



**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Unidade Acadêmica de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**Ary Vinícius Ferreira Leite<sup>†</sup>**

**Caracterização de Hipersuperfícies  
Tipo-espaço Completas com Curvatura  
Média Constante Satisfazendo uma  
Desigualdade do Tipo Okumura**

**Campina Grande - PB**

**2024**

---

<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

**Ary Vinícius Ferreira Leite**

**Caracterização de Hipersuperfícies  
Tipo-espaço Completas com Curvatura  
Média Constante Satisfazendo uma  
Desigualdade do Tipo Okumura**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande, pertencente à linha de pesquisa de Geometria Diferencial e área de concentração Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez

**Campina Grande - PB**

**2024**

L533c

Leite, Ary Vinícius Ferreira.

Caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante satisfazendo uma desigualdade do tipo Okumura / Ary Vinícius Ferreira Leite. – Campina Grande, 2024.  
109 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação: Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez".

Referências.

1. Geometria diferencial. 2. Desigualdade Tipo Okumura. 3. Fórmula de Simons. 4. Espaços de Forma Lorentzianos. 5. Hipersuperfícies Tipo-espaço Completas de Curvatura Média Constante. I. Velásquez, Marco Antonio Lázaro. II. Título.

CDU 514.7(043)

# Caracterização de Hipersuperfícies Tipo-espaço Completas com Curvatura Média Constante Satisfazendo uma Desigualdade do Tipo Okumura

por

Ary Vinícius Ferreira Leite

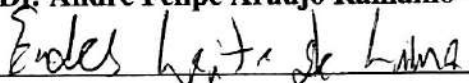
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

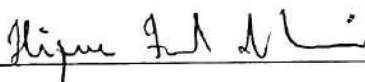
Aprovada em: 26/02/2024



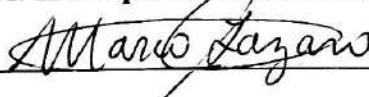
Prof. Dr. André Felipe Araujo Ramalho - UFCG



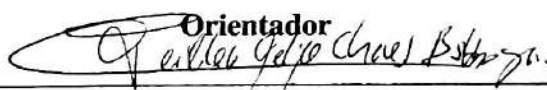
Prof. Dr. Eudes Leite de Lima - UFCG



Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima - UFCG



Prof. Dr. Marco Antonio Lázaro Velásquez - UFCG

**Orientador**  


Prof. Dr. Weiller Felipe Chaves Barboza - UFPB

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Fevereiro - 2024

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus que me sustentou até aqui com honras e glórias. Sem Ele, nada em minha vida teria sido imaginável, muito menos possível. Agradeço-lhe, Senhor, por não permitir que eu me esquecesse dos seus ensinamentos e por todas as vitórias que chegaram em minha vida!

À minha família que sempre orou por mim e se alegrou com minhas conquistas. Em particular agradeço aos meus pais, Arimatéa e Leninha por todas as vezes que me proporcionaram momentos de descontração, aprendizagem e de amadurecimento. Obrigado por sempre acreditarem em meu potencial e por investirem seriamente em minha educação, espero que essa dissertação sirva para vocês ao menos como um reflexo de todo esse investimento educacional. Quero ainda agradecer por todo apoio e amor que os dois me doaram ao longo dos meus 24 anos de existência, sem vocês eu não seria quem sou. Papai e Mamãe, não tenho palavras para descrever o quanto sou grato aos dois, por isso aceitem o meu te amo de cada dia como prova disso. Amo vocês. À Minha madrinha Cláudia por se fazer presente em minha vida, por cuidar de mim quando necessário, por todas as orações e por acreditar em minha capacidade intelectual. Te amo, madrinha.

À Andressa Vitória Olinda Silva. Meu amor, gostaria de começar lhe agradecendo pela paciência durante todo esse tempo em que estive longe. Sei que não foi fácil, mas com sua compreensão e amor tive forças e condições de terminar meu tão sonhado mestrado. Você sabe que todos os dias que estive aqui meus pensamentos nunca se afastaram de você um segundo sequer. Na verdade, seu apoio e incentivo foram meu alicerce e minha fonte de motivação para encarar meus obstáculos cotidianos. Sou eternamente grato pelo seu amor, apoio e carinho. Espero sinceramente que estas poucas palavras possam transmitir a importância que você tem na minha vida e em particular para a conclusão desse mestrado. Te amo, meu bem!

Aos meus primos, por todas as vezes que conversamos sobre nossos futuros em minha casa a beira da piscina, na varanda, em lanchonetes e em qualquer lugar que estivéssemos reunidos. Confesso, que por muitas vezes, essas conversas me ajudaram a nortear meus pensamentos, anseios, sonhos e atitudes. Através de vocês moldei, em boa parte, meu caráter e

conduta perante meus estudos e a sociedade de um modo geral. Agradeço ainda por me proporcionarem lembranças maravilhosas de nossos dias de juventude, crescendo, aprendendo e aprontando juntos. Destino, em particular, essas palavras à Julio Cesar Ferreira de Sousa Filho, Pedro Lucas Ferreira de Sousa, Paulo Victor Oliveira de Sousa e Ana Carolina Duarte de Sousa.

Aos meus amigos de longa data que sempre me incentivaram a perseguir esse sonho, depositando fé, esperança e votos de sucesso ao longo dessa caminhada. Por todas as horas que dispuseram-se a escutar minhas incertezas e conjecturas acerca do meu futuro acadêmico, muito obrigado. Como forma de expressar meus agradecimentos especiais àqueles que estiveram mais presentes, destaco os nomes de Juan Luíz, Breno Alexandre e meu compadre Johnson Barros.

Ao Prof. Me. Helano Maia Leom, por todas as horas perdidas me instruindo sobre o meu futuro acadêmico e profissional, por todos os diálogos e prosas versadas na inspiração e incentivo de uma carreira como matemático e professor. Agradeço ainda por todo o acompanhamento, disponibilidade e vontade para sanar minhas dúvidas com matemática durante a graduação e mestrado. Que fique registrada a sua preocupação genuína com a formação dos educadores matemáticos do Cariri e com o curso de Licenciatura Plena em Matemática do IFCE - *Campus Juazeiro do Norte*, no qual obtive minha licenciatura plena em Matemática. Ao professor Helano, os meus mais fervorosos agradecimentos.

Faz-se de exorbitante importância conceder os devidos méritos aos professores do Programa de Pós Graduação em Matemática - PPGMAT UFCG que, de maneira indispensável, contribuíram para a minha evolução acadêmica e pessoal. Em Especial, destino meu agradecimento ao Professor Doutor Henrique Fernandes de Lima que mostrou-se indispensável na minha caminhada no mestrado e, acima de tudo, no início da minha jornada como estudante e futuro pesquisador na área de Geometria Diferencial. Suas contribuições e ensinamentos perdurarão por toda a minha vida.

Destaco, de maneira ímpar, toda a minha gratidão ao Professor Doutor Marco Antonio Lázaro Velásquez que, com alegria, perspicácia e muita sabedoria, me guiou e orientou desde o primeiro semestre do mestrado. Obrigado por todos os ensinamentos, conselhos e incentivos durante esses 2 anos. Agradeço ainda pela oportunidade de aprendizado no ramo da pesquisa em Geometria e por partilhar comigo tantas horas da sua atenção e conhecimento. Em verdade, acredito, com muito afincio, que não poderia ter tido um melhor orientador. Espero que este trabalho tenha correspondido as suas expectativas e rendido momentos de diversão e aprendizado. Com muito orgulho e satisfação de tê-lo como meu mentor, agradeço por todas as tuas ações.

Expresso meus agradecimentos aos alunos do Programa de Pós Graduação em Matemática - UFCG que, de uma maneira ou de outra, contribuíram para minha formação acadêmica. Gostaria de destacar um agradecimento especial a Antonio Filho, Mateus Silva (que me aturou como colega de quarto durante um ano de mestrado - Muito obrigado por tudo, meu amigo.), Leonardo Venâncio, Matheus Nascimento, Gabriel Figueiredo, Rodrigo Faustino, Luis Filipe e Ismael Sandro, por toda a amizade e tempo de estudo compartilhado. Agradeço em particular a Lucas Siebra e André Ramalho por todos os momentos que tiveram paciência e extrema competência de sanar minhas dificuldades em Geometria. Agradeço ainda à Pedro Felype e Diego Jonathan por me ajudarem a compreender as nuances do mundo da Análise e do Latex.

Sou grato também a todos os funcionários do PPGMAT - UFCG por tornar o Bloco CX da UFCG - *Campus* Campina Grande um ambiente dedicado, propício e devoto ao ensino e aprendizagem da Matemática. Aproveito para encerrar agradecendo a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por todo o suporte financeiro ao longo desses dois anos.

Agradeço ainda a cada um dos membros da banca desta dissertação por todas as sugestões, ponderações e correções feitas para o enriquecimento da versão final da minha dissertação de mestrado.

# Dedicatória

Aos meus pais, Arimatéa e Leninha  
e à minha namorada Vitória.



A Geometria existe por toda a parte. É preciso,  
porém, olhos para vê-la, inteligência para  
compreendê-la e alma para admirá-la.

*Johannes Kepler (1572 - 1630).*

# Resumo

Neste trabalho, enunciamos e demonstramos dois resultados de caracterização de hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas, com curvatura média constante, em um espaço de forma Lorentziano satisfazendo uma desigualdade tipo Okumura. Mais especificamente no primeiro teorema trabalhamos com o espaço de de Sitter enquanto o segundo teorema trata acerca dos espaços de forma Lorentzianos, isto é, os espaços de Lorentz-Minkowski, de de Sitter e o Anti-de Sitter. Em ambos os resultados utilizamos uma desigualdade tipo Okumura para estabelecer relações entre o operador de umbilicidade e a curvatura média a fim de estabelecer que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço satisfazendo certas condições previamente estabelecidas, são alguns cilindros hiperbólicos.

**Palavras-chave:** Desigualdade tipo Okumura; Fórmula de Simons; Hipersuperfícies tipo-espaço completas de curvatura média constante; Espaços de forma Lorentzianos.

# Abstract

In this work, we state and demonstrate two results for the characterization of complete space-like hypersurfaces immersed, with constant mean curvature, in a Lorentzian shape space satisfying an Okumura-type inequality. More specifically in the first theorem we work with the de Sitter space while the second theorem deals with Lorentzian shape spaces, that is, the Lorentz-Minkowski, de Sitter and Anti-de Sitter spaces. In both results we use an Okumura-type inequality to establish relations between the umbilicity operator and the mean curvature in order to establish that the only space-like hypersurfaces satisfying certain previously established conditions are some hyperbolic cylinders.

**Key Words:** Okumura type inequality; Simons formula; complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature; Lorentzian space forms.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Tópicos de Geometria Semi-Riemanniana</b>	<b>7</b>
1.1 Variedades Semi-Riemannianas . . . . .	7
1.1.1 Métrica Semi-Riemanniana . . . . .	7
1.1.2 A conexão de Levi-Civita . . . . .	8
1.1.3 Geodésicas, Variedades completas e o Teorema de Hopf-Rinow . . . . .	10
1.2 Operadores Diferenciais . . . . .	15
1.2.1 O Gradiente . . . . .	15
1.2.2 O Divergente . . . . .	17
1.2.3 O Laplaciano . . . . .	18
1.2.4 O Hessiano . . . . .	21
1.3 Curvaturas de Uma Variedade Semi-Riemanniana . . . . .	22
1.3.1 Tensores . . . . .	23
1.3.2 Tensor Curvatura . . . . .	24
1.3.3 Curvatura Seccional . . . . .	27
1.3.4 Curvatura de Ricci, Omori-Yau e o Teorema de Bonnet-Myers . . . . .	29
<b>2 Imersões Isométricas</b>	<b>31</b>
2.1 Segunda Forma Fundamental e as Equações de Gauss e Codazzi . . . . .	31
2.2 Hipersuperfícies . . . . .	37
2.3 Espaços de Forma Lorentzianos . . . . .	41
2.3.1 O Espaço de Lorentz-Minkowski . . . . .	41
2.3.2 O Espaço de de Sitter . . . . .	46

2.3.3	O Espaço anti-de Sitter . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Fórmula de Simons e Desigualdade Tipo Okumura</b>	<b>61</b>
<b>4</b>	<b>Alguns Resultados Auxiliares</b>	<b>69</b>
<b>5</b>	<b>Resultados Principais</b>	<b>77</b>
5.1	No Espaço de de Sitter . . . . .	77
5.2	Nos Espaços de Forma Lorentzianos . . . . .	86
	<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>

# Introdução

No ano de 1977, o matemático Goddard [13] lançou a seguinte conjectura:

## **Conjectura 0.1** (Goddard)

*As únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média constante do espaço de de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  são as hipersuperfícies totalmente umbílicas.*

Naturalmente, uma conjectura matemática chama a atenção de diversos pesquisadores, em um primeiro momento para sua veracidade ou falsidade e, em seguida, para as suas implicações. Com a Conjectura de Goddard não foi diferente, uma gama de matemáticos passou a buscar uma resposta - seja ela afirmativa ou negativa - para tal especulação. Em verdade, a conjectura, sob as hipóteses em que foi proposta, mostrou-se falsa com o passar do tempo.

De fato, Montiel [21] contribuiu para a solução da conjectura exibindo alguns contra-exemplos. Montiel mostrou que certos cilindros hiperbólicos formados pelo produto de uma esfera com o espaço hiperbólico são hipersuperfícies tipo-espaço completas e com curvatura média constante, entretanto não são totalmente umbílicas no espaço de de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  (alguns exemplos de tais cilindros hiperbólicos serão abordados no [Capítulo 2](#) e no [Capítulo 5](#)). Em breve voltaremos a falar das contribuições de Montiel para conjectura de Goddard.

Contudo, a falsidade da Conjectura de Goddard não desmotivou a comunidade matemática na procura de resultados similares. Em verdade, vários autores trabalharam com o intuito de provar a veracidade da conjectura pagando o preço de admitir algumas hipóteses adicionais. O primeiro resultado nesse sentido data de 1987 por Ramanathan [25]. Ele demonstrou que as superfícies tipo-espaço completas e com curvatura média  $H$  constante tal que  $H^2 < 1$  são totalmente umbílicas em  $\mathbb{S}_1^3$ , deixando claro que, para a técnica de demonstração utilizada por ele, era importante que a dimensão fosse 3. Eis o resultado em sua formulação original - traduzido ao português:

**Teorema 0.2** *Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  uma imersão tipo-espaço completa com curvatura média  $H$  constante.  $M$  é compacta se, e somente se,  $H^2 < 1$ . Neste caso  $M$  é isométrica a uma 2-esfera com curvatura de Gauss constante igual a  $1 - H^2$ . Além disso, a imersão  $x : M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  é totalmente umbílica.*

Nesse mesmo artigo, Ramanathan exibiu um exemplo, inicialmente estudado por Dajczer e Nomizu [11], mostrando que quando  $H^2 > 1$  ocorre, a conjectura de Goddard é falsa.

Mostraremos agora um resultado devido a Akutagawa [2].

**Teorema 0.3** *Seja  $M^{n+1}(c)$  uma variedade Lorentziana  $(n+1)$ -dimensional com curvatura seccional positiva  $c$ . Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média  $H$  constante em  $M^{n+1}(c)$ . Suponha que*

- (i)  $H^2 \leq c$ , quando  $n = 2$ .
- (ii)  $H^2 < \frac{4(n-c)}{n^2}$ , quando  $n \geq 3$ .

*Então  $\Sigma$  é totalmente umbílica.*

Para os fins desta dissertação precisaremos apenas do resultado (ii), por esse motivo, no [Capítulo 4](#), exibimos a demonstração do teorema acima feita por Montiel. Esse teorema, provado independentemente por Akutagawa, também é uma resposta positiva para a conjectura de Goddard que, em verdade, para o caso  $c = 1$  e  $n = 2$ , recuperamos exatamente o Teorema de Ramanathan. Desse modo, vemos que tal resultado devido a Akutagawa generaliza o Teorema de Ramanathan.

O contra-exemplo para a conjectura de Goddard exibido por Montiel, isto é, o cilindro hiperbólico isométrico ao produto Riemanniano  $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^1(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ , com  $r > 0$ , é um exemplo de hipersuperfície tipo-espaço de curvatura média constante  $H$  tal que  $H^2 \geq \frac{4(n-1)}{n^2}$ . Todavia, Montiel também fez contribuições favoráveis para a veracidade da conjectura de Goddard com o seguinte resultado:

**Teorema 0.4** *Seja  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em um espaço de de Sitter. Se  $\varphi$  tem curvatura média  $H$  constante, então  $\varphi$  é umbílica.*

Destarte, Montiel provou que a conjectura é verdadeira para o caso compacto. Uma demonstração desse fato será apresentada no [Capítulo 4](#) desta dissertação. Em 1994, Montiel [20] estabeleceu um resultado em que caracteriza os cilindros hiperbólicos  $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^1(r)$  como as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas não totalmente umbílicas no espaço de Sitter com curvatura média satisfazendo  $H = \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$ . Tal resultado foi publicado por Montiel na forma da seguinte

**Proposição 0.5** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em um espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  com curvatura média  $H = \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$ . Então, ou  $\Sigma^n$  é umbílica (e então compacta) ou  $n > 2$  e a curvatura escalar  $r$  de  $\Sigma^n$  satisfaz*

$$\sup r(p) = (n-2)^2.$$

*Esse supremo é atingido se, e somente se, a menos de movimentos rígidos,  $\Sigma^n$  corresponde a um cilindro hiperbólico de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ .*

É possível mostrar que  $\sup |\phi| = \frac{n-2}{\sqrt{n}}$  é atingido em algum ponto de  $M$ . Aqui, denotamos por  $\phi$  o tensor de umbilicidade de  $M$  (o leitor pode encontrar mais informações acerca do tensor de umbilicidade  $\phi$  no [Capítulo 3](#)). Ao passar dos anos, Brasil, Colares e Palmas [5] forneceram uma generalização dessa proposição de Montiel produzindo um resultado de caracterização dos cilindros hiperbólicos de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  como sendo as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas em um espaço de Sitter não totalmente umbílicas com curvatura média constante  $\frac{2\sqrt{n-1}}{n} \leq H < 1$  e com

$$\sup |\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n-1}} \left( (n-2)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)} \right),$$

sendo atingido em algum ponto desse cilindro.

Caminhando nessa direção, esta dissertação tem como objetivo primordial apresentar dois resultados recentes devidos a Colares, E. de Lima e H. de Lima [9] que, assumindo uma desigualdade tipo Okumura (para mais informações veja o [Capítulo 3](#)), caracterizam certos cilindros hiperbólicos como sendo as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas em um espaço de forma Lorentziano assumindo uma certa configuração de hipóteses. Daremos ao leitor o deleite de vislumbrar antecipadamente os dois teoremas principais aqui presentes:

**Teorema 0.6** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em um espaço de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  com curvatura média constante. Se o tensor de umbilicidade total  $\phi$  satisfaz*

$$|\text{tr}\phi^3| \leq \frac{(n-2p)|\phi|^3}{\sqrt{np(n-p)}}, \quad (1)$$

para algum  $1 \leq p < \frac{n}{2}$ , então

(i)  $\sup |\phi| = 0$  e  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica,

(ii) ou  $H^2 \geq \frac{4p(n-p)}{n^2}$  e  $\beta_{|H|,p,1} \leq \sup |\phi| \leq \hat{\beta}_{|H|,p,1}$ , onde

$$\hat{\beta}_{|H|,p,1} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left( (n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right)$$



e

$$\beta_{|H|,p,1} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left( (n-2p)|H| - \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)} \right).$$

Além disso, se  $\frac{4p(n-p)}{n^2} \leq H^2 < 1$  então  $\beta_{|H|,p,1} > 0$  e a igualdade  $\sup |\phi| = \beta_{|H|,p,1}$  vale. Além disso, o supremo é atingido em algum ponto de  $\Sigma^n$  se, e somente se,  $\Sigma^n$  é um cilindro hiperbólico  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$  com

$$r = \sqrt{\frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)}} \geq \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n-2p}}.$$

Ressaltamos que, graças a um clássico resultado devido a Okumura [22] (veja (3.9) no Capítulo 3), (1) é trivialmente verdade para  $p = 1$ . Além disso, para  $p = 1$ , o resultado inicialmente obtido por Brasil, Colares e Palmas é resgatado. Dessa forma, o teorema acima é uma generalização desse fato.

Com o intuito de obter outros resultados de caracterização sobre hipersuperfícies tipo-espaço completas satisfazendo a desigualdade tipo Okumura vista em (1), nasce o teorema abaixo o qual, ao invés de se ater ao espaço de de Sitter, considera hipersuperfícies imersas em formas espaciais Lorentzianas de curvatura seccional constante  $c = \{-1, 0, 1\}$ . Eis o enunciado do teorema:

**Teorema 0.7** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em um espaço de forma Lorentziano  $\mathbb{L}_c^{n+1}$ ,  $c \in \{0, 1, -1\}$ , com curvatura média constante  $H$ . Se o tensor de umbilicidade total  $\phi$  satisfaz*

$$|\text{tr}\phi^3| \leq \frac{(n-2p)|\phi|^3}{\sqrt{np(n-p)}},$$

para algum  $1 \leq p < \frac{n}{2}$ , então

(i)  $\sup |\phi| = 0$  e  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica,

(ii) ou  $\sup |\phi| \leq \hat{\beta}_{|H|,p,c}$  onde

$$\hat{\beta}_{|H|,p,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left( (n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4pc(n-p)} \right).$$

Além disso, se  $|\phi| = \hat{\beta}_{|H|,p,c}$  vale, então

(a)  $c = 0$  e  $\Sigma^n$  é um cilindro hiperbólico  $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ , com  $r = \frac{p}{n|H|} > 0$ ;

(b)  $c = 1$  e  $\Sigma^n$  é um cilindro hiperbólico  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ , tal que  $r = \frac{p}{\sqrt{n(n-p)}} > 0$ , se  $H^2 = 1$ , ou

$$\frac{p}{\sqrt{n(n-2p)}} < r = \sqrt{\frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)}} \leq \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n-2p}},$$

quando  $H^2 < 1$ , ou

$$r = \sqrt{\frac{2p - nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(H^2 - 1)}} \leq \frac{p}{\sqrt{n(n-2p)}},$$

quando  $H^2 > 1$ ;

(c)  $c = -1$  e  $\Sigma^n$  é um cilindro hiperbólico maximal

$$\mathbb{H}^{n-p} \left( \frac{\sqrt{n-p}}{\sqrt{p}} \right) \times \mathbb{H}^p \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} \right) \subset \mathbb{H}_1^{n+1},$$

ou um cilindro hiperbólico  $\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{H}_1^{n+1}$  com

$$r = \sqrt{\frac{nH^2 + 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 + 4p(n-p)}}{2n(1+H^2)}} \leq \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n}}.$$

Em verdade, para  $p = 1$ , este último teorema também generaliza dois resultados obtidos por Ki, Kim, Nakagawa em 1991, mais precisamente os Teoremas 1 e 2 de [15]. Como dito inicialmente, esses dois últimos teoremas são os resultados principais abordados neste trabalho. Sendo assim, o leitor pode encontrar as demonstrações desses dois teoremas no [Capítulo 5](#).

Faremos um breve resumo sobre cada capítulo aqui contido. No [Capítulo 1 - Tópicos de Geometria Semi-Riemanniana](#), estabelecemos as notações que iremos utilizar ao longo da dissertação, bem como algumas noções, definições e resultados acerca das variedades semi-Riemanniana bem estabelecidos no mundo da Geometria Diferencial, mas que são indispensáveis para os fins deste trabalho. No [Capítulo 2 - Imersões Isométricas](#) é feita uma abordagem bastante direta com o intuito de ambientar o leitor no universo das imersões isométricas, passando pelas hipersuperfícies, espaços de forma Lorentzianos, fórmulas e equações de Gauss, Weingarten e Codazzi.

Quanto ao [Capítulo 3 - Fórmula de Simons e Desigualdade Tipo Okumura](#), estabelecemos uma fórmula tipo Simons envolvendo uma igualdade diferencial e discutimos sobre um resultado puramente algébrico denominado desigualdade Okumura, o qual será de grande utilidade no [Capítulo 5](#). Em relação ao [Capítulo 4 - Alguns Resultados Auxiliares](#), apresentamos resultados de toda sorte que foram fortemente utilizados no último capítulo objetivando a demonstração dos resultados principais deste trabalho. Por fim, o [Capítulo 5 - Resultados Principais](#) disserta sobre os resultados principais materializados em dois teoremas de caracterização de hipersuperfícies, onde, sob certas hipóteses, estabelecemos condições para que certos cilindros hiperbólicos sejam as únicas soluções dos [Teorema 5.1](#) e [Teorema 5.2](#)

Finalizamos esta introdução frisando que esta dissertação foi escrita tendo como alicerce principal o artigo intitulado: *Characterizations of complete CMC spacelike hypersurfaces satisfying an Okumura type inequality*, devido a Colares, E. de Lima e H. de Lima, [9], publicado em 2018 na revista intitulada *Differential Geometry and its Applications*.

# Capítulo 1

## Tópicos de Geometria Semi-Riemanniana

### 1.1 Variedades Semi-Riemannianas

Como as variedades semi-Riemannianas são nosso objeto de estudo primordial, investiremos certo esforço e atenção elencando e aprofundando, quando necessário, tópicos essenciais - e bem conhecidos na literatura matemática - acerca desses tipos particulares de variedades diferenciáveis. Destacamos que, de modo geral, este capítulo teve como base os livros do Manfredo [12] e do O'Neil [24].

#### 1.1.1 Métrica Semi-Riemanniana

**Definição 1.1** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional. Definimos uma **métrica semi-Riemanniana** em  $M^n$  como sendo uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M^n$  um produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_p M^n$ , a qual varia diferenciavelmente no sentido de que se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$  é um sistema de coordenadas em torno de  $p$ , de tal modo que  $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U) \subset M^n$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ , onde  $1 \leq i, j \leq n$ , com  $i, j \in \mathbb{N}$  e  $d\mathbf{x}$  denota a diferencial de  $\mathbf{x}$ . Quando não houver risco de confusão, usaremos simplesmente  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em vez de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ .*

**Definição 1.2** *Sejam  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana e  $p \in M^n$  um ponto de  $M^n$ . Definimos o **índice** de um produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ , ou simplesmente índice, denotado por  $\nu$ , como sendo a dimensão do subespaço maximal  $B$  de  $T_p M^n$  tal que o produto escalar restrito a  $B$  é negativo definido.*

Podemos, enfim, definir uma variedade semi-Riemanniana como se segue:

**Definição 1.3** Chamamos de *variedade semi-Riemanniana* o par  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , isto é, a variedade diferenciável  $M^n$  munida do produto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Observação 1.1** Quando o índice de uma variedade semi-Riemanniana  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é zero, dizemos que ela é uma *variedade Riemanniana*. Quando o índice de uma variedade semi-Riemanniana  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um, dizemos que ela é uma *variedade Lorentziana*.

Ressaltamos novamente que, por questões de simplificação, iremos nos referir à uma variedade semi-Riemanniana  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  apenas por  $M^n$ .

### 1.1.2 A conexão de Levi-Civita

Denotamos por  $\mathfrak{X}(M^n)$  o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis (isto é, de classe  $C^\infty$ ) de  $M^n$  e por  $C^\infty(M^n)$  o anel das funções diferenciáveis (classe  $C^\infty$ ) de  $M^n$ .

**Definição 1.4** Sejam  $M^n$  uma variedade diferenciável e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Definimos o *Colchete de Lie* como o sendo o campo de vetores diferenciável  $[X, Y] = XY - YX$ .

**Proposição 1.5** Se  $X, Y, Z$  são campos diferenciáveis em  $M^n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f, g$  são funções diferenciáveis, então:

- (i)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (anticomutatividade),
- (ii)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (linearidade),
- (iii)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (identidade de Jacobi),
- (iv)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

**Demonstração.** Fazemos a demonstração de cada item separadamente, por ordem de aparição:

(i) Basta ver que  $-[Y, X] = -(YX - XY) = XY - YX = [X, Y]$ .

