, apresen tando redes de fluxo para algumas relações geométricas da cor tina e escavação.

Nós tentamos desenvolver uma solução analítica, <u>u</u> tilizando as transformações de Schwarz-Cristoffel para o caso de profundidade finita do meio permeável, no entanto tal solu ção,envolvendo integrais elípticas incompletas de terceira or dem,se constituiu num impedimento; sobretudo para o caso "cir cular" de tais integrais elípticas, cujas funções Jacobianas Teta e Zeta (que, combinadas, permitiriam calculá-las), tendo os seus argumentos complexos, não foram encontradas tabeladas.

#### 3.4 - Investigações Experimentais Anteriores

Investigações experimentais realizadas por Mars land (18) no Building Research Station, U.K., tem dado resul tados muito significativos, em termos de estabilidade. Os es tudos foram conduzidos em um tanque de filtração usando micros cópios para observação do movimento na areia. Para muitos ca sos, sequências fotográficas coloridas do processo de desmoro namento foram tomadas. Como era esperado, os resultados experi mentais concordaram com os resultados previstos na análise ma temática dentro de uma margem de erro de 10%. Marsland mostrou que o desmoronamento das escavações em areia solta é governada pelo critério do "heaving gradient" e que na areia densa é go vernada pelo critério do "exit gradient". O "heaving gradient" é o máximo gradiente hidráulico ao longo de todo o limite da descarga e capaz de produzir o desmoronamento da base da esca vação. Também recomendou o investigador o cálculo do "heaving gradient", usando unicamente o potencial na extremidade da cor

tina. Transcrevemos os diagramas que dão a profundidade de p<u>e</u> netração da cortina para diferentes fatores de segurança para os casos de areia solta e densa com meio poroso de espessura finita e infinita.

Bauer (1) apresenta os gráficos desenvolvidos por Davidenkoff e Franke em 1965, os quais se basearam em resulta dos experimentais realizados, para cálculo da quántidade de filtração, bem como o coeficiente de segurança contra o levan tamento do fundo da escavação (bottom heave) para diferentes espessuras do meio permeável, conforme vemos na figura 3.4.

Como sabemos, a teoria da filtração em meios poro sos é baseada na lei generalizada de Darcy, equação 2.7. No caso de escavações em solos permeáveis sob uma carga hidráuli ca, a queda de pressão verificada na filtração devido ao atri to viscoso não pode ser desprezada. A pressão estática diminu irá do lado da carga hidráulica de valor correspondente ao gradiente hidráulico e aumentará sempre do mesmo valor do la do da escavação.

Para computar a quantidade de filtração e a dir<u>e</u> ção do fluxo sobre uma cortina é necessário determinar também a intensidade e a distribuição de pressões no meio poroso.

A pressão e a direção do fluxo podem ser determin<u>a</u> das com relativa facilidade através de uma rede de fluxo. Em bora a construção gráfica de uma rede de fluxo seja muitas v<u>e</u> zes trabalhosa, é um meio comumente empregado na solução de problemas de fluxos bidimensionais.

Da teoria que tem sido explanada e detalhada por Harr (8) e outros, a quantidade de filtração "q" por unidade de largura e por unidade de tempo pode ser expressa como:

$$q = \frac{N_{\Psi}}{N_{\Phi}} Kh = F_{O} Kh$$
(3.3)

onde:

 $N_{\Psi}$  = número de tubos de fluxo  $N_{\Phi}$  = número de equipotenciais K = permeabilidade efetiva
h = perda de carga

O fator  $F_0$  pode ser considerado como um fator de forma geométrica dependendo da forma do domínio do fluxo e das condições limites. Bauer (1) apresenta em seu trabalho os gráficos propostos por Davidenkoff & Franke (1965), o qual está reproduzido na figura 3.4, podendo ser utilizado para determinar a quantidade de filtração bem como o fator de segu rança contra o levantamento do fundo da escavação (bottom he<u>a</u> ve), para diferentes espessuras da camada permeável.

A quantidade de filtração (1) pode então ser calculada da relação:

$$q = K h \frac{1}{\alpha_{I} + \alpha_{II}}$$
(3.4)

em que:

- q = vazão por unidade de comprimento da corti na
- α<sub>I</sub> = coeficiente admensional determinando a perda de energia na região I
- $\alpha_{II}$  = tal como  $\alpha_{I}$ , exceto para região II, isto é dentro da escavação.

Para calcular  $\alpha_{I}$  entramos no ábaco da figura 3.4 com a relação S/T' e usamos unicamente a curva T/B = 0,ao passo que para o cálculo de  $\alpha_{II}$  entramos com P/T e podemos <u>u</u> sar todas as curvas T/B.

Uma das preocupações dos engenheiros é saber qual deve ser a profundidade de penetração para um dado fator de segurança, necessária para evitar o deslocamento do fundo da escavação. Segundo investigações efetuadas através de mode
los por Terzaghi e Peck em 1967 e referidos em (1), a zona de perigo de levantamento da areia do fundo da escavação é confi nada ao retângulo de largura igual a metade da penetração e altura igual à penetração (área m' n' p' q' da figura 3.1).