(ii) Usando novamente a definição e a linearidade dos campos, temos:

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= (aX + bY)Z - Z(aX + bY) \\ &= aXZ - aZX + bYZ - bZY \\ &= a[X, Z] + b[Y, Z]. \end{aligned}$$

(iii) Veja que

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [XY - YX, Z] \\ &= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) \\ &= XYZ + ZYX - YXZ - ZXY. \end{aligned}$$

Analogamente, temos:

$$[[Y, Z], X] = YZX + XZY - ZYX - XYZ$$

e

$$[[Z, X], Y] = ZXY + YXZ - XZY - YZX.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] &= XYZ + ZYX - YXZ - ZXY \\ &\quad + YZX + XZY - ZYX - XYZ \\ &\quad + ZXY + YXZ - XZY - YZX \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iv) Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fXgY - gYfX \\ &= fX(g)Y + fgXY - gY(f)X - gfYX \\ &= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X. \end{aligned}$$

■

**Definição 1.6** *Sejam  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$  e  $f, g \in C^\infty(M^n)$ . Uma **conexão afim**  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M^n$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n),$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$ ;
- (ii)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$ ;
- (iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$ .

Dizemos que uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M^n$  é simétrica quando dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$  tem-se  $[X, Y] = \nabla_XY - \nabla_YX$ . Dizemos também que uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M^n$  é compatível com uma métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $M^n$  quando dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$  tem-se  $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle - \langle Y, \nabla_XZ \rangle$ . Estamos agora em condições de estabelecer um teorema importantíssimo conhecido com Teorema de Levi-Civita:

**Teorema 1.7** *Seja  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma variedade semi-Riemanniana. Então existe uma única conexão afim cumprindo as seguintes condições:*

a)  $\nabla$  é simétrica.

b)  $\nabla$  é compatível com a métrica.

**Demonstração.** Suponha, inicialmente, que existe uma conexão afim  $\nabla$  que satisfaz tais condições. Desse modo, dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$  pela compatibilidade com a métrica, temos

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (1.1)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (1.2)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (1.3)$$

Somando (1.1), (1.2) e subtraindo (1.3) e utilizando a simetria da conexão obtemos:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle \\ &\quad + \langle Z, \nabla_Y X \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A equação (1.4) é chamada de fórmula de Koszul a qual nos mostra que, se existir, tal conexão é unicamente determinada pela métrica semi-Riemanniana, uma vez que o produto escalar é, em particular, não degenerado, isto é, se  $\langle X, Y \rangle = 0$  para todo  $Y$  então  $X = 0$ . Para provar a existência, basta definir  $\nabla$  pela fórmula de Koszul. Não é difícil verificar que tal conexão está bem definida, é simétrica e compatível com a métrica. ■

### 1.1.3 Geodésicas, Variedades completas e o Teorema de Hopf-Rinow

Daremos ao leitor os conceitos e condições necessárias para compreender o conteúdo aqui trabalhado. Consideraremos até o fim dessa subseção  $M^n$  como sendo uma variedade Riemanniana com sua conexão de Levi-Civita denotada simplesmente por  $\nabla$ .

**Definição 1.8** Uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^n$  é uma **geodésica** no ponto  $t_0 \in I$  se  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$  em  $t_0$ , isto é, se  $\gamma$  é uma curva de aceleração nula em  $t_0$ . Se  $\gamma$  é uma geodésica em  $t$  para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica.

Eis alguns exemplos de geodésicas:

**Exemplo 1** (Geodésicas do espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ) Definimos o espaço Euclidiano  $n$ -dimensional e denotamos por  $\mathbb{R}^n$  como sendo o conjunto de vetores

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

A métrica usual do  $\mathbb{R}^n$ , onde  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  está sendo identificado como  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , é dada por:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Não é uma tarefa difícil verificar que no espaço Euclidiano  $n$ -dimensional a derivada covariante coincide com a derivada usual. Desse modo, as retas parametrizadas pelo comprimento de arco são geodésicas de  $\mathbb{R}^n$ . Em verdade, essas são as únicas geodésicas do espaço Euclidiano. A fim de mostrar uma exemplificação mais palpável, ilustramos algumas geodésicas em  $\mathbb{R}^3$ :

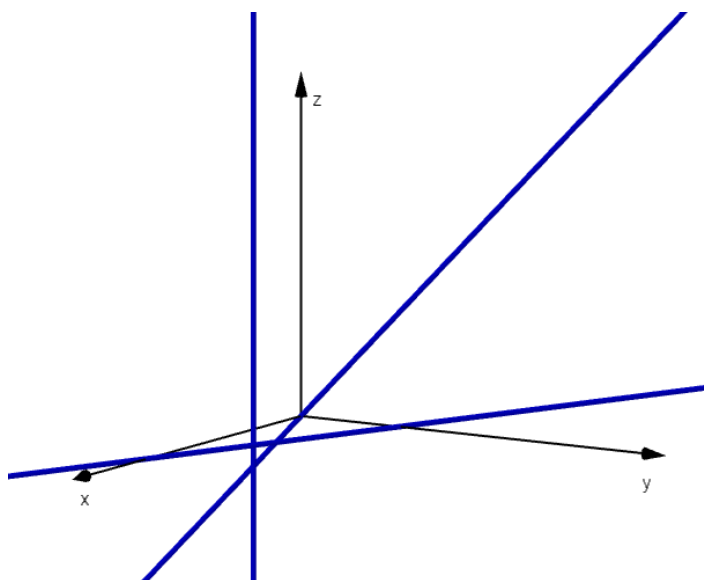


Figura 1.1: Geodésicas de  $\mathbb{R}^3$

**Exemplo 2** (Geodésicas da Esfera  $\mathbb{S}^n(r)$ ) Definimos a Esfera  $n$ -dimensional de raio  $r$ , denotada por  $\mathbb{S}^n(r)$ , como sendo o seguinte conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = r^2\}$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é a métrica do  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Utilizando a métrica induzida de  $\mathbb{R}^{n+1}$  em  $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , temos que todas as suas geodésicas são os grandes círculos (ou círculos máximos) parametrizados pelo comprimento



de arco, ou seja, são os círculos de  $\mathbb{S}^n(r)$  cujo raio tem o mesmo comprimento que o raio da Esfera  $\mathbb{S}^n(r)$ , neste caso, os círculos de raio  $r$ .

Com a finalidade de tornar o exemplo mais claro, mostraremos um exemplo visual de algumas geodésicas da esfera unitária  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  :

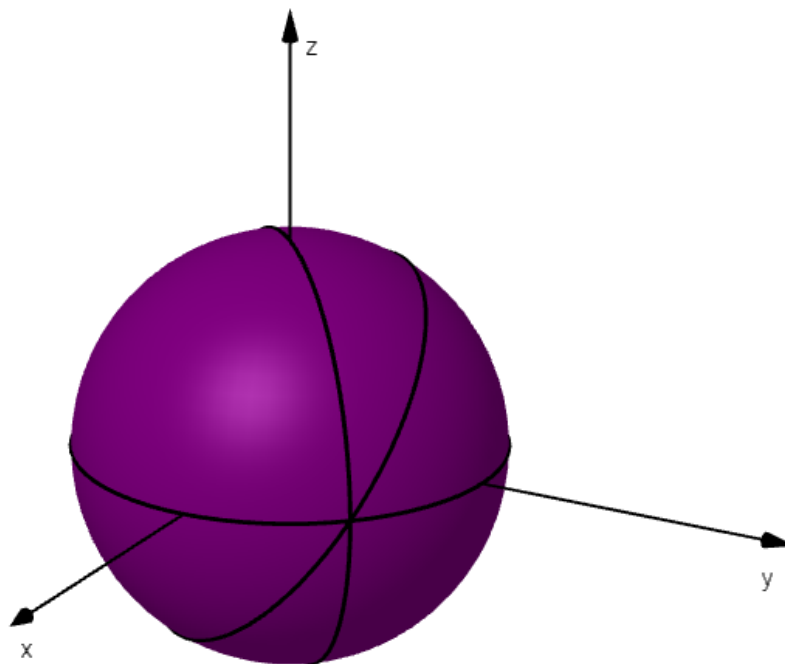


Figura 1.2: Geodésicas de  $\mathbb{S}^2$

**Exemplo 3** (Geodésicas do espaço Hiperbólico  $\mathbb{H}^n(r)$ ) Inicialmente consideremos a seguinte forma quadrática

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_n) = -(x_0)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i)^2,$$

onde  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Sendo  $r > 0$  e considerando a quádrlica  $Q(x) = -r^2$ , isto é,

$$-(x_0)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = -r^2,$$

definimos o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional  $\mathbb{H}^n(r)$  como sendo a componente conexa que corresponde a  $x_0 > 0$  da superfície regular de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dada por  $Q(x) = -r^2$ . Geometricamente,  $Q(x) = -r^2$  é uma espécie de hiperbolóide de duas folhas, enquanto que  $\mathbb{H}^n(r)$  é a folha contida no semi-espaço superior dado por  $x_0 > 0$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Desse modo, temos dois tipos de geodésicas no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n(r)$ . O primeiro tipo de geodésicas são as curvas geradas pela interseção entre o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n(r)$  e os hiperplanos perpendiculares ao hiperplano  $x_0 = 0$  que contém a origem de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . O segundo tipo de geodésicas são os círculos de  $\mathbb{H}^n(r)$  cujos planos são paralelos ao hiperplano  $x_0 = 0$  e cujos centros tem coordenada  $(x_0, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  com  $x_0 \geq r$ . Finalizamos esse exemplo mostrando algumas geodésicas do espaço hiperbólico 2-dimensional  $\mathbb{H}^2(2)$ , donde  $Q(x, y, z) = -4$  com  $x > 0$ :

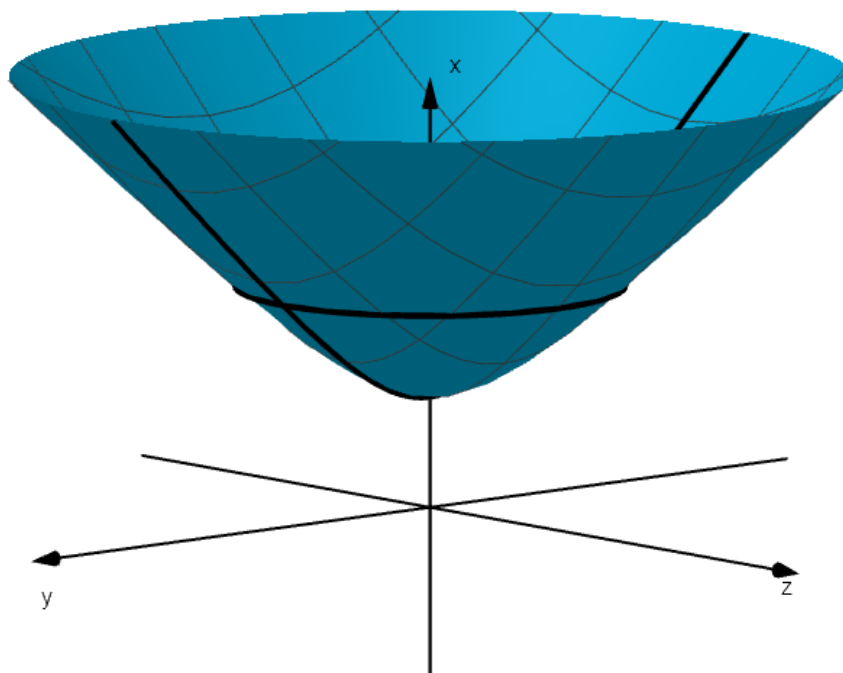


Figura 1.3: Geodésicas de  $\mathbb{H}^2$

As geodésicas possuem a interessante propriedade de serem as curvas que minimizam distâncias entre dois pontos de uma variedade, ao menos localmente. Por esse motivo dizemos que as geodésicas em uma variedade Riemanniana  $M^n$  exercem a mesma função que as retas no  $\mathbb{R}^n$  abordadas em nosso primeiro exemplo. Usaremos o conceito de geodésica para enunciar a definição da aplicação exponencial como se segue:

**Definição 1.9** *Seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M^n$  uma geodésica de  $M^n$  partindo de  $p$ , isto é,  $\gamma(0) = p$ , com  $p \in M^n$ . Denotaremos  $\gamma_v$  como sendo esta geodésica  $\gamma$  com  $\gamma'(0) = v$ , onde  $v \in T_p M^n$ . Seja  $v \in U \subset T_p M^n$  tal que a geodésica  $\gamma_v$  está bem definida em  $[0, 1]$ . Definimos a **aplicação exponencial** no ponto  $p \in M^n$  como sendo a seguinte aplicação*

$$\begin{aligned} \exp_p : U &\longrightarrow M^n \\ v &\longrightarrow \exp_p(v) = \gamma_v(1). \end{aligned}$$

A seguir, daremos a definição de uma variedade completa e definiremos uma distância em tal variedade de tal modo que ela se torne um espaço métrico. Dessa forma teremos condições de enunciar o Teorema de Hopf-Rinow.

**Definição 1.10** *Uma variedade Riemanniana  $M^n$  é **geodesicamente completa** se para todo  $p \in M^n$ , a aplicação exponencial,  $\exp_p$ , está definida para todo  $v \in T_p M^n$ , ou seja, suas geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 1.11** *Definimos a distância de  $p$  a  $q$  e denotaremos por  $d(p, q)$  como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas  $\beta_{p,q}$  diferenciáveis por partes ligando  $p$  a  $q$ .*

Não é um trabalho hercúleo verificar a seguinte proposição:

**Proposição 1.12** *Com a distância  $d$ ,  $M^n$  é um espaço métrico, isto é, para todos  $p, q, r \in M^n$ ,*

- (i)  $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ ;
- (ii)  $d(p, q) = d(q, p)$ ;
- (iii)  $d(p, q) \geq 0$  e  $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ .

**Teorema 1.13 (Hopf-Rinow)** *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M^n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\exp_p$  está definida em todo  $T_p M^n$ .
- (ii) Os limitados e fechados de  $M^n$  são compactos.
- (iii)  $M^n$  é completa como espaço métrico.

(iv)  $M^n$  é geodesicamente completa.

(v) Existe uma sucessão de compactos  $K_n \subset M^n$ ,  $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$  e  $\bigcup K_n = M^n$ , tais que se  $q_n \notin K_n$  então  $d(p, q_n) \rightarrow \infty$ . (Aqui  $\text{int}K_n$  indica o interior do conjunto  $K_n$ ).

Além disso, todas as afirmações acima implicam em

(vi) Para todo  $q \in M^n$  existe uma geodésica  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$  com  $l(\gamma) = d(p, q)$ . (Onde  $l(\gamma)$  indica o comprimento da curva  $\gamma$ ).

**Corolário 1.14** Se  $M^n$  é compacta então  $M^n$  é completa.

Dentre as tantas implicações do Teorema de Hopf-Rinow, destacamos uma elegante e surpreendente, a qual nos mostra que embora os conceitos de geodesicamente completo e ser completo quanto espaço métrico sejam diferentes a priori, eles são, em verdade, equivalentes.

Apesar de um enunciado extenso, a demonstração do Teorema 1.13 não é difícil de ser compreendida sendo, muitas vezes, deixada como exercício. Contudo uma demonstração satisfatória pode ser encontrada no Capítulo VII, Seção 2 em [12].

## 1.2 Operadores Diferenciais

Nesta seção apresentaremos alguns operadores diferenciais que utilizaremos ao longo deste trabalho. Ressaltamos ainda que esta seção teve como base as notas de aula do Caminha em [7]. Trataremos esta seção do ponto de vista Riemanniano, então, a menos de menção contrária,  $M^n$  denotará uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional munida de sua métrica  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  e sua conexão de Levi-Civita  $\nabla$ . Além disso, uma função  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  suave significa que  $f \in C^\infty(M^n)$ . Aproveitamos essa breve introdução para trazer a seguinte:

**Definição 1.15** Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M^n$  um ponto de  $M^n$ . Dizemos que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é um **referencial local** quando  $e_1, \dots, e_n$  são campos de vetores em uma vizinhança  $U \subset M^n$  de  $p$  tais que para cada  $q \in U$ ,  $\{e_1(q), \dots, e_n(q)\}$  é uma base ortonormal de  $T_qM$ .

### 1.2.1 O Gradiente

**Definição 1.16** Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Definimos o **gradiente** da função  $f$ , denotado por  $\nabla f$ , como sendo o campo vetorial sobre  $M^n$  dado por

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Pela própria definição vemos que caso o campo gradiente exista ele é único, uma vez que foi determinado em função da métrica. Garantimos a existência do campo gradiente pela seguinte

**Proposição 1.17** *Sejam  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial local em uma vizinhança aberta  $U \subset M^n$  e  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Então, em  $U$  temos:*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i.$$

**Demonstração.** Com efeito, escrevendo  $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in \mathfrak{X}(U)$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \left\langle X, \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{k=1}^n e_k(f)e_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i e_k(f) \langle e_i, e_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i e_i(f) \\ &= X(f). \end{aligned}$$

Pela unicidade do campo gradiente, temos o resultado. ■

Provaremos, agora, algumas propriedades do campo gradiente.

**Proposição 1.18** *Sejam  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves. Então:*

(i)  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$

(ii)  $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$

**Demonstração.** De fato, por definição, para todo  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$  temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f + g), X \rangle &= X(f + g) = X(f) + X(g) \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla g, X \rangle. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ , o que prova o item (i).

Novamente, usando a definição, observamos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla(fg), X \rangle &= X(fg) = fX(g) + gX(f) \\ &= f\langle \nabla g, X \rangle + g\langle \nabla f, X \rangle \\ &= \langle f\nabla g + g\nabla f, X \rangle. \end{aligned}$$

Donde, temos que  $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$ , provando o item (ii). ■

## 1.2.2 O Divergente

**Definição 1.19** Seja  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Definimos o **divergente** do campo  $X$  como sendo a função suave

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X : M^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longrightarrow \operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}\{v \rightarrow (\nabla_v X)(p)\}, \end{aligned}$$

onde  $v \in T_p M$ .

Assim como no campo gradiente, por vezes é útil ter uma forma de expressar o divergente de um campo em coordenadas locais. Enunciamos, então a próxima

**Proposição 1.20** Sejam  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial local em uma vizinhança aberta  $U \subset M^n$  e  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Se  $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  em  $U$ , então:

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle).$$

**Demonstração.** Pela definição de divergente, temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( e_i \left\langle \sum_{j=1}^n a_j e_j, e_i \right\rangle - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle). \end{aligned}$$

■

Vejam, uma propriedade do divergente no que segue:

**Proposição 1.21** Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$  e  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Então:

- (i)  $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$ .
- (ii)  $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$ .

**Demonstração.** Sejam  $p \in M^n$  um ponto arbitrário e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial local em torno de  $p$ . Escrevendo  $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  e  $Y = \sum_{i=1}^n b_i e_i$ , vemos que  $X + Y = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) e_i$ . Pela

proposição anterior, temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X + Y) &= \sum_{i=1}^n (e_i(a_i + b_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X + Y \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle) + \sum_{i=1}^n (e_i(b_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, Y \rangle) \\
&= \operatorname{div}(X) + \operatorname{div}(Y).
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de  $p$ , fica demonstrado o item (i). Para o item (ii) prosseguiremos de forma análoga. Desse modo, desde que  $fX = \sum_{i=1}^n f a_i e_i$ , encontramos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^n (e_i(f a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, fX \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n (f e_i(a_i) + a_i e_i(f) - f \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle) \\
&= f \left( \sum_{i=1}^n (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle) \right) + \sum_{i=1}^n a_i e_i(f) \\
&= f \operatorname{div} X + X(f) \\
&= f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle.
\end{aligned}$$

■

O próximo teorema é um resultado profundo e bastante recorrente em diversos problemas de Geometria e Análise. Apresentaremos o **Teorema do Divergente** no contexto Riemanniano pois utilizaremos o mesmo para provar um resultado devido a Montiel, no **Capítulo 4**. Uma demonstração do **Teorema do Divergente** pode ser encontrada no Capítulo 14, Seção 5 de [16].

**Teorema 1.22** (do Divergente) *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana compacta, orientada e  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Se  $\overline{M}^{n+1}$  tem bordo  $\partial \overline{M}^{n+1} = M^n$  (possivelmente  $M = \emptyset$ ), munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão  $i : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}$ , e  $\nu$  denota o vetor unitário normal exterior ao longo de  $M^n$ . Então*

$$\int_{\overline{M}} \operatorname{div} X d\overline{M} = \int_{\partial \overline{M}} \langle X, \nu \rangle dM,$$

onde, interpretamos que  $\int_{\partial \overline{M}} \langle X, \nu \rangle dM = 0$  quando  $M^n = \emptyset$ .

### 1.2.3 O Laplaciano

**Definição 1.23** *Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Definimos o **Laplaciano** de  $f$ , denotado por  $\Delta f$ , como sendo a função  $\Delta f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Façamos mais uma vez uma expressão local deste função. Vide a

**Proposição 1.24** *Sejam  $e_1, \dots, e_n$  um referencial local em um aberto  $U \subset M^n$  e  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f).$$

**Demonstração.** Sabemos que em coordenadas locais  $\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i$ . Desde que  $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$  temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Vejamos algumas propriedades do Laplaciano na próxima

**Proposição 1.25** *Sejam  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves. Então:*

- (i)  $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ .
- (ii)  $\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2$ .

**Demonstração.** Por definição, temos:

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \operatorname{div}(\nabla(fg)) \\ &= \operatorname{div}(f\nabla g + g\nabla f) \\ &= \operatorname{div}(f\nabla g) + \operatorname{div}(g\nabla f) \\ &= f\operatorname{div}(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f \rangle \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle, \end{aligned}$$

o que prova (i). Veja que (ii) segue de (i) fazendo  $f = g$ . De fato, que

$$\Delta(f^2) = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2,$$

donde

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2.$$

■

Vejamos alguns resultados envolvendo o [Teorema do Divergente](#) e o Laplaciano.



**Proposição 1.26** *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana compacta e orientada, com bordo  $\partial\overline{M}^{n+1} = M^n$  (possivelmente  $M^n = \emptyset$ ) munido com a orientação e a métrica induzida pela inclusão  $i : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}$ . Se  $f : \overline{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e  $\nu$  é o vetor normal exterior ao longo de  $M^n$ . Então*

$$\int_{\overline{M}} \Delta f d\overline{M} = \int_{\partial\overline{M}} \frac{\partial f}{\partial \nu} dM,$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \langle \nabla f, \nu \rangle$  é a derivada normal de  $f$  ao longo de  $M$ .

**Demonstração.** Basta aplicar o **Teorema do Divergente** ao campo  $X = \nabla f$ . Com efeito, temos que

$$\int_{\overline{M}} \operatorname{div}(\nabla f) d\overline{M} = \int_{\partial\overline{M}} \langle \nabla f, \nu \rangle dM.$$

Assim,

$$\int_{\overline{M}} \Delta f d\overline{M} = \int_{\partial\overline{M}} \frac{\partial f}{\partial \nu} dM.$$

■

**Proposição 1.27 (Identidades de Green)** *Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana compacta e orientada, com bordo  $\partial\overline{M}^{n+1} = M^n$  (possivelmente  $M^n = \emptyset$ ) munido com a orientação e a métrica induzida pela inclusão  $i : M^n \hookrightarrow \overline{M}^n$ . Se  $f, g : \overline{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves e  $\nu$  é o vetor normal exterior ao longo de  $M^n$ . Então*

(a) *(Primeira Identidade de Green)*

$$\int_{\overline{M}} (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g) d\overline{M} = \int_{\partial\overline{M}} f \frac{\partial g}{\partial \nu} dM.$$

(b) *(Segunda Identidade de Green)*

$$\int_{\overline{M}} (f \Delta g - g \Delta f) d\overline{M} = \int_{\partial\overline{M}} \left( g \frac{\partial f}{\partial \nu} - f \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) dM.$$

**Demonstração.** Para demonstrar (a) basta aplicar o **Teorema do Divergente** para o campo  $X = f \nabla g$ . Desse modo, obtemos:

$$\int_{\overline{M}} \operatorname{div}(f \nabla g) d\overline{M} = \int_{\partial\overline{M}} \langle f \nabla g, \nu \rangle dM,$$

donde tem-se que

$$\int_{\overline{M}} (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) d\overline{M} = \int_{\partial\overline{M}} f \frac{\partial g}{\partial \nu} dM.$$

Para (b) basta utilizar o item (a) para obter

$$\int_{\overline{M}} (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) d\overline{M} = \int_{\partial\overline{M}} f \frac{\partial g}{\partial \nu} dM$$

e

$$\int_{\bar{M}} (g\Delta f + \langle \nabla g, \nabla f \rangle) d\bar{M} = \int_{\partial\bar{M}} g \frac{\partial f}{\partial \nu} dM.$$

Subtraindo ambas as igualdades ganhamos

$$\int_{\bar{M}} (f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle - g\Delta f - \langle \nabla g, \nabla f \rangle) d\bar{M} = \int_{\partial\bar{M}} \left( f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dM,$$

donde obtemos

$$\int_{\bar{M}} (f\Delta g - g\Delta f) d\bar{M} = \int_{\partial\bar{M}} \left( f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dM.$$

■

**Definição 1.28** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana. Uma função suave  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **harmônica** (respectivamente **subharmônica**) se  $\Delta f = 0$  (respectivamente  $\Delta f \geq 0$ ) em  $M^n$ .*

**Teorema 1.29** *(Princípio do Máximo Forte de Hopf) Se  $M^n$  é uma variedade Riemanniana orientada, conexa e fechada (compacta e sem bordo), então toda função subharmônica (e, em particular, toda função harmônica)  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é constante.*

**Demonstração.** Pela [Proposição 1.26](#), como  $\partial M = \emptyset$  temos que  $\int_M \Delta f dM = 0$ . Como  $\Delta f \geq 0$ , concluímos que  $\Delta f = 0$  sobre  $M^n$ . Usando novamente [Proposição 1.26](#), temos que:

$$0 = \int_M \Delta(f^2) dM = \int_M 2(f\Delta f + |\nabla f|^2) dM = 2 \int_M |\nabla f|^2 dM,$$

donde temos que  $\nabla f = 0$  sobre  $M^n$ . Pela conexidade de  $M^n$  temos que  $f$  é constante sobre  $M^n$ . ■

## 1.2.4 O Hessiano

**Definição 1.30** *Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Definimos o **hessiano** de  $f$  como sendo o campo de operadores lineares  $\text{Hess} f : T_p M^n \rightarrow T_p M^n$  dado por*

$$(\text{Hess} f)(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Vejamos a seguinte

**Proposição 1.31** *Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $p \in M^n$ . O operador linear  $(\text{Hess} f)_p : T_p M^n \rightarrow T_p M^n$  é auto-adjunto.*

**Demonstração.** Sejam  $v, w \in T_p M^n$  e  $V, W$  extensões de  $v$  e  $w$  respectivamente. Dizer que  $V$  é uma extensão de  $v \in T_p M^n$  significa que o campo de vetores  $V \in \mathfrak{X}(M^n)$  definido em uma

vizinhança de  $p$  é tal que em  $p$  vale que  $V = v$ . Desse modo, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle (\text{Hess}f)_p(v), w \rangle &= \langle \nabla_V \nabla f, W \rangle_p \\
&= V \langle \nabla f, W \rangle(p) - \langle \nabla f, \nabla_V W \rangle_p \\
&= V(W(f)) - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V, W] \rangle \\
&= W(V(f)) + [V, W](f) - (\nabla_W V)(f) - [V, W](f) \\
&= W(V(f)) - (\nabla_W V)(f) \\
&= W \langle \nabla f, V \rangle(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p \\
&= \langle \nabla_W \nabla f, V \rangle_p \\
&= \langle (\text{Hess}f)_p(w), v \rangle.
\end{aligned}$$

■

Por fim, mostraremos uma relação entre o Laplaciano e o hessiano na seguinte

**Proposição 1.32** *Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Então:*

$$\Delta f = \text{tr}(\text{Hess}f).$$

**Demonstração.** Seja  $p \in M^n$  e considere  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial local em um aberto  $U \subset M^n$  tal que  $p \in U$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\text{Hess}f)_p &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle_p \\
&= \text{div}(\nabla f) \\
&= \Delta f.
\end{aligned}$$

■

Denotaremos também por  $\text{Hess}f$  a forma bilinear simétrica em  $T_p M^n$  que aplica vetores  $v, w \in T_p M^n$  em

$$\langle (\text{Hess}f)(v), w \rangle = \langle \nabla_v \nabla f, w \rangle = v(w(f)) - (\nabla_v w)f.$$

### 1.3 Curvaturas de Uma Variedade Semi-Riemanniana

O estudo de curvaturas acontece de maneira natural no âmbito de curvas e superfícies da Geometria Diferencial clássica. Não obstante, sob a perspectiva da Geometria

semi-Riemanniana, o estudo de curvaturas mostra-se primordial para uma abordagem mais precisa e completa da mesma, de modo que alguns aspectos particulares de uma determinada variedade podem ser obtidos e/ou expressos em termos de suas curvaturas. Além disso, o Lema de Omori-Yau - ferramenta analítica crucial utilizada para a demonstração dos resultados principais dessa dissertação - exige certa condição sobre a curvatura de Ricci. Apresentaremos alguns resultados essenciais acerca de curvaturas.