O excesso médio de pressão hidrostática na base do prisma é  $\gamma_a$   $h_a$ . Considerando-se as condições de equilíbrio da secção horizontal p' q', temos que o excesso da força <u>hi</u> drostática atuando de baixo para cima é:

$$S = 1/2 P \gamma_a h_a$$
(3.5)

onde:

γ<sub>a</sub> = peso específico da água

h<sub>a</sub> = excesso de carga hidrostática na base do prisma.

0 peso do prisma submerso atuando verticalmente para baixo é:

$$S = 1/2 P^2 \gamma'_{S}$$
 (3.6)

onde:

Y' = peso específico do solo submerso.

Portanto,o fator de segurança contra o desloc<u>a</u> mento do fundo da escavação por entubamento (piping) é dado por:

 $F = \frac{G}{S} = \frac{P Y'_{S}}{Y_{a} h_{a}}$ (3.7)

Ainda, segundo Bauer (1), a profundidade de pene tração relacionada com o fator de segurança contra o fenômeno de levantamento do fundo da escavação (bottom heave) é dado por:

$$P = \frac{h}{2} (F \frac{\gamma_a}{\gamma_s^{'}} - 1)$$
 (3.8)

Do "English Civil Engineering Code of Pratice", os valores mínimos para a profundidade de penetração da cor tina são dados para uma escavação aberta (1).

В	>	h		D	min	=	0,4	h	
В	=	h		D	min	=	0,5	h	(3.9)
В	=	0,5	h	D	min	=	0,7	h	

Mc Namee (17) e Marsland (18) apresentaram re sultados experimentais com modelos em forma de nomogramas que relacionam fator de segurança com profundidade de penetração da cortina. Reproduzimos na figura 3.5 os nomogramas de Mars land.

3.5 - Objeto do estudo

Considerando-se que o problema aqui estudado não apresenta uma solução analítica completa, relacionando os diversos parâmetros de escavação e cortina (as de KOZLOV e FILCHAKOV não apresentam nomogramas para cálculo da vazão de filtração em funções dos parâmetros citados) bem como as nos sas próprias dificuldades em faze-la completa, fomos força dos a procurar estudar experimentalmente o problema da filtra ção sob cortinas impermeáveis em escavações. Como citamos, al guns trabalhos experimentais ja foram realizados, no entanto, nenhum deles estuda completamente todos os aspectos claramen te, existindo controvérsias quanto à sua utilização geral, o que nos levou principalmente a verificar os resultados propos tos nos trabalhos citados. Assim sendo, partimos para estudar este problema experimentalmente e tentar uma comparação em termos de vazão e estabilidade com as investigações ja cita das.



Fig. 3.2 - Profundidade de penetração, P, para escavações de diferentes larguras. (Segundo McNamee, 1949).













Fig. 3.5 - Profundidade de penetração, P, para diferentes coeficientes de segurança. (Segundo Marsland, 1953).

#### CAPÍTULO IV

## INVESTIGAÇÕES EXPERIMENTAIS

## 4.1 - Materiais e Equipamentos Utilizados

Para investigar experimentalmente as caracteris ticas de fluxo na filtração para o problema descrito, procu rou-se fazer no laboratório a simulação do escoamento utili zando-se um tanque retangular em *plexiglass*. O meio poroso utilizado nos ensaios foi constituído com areia de praia, pro veniente da cidade de João Pessoa, no estado da Paraíba, cuja curva granulométrica apresentamos na figura 4.1. Para caracte rização das linhas de corrente empregamos o permanganato de potássio e o rodamine B (C<sub>20</sub>H<sub>31</sub>ClN<sub>2</sub>O<sub>3</sub>). O rodamine B aprese<u>n</u> ta solubilidade normal de aproximadamente lOg/1.

4.2 - Construção do Modelo Experimental

O modelo do tanque de filtração empregado neste estudo experimental foi construído em *plexiglass* com as di mensões 118 x 20 x 44 cm,como é mostrado em detalhes nas fig<u>u</u> ras 4.2, 4.3, 4.4 e nas fotos 4.5 e 4.6.

Foram utilizados dois vertedouros de soleira fi na para manter constantes os níveis d'água à montante e à ju sante da cortina impermeável, como se verifica na figura 4.2. O vertedouro de montante (5-6 da figura 4.2) construído em <u>a</u> crílico de 10 mm é constituído de partes autoencaixáveis, pe<u>r</u> mitindo, assim, variar a altura do vertedouro e conseq**u**ent<u>e</u> mente a carga hidráulica (h), para cada profundidade de pen<u>e</u> tração da cortina. O vertedouro de jusante (1-2 da figura 4.2) tinha altura fixa de 23 cm, trabalhando sempre com uma lâmina d'água de 3 cm. A cortina impermeável foi construída em acr<u>í</u>



Fig. 4.1



- 1-2 e 5-6 Vertedouros
- 3-4 Cortina

Fig. 4.2 - Diagrama esquemático do modelo de fluxo.