### 1.3.1 Tensores

Desde que tensores generalizaram a ideia de campo de vetores e, assim como estes, também podem ser diferenciados covariantemente e, como veremos adiante, a noção de curvatura é um caso particular de tensor, começaremos por definir e elencar certas propriedades de um tensor. É importante observar que sendo  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana,  $\mathfrak{X}(M^n)$  possui uma estrutura linear quando consideramos os elementos de  $C^\infty(M^n)$  como "escalares".

**Definição 1.33** *Um **tensor**  $T$  de ordem  $r$  em uma variedade semi-Riemanniana  $M^n$  é uma aplicação  $C^\infty(M)$ -multilinear*

$$T : \mathfrak{X}(M^n) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n).$$

Isso significa que  $T$  é linear em cada uma das suas entradas. Ademais, dados  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M^n)$ , temos que  $T(X_1, \dots, X_r)$  é uma função diferenciável em  $M^n$ . Vejamos dois exemplos:

**Exemplo 4** *Seja  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana. Considere a aplicação  $G : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$  dado por  $G(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ . Tem-se que  $G$  é um tensor de ordem 2, por causa da bilinearidade do produto escalar. Em verdade tal aplicação é chamada tensor métrico.*

**Exemplo 5** *Consideremos a conexão semi-Riemanniana  $\nabla$  definida por*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) &\longrightarrow C^\infty(M^n) \\ (X, Y, Z) &\longrightarrow \nabla(X, Y, Z) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle, \end{aligned}$$

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Veja que este exemplo não é um tensor, pois, como visto no item (iii) da Definição 1.6,  $\nabla$  não é linear em relação a segunda entrada.

**Definição 1.34** *Sejam  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana e  $T$  um tensor de ordem  $r$ . A diferencial covariante de  $T$ , denotada por  $\nabla T$ , é um tensor de ordem  $(r+1)$  dada por*

$$\begin{aligned} T(X_1, \dots, X_r, Y) &= Y(T(X_1, \dots, X_r)) - T(\nabla_Y X_1, \dots, X_r) \\ &\quad - \cdots - T(X_1, \dots, X_{r-1}, \nabla_Y X_r), \end{aligned}$$

onde  $X_1, \dots, X_r, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ .

Para cada  $Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ , a derivada covariante  $\nabla_Y T$  de  $T$  em relação a  $Y$  é um tensor de ordem  $r$  dado por  $\nabla_Y T(X_1, \dots, X_r) = \nabla T(X_1, \dots, X_r, Y)$ , com  $X_1, \dots, X_r, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ .

**Exemplo 6** Seja  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana. A diferencial covariante do tensor métrico é o tensor nulo. De fato, dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$  temos

$$\begin{aligned} \nabla G(X, Y, Z) &= Z\langle X, Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle = 0, \end{aligned}$$

uma vez que  $\nabla$  é a conexão semi-Riemanniana.

### 1.3.2 Tensor Curvatura

**Definição 1.35** Definimos o **tensor curvatura** (ou simplesmente a **curvatura**)  $R$  de uma variedade semi-Riemanniana  $M^n$  como sendo a correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$  a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} R(X, Y) : \mathfrak{X}(M^n) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M^n) \\ Z &\longrightarrow R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

**Proposição 1.36** Seja  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana. A curvatura  $R$  possui as seguintes propriedades:

(i)  $R$  é bilinear em  $\mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} R(fX + gY, Z)W &= fR(X, Z)W + gR(Y, Z)W, \\ R(X, fY + gZ)W &= fR(X, Y)W + gR(X, Z)W, \end{aligned}$$

para todo  $f, g \in C^\infty(M^n)$  e todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M^n)$

(ii) Para todo par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ , temos

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)(fZ) &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

com  $f \in C^\infty(M^n)$  e  $Z, W \in \mathfrak{X}(M^n)$ .

Para uma demonstração desse fato deixamos, novamente, [24] como referência. Perceba que esta proposição mostra que a curvatura  $R$  é de fato um tensor. A próxima proposição é bastante conhecida e aparece de modo recorrente em inúmeras situações em Geometria.

**Proposição 1.37** (Primeira Identidade de Bianchi) Sendo  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana e  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ , então

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

**Demonstração.** Pela definição de tensor curvatura e da conexão de Levi-Civita, temos:

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\
&\quad + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y, Z]} X \\
&\quad + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]} Y \\
&= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] \\
&\quad - \nabla_{[X, Z]} Y - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X \\
&= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] = 0,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é diretamente obtida pela identidade de Jacobi, item (iii) da [Proposição 1.5](#). ■

Vejamos agora algumas propriedades primordiais acerca do tensor curvatura expressas na seguinte:

**Proposição 1.38** *Sejam agora  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana,  $R$  o seu tensor curvatura e  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M^n)$ . Então:*

- (i)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle = 0$ ,
- (ii)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle$ ,
- (iii)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$ ,
- (iv)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$ .

**Demonstração.** Novamente, para um melhor entendimento do leitor, faremos as demonstrações de todos os itens separadamente na ordem de ocorrência:

(i) É novamente a identidade de Bianchi.

(ii) Basta ver que:

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
&= \langle -(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[Y, X]} Z), W \rangle \\
&= -\langle R(Y, X)Z, W \rangle.
\end{aligned}$$

(iii) Por linearidade, provar este item é equivalente a provar que  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ . Note que:

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle$$

e

$$\begin{aligned}[X, Y]\langle Z, Z \rangle &= \langle \nabla_{[X, Y]}Z, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Y]}Z, Z \rangle \\ &= 2\langle \nabla_{[X, Y]}Z, Z \rangle,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle = \langle \nabla_{[X, Y]}Z, Z \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z, Z \rangle \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Y]}Z, Z \rangle \\ &= Y\langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle - X\langle \nabla_Y Z, Z \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle + \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle \\ &= Y\langle \nabla_X Z, Z \rangle - X\langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2}Y(X\langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2}X(Y\langle Z, Z \rangle) + \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle \\ &= -\frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

(iv) Pelo item (i) temos

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle &= 0, \\ \langle R(Y, Z)W, X \rangle + \langle R(Z, W)Y, X \rangle + \langle R(W, Y)Z, X \rangle &= 0, \\ \langle R(Z, W)X, Y \rangle + \langle R(W, X)Z, Y \rangle + \langle R(X, Z)W, Y \rangle &= 0, \\ \langle R(W, X)Y, Z \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle + \langle R(Y, W)X, Z \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Utilizando as propriedades (ii) e (iii) e somando as equações acima temos:

$$2\langle R(Z, X)Y, W \rangle + 2\langle R(W, Y)Z, X \rangle = 0,$$

o que implica na seguinte igualdade:

$$\langle R(Z, X)Y, W \rangle = \langle R(Y, W)Z, X \rangle.$$

■

### 1.3.3 Curvatura Seccional

A partir do tensor curvatura é possível definir a curvatura seccional, uma outra entidade recorrente em Geometria. Para tanto, sendo  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana e  $p \in M^n$ , um plano tangente a  $M^n$  em  $p$  é um subespaço bi-dimensional do seu espaço tangente  $T_p M^n$ . Dados dois vetores tangentes  $x, y \in T_p M^n$  tais que geram um subespaço bi-dimensional de  $T_p M^n$ , definimos

$$Q(x, y) = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2,$$

que é uma forma quadrática simétrica não nula. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} Q(y, x) &= \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle^2 \\ &= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2, \end{aligned}$$

donde verificamos a simetria. Para mostrar que  $Q(x, y)$  é não nula considere a função multilinear  $F : T_p(M^n) \times T_p(M^n) \times T_p(M^n) \times T_p(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x, y, z, w) = \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle.$$

Note que  $F(x, y, x, y) = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 = Q(x, y)$ . Mostraremos que  $F$  é uma função tipo-curvatura, ou seja,  $F$  possui as seguintes propriedades:

- (i)  $F(x, y, z, w) = -F(y, x, z, w)$ .
- (ii)  $F(x, y, z, w) = -F(x, y, w, z)$ .
- (iii)  $F(x, y, z, w) = F(z, w, x, y)$ .
- (iv)  $F(x, y, z, w) + F(x, z, w, y) + F(x, w, y, z) = 0$ .

Uma função que cumpre tais propriedades é tal que: se  $F(x, y, x, y) = 0, \forall x, y \in T_p M^n$  tais que  $\{x, y\}$  gera um plano bi-dimensional não degenerado então  $F = 0$ . Assim, desde que  $F$  não é identicamente nula, basta mostrar que  $F$  é uma função tipo-curvatura que estaremos garantindo que  $Q(x, y) \neq 0$ . Os itens (i), (ii) e (iii) são bem imediatos. Com efeito, temos:

- (i)  $-F(y, x, z, w) = -\langle y, z \rangle \langle x, w \rangle + \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle = F(x, y, z, w)$ ,
- (ii)  $-F(x, y, w, z) = -\langle x, w \rangle \langle y, z \rangle + \langle y, w \rangle \langle x, z \rangle = F(x, y, z, w)$ ,
- (iii)  $F(z, w, x, y) = \langle z, x \rangle \langle w, y \rangle - \langle w, x \rangle \langle z, y \rangle = F(x, y, z, w)$ .



(iv) O item (iv) é a primeira identidade de Bianchi. Eis o cálculo explícito:

$$\begin{aligned}
F(x, y, z, w) + F(x, z, w, y) + F(x, w, y, z) &= \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle y, z \rangle \langle x, w \rangle \\
&\quad + \langle x, w \rangle \langle z, y \rangle - \langle z, w \rangle \langle x, y \rangle \\
&\quad + \langle x, y \rangle \langle w, z \rangle - \langle w, y \rangle \langle x, z \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, mostramos que  $F$  é uma função tipo-curvatura e, pelos argumentos anteriores, concluímos que  $Q(x, y)$  é não nula. Estamos em condições de entender a curvatura seccional. Para tanto, considere a seguinte:

**Proposição 1.39** *Sejam  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana,  $p \in M^n$ ,  $\sigma \subset T_p M^n$  um subespaço bi-dimensional não degenerado do espaço tangente  $T_p M^n$  e  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{Q(x, y)}$$

não depende da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$ .

Para uma demonstração da [Proposição 1.39](#) indicamos [24]. Podemos agora dar a definição de curvatura seccional como se segue.

**Definição 1.40** *Sob as hipóteses e condições da [Proposição 1.39](#), o valor real  $K(x, y) = K(\sigma)$  é chamado de **curvatura seccional** de  $\sigma$  em  $p$ , em que  $\{x, y\}$  é uma base qualquer de  $\sigma$ .*

Variiedades que possuem a curvatura seccional constante, além de serem os objetos de estudo desse trabalho, são de suma importância para o desenvolvimento da Geometria semi-Riemanniana. Destarte, a próxima proposição nos concede um modo de caracterizar tais variedades em função do seu tensor curvatura.

**Proposição 1.41** *Sejam  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana e  $p \in M^n$ . Para todo  $X, Y, W, Z \in T_p M^n$  defina a aplicação trilinear  $R' : T_p M^n \times T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow T_p M^n$  por*

$$\langle R'(X, Y)W, Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle.$$

Neste contexto,  $M^n$  tem curvatura seccional constante  $c$  se, e somente se,  $R = cR'$ , onde  $R$  é o tensor curvatura de  $M^n$ .

O leitor pode encontrar a demonstração da [Proposição 1.41](#) em [24].

### 1.3.4 Curvatura de Ricci, Omori-Yau e o Teorema de Bonnet-Myers

Continuando nossa discussão sobre tensores e curvaturas, apresentaremos, por fim, a curvatura de Ricci que é obtida através de combinações do tensor curvatura. Sem mais delongas exibimos a definição de curvatura de Ricci como segue:

**Definição 1.42** *Sejam  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana,  $p \in M^n$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal definido em torno de  $p$  e  $\varepsilon_k$  o sinal de  $e_k$ , com  $k = 1, \dots, n$ . Definimos a aplicação*

$$\begin{aligned} \text{Ric} : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) &\rightarrow C^\infty(M^n) \\ (X, Y) &\rightarrow \text{Ric}(X, Y) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \langle R(X, e_k)Y, e_k \rangle. \end{aligned}$$

Tal aplicação é o que chamamos de **curvatura de Ricci**. Em alguns casos, dado  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ , costuma-se denotar  $\text{Ric}(X, X)$  simplesmente por  $\text{Ric}(X)$ . Não é uma tarefa difícil verificar que a curvatura de Ricci é um tensor, chamado tensor de Ricci. Para os fins dessa dissertação usaremos a terminologia curvatura de Ricci.

Muitas vezes, informações sobre a curvatura de Ricci de uma variedade são de extrema importância para a obtenção de poderosos resultados em Geometria. Com o intuito de exemplificar tal afirmação, exibiremos dois resultados - no contexto da Geometria Riemanniana - extremamente famosos e de grande relevância para o decorrer deste trabalho. O primeiro deles é um resultado conhecido como Princípio do Máximo de Omori-Yau. Vejamos então a

**Proposição 1.43** *(Princípio do Máximo de Omori-Yau) Seja  $M^n$  uma Variedade Riemanniana completa  $n$ -dimensional cuja curvatura de Ricci é limitada por baixo e  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave satisfazendo  $\sup f < \infty$ . Então, existe uma sequência de pontos  $\{p_k\} \subset M^n$  tal que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ :*

$$f(p_k) > \sup f - \frac{1}{k}, |\nabla f(p_k)| < \frac{1}{k} \text{ e } \Delta f(p_k) < \frac{1}{k}.$$

Terminamos este capítulo apresentando um outro resultado profundo utilizando a curvatura de Ricci. O resultado a seguir é conhecido como o Teorema de Bonnet-Myers, o qual relaciona informações acerca da curvatura de Ricci de uma variedade com suas informações topológicas. Contemplemos o seguinte

**Teorema 1.44** *(Bonnet-Myers) Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana completa  $n$ -dimensional. Suponhamos que a curvatura de Ricci de  $M^n$  satisfaz*

$$\text{Ric}(v, v) \geq \frac{1}{r^2} > 0,$$

*para todo  $p \in M^n$  e todo  $v \in T_p M^n$ ,  $|v| = 1$ . Então  $\Sigma^n$  é compacta.*

Tanto a [Proposição 1.43](#) quanto o [Teorema 1.44](#) serão importantes ao longo dessa dissertação, tendo o papel indispensável na construção de outros resultados diretamente utilizados nas demonstrações do [Teorema 5.1](#) e do [Teorema 5.2](#). As demonstrações da [Proposição 1.43](#) e do [Teorema 1.44](#) fogem dos propósitos deste trabalho. Contudo, os leitores interessados podem encontrar a demonstração da [Proposição 1.43](#) no Capítulo 1, Seção 1.3, Subseção 1.3.1 em [\[23\]](#), enquanto que uma versão da prova do [Teorema 1.44](#) reside na Seção 3 do Capítulo IX em [\[12\]](#).

# Capítulo 2

## Imersões Isométricas

### 2.1 Segunda Forma Fundamental e as Equações de Gauss e Codazzi

Assim como no [Capítulo 1](#), este capítulo teve como base os livros do Manfredo [12] e do O’Neil [24], bem como o livro do Dajzer [10], o livro de Lympberopoulos e Couto [18] e o artigo escrito por Aquino, de Lima e Velásquez [4]. Para discutir os assuntos vindouros, precisaremos dos conceitos de subvariedades, imersões e mergulhos. Nada mais justo do que conceder ao leitor definições satisfatórias acerca de cada um desses assuntos. Para início de conversa, precisaremos dissertar acerca da aplicação diferencial de uma função entre variedades diferenciáveis. Considere então a seguinte definição.

**Definição 2.1** *Sejam  $M^n$  e  $\overline{M}^m$  variedades diferenciáveis,  $p \in M^n$ ,  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$  uma curva diferenciável tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ , onde  $v \in T_p M^n$ , e  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$  uma aplicação diferenciável. Definimos a aplicação **diferencial de  $f$**  como sendo a aplicação linear  $df_p : T_p M^n \rightarrow T_{f(p)} \overline{M}^m$  dada por  $df_p(v) = \beta'(0)$ , onde  $\beta = f \circ \alpha$ .*

Vejamos a definição de uma imersão:

**Definição 2.2** *Sejam  $M^n$  e  $\overline{M}^m$  variedades diferenciáveis de dimensão  $n$  e  $m$ , respectivamente. Dizemos que uma aplicação diferenciável  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$  é uma **imersão** se  $df_p : T_p M^n \rightarrow T_{f(p)} \overline{M}^m$  é injetiva para todo  $p \in M^n$ .*

Observe que se  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$  é uma imersão, então  $n \leq m$  e o valor  $m - n$  é chamado de codimensão de  $f$ . Quando a codimensão é igual a 1 (um), dizemos que  $M^n$  é uma **hipersuperfície** de  $\overline{M}^m$  e, neste caso,  $m = n + 1$ .

**Definição 2.3** Sob as mesmas condições da definição anterior, dizemos que a aplicação  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$  é um **mergulho**, se  $f$  é um homeomorfismo sobre  $f(M^n) \subset \overline{M}^m$ . Além disso, se  $M^n \subset \overline{M}^m$  e a inclusão  $i : M^n \hookrightarrow \overline{M}^m$  é um mergulho, dizemos que  $M^n$  é uma subvariedade de  $\overline{M}^m$ .

Por fim, definimos o conceito de imersão isométrica.

**Definição 2.4** Chamamos de **imersão isométrica** uma imersão  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ , entre duas variedades semi-Riemannianas  $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$  e  $(\overline{M}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}})$ , tal que:

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{\overline{M}},$$

para todo  $p \in M^n$  e para todo  $X, Y \in T_p M^n$ .

**Observação 2.1** No caso em que  $\overline{M}^m$  é uma variedade Lorentziana, dada uma imersão isométrica  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$  tal que a métrica induzida por tal imersão é Riemanniana, dizemos que  $f$  é uma **imersão tipo-espaço**.

**Proposição 2.5** Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ ,  $n \leq m$ , uma imersão da variedade  $M^n$  na variedade  $\overline{M}^m$ . Para todo ponto  $p \in M^n$  existe uma vizinhança  $V \subset M^n$  de  $p$  tal que a restrição a  $f|_V \rightarrow \overline{M}^m$  é um mergulho.

A **Proposição 2.5** nos diz que localmente toda imersão é um mergulho - uma demonstração dessa proposição pode ser encontrada no Capítulo 0 em [12]. Por conta desse resultado, costuma-se identificar  $V$  com  $f(V)$  de tal modo que, localmente,  $f$  é a aplicação inclusão. Dessa maneira, podemos considerar o espaço tangente de  $M^n$  em  $p$  como um subespaço do espaço tangente de  $\overline{M}^m$  em  $p$  de modo a obter

$$T_p \overline{M}^m = T_p M^n \oplus (T_p M^n)^\perp,$$

onde  $(T_p M^n)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M^n$ . Em verdade nós temos que

$$\mathfrak{X}(\overline{M}^m)|_{f(M)} = \mathfrak{X}(M^n) + \mathfrak{X}(M^n)^\perp,$$

onde  $\mathfrak{X}(M^n)^\perp$  é o conjunto de campos suaves normais ao longo de  $M^n$  e

$$\mathfrak{X}(\overline{M}^m)|_{f(M)} = \{X \in \mathfrak{X}(M^n); \pi(X) \in f(M^n),$$

onde  $\pi : \mathfrak{X}(\overline{M}^m) \rightarrow \overline{M}^m$  é a aplicação projeção}.

Considerando as projeções

$$()^\top : \mathfrak{X}(\overline{M}^m)|_{f(M)} \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$$

$$()^\perp : \mathfrak{X}(\overline{M}^m)|_{f(M)} \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)^\perp$$

chamadas, respectivamente, de projeção tangente (ou simplesmente parte tangente) e projeção normal (ou simplesmente parte normal) de  $\mathfrak{X}(\overline{M}^n) |_{f(M)}$ .

Até o fim desta seção, a menos que se diga o contrário,  $\overline{M}^{n+p}$  é uma variedade semi-Riemanniana de dimensão  $n + p$ ,  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana de  $n$ -dimensional,  $\overline{\nabla}, \nabla$  as conexões de Levi-Civita de  $\overline{M}^{n+p}$  e  $M^n$ , respectivamente, e  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+p}$  uma imersão isométrica entre  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+p}$ . Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$  podemos escrever:

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Desde que, a conexão proveniente do Teorema de Levi-Civita é única, temos que  $\overline{\nabla}^\top = \nabla$ , uma vez que é possível mostrar que  $\overline{\nabla}^\top$  é uma conexão de  $M^n$  simétrica e compatível com a métrica. Obtemos, então, a importantíssima **fórmula de Gauss**

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$  é chamada segunda forma fundamental. Mais precisamente temos a seguinte

**Definição 2.6** *Definimos por segunda forma fundamental de  $M^n$  a aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) &\rightarrow \mathfrak{X}(M^n)^\perp \\ (X, Y) &\rightarrow \alpha(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp. \end{aligned}$$

Perceba que, por (2.1), podemos escrever  $\alpha(X, Y)$  como  $\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ . Desta última igualdade não é difícil perceber que a aplicação  $\alpha$  é simétrica e bilinear sobre o anel  $C^\infty(M)$ . De fato, dados  $X, Y, W \in \mathfrak{X}(M^n)$  e  $g \in C^\infty(M^n)$  temos que

$$\begin{aligned} \alpha(Y, X) &= \overline{\nabla}_Y X - \nabla_Y X \\ &= \overline{\nabla}_X Y + \overline{[Y, X]} - \nabla_X Y - [Y, X] \\ &= \overline{\nabla}_X Y + [Y, X] - \nabla_X Y - [Y, X] \\ &= \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \\ &= \alpha(X, Y), \end{aligned}$$

o que prova a simetria. Provaremos a linearidade para o primeiro argumento da aplicação  $\alpha$  e, pela simetria, concluímos a bilinearidade. Para tanto, usando as propriedades da conexão, veja

que:

$$\begin{aligned}
\alpha(gX + W, Y) &= \bar{\nabla}_{gX+W}Y - \nabla_{gX+W}Y \\
&= g\bar{\nabla}_X Y + \bar{\nabla}_W Y - g\nabla_X Y - \nabla_W Y \\
&= g(\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y) + \bar{\nabla}_W Y - \nabla_W Y \\
&= g\alpha(X, Y) + \alpha(W, Y).
\end{aligned}$$

A próxima definição traz a tona o conceito de operador de Weingarten ou operador de forma que, por um abuso de linguagem, por vezes, também é chamado de segunda forma fundamental por possuir uma íntima relação com a mesma, relação esta que será apresentada em breve. Por hora, considere a definição abaixo.

**Definição 2.7** Definimos o *operador de Weingarten* de  $M^n$  como sendo a aplicação

$$\begin{aligned}
A : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n)^\perp &\rightarrow \mathfrak{X}(M^n) \\
(X, \xi) &\rightarrow A(X, \xi) := A_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top.
\end{aligned}$$

Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$  e  $\xi \in \mathfrak{X}(M^n)^\perp$ , usando a fórmula de gauss, podemos obter a relação, anteriormente mencionada, entre o operador de forma e a segunda forma fundamental. Um simples e instrutivo exercício ao leitor é, a partir de tal relação explicitada abaixo, verificar que o operador de Weingarten é bilinear. Como já não é sem tempo, eis o cálculo explícito:

$$\begin{aligned}
0 &= X\langle Y, \xi \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, \xi \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X \xi \rangle \\
&= \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle + \langle Y, (\bar{\nabla}_X \xi)^\top \rangle \Leftrightarrow \\
\langle A_\xi X, Y \rangle &= \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Dados  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$  e  $\xi \in \mathfrak{X}(M^n)^\perp$ , denotamos por  $\nabla_X^\perp \xi$  a componente normal de  $\bar{\nabla}_X \xi$ . Deste modo obtemos a **fórmula de Weingarten**:

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi. \tag{2.3}$$

Podemos, enfim, Apresentar as equações de Gauss e Codazzi que serão de grande utilidade ao longo de toda a dissertação.

**Proposição 2.8** (*Equação de Gauss*) Seja  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana, dados  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M^n)$ , tem-se

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle, \tag{2.4}$$

onde  $\bar{R}$  denota o tensor curvatura de  $\bar{M}^{n+p}$ .

**Demonstração.** Para esta demonstração usaremos as fórmulas de Gauss (2.1) e weingarten (2.3) para determinar o tensor curvatura  $\bar{R}(X, Y)Z$ . Vamos às contas:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\
&= \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \alpha(X, Z)) - \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) + \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z) \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X, Z)} Y + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) - \nabla_X \nabla_Y Z - \alpha(X, \nabla_Y Z) \\
&\quad + A_{\alpha(Y, Z)} X - \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z) \\
&= R(X, Y)Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X, Z)} Y + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) \\
&\quad - \alpha(X, \nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y, Z)} X - \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + \alpha([X, Y], Z). \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Desde que  $\alpha(Y, \nabla_X Z), \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z), \alpha(X, \nabla_Y Z), \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z), \alpha([X, Y], Z) \in \mathfrak{X}(M^n)^\perp$ , temos

- (i)  $\langle \alpha(Y, \nabla_X Z), W \rangle = 0$ ;
- (ii)  $\langle \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z), W \rangle = 0$ ;
- (iii)  $\langle \alpha(X, \nabla_Y Z), W \rangle = 0$ ;
- (iv)  $\langle \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z), W \rangle = 0$ ;
- (v)  $\langle \alpha([X, Y], Z), W \rangle = 0$ .

Destarte, obtemos

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle A_{\alpha(X, Z)} Y, W \rangle + \langle A_{\alpha(Y, Z)} X, W \rangle.$$

Pela relação apresentada em (2.2), concluímos que

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \alpha(Y, W), \alpha(X, Z) \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle,$$

donde obtemos, como desejado, a equação de Gauss dada por

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle.$$

■

**Proposição 2.9** (Equação de Codazzi) *Seja  $M^n$  uma variedade semi-Riemanniana, dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , tem-se*

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_Y^\perp) \alpha(X, Z) - (\nabla_X^\perp) \alpha(Y, Z), \tag{2.6}$$

onde, por definição,  $(\nabla_X^\perp) \alpha(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$ .