Fig.4.3- Localização dos pontos de injeção.



Fig. 44 - Localização dos piezometros.

Nota: Localização dos piezômetros e pontos de injeção não estão mostrados em escala. cotas em cm.





lico de 10 mm e dotada de um dispositivo de fixação que permi te abaixá-la ou levantá-la, criando, consequentemente, situa ções diferentes de penetração no meio permeavel. Uma das . :fa ces do tanque de plexiglass é dotada de uma malha que faci lita grandemente o trabalho do traçado das linhas de corrente; na outra face, estavam instalados os piezômetros conforme mostrado na figura 4.4. A localização dos pontos de injeção do corante é mostrada na figura 4.3. A injeção do corante foi feita através de agulhas hipodérmicas 70 x 20 mm (em número de 6), alimentadas individualmente de um pequeno reservatório (volume igual a 1000 ml) através de mangeiras plásticas de 3/16" e dotadas de um dispositivo de regulagem da vazão. 0s piezômetros em número de 12 (doze), montados na parede late ral do tanque de filtração, foram conectados através de man gueira plástica de 1/4" com tubos de vidro montados num pai nel graduado em milímetros, para leitura das pressões, confor me se observa na foto 4.5. A alimentação do modelo com água,a fim de estabelecer o escoamento através do meio permeavel, foi feita utilizando-se uma mangueira plástica de 3/4", adaptada a um registro de passagem de alta pressão e conectada a um re servatório mantido a carga constante.

#### 4.3 - Método de Condução dos Testes

Uma das preocupações principais era a de que to dos os ensaios apresentassem as mesmas características de ho mogeneidade, quer no preparo do meio poroso, quer na condução dos testes. Assim sendo, procurou-se, na preparação das amos tras do meio poroso, manter constante a densidade do material utilizado, de modo que o meio se tornasse homogêneo e isotro pico o máximo possível, a fim de que a permeabilidade se man tivesse mais ou menos constante. Para evitar problemas decor rentes de umidades variadas na areia, preferiu-se, primeiramen te colocá-la em estufa, durante um periodo de 24 horas, e pas sando-se a utilizá-la continuamente somente após 48 horas da retirada da estufa. Em todos os ensaios, procuramos colo car a areia no tanque de modo a manter a densidade praticamen te constante. Usando-se a definição de densidade, temos:

$$d = \frac{G_0}{V_0 g} = \frac{G_1}{V_1 g} (\gamma = 2,02 \text{ g/cm}^3 = \text{constante})$$
(4.1)

ou seja:

$$\frac{G_0}{V_0} = \frac{G_1}{V_1}$$
 (4.2)

onde:

 $G_0$  = peso de areia correspondente ao volume  $V_0$   $G_1$  = peso de areia correspondente ao volume  $V_1$ g = aceleração da gravidade

 $\gamma$  = peso específico aparente

Assim, para o experimento inicial, foi definido o volume Vo do tanque, em função dos parâmetros geométricos da escavação, da espessura do meio poroso, e da profundidade de penetração da cortina, sendo adotado um volume de areia de peso Go. Para as outras experiências, conhecido o volume V1 a ser utilizado no tanque, o peso G1 da areia era calculado através da equa ção 4.2. Para manter uniformes, todos os ensaios, procuramos es tabelecer uma sistemática para o enchimento do tanque de fil tração, colocando-se a areia em camadas de 5 cm de espessura e compactando-a com um soquete de madeira nas dimensões 17,0 x 4,5 x 4,5 cm e peso 310 gramas. A compactação de cada camada foi realizada com 30 (trinta) golpes de soquete deixados cair de uma altura de aproximadamente 15 cm e distribuídos unifor memente em toda a superfície. O estabeleciemento do fluxo foi feito por alimentação de um reservatório mantido a nível cons tante, eliminando-se inicialmente as possíveis bolhas de ar e xistentes no interior do material compactado, fazendo-se pri meiramente uma alimentação atravês do ponto de descarga de montante (figura 4.2), em sentido contrário ao do fluxo nor mal. Após o estabelecimento das condições de fluxo uniforme , a quantidade de filtração por unidade de tempo foi obtida di retamente, medindo-se o tempo requerido para acumular um dado volume no reservatório de jusante. Para cada ensaio foram fei tas três leituras de tempo e obtido o valor médio. Para carac terização das linhas de corrente foram abertas as presilhas do tubo de alimentação do corante e observando-se o caminho descrito, conforme se pode ver na sequência das fotos 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10. Um dos grandes problemas encontrados para caracte rização das linhas de corrente foi a grande dispersão apre sentada pelos corantes, principalmente o permanganato de potás sio. Com a utilização do rodamine B, o problema de dispersão diminuiu um pouco. Por essa razão, as linhas de corrente não foram determinadas simultaneamente, mas caracterizadas linha por linha, as quais depois foram compostas para obtenção do padrão, como mostrado na foto 4.10. Convém ressaltar que a ca racterização das linhas de corrente era feita à proporção que ela se ia desenvolvendo, marcando-se com uma caneta hidrocor permanente, como se vê nas fotos 4.7 e 4.10. Medidas de pres são foram feitas diretamente pela leitura da elevação da água em cada piezômetro.