**Demonstração.** Analogamente à demonstração da equação de Gauss, temos, por (2.5),

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X, Z)}Y + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) \\ &\quad - \alpha(X, \nabla_Y Z) + A_{\alpha(Y, Z)}X - \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + \alpha([X, Y], Z).\end{aligned}$$

Desde que  $R(X, Y)Z, A_{\alpha(X, Z)}Y, A_{\alpha(Y, Z)}X \in \mathfrak{X}(M^n)$ , dado  $\xi \in \mathfrak{X}(M^n)^\perp$  temos

$$(i) \quad \langle R(X, Y)Z, \xi \rangle = 0;$$

$$(ii) \quad \langle A_{\alpha(X, Z)}Y, \xi \rangle = 0;$$

$$(iii) \quad \langle A_{\alpha(Y, Z)}X, \xi \rangle = 0.$$

Além disso, escrevendo  $\bar{R}(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp$ , tem-se

$$\langle (\bar{R}(X, Y)Z)^\top, \xi \rangle = 0,$$

de modo que,

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \xi \rangle = \langle (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp, \xi \rangle.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\langle (\bar{R}(X, Y)Z)^\perp, \xi \rangle &= \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), \xi \rangle + \langle \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z), \xi \rangle - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), \xi \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z), \xi \rangle + \langle \alpha([X, Y], Z), \xi \rangle \\ &= \langle \alpha(Y, \nabla_X Z), \xi \rangle + \langle \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z), \xi \rangle - \langle \alpha(X, \nabla_Y Z), \xi \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z), \xi \rangle + \langle \alpha(\nabla_X Y, Z), \xi \rangle - \langle \alpha(\nabla_Y X, Z), \xi \rangle \\ &= \langle \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z), \xi \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z), \xi \rangle \\ &= \langle (\nabla_Y^\perp) \alpha(X, Z) - (\nabla_X^\perp) \alpha(Y, Z), \xi \rangle.\end{aligned}$$

Devido a arbitrariedade de  $\xi \in \mathfrak{X}(M^n)^\perp$ , obtemos o desejado, isto é:

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_Y^\perp) \alpha(X, Z) - (\nabla_X^\perp) \alpha(Y, Z).$$

■

## 2.2 Hipersuperfícies

Passaremos a tratar agora das hipersuperfícies, mostrando como as fórmulas vistas acima se expressam de maneira mais simples e, por vezes, mais elegante, além de introduzir o conceito de curvatura média. Para tanto, considere  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície imersa em uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$ , de tal forma que existe um campo de vetores normal unitário  $N$  definido globalmente sobre  $\Sigma^n$ . Denotaremos por  $\varepsilon_N = \langle N, N \rangle = \pm 1$ .

Por (2.2), temos que  $\langle A_N X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), N \rangle$  para  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , donde

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_N \langle A_N X, Y \rangle N, N \rangle &= \varepsilon_N \langle A_N X, Y \rangle \langle N, N \rangle \\ &= \varepsilon_N^2 \langle A_N X, Y \rangle \\ &= \langle A_N X, Y \rangle \\ &= \langle \alpha(X, Y), N \rangle, \end{aligned}$$

desse modo, tem-se  $\alpha(X, Y) = \varepsilon_N \langle A_N X, Y \rangle N$ , onde  $A_N X = -(\overline{\nabla}_X N)^\top$ . Como visto anteriormente, podemos escrever  $\overline{\nabla}_X N = (\nabla_X N)^\top + (\nabla_X N)^\perp$ , entretanto temos  $(\nabla_X N)^\perp = 0$ . Com efeito, sendo  $\langle N, N \rangle = \pm 1$ , dado  $X \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ , tem-se

$$0 = X \langle N, N \rangle = 2 \langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle.$$

Dessa maneira,  $\langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_N \langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle N \\ &= \varepsilon_N \langle (\nabla_X N)^\top, N \rangle N + \varepsilon \langle (\nabla_X N)^\perp, N \rangle N \\ &= \varepsilon_N \langle (\nabla_X N)^\perp, N \rangle N \\ &= (\nabla_X N)^\perp. \end{aligned}$$

Destarte, para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , as fórmulas de Gauss (2.1) e Weingarten (2.3) se exprimem, respectivamente, mediante as seguintes igualdades:

$$(i) \quad \overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon_N \langle A_N X, Y \rangle N,$$

$$(ii) \quad \overline{\nabla}_X N = -A_N X.$$

Mostraremos ainda a equação de Gauss (2.4) e a equação de Codazzi (2.6) no contexto de hipersuperfícies e no contexto em que o espaço ambiente possui curvatura seccional constante. Continuaremos a utilizar as mesmas notações do início do capítulo. Nesse espírito, dados

$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  e  $N \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)^\perp$ , a equação de Gauss se apresenta como segue

$$(\overline{R}(X, Y)Z)^\top = R(X, Y)Z + \varepsilon_N \langle A_N Y, Z \rangle A_N X - \varepsilon_N \langle A_N X, Z \rangle A_N Y.$$

Supondo que  $\overline{M}^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $c$ , pela [Proposição 1.41](#) temos que  $\overline{R}(X, Y)Z = c\langle X, Z \rangle Y - c\langle Y, Z \rangle X$ , logo encontramos que, sob tais condições, a equação de Gauss é dada pela identidade a seguir.

$$R(X, Y)Z = c\langle X, Z \rangle Y - c\langle Y, Z \rangle X + \varepsilon_N \langle A_N X, Z \rangle A_N Y - \varepsilon_N \langle A_N Y, Z \rangle A_N X.$$

Quanto a equação de Codazzi, dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ , ela passa a assumir a seguinte expressão:

$$(\overline{R}(X, Y)Z)^\perp = \varepsilon_N \langle (\nabla A)(X, Y) - (\nabla A)(Y, X), Z \rangle N,$$

onde  $(\nabla A)(X, Y) = \nabla_X A_N Y - A_N \nabla_X Y$ .

Supondo novamente que  $\overline{M}^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $c$ , ainda pela [Proposição 1.41](#) temos que  $\overline{R}(X, Y)Z = c\langle X, Z \rangle Y - c\langle Y, Z \rangle X$ . Tomando a parte normal de  $\overline{R}(X, Y)Z$ , temos que  $(\overline{R}(X, Y)Z)^\perp = 0$ , logo encontramos que, sob tais condições, a equação de Codazzi é expressa na sua forma mais simples como segue

$$(\nabla A)(X, Y) = (\nabla A)(Y, X).$$

Por fim, daremos uma definição da função curvatura média de uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  com o propósito de usá-la em um futuro breve. Eis o prometido:

**Definição 2.10** *Seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade semi-Riemanniana e considere uma hipersuperfície  $f : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ . Definimos a função **curvatura média** da hipersuperfície  $\Sigma^n$ , com respeito a  $N \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)^\perp$ , denotada por  $H$ , como sendo  $H : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$H(p) = \frac{1}{n} \text{tr}(A_N).$$

Naturalmente, dizemos que  $\Sigma^n$  possui curvatura média constante quando a função curvatura média  $H$  for constante para todo  $p \in \Sigma^n$ . Por simplicidade, quando não houver risco de confusão, escreveremos  $H(p)$  apenas como  $H$ .

Para o que segue, a menos de menção contrária, até o fim dessa seção iremos considerar  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Lorentziana e  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície de  $\overline{M}^{n+1}$ .

**Definição 2.11** *Seja  $f : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica, onde  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície tipo-espaço de  $\overline{M}^{n+1}$ . Dizemos que esta imersão é **máxima** no ponto  $p \in \Sigma^n$  quando  $H(p) = 0$ . Dizemos que  $f$  é **uma imersão máxima** quando for máxima em todo ponto de  $\Sigma^n$ .*

Um caso particular bem interessante ocorre quando a segunda forma fundamental é identicamente nula. Temos, neste caso que as geodésicas de  $\Sigma^n$  também são geodésicas de  $\overline{M}^{n+1}$ . Ante a isso, temos a seguinte definição:

**Definição 2.12** Dizemos que uma imersão isométrica  $f : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é **totalmente geodésica** no ponto  $p \in \Sigma^n$  quando a segunda forma fundamental é identicamente nula em  $p \in \Sigma^n$ . Dizemos que  $f$  é uma imersão **totalmente geodésica** quando for totalmente geodésica em todo ponto de  $\Sigma^n$ .

Por fim, dissertaremos um pouco acerca do conceito de umbilicidade.

**Definição 2.13** Dizemos que uma imersão isométrica  $f : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é **umbílica** no ponto  $p \in \Sigma^n$  quando  $A_N = \lambda_N I$  para todo  $N \in (T_p \Sigma^n)^\perp$ , onde  $A$  é o operador de Weingarten de  $\Sigma^n$ ,  $\lambda_N : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $I$  denota o operador identidade de  $T_p \Sigma^n$ . Dizemos que  $f$  é uma imersão **umbílica** quando for umbílica em todo ponto de  $\Sigma^n$ .

Por simplicidade, iremos expressar o operador de weingarten apenas por  $A$  ao invés de  $A_N$  e  $\lambda_N$  por  $\lambda$ , onde  $N \in (T_p \Sigma^n)^\perp$ .

**Definição 2.14** Sejam  $f : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma hipersuperfície em uma variedade semi-Riemanniana  $\overline{M}^{n+1}$ ,  $A$  e  $H$ , respectivamente, o operador de Weingarten e a curvatura média de  $\Sigma^n$ , definimos o **operador de umbilicidade**, denotado por  $\phi$ , como sendo o operador dado por

$$\phi := A - HI.$$

Perceba que, do modo como foi definido, o operador de umbilicidade  $\phi$  é um operador auto-adjunto. Mostraremos um resultado de grande utilidade futura para nossos propósitos. Em verdade, a proposição a seguir explicita o motivo de chamarmos o operador  $\phi$  de operador de umbilicidade.

**Proposição 2.15** Sejam  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Lorentziana e  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço de  $\overline{M}^{n+1}$ . Então  $\Sigma^n$  é umbílica se, e somente se, o operador de umbilicidade é identicamente nulo.

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Sendo  $\Sigma^n$  umbílica, para todo  $p \in \Sigma^n$  existe  $\lambda : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $A = \lambda I$ . desse modo, tem-se que

$$\begin{aligned} \phi &= A - HI \\ &= \lambda I - \frac{1}{n} \text{tr}(\lambda I) I \\ &= \lambda I - \frac{1}{n} n \lambda I \\ &= \lambda I - \lambda I \\ &= 0. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Desde que  $\phi(p) = 0$ , para todo  $p \in \Sigma^n$ , temos que  $A = HI$ , para todo  $p \in \Sigma^n$ , donde, por definição,  $\Sigma^n$  é umbílica. ■

Para o que segue, se  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear auto-adjunto em um espaço vetorial real de dimensão finita e com produto interno, denotamos  $|T|^2 = \text{tr}(T^2)$ . Desse modo, sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal de  $V$ , segue

$$|T|^2 = \sum_i \langle T(e_i), T(e_i) \rangle = \sum_i |T(e_i)|^2.$$

**Proposição 2.16** *No contexto da Proposição 2.15, o operador de umbilicidade  $\phi$  é um operador sem traço, isto é,  $\text{tr}(\phi) = 0$ . Além disso, vale a seguinte identidade  $|\phi|^2 = |A|^2 - nH^2$ .*

**Demonstração.** De fato este é um operador sem traço, com efeito:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\phi) &= \text{tr}(A - HI) \\ &= \text{tr}(A) - \text{tr}(HI) \\ &= \text{tr}(A) - nH \\ &= \text{tr}(A) - n \frac{\text{tr}(A)}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por fim calculemos o valor de  $|\phi|^2$ . dado  $p \in \Sigma^n$  e um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p \Sigma^n$  temos:

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= \sum_i \langle A(e_i) - HI(e_i), A(e_i) - HI(e_i) \rangle \\ &= \sum_i \langle A(e_i), A(e_i) \rangle - 2 \sum_i \langle A(e_i), HI(e_i) \rangle + \sum_i \langle HI(e_i), HI(e_i) \rangle \\ &= |A|^2 - 2H \sum_i \langle A(e_i), I(e_i) \rangle + H^2 |I|^2 \\ &= |A|^2 - 2H \text{tr}(A) + nH^2 \\ &= |A|^2 - 2nH^2 + nH^2 \\ &= |A|^2 - nH^2. \end{aligned}$$

■

## 2.3 Espaços de Forma Lorentzianos

Como parte primordial dessa dissertação, precisaremos da noção dos espaços de forma Lorentzianos, os quais serão as variedades ambientes das hipersuperfícies que iremos abordar nos resultados principais. Outrora definimos neste capítulo a noção de curvatura seccional e estabelecemos uma relação entre o tensor curvatura e curvatura seccional constante. A importância de se considerar variedades semi-Riemannianas de curvatura seccional constante revela-se, dentre tantas outras situações, na seguinte definição:

**Definição 2.17** *Definimos um espaço de forma como sendo uma variedade semi-Riemanniana  $M^n$  simplesmente conexa com curvatura seccional constante.*

Na definição acima,  $M^n$  ser simplesmente conexa significa dizer que  $M^n$  é conexa por caminhos e, em adição, que todo caminho fechado simples pode ser deformado continuamente até um ponto (Para mais detalhes veja Lima [17]). Seguimos com um estudo - necessário e suficiente ao leitor deste trabalho - de cada um dos três espaços de forma Lorentzianos abordados nesta dissertação, os quais são denominados de espaço de Lorentz-Minkowski, espaço de de Sitter e o espaço anti-de Sitter. Sem mais delongas, começaremos pelo espaço de Lorentz-Minkowski.

### 2.3.1 O Espaço de Lorentz-Minkowski

**Definição 2.18** *Definimos o espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão  $n + 1$ , denotado por  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ , como sendo o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  munido com a seguinte métrica*

$$\langle x, x \rangle_1 = -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2,$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Denotaremos por  $\bar{R}$ ,  $\bar{\nabla}$ ,  $\bar{\text{Ric}}$  e  $\bar{K}$  o tensor curvatura, a conexão de Levi-Civita, a curvatura de Ricci e a curvatura seccional de  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ , respectivamente. Calculemos então o seu tensor curvatura para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_1^{n+1})$ . Indicando  $Z = (z_1, \dots, z_n)$  as componentes do campo  $Z$  obtemos

$$\bar{\nabla}_X Z = (X z_1, \dots, X z_n),$$

$$\bar{\nabla}_Y Z = (Y z_1, \dots, Y z_n),$$

$$\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z = (Y X z_1, \dots, Y X z_n)$$

e

$$\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z = (XY z_1, \dots, XY z_n).$$

Pela simetria da conexão, temos ainda que

$$\bar{\nabla}_{[X,Y]} Z = (XY z_1 - YX z_1, \dots, XY z_n - YX z_n),$$

desse modo, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z \\ &= (YX z_1, \dots, YX z_n) - (XY z_1, \dots, XY z_n) \\ &\quad + (XY z_1 - YX z_1, \dots, XY z_n - YX z_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, vemos que o tensor curvatura de  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  é identicamente nulo. Como a curvatura de Ricci e a curvatura seccional dependem vitalmente do tensor curvatura, temos que

$$\bar{\text{Ric}} = 0 \text{ e } \bar{K} = 0.$$

Desde que  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  é simplesmente conexo, vemos que o espaço de Lorentz-Minkowski é um espaço de forma Lorentziano com curvatura seccional constante igual a 0 (zero). Em verdade, podemos definir o seguinte espaço semi-Euclidiano  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  como escrito na definição abaixo.

**Definição 2.19** *Definimos o espaço **semi-Euclidiano**  $n+1$ -dimensional de índice  $\nu$ , denotado por  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ , com  $\nu \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ , como sendo o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  munido da seguinte métrica*

$$\langle x, x \rangle_\nu = - \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} x_i^2,$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Note que quando  $\nu = 0$ , esse espaço semi-Euclidiano torna-se o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  e quando  $\nu = 1$ , tal espaço semi-Euclidiano se resume ao espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ . Com o mesmo procedimento feito para o espaço de Lorentz-Minkowski é possível constatar que o espaço semi-Euclidiano  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  possui o tensor curvatura identicamente nulo, o que implica no fato de que a curvatura de Ricci e a curvatura seccional de  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  também são identicamente nulas.

Abordaremos um pouco sobre quais são os tipos de vetores encontrados em um espaço semi-Euclidiano  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ . Façamos então a seguinte definição:

**Definição 2.20** (*Caráter Causal de um vetor*) Dizemos que um vetor  $x \in \mathbb{R}_\nu^{n+1}$  é

(i) tipo-espaço se  $\langle x, x \rangle_\nu > 0$  ou  $x = 0$ ;

(ii) tipo-tempo se  $\langle x, x \rangle_\nu < 0$ ;

(iii) tipo-luz se  $\langle x, x \rangle_\nu = 0$ , com  $x \neq 0$ .

Em todo caso, sendo  $x \in \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ , a norma de  $x$ , denotada por  $\|x\|_\nu$ , é dada por

$$\|x\|_\nu = \sqrt{|\langle x, x \rangle_\nu|}.$$

Ressaltamos que cada vetor de  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  possui apenas um tipo de caráter causal. Neste sentido, é possível classificar as hipersuperfícies de um espaço semi-Euclidiano  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$  como segue:

Dadas as devidas definições, falaremos acerca de hipersuperfícies tipo-espaço no espaço de Lorentz-Minkowski. Seja  $f : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$  uma imersão tipo-espaço no espaço de Lorentz-Minkowski. Denotemos por  $\bar{R}$  e  $R^f$  os tensores curvatura de  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  e  $\Sigma^n$ , respectivamente. Seguindo nesse contexto denotaremos ainda por  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla^f$  as conexões de Levi-Civita de  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  e  $\Sigma^n$ , nesta ordem. Considerando o campo normal unitário  $N^f$  globalmente definido de  $\Sigma^n$  em  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  de tal modo que  $\langle N^f, N^f \rangle = -1$ .

Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Usando a fórmula de Gauss, obtemos:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon \langle A_{N^f} X, Y \rangle N^f = \nabla_X Y - \langle A_{N^f} X, Y \rangle N^f.$$

Utilizando a fórmula de Weingarten, vemos que  $A_{N^f} = -\nabla_X N^f$ , com  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Passaremos a determinar as equações de Gauss e Codazzi para a hipersuperfície  $\Sigma^n$ . Dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , desde que  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a 0, então pela [Proposição 1.41](#) temos  $\bar{R}(X, Y)Z = 0$ . Utilizando a equação de Gauss para hipersuperfície, obtemos:

$$R^f(X, Y)Z = -\langle A_{N^f} X, Z \rangle A_{N^f} Y + \langle A_{N^f} Y, Z \rangle A_{N^f} X,$$

enquanto que a equação de Codazzi permanece como

$$(\nabla A)(X, Y) = (\nabla A)(Y, X).$$

Encontraremos uma expressão para a curvatura de Ricci da hipersuperfície  $\Sigma^n$ . A partir de agora escreveremos  $AX$  para denotar  $A_{N^f} X$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Como  $\Sigma^n$  é tipo-espaço observamos que, dada uma base ortonormal local  $\{E_1, \dots, E_n\}$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  temos

$$\text{Ric}(X, Y)^f = \sum_{i=1}^n \langle R^f(X, E_i)Y, E_i \rangle,$$



onde  $\text{Ric}(\cdot, \cdot)^f$  denota a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n$ . Entretanto, sabemos que

$$R^f(X, E_i)Y = -\langle AX, Y \rangle AE_i + \langle AE_i, Y \rangle AX.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y)^f &= \sum_{i=1}^n \langle R^f(X, E_i)Y, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle -\langle AX, Y \rangle AE_i + \langle AE_i, Y \rangle AX, E_i \rangle \\ &= -\langle AX, Y \rangle \text{tr}(A) + \langle AX, AY \rangle \\ &= -nH \langle AX, Y \rangle + \langle AX, AY \rangle. \end{aligned}$$

**Exemplo 7** (O cilindro hiperbólico  $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(r)$ ) O Cilindro Hiperbólico  $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(r)$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ . Estamos interessados em investigar o campo normal unitário dessa hipersuperfície. Desde que  $\eta = \frac{x}{r}$ , com  $x \in \mathbb{H}^n(r)$ , define um campo normal na hipersuperfície  $\mathbb{H}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é razoável escolher  $N = \left(0, \frac{-x}{r}\right)$  como o campo normal unitário de  $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(r)$ . Mostraremos que de fato isso é verdade. Note inicialmente que:

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= \langle 0, 0 \rangle_{\mathbb{R}} + \left\langle \frac{-x}{r}, \frac{-x}{r} \right\rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= \frac{1}{r^2} \langle x, x \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= \frac{-r^2}{r^2} = -1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por outro lado, sendo  $X = (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(r))$  obtemos:

$$\begin{aligned} \langle N, X \rangle &= \langle 0, x_1 \rangle_{\mathbb{R}} + \left\langle \frac{-1}{r} x, x_2 \right\rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= \frac{-1}{r} \langle x, x_2 \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Diante de (2.7) e (2.8) vemos que, de fato,  $N = \left(0, \frac{-x}{r}\right)$  define um campo normal unitário sobre  $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(r)$ . Como  $AX = -\nabla_X N$ , podemos representar  $A$  em sua forma matricial pela seguinte matriz em bloco:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \frac{1}{r} I_{\mathbb{H}(r)} \end{bmatrix},$$



em que  $I_{\mathbb{H}(r)}$  é o operador identidade de  $\mathbb{H}^{n-p}(r)$ . Assim, não é difícil determinar os autovalores de  $A$  que, nesse contexto, são chamados de curvaturas principais, as quais são dadas por:

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0 \text{ e } \lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{r}.$$

Para finalizar este exemplo, calcularemos os valores de  $|A|^2$ ,  $H$  e  $|\phi|^2$ . Por definição, tem-se

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{ e } H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

donde encontramos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2 \\ &= \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{n-p}{r^2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

e

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=p+1}^n \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{n-p}{nr}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por (2.11), (2.12) e a [Proposição 2.16](#) podemos encontrar uma expressão para  $|\phi|^2$  como segue:

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= |A|^2 - nH^2 \\ &= \frac{n-p}{r^2} - \frac{n(n-p)^2}{n^2 r^2} \\ &= \frac{n(n-p) - (n-p)^2}{nr^2} \\ &= \frac{(n-p)(n - (n-p))}{nr^2} \\ &= \frac{p(n-p)}{nr^2}. \end{aligned}$$

### 2.3.2 O Espaço de de Sitter

**Definição 2.21** Definimos o **espaço de de Sitter** de dimensão  $n+1$ , denotado por  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , como sendo

$$\mathbb{S}_1^{n+1} := \{x \in \mathbb{R}_1^{n+2}; \langle x, x \rangle_1 = 1\} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}.$$

Tomaremos o campo normal unitário global  $N$  definido sobre  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , dado por  $N = x$ , em que  $x \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ . Assim temos que  $\langle N, N \rangle_1 = 1$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$ , podemos escrever:

$$A_N X = -\bar{\nabla}_X N = -\bar{\nabla}_X x = -X.$$

Desde que  $\bar{R} = 0$ , com a igualdade acima podemos calcular o tensor curvatura de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ , através da equação de Gauss, como sendo

$$R(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle(Y) - \langle Y, Z \rangle(X),$$

onde, pela [Proposição 1.41](#),  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a 1 (um). Doravante, da forma como foi definido e exposto, é possível concluir que o espaço de de Sitter é uma hipersuperfície completa simplesmente conexa do espaço de Lorentz-Minkowski de tal modo que sua curvatura seccional é constante igual a 1 sendo, portanto, um espaço de forma Lorentziano.

Passaremos a falar um pouco sobre hipersuperfícies tipo-espaço no espaço de de Sitter. Seja  $g : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  uma imersão tipo-espaço no espaço de de Sitter. Denotemos por  $\bar{R}, R$  e  $R^g$  os tensores curvatura de  $\mathbb{R}_1^{n+2}, \mathbb{S}_1^{n+1}$  e  $\Sigma^n$ , respectivamente. Seguindo nesse contexto denotaremos ainda por  $\bar{\nabla}, \nabla$  e  $\nabla^g$  as conexões de Levi-Civita de  $\mathbb{R}_1^{n+2}, \mathbb{S}_1^{n+1}$  e  $\Sigma^n$ , nesta ordem. Admitimos um campo normal unitário global  $N^g$  de  $\Sigma^n$  em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  de tal modo que  $\langle N^g, N^g \rangle = -1$

Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , usando a fórmula de Gauss, temos:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon \langle A_{N^g} X, Y \rangle N^g = \nabla_X Y - \langle X, Y \rangle x. \quad (2.13)$$

Por outro lado, usando novamente a fórmula de Gauss obtemos:

$$\nabla_X Y = \nabla_X^g Y + \varepsilon \langle A_{N^g} X, Y \rangle N^g = \nabla_X^g Y - \langle A_{N^g} X, Y \rangle N^g. \quad (2.14)$$

De (2.13) e (2.14) tem-se

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X^g Y - \langle A_{N^g} X, Y \rangle N^g - \langle X, Y \rangle x. \quad (2.15)$$

Não obstante, pela fórmula de Weingarten, tem-se que  $A_{N^g} X = -\nabla_X N^g$ , com  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Desse modo, temos que

$$\bar{\nabla}_X N^g = \nabla_X N^g - \langle X, N^g \rangle x = \nabla_X N^g = -A_{N^g} X.$$

Determinemos as equações de Gauss e Codazzi para a hipersuperfície  $\Sigma^n$ . Dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , desde que  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a 1, então

$R(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X$ . Utilizando a equação de Gauss para hipersuperfície, encontramos:

$$R^g(X, Y)Z = \langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X - \langle A_{N^g} X, Z \rangle A_{N^g} Y + \langle A_{N^g} Y, Z \rangle A_{N^g} X,$$

enquanto que a equação de Codazzi permanece como visto anteriormente, ou seja,

$$(\nabla A)(X, Y) = (\nabla A)(Y, X).$$

Encerraremos essa subseção com uma expressão para a curvatura de Ricci da hipersuperfície  $\Sigma^n$  e dois exemplos de hipersuperfícies tipo-espaço em  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Escreveremos  $AX$  para denotar  $A_{N^g} X$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Como  $\Sigma^n$  é tipo-espaço observamos que, dado um referencial ortonormal local  $\{E_1, \dots, E_n\}$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  temos

$$\text{Ric}(X, Y)^g = \sum_{i=1}^n \langle R^g(X, E_i)Y, E_i \rangle,$$

onde  $\text{Ric}(\cdot, \cdot)^g$  denota a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n$ . Entretanto, sabemos da equação de Gauss que

$$R^g(X, E_i)Y = \langle X, Y \rangle E_i - \langle E_i, Y \rangle X - \langle AX, Y \rangle AE_i + \langle AE_i, Y \rangle AX.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y)^g &= \sum_{i=1}^n \langle R^g(X, E_i)Y, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \langle X, Y \rangle E_i - \langle E_i, Y \rangle X - \langle AX, Y \rangle AE_i + \langle AE_i, Y \rangle AX, E_i \rangle \\ &= n\langle X, Y \rangle - \langle X, Y \rangle - \langle AX, Y \rangle \text{tr}(A) + \langle AX, Y \rangle \\ &= (n-1)\langle X, Y \rangle - nH\langle AX, Y \rangle + \langle AX, AY \rangle. \end{aligned}$$

**Exemplo 9** (*O Cilindro Hiperbólico  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$ ) O cilindro hiperbólico  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . Calculemos o seu campo normal. Para tanto, precisamos ter um campo normal da forma  $N = (ax_1, bx_2)$  com  $\langle N, N \rangle = -1$  e com  $\langle N, X \rangle = 0$ , onde  $X = (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r))$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Desde que  $\langle N, N \rangle = -1$ , deemos ter:*

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= \langle ax_1, ax_1 \rangle_{\mathbb{S}(\sqrt{1+r^2})} + \langle bx_2, bx_2 \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= a^2 \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{S}(\sqrt{1+r^2})} + b^2 \langle x_2, x_2 \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= a^2(1+r^2) - b^2r^2 = -1. \end{aligned}$$

Por outro lado, ao requerer  $\langle N, X \rangle = 0$  obtemos:

$$\begin{aligned}\langle N, X \rangle &= \langle ax_1, x_1 \rangle_{\mathbb{S}(\sqrt{1+r^2})} + \langle bx_2, x_2 \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= a \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{S}(\sqrt{1+r^2})} + b \langle x_2, x_2 \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= a(1+r^2) - br^2 = 0.\end{aligned}$$