4.4 - Programa dos Ensaios

4.4.1 - Estudo de vazão

Na realização dos ensaios de laboratório, as variáveis foram a semilargura da escavação (B), a profundid<u>a</u> de de penetração da cortina no meio permeável (P), a profu<u>n</u> didade da escavação (D) e a carga hidráulica (h). A espessura do meio permeável na escavação foi mantida constante e igual







a 20 cm, pois não havia condições para estudar o efeito da va riação deste parametro. Os valores possíveis para cada um des tes parâmetros são dados na tabela 4.1. Em se tratando da car ga hidráulica, devido às limitações do equipamento, não foi possível manter todas as cargas para cada caso; portanto, fo ram escolhidos quase arbitrariamente dois valores dentro da faixa possivel, permitindo assim, no total, ensaios com todas as cargas. Uma exceção, foi o caso dos ensaios com profundida de de escavação igual a 17,5 cm, onde somente foi utilizada a carga hidráulica de 18,5 cm devido às limitações das combina ções dos parâmetros. Desta maneira, foram realizados 70 (se tenta) ensaios, utilizando-se duas larguras de escavação, ca da qual com cinco valores de profundidade de penetração. Para cada profundidade da cortina foram considerados quatro valo res da escavação, com duas cargas hidráulicas, com as exce ções referidas anteriormente.

B (cm)	P (cm)	D (cm)	h (cm)
	5,0	5,5	6,5
20	7,5	9,5	10,5
	10,0	13,5	14,5
25	12,5	17,5	18,5
	15,0		

Tabela	4.1 -	Valores	dos	Parametros
--------	-------	---------	-----	------------

Além dos estudos do padrão de escoamento, com corantes e do caso de desmoronamento, foi determinada, princ<u>i</u> palmente, a vazão para todos os ensaios. Os resultados obtidos para a vazão de filtração são mostrados na tabela 4.2, cuja significação será discutida no capítulo V.

P (cm)	D (cm)	h (om)	P = 5,0	P = 7,5	P = 10,0	P = 12, 5	P = 15,0(cm)	
B (Cm)	D (Cm)	n (em) -	Q $(cm^3/s)$	$Q (cm^3/s)$	Q (cm <sup>3</sup> /s)	Q (cm <sup>3</sup> /s)	$Q (cm^3/s)$	
	17.5		-	-	-	-		
		18,5	5,05	4,27	3,68	3,20	2,77	
	13.5	18,5	5,32	4,45	3,79	3,25	2,81	
25.0	10,0	14,5	4,17	3,49	2,97	2,54	2,21	
20,0	9.5	14,5	4,31	3,63	3,09	2,64	2,24	
	5,0	10,5	3,12	2,63	2,24	1,91	1,62	
	5 5	10,5	3,33	. 2,80	2,34	1,98	1,65	
	0,0	6,5	2,06	l,73	l,45	1,22	1,02	
	17.5	-	-	-	_	-	-	
	1,,0	18,5	5,03	4,1,9	3,65	3,16	2,69	
	13 5	18,5	5,12	4,37	3,75	3,20	2,75	
20 0	13,0	14,5	4,01	3,42	2,94	2,51	2,16	
20,0	9 5	14, <mark>5</mark>	4,15	3,56	3,06	2,61	2,19	
	5,5	10,5	3,01	2,58	2,21	1,89	1,58	
	5 5	10,5	3,28	2,74	2,31	1,95	1,62	
	0,0	6,5	2,03	1,70	1,43	1,20	1,00	

Tabela 4.2 - Dados Experimentais Observados

#### 4.4.2 - Estudo da Estabilidade

Um dos objetivos deste estudo foi investigar o problema da estabilidade do fundo da escavação, através dos efeitos de desmoronamento (boiling) e empolamento (heaving). Em todos os ensaios discutidos anteriormente, não foram encon trados estes problemas. Procurou-se, então, estudar um caso. em que fosse possível esperar a ocorrência deste fenômeno. Co mo uma menor penetração e maior carga hidráulica criam maio res pressões no ponto extremo da cortina, foi escolhido uma penetração mínima possível de 2,5 cm. Com a semilargura de 20,0 cm e profundidade da escavação de 19,5 cm escolhidas ar bitrariamente, o comportamento do modelo foi estudado guando submetido a cargas hidráulicas diferentes, aumentando-se o va lor a 5 a iniciação do fenômeno de desmoronamento. Este ensaio consistiu em se manter constantes todos os parâmetros, so va riando a carga hidráulica gradualmente e as pressões serviram como indicadores das condições permanentes do sistema, em ca da situação. Somente após essa comprovação é que foi sendo va riada a carga hidráulica, até atingir a situação crítica, ca paz de provocar o desmoronamento. Na tabela 4.3 são dados as vazões correspondentes a cada carga hidráulica (h).

2.38
2,00
3,34
3,45
3,70

Fabela 4.3 - Valores Ob	servados
-------------------------	----------

# CAPÍTULO V RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os resultados dos ensaios que foram apresentados no capítulo anterior serão aqui analisados. As implicações dos ensaios serão discutidas e, qundo possível, comparadas com outras investigações.

5.1 - Comportamento do Modelo

O modelo hidráulico obedeceu à lei de Darcy, e o comportamento bidimensional e isotrópico foi razoável. A veri ficação da lei de Darcy no modelo é comprovada na figura 5.1, que mostra a variação da vazão com a carga hidráulica. Nesta figura todos os outros parâmetros permaneceram constantes e a relação linear entre a vazão e a carga hidráulica indica a va lidade da lei de Darcy. Para traçar o gráfico da figura 5.1 foram utilizados os dados provenientes do ensaio de estabili dade (tabela 4.3). Só neste caso foram feitas leituras de va zão correspondentes a várias cargas hidráulicas, Já que este ensaio foi realizado exatamente como os outros, supõe-se que o comportamento foi igual aos anteriores.

O comportamento do modelo, em termos de condições isotrópicas e de bidimensionalidade, foi verificado **através** de estabelecimento do padrão das linhas de fluxo, cujo método foi descrito no capítulo anterior, e o padrão estabelecido é mostrado na figura 5.2 e nas fotos 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10. Pode ser observado que o padrão confere com a forma teórica de qua se semi-elipses. Infelizmente não foi possível obter mais pon tos de leitura de pressões, a fim de se construir a rede de fluxo; pois esta foi, a única maneira possível de verificar o comportamento face às considerações assumidas.

5.2 - Efeito de Largura

Como foram estudadas unicamente duas larguras, os resultados so podem ser usados para comparar caso por caso. Evidentemente não existe um número suficiente de leituras em termos deste parametro, de modo que possa ser estabelecida a variação da vazão com a largura (2B). Entretanto, observan do-se a tabela 4.2 do capítulo anterior, podemos notar uma tendência consistente, que mostra a diminuição da vazão quan do a largura diminui, permanecendo constantes os outros para metros. Não obstante esta observação, serão analisados os re sultados correspondentes às duas larguras separadamente, por que é considerado que não existem bastantes informações para incluir o efeito da variação da largura nas análises subse guentes.

5.3 - Variação da Vazão de Filtração com os Parâmetros

#### 5.3.1 - Parâmetros Considerados

Os parâmetros aqui considerados foram transfor mados em parâmetros adimensionais, de acordo com a tradição, para facilitar a comparação dos resultados encontrados com os propostos por outros investigadores e também para evitar pro blemas de unidades. Por outro lado, podemos, também, a partir da análise adimensional, mostrar que a relação funcional entre a variável dependente (no caso a vazão) e as variáveis inde pendentes, é expressa pela relação adimensional funcional da da pela equação:

> $\underline{q} = \xi(h/B, D/B, P/B)$ Kh

Assim, são utilizadas as relações adimensionais  $\underline{q, D, P, h}_{Kh B B B}$  para representar, respectivamente, vazão de fil tração, profundidade de penetração e carga hidráulica adimensionadas.

# 5.3.2 - Variação da Vazão com a Profundidade de Escav<u>a</u> ção e Penetração da Cortina

Como indicado anteriormente, a vazão adimensi<u>o</u> nal(q/Kh) será uma função dos parâmetros D/B, P/B e h/B. Os resultados da tabela 4.2 são transformados em termos de par<u>â</u> metros adimensionais, que são mostrados na tabela 5.1.

Para calcular o valor do parâmetro <u>q</u> (que r<u>e</u> Kh

almente neste caso  $\tilde{e} = Q$ , onde: Q = vazão total medida e KhL

L = largura da cortina), o coeficiente de permeabilidade К foi determinado utilizando-se as leituras dos piezômetros рa ra cada ensaio do seguinte modo: escolhidos cada dois pontos de pressão (como, por exemplo, 1-3, 1-5, 3-6 da figura 4.4) e conhecidas as distâncias entre os pontos l, foi calculado o gradiente hidráulico através da razão entre a diferença da leitura piezométrica e a distância 1. Observou-se que, em ca da caso, com três cálculos do gradiente hidráulico, este va lor praticamente não se alterou. A partir do gradiente hidráu lico e utilizando-se a lei de Darcy, o coeficiente de permea bilidade K foi obtido. Como não era possível obter exatamente a mesma permeabilidade em todos os ensaios, a qual dependia da maneira exata de compactação, a permeabilidade determinada deste modo variou um pouco, de caso a caso, conforme consta na tabela 5.1, correspondente para cada coluna.