Em seguida, resolvendo o seguinte sistema

$$\begin{cases} a^2(1+r^2) - b^2r^2 = -1 \\ a(1+r^2) - br^2 = 0 \end{cases},$$

encontramos, a menos de mudança de sinal,  $a = \frac{-r}{\sqrt{1+r^2}}$  e  $b = \frac{-\sqrt{1+r^2}}{r}$ , donde

$$N = \left( \frac{-r}{\sqrt{1+r^2}}x_1, \frac{-\sqrt{1+r^2}}{r}x_2 \right).$$

Como  $AX = -\nabla_X N$ , podemos representar  $A$  em sua forma matricial pela seguinte matriz em bloco:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}I_{\mathbb{S}(\sqrt{1+r^2})} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}I_{\mathbb{H}(r)} \end{bmatrix},$$

onde  $I_{\mathbb{S}(\sqrt{1+r^2})}$  representa o operador identidade de  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2})$  e  $I_{\mathbb{H}(r)}$  o operador identidade de  $\mathbb{H}^p(r)$ . Assim, não é difícil perceber que tal matriz é diagonal, o que torna uma tarefa fácil determinar os seus autovalores que, nesse contexto, são chamados de curvaturas principais, as quais são dadas por:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-p} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \text{ e } \lambda_{n-p+1} = \dots = \lambda_n = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}.$$

Para finalizar este exemplo, calcularemos os valores de  $|A|^2$ ,  $H$  e  $|\phi|^2$ . Desde que

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{ e } H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

temos:

$$\begin{aligned}|A|^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i^2 + \sum_{i=n-p+1}^n \lambda_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-p} \frac{r^2}{1+r^2} + \sum_{i=n-p+1}^n \frac{1+r^2}{r^2} \\ &= \frac{(n-p)r^2}{1+r^2} + \frac{p(1+r^2)}{r^2} \\ &= \frac{nr^4 + 2pr^2 + p}{r^2(1+r^2)}\end{aligned}\tag{2.16}$$

e

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i + \sum_{i=n-p+1}^n \lambda_i \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n-p} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} + \sum_{i=n-p+1}^n \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( (n-p) \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} + p \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \right) \\
&= \frac{(n-p)r^2 + p(1+r^2)}{nr\sqrt{1+r^2}} \\
&= \frac{nr^2 - pr^2 + p + pr^2}{nr\sqrt{1+r^2}} \\
&= \frac{nr^2 + p}{nr\sqrt{1+r^2}}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Por fim, utilizando (2.16), (2.17) e *Proposição 2.16* encontraremos um valor para  $|\phi|^2$  como segue

$$\begin{aligned}
|\phi|^2 &= |A|^2 - nH^2 \\
&= \frac{nr^4 + 2pr^2 + p}{r^2(1+r^2)} - n \frac{(nr^2 + p)^2}{n^2 r^2 (1+r^2)} \\
&= \frac{nr^4 + 2pr^2 + p}{r^2(1+r^2)} - \frac{(n^2 r^4 + 2npr^2 + p^2)}{nr^2(1+r^2)} \\
&= \frac{n^2 r^4 + 2npr^2 + np - n^2 r^4 - 2npr^2 - p^2}{nr^2(1+r^2)} \\
&= \frac{np - p^2}{nr^2(1+r^2)} \\
&= \frac{p(n-p)}{nr^2(1+r^2)}. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

**Exemplo 10** (*O Cilindro Hiperbólico*  $\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r)$ ) *O cilindro hiperbólico*  $\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r)$  *é uma hipersuperfície de*  $\mathbb{S}_1^{n+1}$ . *Para encontrar o vetor normal é preciso um procedimento análogo ao anterior, ou seja, precisamos ter um campo normal da forma*  $N = (ax_1, bx_2)$  *tal que*  $\langle N, N \rangle = -1$  *e com*  $\langle N, X \rangle = 0$ , *onde*  $X = (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r))$  *e*  $a, b \in \mathbb{R}$ . *De maneira inteiramente análoga, nós encontramos, a menos de sinal, o seguinte campo normal:*

$$N = \left( \frac{-r}{\sqrt{1+r^2}} x_1, \frac{-\sqrt{1+r^2}}{r} x_2 \right).$$

Entretanto, devemos fazer pequenos ajustes quanto aos cálculos envolvendo o operador de forma e o vetor curvatura média, uma vez que as dimensões são ligeiramente diferente. Usando novamente o fato de que  $AX = -\nabla_X N$ , podemos representar  $A$  em sua forma matricial pela seguinte matriz em bloco:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} I_{\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2})} & 0 \\ \hline 0 & \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} I_{\mathbb{H}^p(r)} \end{array} \right],$$

onde  $I_{\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2})}$  representa o operador identidade de  $\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2})$  e  $I_{\mathbb{H}^p(r)}$  o operador identidade de  $\mathbb{H}^p(r)$ . Novamente temos uma matriz diagonal e podemos encontrar as curvaturas principais de  $\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$  de modo simples. São elas:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \text{ e } \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}.$$

Terminaremos este exemplo calculando os valores de  $|A|^2$ ,  $H$  e  $|\phi|^2$ , assim como nos exemplos anteriores. Já sabemos que

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{ e } H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

então temos:

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{r^2}{1+r^2} + \sum_{i=p+1}^n \frac{1+r^2}{r^2} \\ &= \frac{pr^2}{1+r^2} + \frac{(n-p)(1+r^2)}{r^2} \\ &= \frac{pr^4 + n + 2nr^2 + nr^4 - p - 2pr^2 - pr^4}{r^2(1+r^2)} \\ &= \frac{n + 2nr^2 + nr^4 - p - 2pr^2}{r^2(1+r^2)} \\ &= \frac{nr^4 + 2(n-p)r^2 + n - p}{r^2(1+r^2)} \end{aligned} \tag{2.19}$$



e

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^p \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} + \sum_{i=p+1}^n \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( p \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} + (n-p) \frac{\sqrt{1+r^2}}{r} \right) \\
&= \frac{pr^2 + (n-p)(1+r^2)}{nr\sqrt{1+r^2}} \\
&= \frac{pr^2 + n + nr^2 - p - pr^2}{nr\sqrt{1+r^2}} \\
&= \frac{nr^2 + n - p}{nr\sqrt{1+r^2}}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Para calcular o valor de  $|\phi|^2$  utilizaremos as igualdades (2.19), (2.20) e *Proposição 2.16*, obtendo:

$$\begin{aligned}
|\phi|^2 &= |A|^2 - nH^2 \\
&= \frac{n(1+r^2)^2 - p(1+2r^2)}{r^2(1+r^2)} - \frac{n(nr^2 + n - p)^2}{n^2r^2(1+r^2)} \\
&= \frac{n^2(1+2r^2+r^4) - np(1+2r^2) - (n^2r^4 + 2nr^2(n-p) + (n-p)^2)}{nr^2(1+r^2)} \\
&= \frac{n^2 + 2n^2r^2 + n^2r^4 - np - 2npr^2 - n^2r^4 - 2n^2r^2 + 2npr^2 - n^2 + 2np - p^2}{nr^2(1+r^2)} \\
&= \frac{np - p^2}{nr^2(1+r^2)} \\
&= \frac{p(n-p)}{nr^2(1+r^2)}.
\end{aligned}$$

### 2.3.3 O Espaço anti-de Sitter

**Definição 2.22** Definimos o *espaço anti-de Sitter* de dimensão  $n+1$ , denotado por  $\mathbb{H}_1^{n+1}$ , como sendo

$$\mathbb{H}_1^{n+1} := \{x \in \mathbb{R}_2^{n+2}; \langle x, x \rangle_2 = -1\} \subset \mathbb{R}_2^{n+2},$$

tendo em vista que  $\langle x, x \rangle_2 = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{n+2}^2$ .

Seguindo uma abordagem análoga às anteriores, tomaremos o campo normal unitário global  $N$  definido sobre  $\mathbb{H}_1^{n+1}$ , dado por  $N = -x$ , em que  $x \in \mathbb{H}_1^{n+1}$ . Assim temos que  $\langle N, N \rangle_2 = -1$ , se  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}_1^{n+1})$ , então:

$$A_N X = -\bar{\nabla}_X N = \bar{\nabla}_X x = X.$$

Desde que  $\bar{R} = 0$ , com a igualdade acima podemos calcular o tensor curvatura de  $\mathbb{H}_1^{n+1}$ , através da equação de Gauss, como sendo

$$R(X, Y)Z = -(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X),$$

donde, pela [Proposição 1.41](#),  $\mathbb{H}_1^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $-1$ . Dessa maneira é possível concluir que o espaço anti-de Sitter é uma hipersuperfície completa do espaço semi-Euclidiano  $\mathbb{R}_2^{n+2}$  de tal modo que sua curvatura seccional é constante igual a  $-1$  sendo, portanto, um espaço de forma Lorentziano.

Faremos agora algumas considerações no que diz respeito a hipersuperfícies tipo-espaço no espaço anti-de Sitter. Seja  $h : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{H}_1^{n+1}$  uma imersão tipo-espaço no espaço anti-de Sitter. Denotemos por  $\bar{R}$ ,  $R$  e  $R^h$  os tensores curvatura de  $\mathbb{R}_1^{n+2}$ ,  $\mathbb{H}_1^{n+1}$  e  $\Sigma^n$ , respectivamente. Neste sentido, denotaremos por  $\bar{\nabla}$ ,  $\nabla$  e  $\nabla^h$  as conexões de Levi-Civita de  $\mathbb{R}_1^{n+2}$ ,  $\mathbb{H}_1^{n+1}$  e  $\Sigma^n$ , respectivamente e, por  $\bar{K}$  e  $K$  as curvaturas seccionais de  $\mathbb{R}_1^{n+2}$  e  $\mathbb{H}_1^{n+1}$ , nesta ordem. Admitimos um campo normal unitário global  $N^h$  de  $\Sigma^n$  em  $\mathbb{H}_1^{n+1}$  de tal modo que  $\langle N^h, N^h \rangle_2 = -1$

Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , usando a fórmula de Gauss, temos que:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon \langle A_{N^h} X, Y \rangle N^h = \nabla_X Y + \langle X, Y \rangle x. \quad (2.21)$$

Por outro lado, usando novamente a fórmula de Gauss obtemos:

$$\nabla_X Y = \nabla_X^h Y + \varepsilon \langle A_{N^h} X, Y \rangle N^h = \nabla_X^h Y - \langle A_{N^h} X, Y \rangle N^h. \quad (2.22)$$

De (2.21) e (2.22) tem-se que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X^h Y - \langle A_{N^h} X, Y \rangle N^h + \langle X, Y \rangle x.$$

Não obstante, pela fórmula de Weingarten, tem-se que  $A_{N^h} = -\nabla_X N^h$ , com  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ .

Desse modo, temos que

$$\bar{\nabla}_X N^h = \nabla_X N^h + \langle X, N^h \rangle x = \nabla_X N^h = -A_{N^h} X.$$

Determinemos as equações de Gauss e Codazzi para a hipersuperfície  $\Sigma^n$ . Dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , desde que  $\mathbb{H}_1^{n+1}$  tem curvatura seccional constante igual a  $-1$ , então  $R(X, Y)Z = -\langle X, Z \rangle Y + \langle Y, Z \rangle X$ . Utilizando a equação de Gauss para hipersuperfície, encontramos:

$$R^h(X, Y)Z = -\langle X, Z \rangle Y + \langle Y, Z \rangle X - \langle A_{N^h} X, Z \rangle A_{N^h} Y + \langle A_{N^h} Y, Z \rangle A_{N^h} X,$$

enquanto que a equação de Codazzi permanece como visto anteriormente, ou seja,

$$(\nabla A)(X, Y) = (\nabla A)(Y, X).$$

Encerraremos essa subseção com uma expressão para a curvatura de Ricci da hipersuperfície  $\Sigma^n$  e dois exemplos de hipersuperfícies tipo-espaço em  $\mathbb{H}_1^{n+1}$ . Escreveremos  $AX$  para denotar  $A_{N^h}X$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ . Como  $\Sigma^n$  é tipo-espaço observamos que, dado um referencial ortonormal local  $\{E_1, \dots, E_n\}$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  temos

$$\text{Ric}(X, Y)^h = \sum_{i=1}^n \langle R^h(X, E_i)Y, E_i \rangle,$$

em que  $\text{Ric}(\cdot, \cdot)^h$  denota a curvatura de Ricci de  $\Sigma^n$ . Entretanto, sabemos da equação de Gauss que

$$R^h(X, E_i)Y = -\langle X, Y \rangle E_i + \langle E_i, Y \rangle X - \langle AX, Y \rangle AE_i + \langle AE_i, Y \rangle AX.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y)^h &= \sum_{i=1}^n \langle R^h(X, E_i)Y, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle -\langle X, Y \rangle E_i + \langle E_i, Y \rangle X - \langle AX, Y \rangle AE_i + \langle AE_i, Y \rangle AX, E_i \rangle \\ &= -n\langle X, Y \rangle + \langle X, Y \rangle - \langle AX, Y \rangle \text{tr}(A) + \langle AX, Y \rangle \\ &= (1 - n)\langle X, Y \rangle - nH\langle AX, Y \rangle + \langle AX, AY \rangle. \end{aligned}$$

**Exemplo 11** (*O Cilindro Hiperbólico  $\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$ ) O cilindro hiperbólico  $\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{H}_1^{n+1}$ . De maneira análoga aos exemplos anteriores, calculemos o seu campo normal. Para tanto, precisamos novamente de um campo normal da forma  $N = (ax_1, bx_2)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $\langle N, N \rangle = -1$  e com  $\langle N, X \rangle = 0$ , para todo  $X = (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r))$ . ao exigir que  $\langle N, N \rangle = -1$ , temos:*

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle &= \langle ax_1, ax_1 \rangle_{\mathbb{H}(\sqrt{1-r^2})} + \langle bx_2, bx_2 \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= a^2 \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{H}(\sqrt{1-r^2})} + b^2 \langle x_2, x_2 \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= -a^2(1-r^2) - b^2r^2 = -1. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo  $\langle N, X \rangle = 0$  obtemos:

$$\begin{aligned} \langle N, X \rangle &= \langle ax_1, x_1 \rangle_{\mathbb{H}(\sqrt{1-r^2})} + \langle bx_2, x_2 \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= a \langle x_1, x_1 \rangle_{\mathbb{H}(\sqrt{1-r^2})} + b \langle x_2, x_2 \rangle_{\mathbb{H}(r)} \\ &= -a(1-r^2) - br^2 = 0. \end{aligned}$$

Em seguida, ao resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} -a^2(1-r^2) - b^2r^2 = -1 \\ -a(1-r^2) - br^2 = 0 \end{cases},$$

encontramos, a menos de mudança de sinal,  $a = \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}$  e  $b = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$ , donde

$$N = \left( \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}x_1, \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}x_2 \right).$$

Desde que  $AX = -\nabla_X N$ , representamos  $A$  em sua forma matricial pela seguinte matriz em bloco:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} I_{\mathbb{H}(\sqrt{1-r^2})} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} I_{\mathbb{H}(r)} \end{bmatrix},$$

onde  $I_{\mathbb{H}(\sqrt{1-r^2})}$  representa o operador identidade de  $\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2})$  e  $I_{\mathbb{H}(r)}$  o operador identidade de  $\mathbb{H}^p(r)$ . Assim, não é difícil perceber que tal matriz é diagonal, o que torna uma tarefa fácil determinar os seus autovalores que, nesse contexto, são chamados de curvaturas principais, as quais são dadas por:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-p} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \text{ e } \lambda_{n-p+1} = \dots = \lambda_n = \frac{-\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Para finalizar este exemplo, calcularemos os valores de  $|A|^2$ ,  $H$  e  $|\phi|^2$ . Por definição, sabemos que

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{ e } H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

desse modo segue as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i^2 + \sum_{i=n-p+1}^n \lambda_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-p} \frac{r^2}{1-r^2} + \sum_{i=n-p+1}^n \frac{1-r^2}{r^2} \\ &= \frac{(n-p)r^2}{1-r^2} + \frac{p(1-r^2)}{r^2} \\ &= \frac{(n-p)r^4 + p(1-r^2)^2}{r^2(1-r^2)} \\ &= \frac{nr^4 + p - 2pr^2}{r^2(1-r^2)} \\ &= \frac{r^2(nr^2 - 2p) + p}{r^2(1-r^2)} \end{aligned} \tag{2.23}$$

e

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i + \sum_{i=n-p+1}^n \lambda_i \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n-p} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=n-p+1}^n \frac{-\sqrt{1-r^2}}{r} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( (n-p) \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} - p \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \right) \\
&= \frac{(n-p)r^2 - p(1-r^2)}{nr\sqrt{1-r^2}} \\
&= \frac{nr^2 - pr^2 - p + pr^2}{nr\sqrt{1-r^2}} \\
&= \frac{nr^2 - p}{nr\sqrt{1-r^2}}. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Utilizando (2.23), (2.24) e *Proposição 2.16* vemos que:

$$\begin{aligned}
|\phi|^2 &= |A|^2 - nH^2 \\
&= \frac{r^2(nr^2 - 2p) + p}{r^2(1-r^2)} - \frac{n(nr^2 - p)^2}{n^2r^2(1-r^2)} \\
&= \frac{nr^2(nr^2 - 2p) + np - (nr^2 - p)^2}{nr^2(1-r^2)} \\
&= \frac{n^2r^4 - 2npr^2 + np - n^2r^4 + 2npr^2 - p^2}{nr^2(1-r^2)} \\
&= \frac{np - p^2}{nr^2(1-r^2)} \\
&= \frac{p(n-p)}{nr^2(1-r^2)}.
\end{aligned}$$

**Exemplo 12** (*O Cilindro Hiperbólico*  $\mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r)$ ) *Perceba que este exemplo diferencia-se do anterior apenas pela dimensão das variedades envolvidas. Nesse contexto, o cilindro hiperbólico  $\mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r)$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{H}_1^{n+1}$ . Sabemos então que para encontrar o campo normal é preciso um campo normal da forma  $N = (ax_1, bx_2)$  tal que  $\langle N, N \rangle = -1$  e com  $\langle N, X \rangle = 0$ , onde  $X = (x_1, x_2) \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r))$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . De maneira inteiramente análoga, nós encontramos, a menos de sinal, o seguinte campo normal:*

$$N = \left( \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}x_1, \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}x_2 \right).$$

*Como o leitor já deve estar acostumado, devemos fazer pequenos ajustes quanto aos cálculos envolvendo o operador de forma e o vetor curvatura média. Usando novamente - e pela última vez nesse capítulo - o fato de que  $AX = -\nabla_X N$ , podemos representar  $A$  em sua*

forma matricial pela seguinte matriz em bloco:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} I_{\mathbb{H}(\sqrt{1-r^2})} & 0 \\ \hline 0 & \frac{-\sqrt{1-r^2}}{r} I_{\mathbb{H}(r)} \end{array} \right],$$

onde agora  $I_{\mathbb{H}(\sqrt{1-r^2})}$  representa o operador identidade de  $\mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2})$  e  $I_{\mathbb{H}(r)}$  o operador identidade de  $\mathbb{H}^{n-p}(r)$ . Novamente temos uma matriz diagonal e podemos encontrar as curvaturas principais de  $\mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r)$  de modo simples. São elas:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \text{ e } \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = \frac{-\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Enfim, calculemos os valores de  $|A|^2$ ,  $H$  e  $|\phi|^2$ . Desde que

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \text{ e } H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

vemos que:

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{r^2}{1-r^2} + \sum_{i=p+1}^n \frac{1-r^2}{r^2} \\ &= \frac{pr^2}{1-r^2} + \frac{(n-p)(1-r^2)}{r^2} \\ &= \frac{pr^4 + n - 2nr^2 + nr^4 - p + 2pr^2 - pr^4}{r^2(1-r^2)} \\ &= \frac{n - 2nr^2 + nr^4 - p + 2pr^2}{r^2(1-r^2)} \\ &= \frac{n(1-r^2)^2 - p(1-2r^2)}{r^2(1-r^2)} \end{aligned} \tag{2.25}$$

e

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^p \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=p+1}^n \frac{-\sqrt{1-r^2}}{r} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( p \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} - (n-p) \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \right) \\
&= \frac{pr^2 - (n-p)(1-r^2)}{nr\sqrt{1-r^2}} \\
&= \frac{pr^2 - n + nr^2 + p - pr^2}{nr\sqrt{1-r^2}} \\
&= \frac{nr^2 - (n-p)}{nr\sqrt{1-r^2}}. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Terminaremos calculando o valor de  $|\phi|^2$ , como prometido acima, através das igualdades em (2.25), (2.26) e [Proposição 2.16](#) obtendo:

$$\begin{aligned}
|\phi|^2 &= |A|^2 - nH^2 \\
&= \frac{n(1-r^2)^2 - p(1-2r^2)}{r^2(1-r^2)} - \frac{n(nr^2 - (n-p))^2}{n^2r^2(1-r^2)} \\
&= \frac{n^2(1-2r^2+r^4) - np(1-2r^2) - (n^2r^4 - 2n(n-p)r^2 + (n-p)^2)}{nr^2(1-r^2)} \\
&= \frac{n^2 - 2n^2r^2 + n^2r^4 - np + 2npr^2 - n^2r^4 + 2n^2r^2 - 2npr^2 - n^2 + 2np - p^2}{nr^2(1-r^2)} \\
&= \frac{np - p^2}{nr^2(1-r^2)} \\
&= \frac{p(n-p)}{nr^2(1-r^2)}.
\end{aligned}$$

**Observação 2.2** Em verdade, os cilindros hiperbólicos exibidos nos [Exemplo 11](#) e [Exemplo 12](#) são isométricos. Com efeito, considere a aplicação

$$\Psi : \mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \longrightarrow \mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r)$$

dada por  $\Psi(x) = \left( \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}x_2, \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}x_1 \right)$ , em que  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$  com  $x_1 \in \mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2})$  e  $x_2 \in \mathbb{H}^p(r)$ . Verifica-se que  $\Psi$  é diferenciável e uma bijeção cuja inversa é a aplicação

$$\Psi^{-1} : \mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r) \longrightarrow \mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$$

dada por  $\Psi^{-1}(y) = \left( \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}y_2, \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}y_1 \right)$ , em que  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r)$  com  $y_1 \in \mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2})$  e  $y_2 \in \mathbb{H}^{n-p}(r)$ . Novamente, não é difícil checar que  $\Psi^{-1}$  é diferenciável.

Concluimos, portanto, que  $\Psi$  é um difeomorfismo. Para que  $\Psi$  seja uma isometria, precisamos mostrar que  $\langle u, v \rangle_q = \langle d\Psi_q(u), d\Psi_q(v) \rangle_{\Psi(q)}$ , para todo  $q \in \mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$ ,  $u, v \in T_q(\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r))$ . Sejam  $q = (q_1, q_2)$ , com  $q_1 \in \mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2})$  e  $q_2 \in \mathbb{H}^p(r)$ ,  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  com  $u_1, v_1 \in T_{q_1}(\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}))$  e  $u_2, v_2 \in T_{q_2}(\mathbb{H}^p(r))$ .

Após alguns cálculos obtemos:

$$(i) \langle u, v \rangle_q = \langle u_1, v_1 \rangle_{\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2})} + \langle u_2, v_2 \rangle_{\mathbb{H}^p(r)},$$

$$(ii) \langle d\Psi_q(u), d\Psi_q(v) \rangle_{\Psi(q)} = \frac{1-r^2}{r^2} \langle u_2, v_2 \rangle_{\mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2})} + \frac{r^2}{1-r^2} \langle u_1, v_1 \rangle_{\mathbb{H}^{n-p}(r)}.$$

Por fim, basta observar que:

$$\langle u_1, v_1 \rangle_{\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2})} = \frac{r^2}{1-r^2} \langle u_1, v_1 \rangle_{\mathbb{H}^{n-p}(r)} \text{ e } \langle u_2, v_2 \rangle_{\mathbb{H}^p(r)} = \frac{1-r^2}{r^2} \langle u_2, v_2 \rangle_{\mathbb{H}^p(\sqrt{1-r^2})}.$$

Desse modo, mostramos que  $\langle u, v \rangle_q = \langle d\Psi_q(u), d\Psi_q(v) \rangle_{\Psi(q)}$  e, conseqüentemente, que  $\Psi$  é uma isometria.

**Observação 2.3** Doravante, a menos de menção contrária, iremos nos referir aos espaços de forma Lorentzianos como  $\mathbb{L}_c^{n+1}$ , com  $c \in \{-1, 0, 1\}$ , de modo que:

$$\mathbb{L}_0^{n+1} := \mathbb{R}_1^{n+1} \text{ (O Espaço de Lorentz-Minkowski),}$$

$$\mathbb{L}_1^{n+1} := \mathbb{S}_1^{n+1} \text{ (O Espaço de de Sitter),}$$

$$\mathbb{L}_{-1}^{n+1} := \mathbb{H}_1^{n+1} \text{ (O Espaço anti-de Sitter).}$$

A fim de extrair ao máximo os benefícios proporcionados pelos exemplos anteriores, exibiremos as expressões do tensor curvatura e da curvatura de Ricci que generalizam os casos em hipersuperfícies tipo-espaço em espaços de forma Lorentzianas. Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço em um espaço de forma Lorentziano  $\mathbb{L}_c^{n+1}$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal local de  $\Sigma^n$ , pela equação de Gauss, temos que para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  o tensor curvatura e o tensor de Ricci são dados, respectivamente, por:

$$R(X, Y)Z = c(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X) - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX,$$

e a seguinte

**Proposição 2.23** Sejam  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço com curvatura média  $H$  constante de um espaço de forma Lorentziano  $\mathbb{L}_c^{n+1}$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  uma base ortonormal local de  $\Sigma^n$ . Então o tensor de Ricci é limitado por baixo.



**Demonstração.** Utilizando a definição da curvatura de Ricci e a igualdade acima, temos:

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(X, X) &= \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle c(\langle X, X \rangle E_i - \langle E_i, X \rangle X) - \langle AX, X \rangle AE_i + \langle AE_i, X \rangle AX, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n c|X|^2 \langle E_i, E_i \rangle - \sum_{i=1}^n c \langle E_i, X \rangle \langle X, E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle AX, X \rangle \langle AE_i, E_i \rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \langle AX, E_i \rangle \langle AX, E_i \rangle \\
&= nc|X|^2 - c|X|^2 - \langle AX, X \rangle \text{tr}A + |AX|^2 \\
&= c(n-1)|X|^2 - nH \langle AX, X \rangle + |AX|^2. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Desde que  $|AX - \frac{nH}{2}X|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2 = |AX|^2 - nH \langle AX, X \rangle$  temos, por (2.27)

$$\text{Ric}(X, X) = c(n-1)|X|^2 + \left|AX - \frac{nH}{2}X\right|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2 \geq \left(c(n-1) - \frac{n^2H^2}{4}\right)|X|^2. \tag{2.28}$$

Desde que estamos supondo que nossa hipersuperfície  $\Sigma^n$  possui curvatura média  $H$  constante, concluímos pela desigualdade acima que a curvatura de Ricci é limitada por baixo. ■

## Capítulo 3

# Fórmula de Simons e Desigualdade Tipo Okumura

Este capítulo tem como finalidade expressar uma fórmula tipo Simons (veja Equação (3.8)), que será utilizada em nossos resultados principais, bem como estabelecer alguns resultados envolvendo uma desigualdade tipo-Okumura. Não obstante, destacamos que este capítulo foi, em grande parte, embasado nos escritos de Sánchez ([26]), mais especificamente nos textos do Capítulo 2 de sua Tesina de Licenciatura.