Observando-se a tabela 5.1 podemos ver que os valores do parâmetro q/Kh permaneceram constantes em termos do parâmetro h/B, com outros parâmetros mantidos constantes. Como ficou claro na tabela 5.1, esse fenômeno não é uma coi<u>n</u>

cidência, mas acontece em todos os casos em que foram testa dos os valores citados com cargas diferentes. Então, conclui se que o fator h/B não tem influência sobre o parâmetro de pendente q/Kh, o qual é consistente em termos dos trabalhos teóricos de Kozlov.

As figuras 5.3 e 5.4 mostram a relação entre vazão adimensionada q/Kh e penetração adimensionada P/B com profundidade de escavação adimensional D/B. Ressaltamos que a figura 5.3 corresponde, para o primeiro grupo de ensaios , com a semilargura B de 25 cm, ao passo que a figura 5.4 se refere ao caso de B = 20 cm.

As figuras 5.3 e 5.4 mostram que existe uma boa lação funcional entre esses parâmetros que são clara mente não lineares. Essas figuras indicam que o fator q/Khdiminui com o parâmetro P/B e também com o parâmetro D/B, is to significa que a vazão por unidade de comprimento da esca vação diminui com a penetração da cortina e também com a pro fundidade da escavação, quando a carga hidráulica permanece constante. Essas observações são bem consistentes com expe riências práticas conforme previstas nos estudos teóricos de Kozlov (figura 3.3).

5.4 - Estudos Comparativos

Embora existam trabalhos analíticos e exper<u>i</u> mentais nesta área, em termos da vazão através da cortina , foram encontrados, na bibliografia, somente as soluções de Kozlov (para espessura infinita do meio permeável) e os mon<u>o</u> gramas de Davidenkoff & Franke. Assim, serão comparados os resultados dos ens-ios com as soluções citadas.

As figuras 5.5 e 5.6 mostram uma comparação dos resultados calculados a partir dos valores propostos no mono grama de Davidenkoff & Franke. Os valores de  $\underline{q}$  foram calcu

UFPb/BIBLIOTECA/CCT

Kh

TEPS / RIGIOTECA

lados conforme explicado no capítulo III, página 25.

Foram escolhidos so dois casos para cada largu ra a fim de evitar o congestionamento das curvas, embora t<u>e</u> nham sido calculadas para todos os casos. Pode ser observado que as curvas quase coincidem com as traçadas a partir dos r<u>e</u> sultados de Davidenkoff & Franke.

Considerances o fato de que os monogramas de Da videnkoff & Franke não dão diretamente o valor do parâmetro  $\frac{q}{Kh}$ , a comparação é considerada extremamente satisfatória.

A figura 5.7 mostra a comparação dos resultados obtidos com os valores calculados pelo ábaco de Kozlov (para o caso de espessura infinita do meio poroso) e dos de Daviden koff & Franke para o caso D/B = 0,70. Como se esperava, os valores de Kozlov são bastante superiores aos observados. É interessante observar que a diferença é quase a mesma entre os valores de Kozlov e Davidenkoff & Franke também, como ind<u>i</u> cado pela figura 5.7. A tendência da variação é totalmente consistente em todos os casos, mas é duvidoso que a diferença tão grande entre o valor teórico de Kozlov e o experimental possa ser somente atribuída ao fato de a espessura ser infini ta.

Essa observação acima é mais forte por causa de um estudo comparativo feito, considerando-se espessuras do meio poroso diferentes. Foi considerado, nesse estudo, um c<u>a</u> so hipotético de semilargura B = 10,0 cm e profundidade de e<u>s</u> cavação e penetração com 5 cm em cada caso. Espessuras mult<u>i</u> plas de 10 cm foram consideradas, dando para o valor da r<u>a</u> zão T/B (T sendo a espessura do meio poroso na escavação) v<u>a</u> riando de 1,0 a 6,0. Utilizando-se as curvas de Davidenkoff & Franke foram calculados os valores do fator  $\frac{q}{Kh}$  correspon

dentes. Essa relação é mostrada na figura 5.8 que realmente mostra o efeito da espessura do meio poroso sobre a vazão adi

	Р/В	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	D/B	P/B	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75
D/B	h/B			q/Kh				h/B			q/Kh		
0,70	0,74	0,550	0,463	0,406	0,352	0,301	0,88	0,93	0,550	0,469	0,404	0,350	0,297
0 51	0,74	0,580	0,482	0,418	0,357	0,306	0,68	0,93	0,560	0,479	0,415	0,354	0,303
0,04	0,58	0,580	0,482	0,418	0,357	0,306		0,73	0,560	0,479	0,415	0,354	0,303
0.20	0,58	0,600	0,501	0,435	0,370	0,310	0,48	0,73	0,580	0,498	0,432	0,368	0,307
0,00	0,42	0,600	0,501	0,435	0,370	0,310		0,53	0,580	0,498	0,432	0,368	0,307
0.22	0,42	0,640	0,532	0,455	0,383	0,316	0.28	0,53	0,633	0,529	0,450	0,380	0,314
0,22	0,26	0,640	0,532	0,455	0,383	0,316	-,20	0,48	0,633	0,529	0,450	0,380	0,314
10 <sup>2</sup> K(cm/s)		2,543	2,561	2,511	2,520	2,550	10 <sup>2</sup> K	(cm/s)	2,553	2,528	2,509	2,510	2,510