Sejam  $\overline{M}_c^{n+1}$  uma variedade Lorentziana com curvatura seccional constante igual a  $c$ ,  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço de  $\overline{M}_c^{n+1}$  com curvatura média  $H$  constante e  $\nabla$  sua conexão de Levi-Civita. Defina o seguinte laplaciano  $\Delta A : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  por

$$\Delta A(X) = \text{tr}(\nabla^2 A(X, \cdot, \cdot)) = \sum_{i=1}^n \nabla^2 A(X, E_i, E_i), \quad (3.1)$$

onde,  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial ortonormal local em  $\Sigma^n$  e  $\nabla^2 A : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \times \mathfrak{X}(\Sigma^n) \times \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  o operador dado por  $\nabla^2 A(X, Y, Z) = (\nabla_Z \nabla A)(X, Y)$ . Pela equação de Codazzi, vemos que  $\nabla^2 A$  é simétrico com relação as duas primeiras variáveis. Não obstante, temos

$$\begin{aligned} \nabla^2 A(X, Y, Z) &= (\nabla_Z \nabla A)(X, Y) \\ &= \nabla_Z(\nabla A(X, Y)) - \nabla A(\nabla_Z X, Y) - \nabla A(X, \nabla_Z Y) \\ &= \nabla_Z(\nabla A(Y, X)) - \nabla A(Y, \nabla_Z X) - \nabla A(\nabla_Z Y, X) \\ &= (\nabla_Z \nabla A)(Y, X) = \nabla^2 A(Y, X, Z). \end{aligned}$$

Pode-se ainda mostrar uma relação de simetria com relação as outras variáveis. Para tanto, pela simetria da conexão, é simples verificar que podemos reescrever o tensor curvatura de  $\Sigma^n$  como  $R(X, Y)Z = \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z$ . Note ainda que

$$\begin{aligned}
\nabla^2 A(X, Y, Z) &= (\nabla_Z \nabla A)(X, Y) \\
&= \nabla_Z(\nabla A(X, Y)) - \nabla A(\nabla_Z X, Y) - \nabla A(X, \nabla_Z Y) \\
&= \nabla_Z(\nabla_Y(A X) - A(\nabla_Y X)) - \nabla_Y A(\nabla_Z X) \\
&\quad + A(\nabla_Y \nabla_Z X) - \nabla_{\nabla_Z Y}(A X) + A(\nabla_{\nabla_Z Y} X).
\end{aligned}$$

O que segue agora é uma cadeia de igualdades um tanto quanto extensa, entretanto, nada tediosa aos olhos dos mais ávidos. Utilizando a igualdade acima e algumas manipulações obtemos:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 A(X, Y, Z) - \nabla^2 A(X, Z, Y) &= \nabla_Z(\nabla_Y(A X) - A(\nabla_Y X)) - \nabla_Y A(\nabla_Z X) \\
&\quad + A(\nabla_Y \nabla_Z X) - \nabla_{\nabla_Z Y}(A X) + A(\nabla_{\nabla_Z Y} X) \\
&\quad - \nabla_Z(\nabla_Y(A X) - A(\nabla_Y X)) + \nabla_Y A(\nabla_Z X) \\
&\quad - A(\nabla_Y \nabla_Z X) + \nabla_{\nabla_Z Y}(A X) - A(\nabla_{\nabla_Z Y} X) \\
&= \nabla_Z \nabla_Y(A X) - \nabla_Z A(\nabla_Y X) - \nabla_Y A(\nabla_Z X) \\
&\quad + A(\nabla_Y \nabla_Z X) - \nabla_{\nabla_Z Y}(A X) + A(\nabla_{\nabla_Z Y} X) \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_Z(A X) + \nabla_Y A(\nabla_Z X) + \nabla_Z A(\nabla_Y X) \\
&\quad - A(\nabla_Z \nabla_Y X) + \nabla_{\nabla_Y Z}(A X) - A(\nabla_{\nabla_Y Z} X) \\
&= -\nabla_{\nabla_Z Y}(A X) + \nabla_{\nabla_Y Z}(A X) + \nabla_Z(\nabla_Y(A X)) \\
&\quad - \nabla_Y(\nabla_Z(A X)) + A(\nabla_{\nabla_Z Y} X - \nabla_{\nabla_Y Z} X) \\
&\quad + A(-\nabla_Z(\nabla_Y X) + \nabla_Y(\nabla_Z X)) \\
&= -R(Z, Y)A X + A(R(Z, Y)X).
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\nabla^2 A(X, Y, Z) = \nabla^2 A(X, Z, Y) - R(Z, Y)A X + A(R(Z, Y)X). \quad (3.2)$$

Tendo ainda em mente que  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial ortonormal local  $\Sigma^n$ , consideremos os seguintes resultados que nos auxiliarão em um cálculo posterior.

Como  $\Sigma^n$  possui curvatura média  $H$  constante e  $\text{tr}A = nH$  então, para  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ ,

temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (\nabla_X(\nabla A))(E_i, E_i) &= \text{tr}(\nabla_X(\nabla A)) \\
&= \nabla_X(\text{tr}(\nabla A)) \\
&= \nabla_X(\nabla \text{tr} A) \\
&= n \nabla_X \nabla H = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Considerando o espaço ambiente  $\overline{M}_c^{n+1}$ , a equação de Gauss é dada por

$$R(X, Y)Z = c(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X) - \langle AX, Z \rangle AY + \langle AY, Z \rangle AX,$$

donde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n R(E_i, X)AE_i &= \sum_{i=1}^n \{c(\langle E_i, AE_i \rangle X - \langle X, AE_i \rangle E_i) - \langle AE_i, AE_i \rangle AX + \langle AX, AE_i \rangle AE_i\} \\
&= \text{ctr}(A)X - cAX - \text{tr}(A^2)AX + A^3X
\end{aligned} \tag{3.4}$$

e

$$\begin{aligned}
A \left( \sum_{i=1}^n R(E_i, X)E_i \right) &= A \left( \sum_{i=1}^n \{c(\langle E_i, E_i \rangle X - \langle X, E_i \rangle E_i)\} \right) \\
&\quad + A \left( \sum_{i=1}^n \{-\langle AE_i, E_i \rangle AX + \langle AX, E_i \rangle AE_i\} \right) \\
&= cnAX - cAX - \text{tr}(A)A^2X + A^3X.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Fazendo a igualdade (3.5) menos a igualdade (3.4) obtemos a igualdade abaixo

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^n R(E_i, X)AE_i + A \left( \sum_{i=1}^n R(E_i, X)E_i \right) &= -\text{ctr}(A)X + cAX + \text{tr}(A^2)AX - A^3X \\
&\quad + cnAX - cAX - \text{tr}(A)A^2X + A^3X \\
&= -cnHX + (\text{tr}(A^2) + cn)AX - nHA^2X.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Usando a igualdade em (3.6) juntamente com as simetrias de  $\nabla^2 A$  e as igualdades de (3.2) e

(3.3) obtemos de (3.1) a seguinte sequência de igualdades

$$\begin{aligned}
\Delta A(X) &= \sum_{i=1}^n \nabla^2 A(X, E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla^2 A(E_i, X, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \{ \nabla^2 A(E_i, E_i, X) - R(E_i, X)AE_i + A(R(E_i, X)E_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^n \{ (\nabla_X \nabla A)(E_i, E_i) - R(E_i, X)AE_i + A(R(E_i, X)E_i) \} \\
&= \sum_{i=1}^n (\nabla_X \nabla A)(E_i, E_i) - \sum_{i=1}^n R(E_i, X)AE_i + A \left( \sum_{i=1}^n R(E_i, X)E_i \right) \\
&= -cnHx + (\text{tr}(A^2) + cn)AX - nHA^2X \\
&= cnAX - cnHx + |A|^2AX - nHA^2X.
\end{aligned}$$

Desde que, por definição,  $\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + \langle A, \Delta A \rangle$ , precisamos calcular  $\langle A, \Delta A \rangle$  para alcançar a fórmula desejada. Sem mais delongas, vamos às contas.

$$\begin{aligned}
\langle A, \Delta A \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle A(E_i), \Delta A(E_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle A(E_i), cnA(E_i) - cnHE_i + |A|^2A(E_i) - nHA^2(E_i) \rangle \\
&= cn|A|^2 - cnH\text{tr}(A) + |A|^4 - nH\text{tr}(A^3) \\
&= cn|A|^2 - cn^2H^2 + |A|^4 - nH\text{tr}(A^3) \\
&= cn(|A|^2 - nH^2) + |A|^4 - nH\text{tr}(A^3).
\end{aligned}$$

Podemos, enfim, alcançar um dos nossos preciosos objetivos, ao qual iremos nos referir de agora em diante como fórmula de Simons. Vide a igualdade abaixo:

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + cn(|A|^2 - nH^2) + |A|^4 - nH\text{tr}(A^3). \quad (3.7)$$

**Proposição 3.1** *Considere os operadores de Weingarten  $A$  e o operador de umbilicidade  $\phi$  de  $\Sigma^n$ . Se a função curvatura média  $H$  de  $\Sigma^n$  é constante, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

(i)  $\text{tr}(\phi^2) = \text{tr}(A^2) - nH^2$ .

(ii)  $\nabla\phi = \nabla A$  e, conseqüentemente,  $|\nabla\phi|^2 = |\nabla A|^2$ .

(iii)  $\Delta|A|^2 = \Delta|\phi|^2$ , além de que  $\text{tr}(A^3) = \text{tr}(\phi^3) + 3H|\phi|^2 + nH^3$ .

$$(iv) |A|^4 = |\phi|^4 + 2nH^2|\phi|^2 + n^2H^4.$$

**Demonstração.** Fazemos cada item separadamente.

(i) De fato, o cálculo para verificar essa igualdade é análogo ao que foi feito na [Proposição 2.16](#).

(ii) Desde que  $H$  é constante e  $\phi = A - HI$ , tem-se que

$$\nabla\phi = \nabla A \text{ e } |\nabla\phi|^2 = |\nabla A|^2.$$

(iii) Como mostrado na [Proposição 2.16](#),  $|\phi|^2 = |A|^2 + nH^2$ , vemos que  $\Delta|\phi|^2 = \Delta|A|^2$ . Além do mais, temos:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^3) &= \text{tr}((\phi + HI)^3) \\ &= \text{tr}(\phi^3 + 3\phi^2HI + 3\phi H^2I + H^3I) \\ &= \text{tr}(\phi^3) + 3H\text{tr}(\phi^2) + 3H^2\text{tr}(\phi) + H^3\text{tr}(I) \\ &= \text{tr}(\phi^3) + 3H|\phi|^2 + nH^3. \end{aligned}$$

(iv) Segue, imediatamente do fato de que  $|A|^2 = |\phi|^2 + nH^2$ , uma vez que

$$|A|^4 = (|\phi|^2 + nH^2)^2 = |\phi|^4 + 2nH^2|\phi|^2 + n^2H^4.$$

■

Com uma simples substituição dos resultados obtidos na [Proposição 3.1](#) é possível reescrever (3.7) em termos de  $H$  e  $|\phi|$  obtendo, dessa maneira, a igualdade que é peça fundamental para a demonstração dos teoremas principais dessa dissertação. Tal igualdade revela-se sob a seguinte forma

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + |\phi|^4 - nH\text{tr}\phi^3 - n(H^2 - c)|\phi|^2. \quad (3.8)$$

Conforme supracitado, tal igualdade é facilmente obtida através de uma simples substituição em (3.7) das relações acima encontradas. Entretanto, exibiremos a veracidade de tal fato na demonstração da seguinte

**Proposição 3.2** *Sob as condições da [Proposição 3.1](#), temos a seguinte fórmula de Simons*

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\Delta\phi|^2 + |\phi|^4 - nH\text{tr}\phi^3 - n(H^2 - c)|\phi|^2.$$

**Demonstração.** O resultado segue do fato que  $\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \frac{1}{2}\Delta|A|^2$  e das igualdades abaixo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 &= |\nabla A|^2 + cn(|A|^2 - nH^2) + |A|^4 - nH\text{tr}(A^3) \\ &= |\nabla\phi|^2 + cn|\phi|^2 + |\phi|^4 + 2nH^2|\phi|^2 + n^2H^4 - nH\text{tr}(\phi^3) - 3nH^2|\phi|^2 - n^2H^4 \\ &= |\nabla\phi|^2 + cn|\phi|^2 + |\phi|^4 - nH\text{tr}(\phi^3) - nH^2|\phi|^2 \\ &= |\nabla\phi|^2 + |\phi|^4 - nH\text{tr}(\phi^3) - n(H^2 - c)|\phi|^2.\end{aligned}$$

■

Findadas as discussões sobre a fórmula tipo Simons, iremos direcionar nossa atenção à desigualdade tipo Okumura. Em verdade, esta é uma relação puramente algébrica em que dados  $\beta, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$  tais que  $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \beta^2$ , então

$$\left| \sum_{i=1}^n \mu_i^3 \right| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |\beta|^3. \quad (3.9)$$

Tal resultado foi melhorado inicialmente por Alencar e do Carmo ([3]) como segue o lema abaixo

**Lema 3.1** *Se  $\beta, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$  são tais que  $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \beta^2$ , então*

$$\left| \sum_{i=1}^n \mu_i^3 \right| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |\beta|^3,$$

*e a igualdade ocorre se, e somente se, pelo menos  $n-1$  dos  $\mu_i$  são iguais.*

Apresentaremos um outro resultado nesse contexto devido a Melendéz ([19]). Em verdade, a demonstração do **Lema 3.1** segue, com seus devidos ajustes, análoga à demonstração do seguinte

**Lema 3.2** *Sejam  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , com  $n \geq 3$  e  $n \in \mathbb{N}$ , números reais tais que  $\sum_i \xi_i = 0$  e  $\sum_i \xi_i^2 = \beta^2$ , onde  $\beta \geq 0$ . Então, a equação*

$$\sum_i \xi_i^3 = \frac{n-2k}{\sqrt{nk(n-k)}} \beta^3, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

*vale se, e somente se,  $k$  termos  $\xi_i$  são iguais e não-negativos e o restante dos  $n-k$  termos  $\xi_i$  são iguais e não-positivos.*

**Demonstração.** Note, inicialmente, que o lema é trivialmente válido se  $\beta = 0$ , pois teríamos  $\sum_i \xi_i = 0$  e  $\sum_i \xi_i^2 = \beta^2$ , o que implicaria em todos os  $\xi_i = 0$  e satisfazendo todas as exigências do lema. Consideremos então o caso  $\beta > 0$  e defina a função  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(\xi) = \sum_i \xi_i^3$ , com  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , sujeita as condições iniciais  $\sum_i \xi_i = 0$  e  $\sum_i \xi_i^2 = \beta^2$ . Pelo método dos Multiplicadores de Lagrange e escolhendo os multiplicadores de Lagrange de maneira favorável, temos

$$\nabla \sum_i \xi_i^3 = \frac{3\lambda}{2} \nabla \sum_i \xi_i^2 + 3\alpha \nabla \sum_i \xi_i,$$

donde obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla \sum_i \xi_i^3 - \frac{3\lambda}{2} \nabla \sum_i \xi_i^2 - 3\alpha \nabla \sum_i \xi_i &= 0 \\ \sum_i \nabla \left( \xi_i^3 - \frac{3\lambda}{2} \xi_i^2 - 3\alpha \xi_i \right) &= 0 \\ \sum_i \xi_i^2 - \lambda \xi_i - \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Assim, segue que os pontos críticos são dados pelos valores de  $\xi_i$  que satisfazem a equação quadrática  $\xi_i^2 - \lambda \xi_i - \alpha = 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Resolvendo tal equação, fazendo uma reenumeração se necessário, vemos que

$$\xi_1 = \dots = \xi_{n-p} = -a < 0 \text{ e } \xi_{n-p+1} = \dots = \xi_n = b > 0, a, b \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, sob as condições iniciais, os pontos críticos podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi_i &= 0 \\ \sum_1^{n-p} -a + \sum_{n-p+1}^n b &= 0 \\ -(n-p)a + pb &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 &= \beta^2 \\ \sum_1^{n-p} a^2 + \sum_{n-p+1}^n b^2 &= \beta^2 \\ (n-p)a^2 + pb^2 &= \beta^2. \end{aligned}$$



Resolvendo o seguinte sistema  $\begin{cases} -(n-p)a + pb = 0 \\ (n-p)a^2 + pb^2 = \beta^2 \end{cases}$  encontramos que  $a^2 = \frac{p}{n(n-p)}\beta^2$

e  $b^2 = \frac{n-p}{np}\beta^2$ . Não obstante,

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^n \xi_i^3 = \sum_1^{n-p} -a^3 + \sum_{n-p+1}^n b^3 \\ &= -\frac{(n-p)p\sqrt{p}}{n(n-p)\sqrt{n(n-p)}}\beta^3 + \frac{p(n-p)\sqrt{n-p}}{np\sqrt{np}}\beta^3 \\ &= \left( -\frac{p\sqrt{p}}{n\sqrt{n(n-p)}} + \frac{(n-p)\sqrt{n-p}}{n\sqrt{np}} \right) \beta^3 \\ &= \left( \frac{-p^2 + (n-p)^2}{n\sqrt{np(n-p)}} \right) \beta^3 \\ &= \left( \frac{-p^2 + n^2 - 2np + p^2}{n\sqrt{np(n-p)}} \right) \beta^3 \\ &= \frac{n(n-2p)}{n\sqrt{np(n-p)}}\beta^3 \\ &= \frac{n-2p}{\sqrt{np(n-p)}}\beta^3. \end{aligned}$$

Derivando  $g$  com relação a  $p$ , observamos que  $g' = \frac{-n^2}{2p(n-p)\sqrt{np(n-p)}}\beta^3 < 0$ , pois temos que  $n, p, \beta > 0$ , com  $0 < n-p$ . Assim, vemos que  $g$  é decrescente. Além disso, tem-se

$$g = \frac{n-2p}{\sqrt{np(n-p)}}\beta^3 = \frac{n-2k}{\sqrt{np(n-k)}}\beta^3,$$

se, e somente se,  $k = p$ , donde concluímos que

$$\xi_1 = \dots = \xi_{n-k} = -\sqrt{\frac{k}{n(n-k)}}\beta < 0 \text{ e } \xi_{n-p+1} = \dots = \xi_n = \sqrt{\frac{n-k}{nk}}\beta > 0.$$

■

# Capítulo 4

## Alguns Resultados Auxiliares

Neste capítulo exibiremos alguns resultados adicionais que serão utilizados diretamente ou indiretamente nas demonstrações dos teoremas principais encontrados no [Capítulo 5](#) dessa dissertação. Começaremos com o seguinte resultado devido a Montiel [21].

**Lema 4.1** *Seja  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em um espaço de de Sitter e  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$  com  $|a|^2 = -1$ , e  $a_0 \leq -1$ . Então, se  $H$  denota a curvatura média de  $\varphi$  com respeito a um campo normal unitário  $N : \Sigma^n \rightarrow \{x = (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+2}; |x|^2 = -1, x_0 \geq 1\}$  e  $d\Sigma$  a métrica Riemanniana de  $\Sigma^n$ , nós temos*

$$\int_{\Sigma} \langle \nabla H, a \rangle d\Sigma \geq 0,$$

e a igualdade vale se, e somente se,  $\varphi$  é umbílica.

**Demonstração.** Sejam  $\bar{\nabla}$ ,  $\nabla$  e  $\nabla^\varphi$  as conexões de Levi-Civita de  $\mathbb{R}_1^{n+2}$ ,  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  e  $\Sigma^n$  respectivamente. Considere as funções suportes  $l_a : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $l_a = \langle \varphi, a \rangle$  e  $f_a : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f_a = \langle N, a \rangle$ . Seja  $v \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ , desde que  $a = a^\top - f_a N + l_a \varphi$  temos que:

$$\langle \nabla l_a, v \rangle = \langle \nabla \langle \varphi, a \rangle, v \rangle = v(\langle \varphi, a \rangle) = \langle \bar{\nabla}_v \varphi, a \rangle = \langle v, a \rangle = \langle v, a^\top \rangle.$$

Pela igualdade em (2.15), dados  $v, w \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$  vemos que:

$$\begin{aligned}
\text{Hess}\langle\varphi, a\rangle(v, w) &= \langle\nabla_v^\varphi\nabla l_a, w\rangle = \langle\bar{\nabla}_v\nabla l_a, w\rangle \\
&= \langle\bar{\nabla}_v a^\top, w\rangle \\
&= \langle\bar{\nabla}_v(a + f_a N - l_a\varphi), w\rangle \\
&= \langle\bar{\nabla}_v f_a N, w\rangle - \langle\bar{\nabla}_v l_a\varphi, w\rangle \\
&= f_a\langle\bar{\nabla}_v N, w\rangle + \langle v(f_a)N, w\rangle - l_a\langle\bar{\nabla}_v\varphi, w\rangle - \langle v(l_a)\varphi, w\rangle \\
&= -\langle v, w\rangle\langle\varphi, a\rangle - \langle Av, w\rangle\langle N, a\rangle.
\end{aligned}$$

Podemos determinar o laplaciano da função  $l_a = \langle\varphi, a\rangle$  como segue:

$$\begin{aligned}
\Delta\langle\varphi, a\rangle &= \text{tr}(\text{Hess}\langle\varphi, a\rangle) \\
&= -n\langle\varphi, a\rangle - nH\langle N, a\rangle.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Considerando agora a aplicação  $f_a : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Temos:

$$\langle\nabla f_a, v\rangle = \langle\nabla\langle N, a\rangle, v\rangle = v(\langle N, a\rangle) = \langle\bar{\nabla}_v N, a\rangle = \langle -Av, a\rangle = \langle -A(a^\top), v\rangle.$$

Calcularemos a Hessiana de  $\langle N, a\rangle$ .

$$\begin{aligned}
\text{Hess}\langle N, a\rangle(v, w) &= \langle\nabla_v^\varphi\nabla\langle N, a\rangle, w\rangle \\
&= -\langle\nabla_v^\varphi\nabla A(a^\top), w\rangle \\
&= -\langle\nabla^\varphi A(a^\top, v), w\rangle - \langle A(\nabla_v^\varphi a^\top), w\rangle \\
&= -\langle\nabla^\varphi A(v, a^\top), w\rangle - \langle\nabla_v^\varphi\nabla l_a, Aw\rangle \\
&= -\langle\nabla^\varphi A(v, a^\top), w\rangle - \text{Hess}l_a(v, Aw) \\
&= -\langle\nabla^\varphi A(v, a^\top), w\rangle + l_a\langle v, Aw\rangle + f_a\langle Av, Aw\rangle.
\end{aligned}$$

Considerando  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal local de  $\Sigma^n$  tal que diagonalize  $A$ , temos

$$\begin{aligned}
\Delta\langle N, a\rangle &= \text{tr}(\text{Hess}\langle N, a\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n \text{Hess}\langle N, a\rangle(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (-\langle\nabla^\varphi A(e_i, a^\top), e_i\rangle + l_a\langle e_i, Ae_i\rangle + f_a\langle Ae_i, Ae_i\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n -\langle\nabla^\varphi A(e_i, a^\top), e_i\rangle + l_a\text{tr}(A) + f_a|A|^2 \\
&= -\sum_{i=1}^n \langle\nabla_{a^\top}^\varphi A(e_i), e_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle A(\nabla_{a^\top}^\varphi e_i), e_i\rangle + nl_aH + f_a|A|^2.
\end{aligned}$$

Veja ainda que, como  $\{e_1, \dots, e_n\}$  diagonaliza  $A$ , temos que  $A(e_i) = \tau_i e_i$ , com  $\tau_i \in \mathbb{R}$  e  $i = 1, \dots, n$ , obtemos:

$$\langle A(\nabla_{a^\top}^\varphi e_i), e_i \rangle = \langle \nabla_{a^\top}^\varphi e_i, A(e_i) \rangle = \tau_i \langle \nabla_{a^\top}^\varphi e_i, e_i \rangle = 0.$$

Além disso, escrevendo  $a^\top = \sum_{j=1}^n \langle a^\top, e_j \rangle e_j$ , vemos que:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{a^\top}^\varphi A(e_i), e_i \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\sum_{j=1}^n \langle a^\top, e_j \rangle e_j}^\varphi A(e_i), e_i \rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \langle a^\top, e_j \rangle \langle \nabla_{e_j}^\varphi A(e_i), e_i \rangle \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \langle a^\top, e_j \rangle \left( e_j \langle A(e_i), e_i \rangle + \langle A(e_i), \nabla_{e_j}^\varphi e_i \rangle \right) \\ &= - \sum_{j=1}^n \langle a^\top, e_j \rangle e_j \left( \sum_{i=1}^n \langle A(e_i), e_i \rangle \right) \\ &= -n \left\langle a^\top, \sum_{j=1}^n e_j(H) e_j \right\rangle \\ &= -n \langle a^\top, \nabla H \rangle = -n \langle a, \nabla H \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos, então, que

$$\Delta \langle N, a \rangle = nH \langle \varphi, a \rangle + |A|^2 \langle N, a \rangle - n \langle a, \nabla H \rangle. \quad (4.2)$$

Assim, por (4.1) e (4.2), temos:

$$\begin{aligned} \Delta (H \langle \varphi, a \rangle + \langle N, a \rangle) &= \Delta H \langle \varphi, a \rangle + \Delta \langle N, a \rangle \\ &= H \Delta \langle \varphi, a \rangle + \langle \varphi, a \rangle \Delta H + 2 \langle \nabla H, \nabla \langle \varphi, a \rangle \rangle + \Delta \langle N, a \rangle \\ &= -nH \langle \varphi, a \rangle - nH^2 \langle N, a \rangle + \langle \varphi, a \rangle \Delta H + 2 \langle \nabla H, \nabla \langle \varphi, a \rangle \rangle \\ &\quad + nH \langle \varphi, a \rangle + |A|^2 \langle N, a \rangle - n \langle \nabla H, a \rangle \\ &= (|A|^2 - nH^2) \langle N, a \rangle + \langle \varphi, a \rangle \Delta H - (n-2) \langle \nabla H, a \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

integrando ambos os lados da expressa obtida em (4.3) obtemos

$$\int_{\Sigma} \Delta (H \langle \varphi, a \rangle + \langle N, a \rangle) d\Sigma = \int_{\Sigma} (|A|^2 - nH^2) \langle N, a \rangle + \langle \varphi, a \rangle \Delta H - (n-2) \langle \nabla H, a \rangle d\Sigma.$$

Pela compacidade da hipersuperfície, usando o Teorema do divergente o lado esquerdo dessa igualdade é identicamente nulo. Com efeito,

$$\int_{\Sigma} \Delta (H \langle \varphi, a \rangle + \langle N, a \rangle) d\Sigma = \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial (H \langle \varphi, a \rangle + \langle N, a \rangle)}{\partial \eta} d\Sigma = 0,$$

onde  $\eta$  é o vetor normal unitário exterior a  $\Sigma^n$ . Desse modo, temos

$$0 = \int_{\Sigma} (|A|^2 - nH^2) \langle N, a \rangle + \langle \varphi, a \rangle \Delta H - (n-2) \langle \nabla H, a \rangle d\Sigma. \quad (4.4)$$

Utilizando novamente o Teorema do divergente, sob a forma da 1ª identidade de Green, observamos que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle \nabla \langle \varphi, a \rangle, \nabla H \rangle + \langle \varphi, a \rangle \Delta H d\Sigma &= \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial H \langle \varphi, a \rangle}{\partial \eta} d\Sigma = 0 \\ \int_{\Sigma} \langle \varphi, a \rangle \Delta H d\Sigma &= - \int_{\Sigma} \langle \nabla \langle \varphi, a \rangle, \nabla H \rangle d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} \langle \nabla H, a \rangle d\Sigma. \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever (4.4) como

$$0 = \int_{\Sigma} (|A|^2 - nH^2) \langle N, a \rangle - (n-1) \langle \nabla H, a \rangle d\Sigma. \quad (4.5)$$

Sabendo que o tensor de umbilicidade  $|\phi|^2 = |A|^2 - nH^2 \geq 0$ , tem-se que  $|A|^2 \geq nH^2$  e sendo  $|N|^2 = |a|^2 = -1$  com  $N_0 \geq 1$  e  $a_0 \leq -1$  temos que  $\langle N, a \rangle \geq 1$ , donde (4.5) fica

$$\int_{\Sigma} \langle \nabla H, a \rangle \geq 0,$$

de modo que a igualdade vale se, e somente se,  $|A|^2 - nH^2 = 0$ , isto é, o tensor de umbilicidade é igual a zero o que implica que  $\varphi$  é umbílica. ■

O próximo resultado também foi provado por Montiel [21] e segue como uma consequência imediata do lema anterior. Vide o seguinte resultado.

**Teorema 4.1** *Seja  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em um espaço de de Sitter. Se  $\varphi$  tem curvatura média  $H$  constante, então  $\varphi$  é umbílica.*

**Demonstração.** Basta ver que, sendo  $H$  constante,  $\nabla H = 0$ , logo  $\int_{\Sigma} \langle \nabla H, a \rangle d\Sigma = 0$ , para todo  $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$  com  $|a|^2 = -1$  e  $a_0 \leq -1$ . O resultado segue do Lema 4.1. ■

Segue abaixo um teorema inicialmente provado por Akutagawa (veja Teorema 0.3), mas daremos aqui uma demonstração desse mesmo fato devida a Montiel.

**Teorema 4.2** *Seja  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$  uma hipersuperfície tipo-espaço completa em um espaço de de Sitter com curvatura média  $H$  constante satisfazendo  $H^2 < \frac{4(n-1)}{n^2}$ . Então  $\varphi$  é umbílica.*

**Demonstração.** Se  $k$  é um autovalor do operador de Weingarten então, pela equação de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned}\text{Ric}(v) &= (n-1)\langle v, v \rangle - nHk\langle Av, v \rangle + \langle A^2v, v \rangle \\ &= (n-1)|v|^2 - nHk|v|^2 + k^2|v|^2 \\ &= (n-1 - nHk + k^2)|v|^2,\end{aligned}$$

ou seja,  $n-1 - nHk + k^2$  é um autovalor do operador de Ricci. Além disso, é fácil verificar que o discriminante de  $k^2 - nHk + n-1$  é dado por  $n^2H^2 - 4(n-1) < 0$  donde temos  $k^2 - nHk + n-1 > 0$ . Desse modo, fazendo uma simples derivação nesse polinômio e igualando a zero obtemos que  $k = \frac{nH}{2}$ . Assim, vemos que  $k^2 - nHk = n-1$  assume seu valor de mínimo em  $k = \frac{nH}{2}$ , isto é,

$$k^2 - nHk + n-1 \geq \frac{n^2H^2}{4} - \frac{n^2H^2}{2} + n-1 = n-1 - \frac{n^2H^2}{4}.$$

Portanto,  $\text{Ric}(v) \geq n-1 - \frac{n^2H^2}{4} > 0$  para todo  $v$  tangente a  $\Sigma^n$  e  $|v| = 1$ . Pelo Teorema de Bonnet-Myers temos que  $\Sigma^n$  é compacta. Por fim, pelo [Teorema 4.1](#) concluímos o resultado. ■

O próximo teorema é da autoria de Ki, Kim e Nakagawa [[15](#)] o qual versa sobre hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante imersa em um espaço de forma Lorentziano. Eis enunciado juntamente com a sua demonstração:

**Teorema 4.3** (Ki-Kim-Nakagawa) *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média  $H$  constante de um espaço de forma Lorentziano  $\mathbb{L}_c^{n+1}$ . Se ela satisfaz uma das propriedades abaixo:*

- (i)  $c \leq 0$ ,
- (ii)  $c > 0, n \geq 3$  e  $H^2 \geq 4(n-1)c$ ,
- (iii)  $c > 0, n = 2$  e  $H^2 > 4c$ .

Então,  $|A|^2 \leq S_+(1)^2$  em que

$$S_+(1)^2 = -nc + \frac{h \left( nh + (n-2)\sqrt{h^2 - 4(n-1)c} \right)}{2(n-1)},$$

onde  $h = nH$ .

**Demonstração.** Considere uma função  $f$  não negativa tal que  $f^2 = \text{tr}\phi^2$ , isto é,

$$f^2 = \text{tr}\phi^2 = \text{tr}A^2 - nH^2 = -h_2 - \frac{h^2}{n},$$

onde denotamos  $\text{tr}A^2 = |A|^2$  por  $-h_2$ . Desde que  $H$  é constante, temos que  $\frac{1}{2}\Delta f^2 = \frac{1}{2}\Delta(-h_2) = \frac{1}{2}\Delta|A|^2$ . Temos então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta(-h_2) &= |\nabla A|^2 + cn(|A|^2 - nH^2) + |A|^4 - nH\text{tr}(A^3) \\ &\geq cn(|A|^2 - nH^2) + |A|^4 - nH\text{tr}(A^3) \\ &= cn\left(-h_2 - \frac{h^2}{n}\right) + h_2^2 - h\text{tr}(A^3) \\ &= cnf^2 + \left(f^2 + \frac{h^2}{n}\right)^2 - h\text{tr}(A^3) \\ &= cnf^2 + \left(f^2 + \frac{h^2}{n}\right)^2 - h(\text{tr}(\phi^3) + 3H|\phi|^2 + nH^3) \\ &= cnf^2 + \left(f^2 + \frac{h^2}{n}\right)^2 - h\left(\text{tr}(\phi^3) + \frac{3h}{n}(f^2) + \frac{h^3}{n^2}\right) \\ &= cnf^2 + f^4 + \frac{2h^2f^2}{n} + \frac{h^4}{n^2} - h\text{tr}(\phi^3) - \frac{3h^2}{n}f^2 - \frac{h^4}{n^2} \\ &= f^2\left(cn - \frac{h^2}{n} + f^2\right) - h\text{tr}(\phi^3). \end{aligned}$$

Assim, obtemos  $\frac{1}{2}\Delta(-h_2) \geq f^2\left(cn - \frac{h^2}{n} + f^2\right) - h\text{tr}(\phi^3)$ . Sendo  $b_1, \dots, b_n$  os autovalores de  $\phi$ , uma vez que  $\text{tr}\phi = 0$ , temos que  $\sum_{i=1}^n b_i = 0$  e, para algum  $k > 0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\sum_{i=1}^n b_i^2 = k^2$ , pela desigualdade de Okumura, vemos que

$$\left|\sum_{i=1}^n b_i^3\right| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}k^3.$$

Desde que  $f$  é não negativa, temos que  $-|h|\text{tr}(\phi^3) \geq \frac{-(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}f^3|h|$ , ganhando que

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 \geq f^2\left(f^2 - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|h|f + nc - \frac{h^2}{n}\right).$$

Sejam  $a > 0 \in \mathbb{R}$  e  $F = \frac{1}{\sqrt{f^2 + a}}$ . Note que  $0 < F \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ . Como  $\Sigma^n$  é tipo-espaço com curvatura média  $H$  constante temos que a curvatura de Ricci é limitada por baixo como visto em (2.28). Aplicando o princípio do Máximo de Omori-Yau em  $F$ , conseguimos uma

sequência  $\{p_k\}$  tal que:

$$|\nabla F(p_k)| < \frac{1}{k}, \Delta F(p_k) > -\frac{1}{k} \text{ e } \inf F + \frac{1}{k} > F(p_k). \quad (4.6)$$

Perceba que  $f^2 = \frac{1}{F^2} - a$ . Desse modo, vemos que  $\frac{1}{2}\Delta f^2 = \frac{1}{2}\Delta \frac{1}{F^2}$ . Assim, obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta \frac{1}{F^2} = \frac{-\Delta F}{F^3} + 3 \left| \frac{\nabla F}{F^2} \right|^2,$$

da igualdade acima e de (4.6) temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F^4(p_k)\Delta f^2(p_k) &= F^4(p_k) \left( \frac{-\Delta F(p_k)}{F^3(p_k)} + 3 \left| \frac{\nabla F(p_k)}{F^2(p_k)} \right|^2 \right) \\ &= -F(p_k)\Delta F(p_k) + 3|\nabla F(p_k)|^2 < \frac{3}{k^2} + \frac{F(p_k)}{k}. \end{aligned}$$

Como  $F$  é limitada, temos que o lado direito vai para 0 quando  $k \rightarrow \infty$ . Não é difícil checar que quando isso ocorre,  $F(p_k) \rightarrow \inf F = F_0$  e  $f(p_k) \rightarrow \sup f = f_0$ . Para  $k$  suficientemente grande, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$F^4(p_k)\Delta f^2(p_k) < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Delta f^2(p_k) < \varepsilon f^4(p_k) + 2\varepsilon a f^2(p_k) + \varepsilon a^2 \Leftrightarrow$$

$$0 > (2 - \varepsilon)f^4(p_k) \frac{-2(n-2)|h|}{\sqrt{n(n-1)}} f^3(p_k) + 2f^2(p_k) \left( nc - \frac{h^2}{n} - \varepsilon a \right) - \varepsilon a^2.$$

Destarte, temos que  $\{f(p_k)\}$  é limitada e quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos que  $\limsup \Delta f^2(p_k) \leq 0$ .

Assim, obtemos que

$$0 \geq f_0^2 \left( f_0^2 - \frac{(n-2)|h|f_0}{\sqrt{n(n-1)}} + nc - \frac{h^2}{n} \right). \quad (4.7)$$

Considerando qualquer uma das três condições da hipótese, (i), (ii) ou (iii) e assumindo, sem perda de generalidade, que  $h > 0$ , podemos analisar a segunda parcela de (4.7) como uma função quadrática, de modo que seu discriminante é dado por

$$\frac{n^2(h^2 - 4(n-1)c)}{n(n-1)}.$$

O que nos permite encontrar a seguinte igualdade:

$$f_0 = \frac{(n-2)h + n\sqrt{h^2 - 4(n-1)c}}{2\sqrt{n(n-1)}},$$

desde que  $|A|^2 = -h_2 = f^2 + \frac{h^2}{n}$  e  $f \leq f_0$ , a desigualdade abaixo torna-se um exercício simples de ser verificado, embora, talvez, um pouco demorado.

$$|A|^2 \leq f_0^2 + \frac{h^2}{n},$$



donde

$$|A|^2 \leq -nc + \frac{h \left( nh + (n-2)\sqrt{h^2 - 4(n-1)c} \right)}{2(n-1)}.$$

■

Exibiremos mais dois teoremas que serão de grande valia no decorrer da argumentação necessária para estabelecer os resultados do [Capítulo 5](#). Abaixo encontram-se o [Teorema 4.4](#) e o [Teorema 4.5](#).

**Teorema 4.4** (*Calabi-Cheng-Yau*) *Se  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície tipo-espaço completa máxima do espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ , então  $\Sigma^n$  é um hiperplano tipo-espaço.*

**Teorema 4.5** (*Ishihara*) *As subvariedades  $\mathbb{H}_{n_1, \dots, n_{p+1}}$  em  $\mathbb{H}_p^{n+p}(1)$  são as únicas subvariedades tipo-espaço completas maximais de dimensão  $n$  em  $\mathbb{H}_p^{n+p}(1)$  satisfazendo  $|A|^2 = np$ . Aqui denotamos  $\mathbb{H}_{n_1, \dots, n_{p+1}}$  por*

$$\mathbb{H}^{n_1} \left( \sqrt{\frac{n_1}{n}} \right) \times \dots \times \mathbb{H}^{n_{p+1}} \left( \sqrt{\frac{n_{p+1}}{n}} \right).$$

Tanto a demonstração do [Teorema 4.4](#) e quanto a do [Teorema 4.5](#) fogem dos propósitos desta dissertação. Por esta razão não exibiremos as provas desses teoremas. Entretanto, dado o grau de relevância desses resultados, indicamos como leitura opcional e complementar, os artigos encontrados em [\[6\]](#) e [\[8\]](#) para tratar do [Teorema 4.4](#) e em [\[14\]](#) para o [Teorema 4.5](#).

# Capítulo 5

## Resultados Principais

Neste último capítulo enfim cumpriremos a promessa de enunciar e demonstrar os dois teoremas principais desse estudo. Como dito anteriormente, ambos os teoremas versam sobre resultados de caracterização de hipersuperfícies em um ambiente Lorentziano. Tudo que foi escrito desde o primeiro capítulo será utilizado aqui - de maneira explícita ou implícita - para a construção, argumentação e arremate das provas dos resultados aqui presentes. Para uma melhor leitura dividiremos este capítulo em duas seções, destinando uma para cada teorema.

### 5.1 No Espaço de de Sitter

**Teorema 5.1** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em um espaço de de Sitter  $\mathbb{S}_1^{n+1}$  com curvatura média constante. Se o operador de umbilicidade total  $\phi$  satisfaz*

$$|\mathrm{tr}\phi^3| \leq \frac{(n-2p)|\phi|^3}{\sqrt{np(n-p)}},$$

para algum  $1 \leq p < \frac{n}{2}$ , então

(i)  $\sup |\phi| = 0$  e  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica,

(ii) ou  $H^2 \geq \frac{4p(n-p)}{n^2}$  e  $\beta_{|H|,p,1} \leq \sup |\phi| \leq \hat{\beta}_{|H|,p,1}$ , onde

$$\hat{\beta}_{|H|,p,1} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left( (n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right)$$

e

$$\beta_{|H|,p,1} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left( (n-2p)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right).$$

Além disso, se  $\frac{4p(n-p)}{n^2} \leq H^2 < 1$  então  $\beta_{|H|,p,1} > 0$  e a igualdade  $\sup |\phi| = \beta_{|H|,p,1}$  vale. Além disso, o supremo é atingido em algum ponto de  $\Sigma^n$  se, e somente se,  $\Sigma^n$  é um cilindro hiperbólico  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$  com

$$r = \sqrt{\frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)}} \geq \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n-2p}}.$$

**Demonstração.** Sabendo que  $\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + |\phi|^4 - nH\text{tr}\phi^3 - n(H^2 - 1)|\phi|^2$ , como  $-nH\text{tr}\phi^3 \geq -n|H||\text{tr}\phi^3|$  e sendo  $|\text{tr}\phi^3| \leq \frac{(n-2p)|\phi|^3}{\sqrt{np(n-p)}}$ , então observe que  $-n|H||\text{tr}\phi^3| \geq \frac{-n(n-2p)}{\sqrt{np(n-p)}}|H||\phi|^3$ . Assim, obtemos que

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^4 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{np(n-p)}}|H||\phi|^3 - n(H^2 - 1)|\phi|^2 \geq |\phi|^2 P_{|H|,p,1}(|\phi|),$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\phi|^2 P_{|H|,p,1}(|\phi|), \quad (5.1)$$

onde  $P_{|H|,p,1}$  é o polinômio dado por

$$P_{|H|,p,1}(x) = x^2 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{np(n-p)}}|H|x - n(H^2 - 1).$$

Se  $H^2 < \frac{4(n-1)}{n^2}$ , segue do [Teorema 4.2](#) que  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica. Nesse caso, levando em conta a classificação de hipersuperfícies tipo-espaço totalmente umbílicas do espaço de de Sitter devida a Montiel, nós concluímos que  $\Sigma^n$  deve ser isométrica a uma esfera Euclidiana.

Por outro lado, se  $H^2 \geq \frac{4(n-1)}{n^2}$ , segue do [Teorema 4.3](#) que  $|A|^2 \leq (S_+(1))^2$  e como  $-nH^2 \leq -\frac{4(n-1)}{n}$ , temos  $|\phi|^2 = |A|^2 - nH^2 \leq (S_+(1))^2 - \frac{4(n-1)}{n}$ , logo  $|\phi|^2$  é limitado. Pelo que estamos supondo de  $\Sigma^n$  podemos usar o fato da curvatura de Ricci ser limitada por baixo, visto em (2.28) e concluir que estamos sob as hipóteses do Princípio do Máximo de Omori-Yau.

Destarte, pela [Proposição 1.43](#), existe uma sequência  $\{p_k\} \subset \Sigma^n$  tal que

$$\lim |\phi|(p_k) = \sup |\phi| \text{ e } \Delta|\phi|^2(p_k) < \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

o que implica por (5.1) que

$$\frac{1}{2k} > \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2(p_k) \geq |\phi|^2(p_k) P_{|H|,p,1}(|\phi|(p_k)).$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , temos que

$$0 \geq (\sup |\phi|)^2 P_{|H|,p,1}(\sup |\phi|).$$

Uma análise imediata revela que

- $P_{|H|,p,1} > 0$  implica que  $\sup(|\phi|^2) = 0$ , donde  $|\phi| = 0$  e a hipersuperfície é totalmente umbílica.

ou

- $\sup |\phi| > 0$  e  $P_{|H|,p,1}(\sup(|\phi|)) \leq 0$ .

Com respeito a este último caso, quando  $\frac{4(n-1)}{n^2} \leq H^2 < \frac{4p(n-p)}{n^2}$  obtêm-se que  $P_{|H|,p,1}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Com efeito, uma vez que ainda estamos considerando  $\frac{4(n-1)}{n^2} \leq H^2$ , para que se tenha  $P_{|H|,p,1} > 0$  basta que o discriminante associado ao polinômio  $P_{|H|,p,1}$  seja menor que zero. Um simples cálculo desse discriminante nos permite checar que

$$\frac{n^4 H^2 - 4n^2 p(n-p)}{np(n-p)} < 0 \text{ se, e somente se } H^2 < \frac{4p(n-p)}{n^2}, \text{ donde}$$

$$\frac{4(n-1)}{n^2} \leq H^2 < \frac{4p(n-p)}{n^2}.$$

Concluimos que devemos ter  $H^2 \geq \frac{4p(n-p)}{n^2}$ . Em verdade, não é difícil verificar que se  $H^2 = \frac{4p(n-p)}{n^2}$  então  $P_{|H|,p,1}$  possui uma raiz dupla  $\alpha_{|H|,p,1} = \frac{\sqrt{n}(n-2p)|H|}{2\sqrt{p(n-p)}}$ , enquanto que se  $H^2 > \frac{4p(n-p)}{n^2}$ , então  $P_{|H|,p,1}$  desfruta de duas raízes distintas a saber

$$0 < \hat{\beta}_{|H|,p,1} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left\{ (n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right\}$$

e

$$\beta_{|H|,p,1} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left\{ (n-2p)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right\}.$$

Portanto, se  $P_{|H|,p,1}(\sup |\phi|) \leq 0$  então tem-se  $\beta_{|H|,p,1} \leq \sup |\phi| \leq \hat{\beta}_{|H|,p,1}$ . Além disso, se  $\frac{4p(n-p)}{n^2} \leq H^2 < 1$ , então  $\beta_{|H|,p,1} > 0$ . De fato, perceba que

$$\begin{aligned} \beta_{|H|,p,1} > 0 &\Leftrightarrow (n-2p)|H| > \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \\ &\Leftrightarrow (n^2 - 4np + 4p^2)H^2 > n^2 H^2 - 4np + 4p^2 \\ &\Leftrightarrow n^2 H^2 - 4npH^2 + 4p^2 H^2 > n^2 H^2 - 4np + 4p^2 \\ &\Leftrightarrow 4pH^2(-n+p) > 4p(-n+p) \\ &\Leftrightarrow H^2(-n+p) > (-n+p) \\ &\Leftrightarrow H^2 < \frac{-n+p}{-n+p} = 1, \end{aligned}$$

donde a última desigualdade é justificada pelo fato de que

$$p < \frac{n}{2} \Rightarrow p < 2p < n \Rightarrow -n + p < 0.$$

Agora, vamos assumir que a igualdade  $\sup |\phi| = \beta_{|H|,p,1}$  é válida. Desde que  $P_{|H|,p,1}(|\phi|) \geq 0$ , tem-se, por (5.1),  $\Delta|\phi|^2 \geq 0$ , o que implica no fato de  $|\phi|^2$  ser uma função subharmônica em  $\Sigma^n$ .

Assim, se existe um ponto em  $\Sigma^n$  em que o supremo é atingido, pelo **Princípio do Máximo Forte de Hopf**, temos que  $|\phi|^2$  é constante. Com maior razão,  $|\phi|$  é constante e  $|\phi| = \beta_{|H|,p,1}$ . Atente-se ainda que (5.1) torna-se trivialmente uma igualdade da forma  $0 = 0$ . Um outro aspecto interessante decorrente de  $|\phi| = \beta_{|H|,p,1}$  é que  $|\nabla A| = |\nabla \phi| = 0$ , em outras palavras,  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície isoparamétrica\*.

Além disso, a igualdade em (5.1) implica na igualdade da desigualdade tipo Okumura  $|\text{tr}\phi^3| \leq \frac{(n-2p)|\phi|^3}{\sqrt{np(n-p)}}$ , donde, pelo **Lema 3.2** devido a Meléndez, temos que tal hipersuperfície possui duas curvaturas principais constantes e distintas com multiplicidade  $p$  e  $n-p$ . Destarte, pelo clássico resultado sobre hipersuperfícies isoparamétricas em um espaço de forma Lorentziano (ver Abe, Koike e Yamaguchi [1]) constatamos que  $\Sigma^n$  deve ser um dos produtos abaixo:

$$\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1} \text{ ou } \mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}, \text{ com } r > 0.$$

Analisemos o que acontece em ambos os casos. Para o primeiro, feita uma escolha adequada de um campo de vetores normal (veja **Exemplo 9**),  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$  tem as suas curvaturas principais dadas por

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-p} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \text{ e } \lambda_{n-p+1} = \dots = \lambda_n = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}.$$

No **Exemplo 9** calculamos os valores da curvatura média, do operador de Weingarten e do operador de umbilicidade de  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r)$ . Desse modo, já possuímos conhecimento das seguintes igualdades:

- $H = \frac{nr^2 + p}{nr\sqrt{1+r^2}},$
- $|A|^2 = \frac{nr^4 + 2pr^2 + p}{r^2(1+r^2)},$

---

\*Uma hipersuperfície é dita isoparamétrica quando suas curvaturas principais são todas constantes.

- $|\phi|^2 = \frac{p(n-p)}{nr^2(1+r^2)}$ .

Observe ainda que  $H^2 < 1$  se, e somente se,  $r > \frac{p}{\sqrt{n(n-2p)}}$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
1 > H^2 &\Leftrightarrow 1 > \frac{n^2r^4 + 2npr^2 + p^2}{n^2r^2(1+r^2)} \\
&\Leftrightarrow n^2r^2(1+r^2) > n^2r^4 + 2npr^2 + p^2 \\
&\Leftrightarrow n^2r^2 + n^2r^4 > n^2r^4 + 2npr^2 + p^2 \\
&\Leftrightarrow n^2r^2 > 2npr^2 + p^2 \\
&\Leftrightarrow n(n-2p)r^2 > +p^2 \\
&\Leftrightarrow r^2 > \frac{p^2}{n(n-2p)} \\
&\Leftrightarrow r > \frac{p}{\sqrt{n(n-2p)}}.
\end{aligned}$$

Note que quando  $r = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{(n-2p)}}$ , então  $H^2 = \frac{4p(n-p)}{n^2}$ . De fato,

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{(nr^2 + p)^2}{n^2r^2(1+r^2)} = \frac{\left(\frac{np}{n-2p} + p\right)^2}{\left(\frac{n^2p}{n-2p}\right)\left(1 + \frac{p}{n-2p}\right)} = \frac{\left(\frac{np + (n-2p)p}{n-2p}\right)^2}{\left(\frac{n^2p}{n-2p}\right)\left(\frac{p+n-2p}{n-2p}\right)} \\
&= \frac{(2p(n-p))^2}{\frac{(n-2p)^2}{n^2p(n-p)}} = \frac{4p(n-p)}{n^2}.
\end{aligned}$$

Perceba que  $\frac{4p(n-p)}{n^2} < H^2 < 1$  quando  $r \neq \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n-2p}}$ . Tal afirmação segue da seguinte sequência de equivalências

$$\begin{aligned}
\frac{4p(n-p)}{n^2} < H^2 &\Leftrightarrow \frac{4p(n-p)}{n^2} < \frac{(nr^2+p)^2}{n^2r^2(1+r^2)} \\
&\Leftrightarrow r^2(1+r^2)4p(n-p) < (nr^2+p)^2 \\
&\Leftrightarrow 4npr^2 - 4p^2r^2 + 4npr^4 - 4p^2r^4 < n^2r^4 + 2npr^2 + p^2 \\
&\Leftrightarrow 2pr^2(n-2p) - p^2 < r^4(n-2p)^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < r^4(n-2p)^2 - 2pr^2(n-2p) + p^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < (r^2(n-2p) - p)^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \neq r^2(n-2p) - p \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n-2p}} \neq r.
\end{aligned}$$

Mais ainda, se  $H^2 \in \left(\frac{4p(n-p)}{n^2}, 1\right)$  então existem dois valores distintos de  $r > \frac{p}{\sqrt{n(n-2p)}}$  com a mesma curvatura média constante  $H^2$  dadas por

$$\frac{p^2}{n(n-2p)} < r^2 = \frac{nH^2 - 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)} < \frac{p}{n-2p} \quad (5.2)$$

e

$$\frac{p}{n-2p} < r^2 = \frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)}. \quad (5.3)$$

Provemos tal afirmação. Tendo  $H^2 \in \left(\frac{4p(n-p)}{n^2}, 1\right)$  então  $r^2 > \frac{p}{n-2p}$  ou  $r^2 < \frac{p}{n-2p}$ , donde temos que  $\frac{p^2}{n(n-2p)} < r^2 < \frac{p}{n-2p}$  ou  $\frac{p}{n-2p} < r^2$ . Valendo-se de algumas manipulações algébricas, do fato de que  $H = \frac{nr^2+p}{nr\sqrt{1+r^2}}$ , elevando ambos os lados ao quadrado, encontramos que  $H^2 = \frac{(nr^2+p)^2}{n^2r^2(1+r^2)}$ , o que implica na seguinte identidade

$$r^4n^2(1-H^2) + r^2(2np - n^2H^2) + p^2 = 0.$$

Resolvendo essa equação biquadrada obtemos as seguintes quantidades:

$$\frac{nH^2 - 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)}$$

e

$$\frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)},$$

em que a primeira é estritamente menor que a segunda. Provaremos agora as desigualdades mencionadas em (5.2) e em (5.3). Suponha por contradição que a desigualdade em (5.3) não ocorre, logo nos resta que

$$\frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)} < \frac{p}{n-2p}.$$

Desde que

$$\frac{nH^2 - 2p}{2n(1-H^2)} \leq \frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)},$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{nH^2 - 2p}{2n(1-H^2)} &< \frac{p}{n-2p} \\ (n-2p)(nH^2 - 2p) &< 2np(1-H^2) \\ n^2H^2 - 2np - 2npH^2 + 4p^2 &< 2np - 2npH^2 \\ n^2H^2 &< 4np - 4p^2 \\ H^2 &< \frac{4p(n-p)}{n^2}. \end{aligned}$$

Entretanto, estamos supondo  $\frac{4p(n-p)}{n^2} < H^2$ . Concluimos então que a desigualdade em (5.3) é verdadeira. Para as desigualdades em (5.2) veja que já temos conhecimento da seguinte desigualdade

$$\frac{p^2}{n(n-2p)} < r^2 = \frac{nH^2 - 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)}.$$

Para provar a segunda desigualdade, suponha por contradição que

$$\frac{p}{n-2p} < r^2 = \frac{nH^2 - 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)}.$$

Tendo em vista que estamos supondo  $r \neq \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n-2p}}$  e  $H^2 < 1$ , vemos que

$$r^4n^2(1-H^2) + r^2(2np - n^2H^2) + p^2,$$

quando vista como um polinômio biquadrado, possui uma parábola com concavidade voltada para cima. Tomando  $\varepsilon > 0$  tal que  $\frac{p+\varepsilon}{n-2p} < r^2 = \frac{nH^2 - 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)}$

obtemos:

$$\frac{(p+\varepsilon)^2n^2(1-H^2)}{(n-2p)^2} + \frac{(p+\varepsilon)(2np - n^2H^2)}{n-2p} + p^2 > 0,$$

onde fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos

$$n^2p^2 - n^2p^2H^2 + 2n^2p^2 - n^3pH^2 - 4np^3 + 2n^2p^2H^2 + n^2p^2 - 4np^3 + 4p^4 \geq 0,$$



isto é,

$$H^2 n^2 p(n-p) \leq 4n^2 p^2 - 8np^3 + 4p^4.$$

Assim, vemos que  $H^2 \leq \frac{4p(n-p)}{n^2}$  o que contradiz o fato de que  $H^2 > \frac{4p(n-p)}{n^2}$ , logo as desigualdades em (5.2) são verdadeiras.