Tabela 5.1 - Vazão Admensional (q/Kh) Correspondente aos

Valores dos Parâmetros D/B, P/B e h/B

mensional. Pode ser visto que o fator  $\frac{q}{Kh}$  aumenta com o fa

tor T/B e a taxa de variação (aumento) diminui com a espessu ra. Como é claro pela figura 5.8 e também intuitivamente esta curva deve tornar-se assintótica para o valor teórico que cor responde a uma espessura infinita (T/B = ∞). Esse valor deter minado pelo monograma de Kozlov é indicado com a linha trace jada na figura 5.8. É óbvio que a curva calculada através do abaco de Davidenkoff & Franke não pode ser assintótica para esse valor, mas para um valor muito menor. Então podemos di zer que as diferenças entre os valores observados nos experi mentos e os dados pela solução de Kozlov não se devem somen te ao fato de a espessura ser infinita. Provavelmente a dife rença (que não podemos explicar através do efeito da espessu ra) é causada pelo método analítico da solução.

Outra comparação interessante com a solução an<u>a</u> lítica de Kozlov é indicada na figura 5.9. Neste caso o valor da penetração e espessura do meio poroso na escavação é de 10 cm e 20 cm respectivamente, com a semilargura de escavação igual a 25,0 cm. Para valores diferentes da escavação (ou a razão D/B) dentro de 0,2 a 0,7, é calculada a relação  $\frac{q}{Kh}$ .

dada pela solução de Kozlov e indicada pela curva tracejada.

5.5 - Aspectos de Estabilidade

Como foi descrito no capítulo anterior, este es tudo tinha como finalidade principal observar o caso de desmo ronamento e rompimento do fundo de escavação. De acordo com as observações feitas e indicadas na tabela 4.3, o fenômeno de desmoronamento na parte central da cortina ocorreu quando o fator B/h atingiu o valor 0,98. Neste caso, o fenômeno de desmoronamento começou mais cedo e com carga menor, num canto (corner) particular, que foi desprezado como *efeito de canto*. Assim sendo, para o caso de B/k igual a 0,98, a condição cri tica foi considerada atingida, correspondentemente à relação P/h igual a 0,13. O fato de que a área critica é uma zona dis tante da cortina e igual a metade da nenetração (de acordo com Terzaghi), foi quase verificado, com o valor médio observado igual a 1,0 cm de distância da cortina (P/2 = 1,25 cm). Mars land (18) e NacNamee (17) estudaram o caso de fator de segu rança para cortinas, e o caso crítico, corresponderia a um fator de segurança F = 1 nos seus estudos. Utilizando-se OS critérios deles, foi calculado o valor da razão P/k para 0 caso F = 1, e isso deu os valores 0,22 (ou P = 0,22 h) e 0,35 (P = 0,35 h), nos casos de Marsland (18) e NacNamee (17).

Aparentemente, o valor observado é pequeno e im plica que, de acordo com as considerações citadas, o rompimen to de oria ter ocorrido anteriormente.

Embora não seja clara a razão para as diferen ças destes valores, é óbvio que existe bastante diferença en tre as várias investigações nesse sentido (1), incluindo-se os estudos de MacNamee e Marsland.

Em virtude disto, provavelmente o grau de conf<u>i</u> ança <u>para aceitarem-se</u>, sem verificação, os valores crit<u>i</u> cos indicados pelos estudos citados <u>deverá ser menor</u>.

É apresentada uma sequência fotográfica do pro cesso de desmoronamento nas fotos 5.1 a 5.4.



Foto 5.1.



Foto 5.2.



Foto 5.3.



Foto 5.4.




















Figura 5.8 – Variação relativa da vazão adimensional com espessura do meio poroso de acordo com Davidenkoff & Franke



## CAPÍTULO VI

## CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

6.1 - Conclusões

Baseados nestes estudos podemos concluir o se guinte:

a) O modelo utilizado no estudo satisfez às hipóteses básicas da teoria do escoamento em meios porosos;

b) a solução analítica de Kozlov, embora para o caso de espessura infinita do meio poroso, indica o comport<u>a</u> mento lo modelo;

 c) os resultados do presente estudo concordam muito bem com os monogramas apresentados por Davidenkoff & Franke, principalmente em termos da variação da vazão com os outros parâmetros;

d) a diferença entre os valores observados e os valores dados pela solução de Kozlov não pode ser totalmente atribuída ao efeito da limitação da espessura;

e) para o caso crítico ou desmoronamento da es cavação, os resultados dos outros investigadores, bem como o do presente estudo, discordam, e os critérios não podem ser aplicados com confiança.