Desse modo, com tudo que já foi mostrado acima, concluímos o desejado, ou seja:

$$\frac{p^2}{n(n-2p)} < r^2 = \frac{nH^2 - 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)} < \frac{p}{n-2p}$$

e

$$\frac{p}{n-2p} < r^2 = \frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)}.$$

Substituindo (5.2) em (2.18), podemos escrever

$$|\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left( (n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)} \right).$$

Com efeito, sendo  $|\phi|^2 = \frac{p(n-p)}{nr^2(1+r^2)}$  primeiro iremos encontrar o valor de  $\frac{1}{r^2(1+r^2)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2(1+r^2)} &= \frac{1}{\left( \frac{nH^2 - 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)} \right) \left( 1 + \frac{nH^2 - 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)} \right)} \\ &= \frac{(2n(1-H^2))^2}{\left( (n-2p)|H| - \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)} \right)^2}. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
|\phi| &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{nr^2(1+r^2)}} = \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{r^2(1+r^2)}} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{2n(1-H^2)}{\left((n-2p)|H| - \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(1-H^2)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)}{(n-2p)^2H^2 - \left(\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(1-H^2)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)}{n^2H^2 - 4npH^2 + 4p^2H^2 - n^2H^2 + 4p(n-p)} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(1-H^2)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)}{-H^24p(n-p) + 4p(n-p)} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(1-H^2)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)}{4p(n-p)(1-H^2)} \\
&= \frac{2n\sqrt{p(n-p)}}{4p\sqrt{n}(n-p)} \frac{(1-H^2) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)}{(1-H^2)} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right).
\end{aligned}$$

Isto é,  $|\phi| = \hat{\beta}_{|H|,p,1} > \beta_{|H|,p,1}$ . Agora, substituindo (5.3) em (2.18), de maneira análoga, encontramos que

$$|\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| - \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right).$$

Nesse caso temos que  $|\phi| = \beta_{|H|,p,1}$ , onde vale a igualdade  $\sup |\phi| = \beta_{|H|,p,1}$ . Concluimos, então, que tal igualdade é válida para  $r^2 \geq \frac{p}{n-2p}$ .

Por outro lado, para o segundo caso feita uma escolha de um campo de vetores normal (veja Exemplo 10),  $\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r)$  tem as suas curvaturas principais dadas por

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \text{ e } \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r}.$$

Ainda no Exemplo 10 nós calculamos o valor da curvatura média de  $\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r)$  como sendo

$$H = \frac{nr^2 + n - p}{nr\sqrt{1+r^2}},$$

donde temos:

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{(nr^2 + n - p)^2}{n^2r^2(1 + r^2)} \\
&= \frac{n^2r^4 + 2n^2r^2 - 2npr^2 + (n - p)^2}{n^2r^2(1 + r^2)} \\
&= \frac{n^2r^2(1 + r^2)}{n^2r^2(1 + r^2)} + \frac{nr^2(n - 2p)}{n^2r^2(1 + r^2)} + \frac{(n - p)^2}{n^2r^2(1 + r^2)} \\
&= 1 + \frac{n - 2p}{n(1 + r^2)} + \frac{(n - p)^2}{n^2r^2(1 + r^2)} > 1.
\end{aligned}$$

A última desigualdade segue do fato de  $(n - p)^2 > 0$  e  $n - 2p > 0$ , já que  $p < \frac{n}{2}$ . Como  $\beta_{|H|,p,1} > 0$  se, e somente se,  $H^2 < 1$ , temos que  $\beta_{|H|,p,1} < 0$  o que implica em  $\sup |\phi| > \beta_{|H|,p,1}$  e a igualdade nunca acontece. Isto prova o teorema.  $\blacksquare$

## 5.2 Nos Espaços de Forma Lorentzianos

**Teorema 5.2** *Seja  $\Sigma^n$  uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em um espaço de forma Lorentziano  $\mathbb{L}_c^{n+1}$ ,  $c \in \{0, 1, -1\}$ , com curvatura média constante  $H$ . Se o operador de umbilicidade total  $\phi$  satisfaz*

$$|\text{tr}\phi^3| \leq \frac{(n - 2p)|\phi|^3}{\sqrt{np(n - p)}},$$

para algum  $1 \leq p < \frac{n}{2}$ , então

(i)  $\sup |\phi| = 0$  e  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície totalmente umbílica,

(ii) ou  $\sup |\phi| \leq \hat{\beta}_{|H|,p,c}$  onde

$$\hat{\beta}_{|H|,p,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n - p)}} \left( (n - 2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4pc(n - p)} \right).$$

Além disso, se  $|\phi| = \hat{\beta}_{|H|,p,c}$  vale, então:

(a)  $c = 0$  e  $\Sigma^n$  é um cilindro hiperbólico  $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ , com  $r = \frac{p}{n|H|} > 0$ ;

(b)  $c = 1$  e  $\Sigma^n$  é um cilindro hiperbólico  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1 + r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ , tal que  $r = \frac{p}{\sqrt{n(n - p)}} > 0$ , se  $H^2 = 1$ , ou

$$\frac{p}{\sqrt{n(n - 2p)}} < r = \sqrt{\frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n - p)}}{2n(1 - H^2)}} \leq \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n - 2p}},$$

quando  $H^2 < 1$ , ou

$$r = \sqrt{\frac{2p - nH^2 + |H|\sqrt{n^2H^2 - 4p(n - p)}}{2n(H^2 - 1)}} \leq \frac{p}{\sqrt{n(n - 2p)}},$$

quando  $H^2 > 1$ ;

(c)  $c = -1$  e  $\Sigma^n$  é um cilindro hiperbólico maximal

$$\mathbb{H}^{n-p} \left( \frac{\sqrt{n-p}}{\sqrt{p}} \right) \times \mathbb{H}^p \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} \right) \subset \mathbb{H}_1^{n+1},$$

ou um cilindro hiperbólico  $\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{H}_1^{n+1}$  com

$$r = \sqrt{\frac{nH^2 + 2p - |H|\sqrt{n^2H^2 + 4p(n-p)}}{2n(1+H^2)}} \leq \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n}}.$$

**Demonstração.** Temos, quase que imediatamente, a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\phi|^2 P_{|H|,p,c}(|\phi|), \quad (5.4)$$

onde  $P_{|H|,p,c}$  é o polinômio dado por

$$P_{|H|,p,c}(x) = x^2 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{np(n-p)}}|H|x - n(H^2 - c).$$

A demonstração desse fato é, sem maiores complicações, análoga à que foi feita em (5.1).

Entretanto, por cortesia, faremos novamente. Por (3.8) temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + |\phi|^4 - nH\text{tr}(\phi^3) - n(H^2 - c)|\phi|^2.$$

Temos ainda pela desigualdade de Okumura que  $|\text{tr}\phi^3| \leq \frac{(n-2p)|\phi|^3}{\sqrt{np(n-p)}}$ , o que implica em  $-n|H||\text{tr}\phi^3| \geq -\frac{n(n-2p)}{\sqrt{np(n-p)}}|H||\phi|^3$ . Basta agora concluir que

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^4 - \frac{n(n-2p)}{\sqrt{np(n-p)}}|H||\phi|^3 - n(H^2 - c)|\phi|^2,$$

donde, concluímos (5.4).

Para o caso em que  $c = 1$ , a prova do Teorema 5.1 já mostrou a veracidade da primeira parte do Teorema 5.2. Sendo assim, consideremos, por hora, os casos em que  $c = 0$  e  $c = -1$ . Desse modo, temos que  $H^2 - c \geq 0$  e, conseqüentemente, o discriminante de  $P_{|H|,p,c}$  é não-negativo uma vez que ele é dado por

$$\frac{n^2(n-2p)^2H^2 + 4n^2p(H^2 - c)(n-p)}{np(n-p)}.$$

Note que tal discriminante é 0 quando  $H = c = 0$  e positivo nos demais casos. Um cálculo direto mostra que  $P_{|H|,p,c}$  possui uma única raiz não-negativa dada por:

$$\hat{\beta}_{|H|,p,c} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left( (n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4pc(n-p)} \right).$$

Novamente pelo [Teorema 4.3](#), temos que  $|A|^2 \leq S_+(1)^2$ , o que acarreta em  $|\phi|^2$  ser limitada, uma vez que  $nH^2$  é constante. Daí, pelo [Princípio do Máximo de o Omori-Yau](#) temos que existe uma sequência  $\{q_k\} \subset \Sigma^n$  que cumpre as seguintes condições:

$$\lim |\phi|(q_k) = \sup |\phi| \text{ e } \Delta|\phi|^2(q_k) < \frac{1}{k}.$$

Pelos mesmos argumentos utilizados na demonstração do teorema anterior, concluímos que  $0 \geq (\sup |\phi|)^2 P_{|H|,p,c}(\sup |\phi|)$ . Nessa direção, os possíveis cenários para esse supremo são  $\sup |\phi| = 0$ , acarretando que  $\Sigma^n$  é totalmente umbílica, ou  $\sup |\phi| > 0$  e  $P_{|H|,p,c}(\sup |\phi|) \leq 0$ . Para esse último caso, em particular, quando  $c = 0$ , segue do [Teorema 4.4](#) devido a Calabi [6], Cheng e Yau [8] que deve-se ter, obrigatoriamente,  $H \neq 0$ .

Com efeito, suponha por absurdo que  $H = 0$ . Temos então que  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície tipo-espaço completa máxima do espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ , pois  $c = 0$ . Pelo [Teorema 4.4](#) concluímos que  $\Sigma^n$  é um hiperplano tipo-espaço, donde uma hipersuperfície totalmente geodésica e, portanto,  $A = 0$ . Assim, teríamos que  $\phi = A - HI = 0$ , o que entra em contradição com o fato de que estamos considerando  $\sup |\phi| > 0$ . Desse modo, para  $c = 0$  ou  $c = -1$  temos

$$0 < \sup |\phi| \leq \hat{\beta}_{|H|,p,c}.$$

Para mostrar isso inicialmente vamos provar uma desigualdade auxiliar. Levando em conta que  $p < \frac{n}{2}$  então temos que  $p < 2p < n$  o que implica em  $n - p > n - 2p > 0$ . Além disso, como  $c = 0$  ou  $c = -1$  obtemos  $n|H| = \sqrt{n^2 H^2} \leq \sqrt{n^2 H^2 - 4pc(n-p)}$ . Assim, tendo em vista que  $\sup |\phi| > 0$ , então  $\sup |\phi| + \hat{\beta}_{|H|,p,c} > \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} ((n-2p)|H| + n|H|)$ . Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} ((n-2p)|H| + n|H|) &= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} (2(n-p)|H|) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(n-p)}} ((n-p)|H|) \\ &= \frac{n}{\sqrt{np(n-p)}} ((n-p)|H|) \\ &\geq \frac{n}{\sqrt{np(n-p)}} ((n-2p)|H|). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\sup |\phi| + \hat{\beta}_{|H|,p,c} > \frac{n}{\sqrt{np(n-p)}} ((n-2p)|H|). \quad (5.5)$$

Entretanto, sabemos que  $\hat{\beta}_{|H|,p,c}$  é raiz de  $P_{|H|,p,c}$  logo  $P_{|H|,p,c}(\sup |\phi|) \leq P_{|H|,p,c}$ . Dessa última desigualdade observamos que

$$(\sup |\phi|)^2 - \hat{\beta}_{|H|,p,c}^2 - \frac{n(n-2p)|H|}{\sqrt{np(n-p)}} \left( \sup |\phi| - \hat{\beta}_{|H|,p,c} \right) \leq 0,$$

o que implica que

$$\left( \sup |\phi| - \hat{\beta}_{|H|,p,c} \right) \left( -\frac{n(n-2p)|H|}{\sqrt{np(n-p)}} + \sup |\phi| + \hat{\beta}_{|H|,p,c} \right) \leq 0,$$

donde  $\sup |\phi| \leq \hat{\beta}_{|H|,p,c}$ , uma vez que, por (5.5), o outro termo desse produto é positivo.

Suponha agora que  $|\phi| = \hat{\beta}_{|H|,p,c}$  é válida. Se  $H = 0$ , o que ocorre apenas quando  $c = -1$ , caso contrário, isto é, se  $c = 0$  e  $H = 0$  teríamos que  $|\phi| = \hat{\beta}_{0,p,0} = 0$  implicando que  $\sup |\phi| = 0$ . Então, pelo Teorema 4.5 devido a Ishira [14] temos ciência de que  $\Sigma^n$  é um cilindro hiperbólico maximal  $\mathbb{H}^{n-p} \left( \frac{\sqrt{n-p}}{\sqrt{p}} \right) \times \mathbb{H}^p \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} \right) \subset \mathbb{H}_1^{n+1}$ , o qual satisfaz  $|\phi| = \hat{\beta}_{0,p,-1} = \sqrt{n}$ .

Se  $H \neq 0$ , assim como na demonstração do Teorema 5.1, mostramos que  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície isoparamétrica com exatas duas curvaturas principais distintas e multiplicidade  $p$  e  $n-p$ . Novamente por Abe, Koike e Yamaguchi [1], concluímos que  $\Sigma^n$  deve ser isométrico a um dos seguintes produtos abaixo:

- (a)  $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$  ou  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^{n-p}(r) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$ , com  $r > 0$ , se  $c = 0$ ;
- (b)  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$  ou  $\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ , com  $r > 0$ , se  $c = 1$ ;
- (c)  $\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{H}_1^{n+1}$ , com  $0 < r < 1$ , se  $c = -1$ .

Analisemos cada um dos três itens acima. Para o item (a), segundo o Exemplo 7 temos que  $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$  com  $r > 0$  tem as curvaturas principais dadas por

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-p} = 0 \text{ e } \lambda_{n-p+1} = \dots = \lambda_n = \frac{1}{r},$$

donde tem-se que

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{p}{nr} \text{ e } |A|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \frac{p}{r^2}.$$

Desde que  $|\phi|^2 = |A|^2 - nH^2$  foi calculado ainda no Exemplo 7, vê-se que

$$|\phi| = \sqrt{\frac{p(n-p)}{nr^2}} = \frac{\sqrt{n(n-p)}}{\sqrt{n^2 r^2 p}} = \frac{\sqrt{n(n-p)}}{\sqrt{p}} |H| = \hat{\beta}_{|H|,p,0},$$

onde a igualdade sempre é verdadeira. Sob outra perspectiva, tendo ainda  $r > 0$ , sabemos do **Exemplo 8** que  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^{n-p}(r) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$  possui as curvaturas principais como seguem

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 \text{ e } \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = \frac{1}{r}.$$

De maneira análoga ao que foi feito acima, ainda sob a luz do **Exemplo 8** determinamos as seguintes quantidades

$$H = \frac{n-p}{nr}, |A|^2 = \frac{n-p}{r^2} \text{ e } |\phi| = \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{n-p}} |H| < \hat{\beta}_{|H|,p,0} = \frac{\sqrt{n(n-p)}}{\sqrt{p(n-p)}} |H|.$$

A última desigualdade vem do fato que  $n-p > \frac{n}{2}$  implica que  $\frac{n-p}{p} > \frac{n}{2p} > \frac{n}{n} = 1$ , pois:

$$\hat{\beta}_{|H|,p,0} = \frac{\sqrt{n(n-p)}}{\sqrt{p(n-p)}} |H| = \frac{\sqrt{np(n-p)}}{(\sqrt{n-p})p} |H| > \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{n-p}} |H| = |\phi|,$$

e assim, a igualdade nunca acontece.

Quanto ao item (b) considerando, em um primeiro momento, o caso do cilindro hiperbólico  $\mathbb{S}^{n-p}(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$  provamos no teorema anterior que  $H^2 \leq 1$  se, e somente se,  $r \geq \frac{p}{\sqrt{n(n-2p)}}$  e que a igualdade  $H^2 = 1$  vale se  $r = \frac{p}{\sqrt{n(n-2p)}}$ . Quando  $H^2 \leq 1$  por (5.2) e (5.3) temos que

$$|\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left( (n-2p)|H| + \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right) = \hat{\beta}_{|H|,p,1},$$

quando

$$\frac{p^2}{n(n-2p)} < r^2 = \frac{nH^2 - 2p - |H|\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)} < \frac{p}{n-2p},$$

onde a igualdade sempre vale. Por outro lado, temos

$$|\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left( (n-2p)|H| - \sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} \right) = \beta_{|H|,p,1} < \hat{\beta}_{|H|,p,1},$$

quando

$$\frac{p}{n-2p} < r^2 = \frac{nH^2 - 2p + |H|\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)}}{2n(1-H^2)},$$

em que a igualdade nunca acontece. Por outro lado, vimos que  $H^2 > 1$  se, e somente se, temos  $r < \frac{p}{\sqrt{n(n-2p)}}$  e sendo  $H^2 = \frac{(nr^2 + n - p)^2}{n^2 r^2 (1 + r^2)}$ , resolvendo tal equação biquadrada encontramos

$$r^2 = \frac{2p - nH^2 + |H|\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)}}{2n(H^2 - 1)}.$$

Desde que  $|\phi|^2 = \frac{p(n-p)}{nr^2(1+r^2)}$  precisamos encontrar  $\frac{1}{r^2(1+r^2)}$  para determinar seu valor. Sem mais delongas, após alguns cálculos, obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{r^2(1+r^2)} = \frac{4n^2(H^2-1)^2}{\left((n-2p)|H| - \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\phi| &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{nr^2(1+r^2)}} = \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{r^2(1+r^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{2n(H^2-1)}{\left(- (n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(H^2-1)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)}{\left(\left(\sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)^2 - (n-2p)^2H^2\right)} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(H^2-1)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right)}{n^2H^2 - 4np + 4p^2 - n^2H^2 + 4npH^2 - 4p^2H^2} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(H^2-1)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 + 4p(n-p)}\right)}{H^24p(n-p) - 4p(n-p)} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(H^2-1)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 + 4p(n-p)}\right)}{4p(n-p)(H^2-1)} \\ &= \frac{2n\sqrt{p(n-p)}}{4p\sqrt{n}(n-p)} \frac{(H^2-1) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 + 4p(n-p)}\right)}{(H^2-1)} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 - 4p(n-p)}\right) = \hat{\beta}_{|H|,p,1}, \end{aligned}$$

e a igualdade também é verificada.

Para o caso do cilindro hiperbólico  $\mathbb{S}^p(\sqrt{1+r^2}) \times \mathbb{H}^{n-p}(r) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$  com  $r > 0$ , mediante o que foi exposto no [Exemplo 10](#) obtemos as seguintes curvaturas principais

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \text{ e } \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r},$$

o que, segundo o [Exemplo 10](#), implica em

$$H = \frac{nr^2 + n - p}{nr\sqrt{1+r^2}} \text{ e } |A|^2 = \frac{nr^4 + 2(n-p)r^2 + n - p}{r^2(1+r^2)},$$

resultando em

$$|\phi|^2 = \frac{p(n-p)}{nr^2(1+r^2)}.$$



Resolvendo a equação biquadrada dada por

$$H^2 = \frac{n^2 r^4 + 2n(n-p)r^2 + (n-p)^2}{n^2 r^2(1+r^2)},$$

encontramos que

$$r^2 = \frac{2(n-p) - nH^2 + |H|\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)}}{2n(H^2 - 1)}.$$

Note que  $nH^2 = |H|\sqrt{n^2 H^2} < |H|\sqrt{n^2 H^2 + 4p(n-p)}$ , donde  $r^2 > 0$ . Iremos agora calcular o valor de  $|\phi|$ . Para tanto sendo  $|\phi|^2 = \frac{p(n-p)}{nr^2(1+r^2)}$  e sendo

$$\frac{1}{r^2(1+r^2)} = \frac{(2n(H^2 - 1))^2}{\left(\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} + (n-2p)|H|\right)^2},$$

temos que

$$\begin{aligned} |\phi| &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{nr^2(1+r^2)}} = \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{r^2(1+r^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{2n(H^2 - 1)}{\left(\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} + (n-2p)|H|\right)} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(H^2 - 1)) \left(\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} - (n-2p)|H|\right)}{\left(\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)}\right)^2 - (n-2p)^2 H^2} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(H^2 - 1)) \left(\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} - (n-2p)|H|\right)}{n^2 H^2 - 4np + 4p^2 - n^2 H^2 + 4npH^2 - 4p^2 H^2} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(H^2 - 1)) \left(\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} - (n-2p)|H|\right)}{H^2 4p(n-p) - 4p(n-p)} \\ &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(H^2 - 1)) \left(\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} - (n-2p)|H|\right)}{4p(n-p)(H^2 - 1)} \\ &= \frac{2n\sqrt{p(n-p)}}{4p\sqrt{n}(n-p)} \frac{(H^2 - 1) \left(\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} - (n-2p)|H|\right)}{(H^2 - 1)} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left(\sqrt{n^2 H^2 - 4p(n-p)} - (n-2p)|H|\right) < \hat{\beta}_{|H|,p,1}. \end{aligned}$$

Por fim, o item (c), isto é, o caso do espaço anti-de Sitter, para  $0 < r < 1$ , temos do **Exemplo 11** que as curvaturas principais de  $\mathbb{H}^{n-p}(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{H}^p(r) \subset \mathbb{H}_1^{n+1}$  são

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-p} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \text{ e } \lambda_{n-p+1} = \dots = \lambda_n = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}.$$

Nesse contexto, determinamos  $H = \frac{nr^2 - p}{nr\sqrt{1 - r^2}}$  e  $|A|^2 = \frac{r^2(nr^2 - 2p) + p}{r^2(1 - r^2)}$ , onde encontramos  $H^2 = \frac{(nr^2 - p)^2}{n^2r^2(1 - r^2)}$ . Desse modo,  $|\phi|^2 = \frac{p(n - p)}{nr^2(1 - r^2)}$ . Os leitores mais perspicazes à essa altura já terão observado que, com um processo extremamente similar ao feito na demonstração do [Teorema 5.1](#), resolvendo essa equação biquadrada encontramos:

$$r^2 = \frac{nH^2 + 2p \pm |H|\sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)}}{2n(1 + H^2)},$$

onde usamos o sinal  $+$  quando  $r^2 > \frac{p}{n}$  e o sinal  $-$  quando  $r^2 \leq \frac{p}{n}$ . Suponha por absurdo que  $r^2 = \frac{nH^2 + 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)}}{2n(1 + H^2)}$ , mas  $r^2 \leq \frac{p}{n}$  então

$$\begin{aligned} \frac{nH^2 + 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)}}{2n(1 + H^2)} &\leq \frac{p}{n} \\ nH^2 + 2p + |H|\sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)} &\leq 2p + 2pH^2 \\ H^2(n - 2p) + |H|\sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)} &\leq 0 \\ |H|\sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)} &\leq -H^2(n - 2p). \end{aligned}$$

Desde que  $|H|\sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)} \geq 0$  e  $-H^2(n - 2p) \leq 0$  e a igualdade só ocorre quando  $H = 0$ , devemos ter  $r^2 > \frac{p}{n}$ . Analogamente é possível mostrar que usamos o sinal  $-$  quando  $r^2 \leq \frac{p}{n}$ .

Sob esse prisma, verifica-se a seguinte igualdade

$$|\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n - p)}} \left( \mp(n - 2p)|H| + \sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)} \right),$$

em que o critério do sinal é o mesmo usado anteriormente. Daremos uma demonstração para o caso em que  $r^2 \leq \frac{p}{n}$ , o outro segue de modo inteiramente análogo.

Com efeito, sendo  $|\phi|^2 = \frac{p(n - p)}{nr^2(1 - r^2)}$  primeiro iremos encontrar o valor de  $\frac{1}{r^2(1 - r^2)}$ . Uma série de cálculos diretos mostram que

$$\frac{1}{r^2(1 - r^2)} = \frac{(2n(1 + H^2))^2}{\left( (n - 2p)|H| - \sqrt{n^2H^2 + 4p(n - p)} \right)^2}.$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
|\phi| &= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{nr^2(1-r^2)}} = \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{r^2(1-r^2)}} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{2n(1+H^2)}{\left(\sqrt{n^2H^2+4p(n-p)} - (n-2p)|H|\right)} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(1+H^2)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2+4p(n-p)}\right)}{\left(\sqrt{n^2H^2+4p(n-p)}\right)^2 - (n-2p)^2H^2} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(1+H^2)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2+4p(n-p)}\right)}{-n^2H^2 + 4npH^2 - 4p^2H^2 + n^2H^2 + 4p(n-p)} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(1+H^2)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2+4p(n-p)}\right)}{H^24p(n-p) + 4p(n-p)} \\
&= \frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{n}} \frac{(2n(1+H^2)) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2+4p(n-p)}\right)}{4p(n-p)(1+H^2)} \\
&= \frac{2n\sqrt{p(n-p)}}{4p\sqrt{n}(n-p)} \frac{(1+H^2) \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2+4p(n-p)}\right)}{(1+H^2)} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left((n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2+4p(n-p)}\right). \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Assim, para  $r^2 > \frac{p}{n}$ , temos que  $|\phi| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{p(n-p)}} \left(- (n-2p)|H| + \sqrt{n^2H^2+4p(n-p)}\right)$ .

Para este caso temos que  $|\phi| < \hat{\beta}_{|H|,p,-1}$ , porém, por (5.6), temos que a igualdade  $|\phi| = \hat{\beta}_{|H|,p,-1}$  é sempre válida. Concluimos, enfim, a demonstração desse Teorema. ■

## Referências Bibliográficas

- [1] Abe, N., Koike, N., Yamaguchi, S., *Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form*, Yokohama Math. J. 35, 1987, 123–136. [80](#), [89](#)
- [2] Akutagawa, K., *On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space*, Math. Z. 196, 1987, 13–19. [2](#)
- [3] Alencar, H., do Carmo, M. P., *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Am. Math. Soc., 120, 1994, 1223–1229. [66](#)
- [4] Aquino, C., de Lima, H., Velásquez, M., *On the geometry of complete spacelike hypersurfaces in the anti-de Sitter space*, Springer. 48, 2014, 13–23. [31](#)
- [5] Brasil, A., Colares, A., Palmas, O., *Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space: a gap theorem*, Ill. J. Math. 47, 2003, 847–866. [3](#)
- [6] Calabi, E., *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math. 15, 1970, 223–230. [76](#), [88](#)
- [7] Caminha, A., *Tópicos de Análise em Variedades*, Nota de aula, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2006. [15](#)
- [8] Cheng, S.Y., Yau, S.T., *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz–Minkowski spaces*, Ann. Math. 104, 1976, 407–419. [76](#), [88](#)
- [9] Colares, A., de Lima, E., de Lima, H., *Characterizations of complete CMC spacelike hypersurfaces satisfying an Okumura type inequality*, Differential Geometry and its Applications, 56, 2018, 295–307. [3](#), [6](#)

- [10] Dajczer, M., et al., *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Houston, 1990. 31
- [11] Dajczer, M., Nomizu, k. , *On flat surfaces in  $\mathbb{S}_1^3$  and  $\mathbb{H}_1^3$* , in: *Manifolds and Lie Groups*, Birkhäuser, Boston, 1981. 2
- [12] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008. 7, 15, 30, 31, 32
- [13] Goddard, A., *Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 82, 1977, 489–495.. 1
- [14] Ishihara, T., *Maximal spacelike submanifolds of a pseudoriemannian space of constant curvature*, Mich. Math. J. 35, 1988, 345–352. 76, 89
- [15] Ki, U., Kim, H., Nakagawa, H., *On space-like hypersurfaces with constant mean curvature of a Lorentz space form*, Tokyo J. Math. 14, 1991, 205–216. 5, 73
- [16] Lee, J., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 2003. 18
- [17] Lima, E., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998. 41
- [18] Lymberopoulos, A., Couto, I., *Introdução à geometria lorentziana: curvas e superfícies*, IMPA, Rio de Janeiro, 2018. 31
- [19] Meléndez, J., *Rigidity theorems for hypersurfaces with constant mean curvature*, Bull. Braz. Math. Soc. 45, 2014, 385–404. 66
- [20] Montiel, S., *A characterization of hyperbolic cylinders in the de Sitter space*, Tôhoku Math. J. 48, 1996, 23–31. 2
- [21] Montiel, S., *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. 37, 1988, 909–917. 1, 69, 72
- [22] Okumura, M., *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Am. J. Math. 96, 1974, 207–213. 4

- [23] Oliveira, A., *Sobre Hipersuperfícies Completas em Produtos Riemannianos*, Orientador: Henrique Fernandes de Lima, 2015, 112, Dissertação(Mestrado), Mestrado em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2015. [30](#)
- [24] O’Neil, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983. [7](#), [24](#), [28](#), [31](#)
- [25] Ramanathan, J., *Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in the de Sitter space*, Indiana Univ. Math. J. 36, 1987, 349–359. [1](#)
- [26] Sánchez, J., *Hipersuperfícies espaciales completas de curvatura media constante en el espacio de De Sitter*, Orientador: D. Luis. J. Alías Linares, 1998, 107, Tesina(Licenciatura), Licenciatura en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, Murcia, 1998. [61](#)