6.2 - Recomendações

a) São recomendados mais estudos, para verifi -

66

car-se a influência da largura da escavação sobre a vazão . Também é recomendado nos estudos controlar melhor os valores dos parâmetros adimencionais (independentes), no lugar dos parâmetros básicos, como penetração, profundidade;

b) recomenda-se definir critérios que justif<u>i</u> quem as diferenças entre os valores de Kozlov (profundidade infinita do meio poroso) e outros obtidos para profundidade limitada do meio permeável.

## REFERÊNCIAS

- 01. BAUER, Gunther E., Water and Seepage Pressure Conside rations on Sheeted Cofferdams. Proceedings, 1st Canadian Hydraulics Conference, Edmonton, May, 1974.
- 02. BECERRIL, E. Hidromecanica. Madrid, Editorial Dossat, 1960.
- O3. BRAHMA, S. P. Seepage Through Opening in Cutoff wall Under Weir. J. of the Geotechnical Engineering Division. New York, ASCE, 93 (SM2): 45 - 64, Mar ch, 1967.
- 04. COMOLET, R. Mecanique Experimentale des Fluides. P<u>a</u> ris, Masson, 1963. 2v.
- 05. DE WIEST, R. J. M. Discussion of "Analysis of Seepage Problems", by M. E. Harr and R. C. Dean, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, New York, ASCE, 88 (SM1): 83 - 85, Feb., 1962.
- 06. DWIGHT, Herbert B. Tables of Integrals and Other Ma thematical Data. New York, The Macmillan Company 1972.
- 07. GRADSHTEYN, I. S. & KYZHIK, I. W. Tables of Integrals Series and Products, New York, Academic Press, 1965 (original russo).
- 08. HARR, M. E. Groundwater and Seepage. New York, McGraw-Hill, 1962.
- O9. HARR, M. E. & DEEN, R. C. Analysis of Seepage Problems J. of the Soil Mechanics and Foundations Divi sion, New York, ASCE, 87 (SM5): 91 - 107, Octo ber, 1961.
- 10. HSU, Hwei P. Analise Vetorial. Tradução de Edgar Perei ra de Cerqueira. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1972.

- 11. JAHNKE, E. & EMDE, F. Tables of Functions. New York, Dover Publications, 1945.
- 12. KING, George J. W. Seepage Under a Rectangular Dam. J. of the Soil Mechanics and Foundations Divi sion, New York, ASCE, 93 (SM2): 45 - 64, March, 1967.
- KOBER, H. Dictionary of Conformal Representations. New York, Dover Publications, 1957.
- 14. KRIZEK, Raymond J. & ANAND, Vera B. Flow around a Vertical Shetpile Embedded in an Inclined Strati fied Medium. Water Resources Research, Washing ton, DC., 4 (1): 113 - 23. Feb., 1968.
- 15. LELIAVSKY, S. Design of Dams for Percolation and Ero sion. London, Chapman & Hall, 1965. v.3.
- 16. MARKUSHEVICH, A. Teoria de las Funciones Analiticas. Tradução de Emiliano Aparicio Bernardo. Moscu, <u>E</u> ditorial Mir, 1970. 2v. (original russo).
- 17. McNAMEE, J. Seepage into a Sheeted Excavation, Geotech nique, London, 1 (4): 229 - 41, 1949.
- 18. MARSLAND, A. Model Experiments to Study the Influence of Seepage on the Stability of a Sheeted Excava tion in Sand. Geotechnique, London, 3 (6): 223 -241.
- 19. MUSKAT, M. The Flow of Homogeneous Fluids through Po rous Media. New York, McGraw-Hill, 1937.
- 20. POLUBARINOVA KOCHINA, P. Ya. Theory of Groundwater Movement.Translated by J. M. Roger de Wiest.Prin ceton, N. J., Princeton University, 1962. (original russo).
- 21. RAMA RAO, B. S. & RAO VISWESWARA, J. Seepage into Sheet Pile Cofferdam. J. of the Hydraulics Divi sion, New York, ASCE, 99 (HY9): 1515 - 30, Sep tember, 1973.



- 22. REDDY, S. A. et alii Flow Around Inclined Sheet Pile J. of the Hydraulics Division, New York, ASCE, 97 (HY7): 1101 - 14, July, 1971.
- 23. SCHNEEBELI, G. Hydraulique Souterraine. Paris, Eyro lles, 1966. v.12.
- 24. SPIEGEL, M. R. Variáveis Complexas. Tradução de José Raimundo Braga Coelho. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, Brasilia, INL, 1973. (original inglês).
- 25. VERRUIJT, A. Theory of Groundwater Flow. New York, Gor don and Breach Science Publishers Inc., 1970.