Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Soluções positivas para algumas classes de problemas logísticos não-locais via Teoria da Bifurcação

por

Adriana Marques dos Santos †

sob orientação do

Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima

Campina Grande - PB

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e FAPESQ

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Soluções positivas para algumas classes de problemas logísticos não-locais via Teoria da Bifurcação

por

Adriana Marques dos Santos †

sob orientação do

Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e FAPESQ

S237s Santos, Adriana Marques dos.

Soluções positivas para algumas classes de problemas logísticos não-locais via teoria da bifurcação / Adriana Marques dos Santos. - Campina Grande, 2022.

91 f. il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima."

Referências.

1. Análise Matemática. 2. Teoria da Bifurcação. 3. Problemas Logísticos. 4. Soluções Positivas. I. Lima, Romildo Nascimento de. II. Título.

CDU 519.677(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA ITAPUANA SOARES DIAS GONÇALVES CRB-15/93

Soluções positivas para algumas classes de problemas logísticos não-locais via Teoria da Bifurcação

por

Adriana Marques dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Natan de Assis Lima

Prof. Dr. Natan de Assis Lima, UEPB

Alânnio B Nóbrega

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega, UFCG

Romildo N. de Lima

Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima, UFCG

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

29 de Julho 2022

Dedicatória

A minha mãe (Luciene) e ao meu namorado (Jandeilson), pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha trajetória acadêmica.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado saúde, forças e sabedoria para chegar até aqui, sem Ele nada disso seria possível.

Aos meus pais, Luciene e Antônio, por sempre estarem ao meu lado dando apoio e mostrando que sou capaz de alcançar meus objetivos, a minha irmã, Luana, pelo incentivo e conselhos.

Agradeço ao meu namorado, Jandeilson, pela paciência e compreensão, sendo sempre carinhoso, atencioso e por me encorajar a alçar voos cada vez mais altos.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Romildo Nascimento de Lima, pela confiança, disponibilidade, paciência e dedicação durante toda a pesquisa.

A todos os professores que compartilharam conhecimentos e experiências, contribuindo com meu aprendizado.

A CAPES pelo apoio financeiro.

E aos meus amigos que de alguma forma contribuíram com a minha formação.

Resumo

Neste trabalho, nos propomos a estudar dois problemas logísticos que modelam o comportamento de uma e duas espécies que habitam um ambiente limitado, onde a principal ferramenta utilizada para abordar os dois problemas é o Teorema Global de Bifurcação de Rabinowitz, que faz parte da teoria geral de bifurcação.
Palavras-chave: Teoria da Bifurcação; Problemas Logísticos; Soluções positivas.

Abstract

In this work, we propose to study two logistic problems that model the behavior of one and two species that inhabit a limited environment, where the main tool used to address the two problems is the Rabinowitz Global Bifurcation Theorem, which is part of the general theory of bifurcation.
Keywords: Bifurcation Theory; Logistical Problems; Positive solutions.

Conteúdo

Notações

- $\mathbb{R}^N$ denota o espaço Euclidiano n-dimensional;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$;
- $\partial\Omega$ é a fronteira da Ω;
- $\overline{\Omega}$ é o fecho de Ω;
- χ_B é a função característica de B;
- $B_r(x)$ é a bola aberta de centro x e raio $r > 0$;
- $\overline{B}_r(x)$ é a bola fechada de centro x e raio $r > 0$;
- $dim(V)$ é a dimensão do espaço vetorial V;
- $Ker(L)$ é o núcleo do operador linear L;
- $im(L)$ é a imagem do operador linear L;
- $span\{x\}$ é o espaço gerado pelo vetor x;
- $supp(\varphi)$ denota o suporte da função φ;
- $sgnf$ é o sinal da função f;
- $J_f(x) = det[f'(x)]$ é o valor do determinante jacobiano de f aplicado no ponto x;
- $C(\Omega)$ é o conjunto das funções contínuas de Ω em $\mathbb{R}$;
- $C^k(\Omega)$ é o conjunto das funções k vezes diferenciavéis de Ω em $\mathbb{R}$;

- o símbolo $\rightarrow$ denota a convergência em norma;
- o símbolo $\rightharpoonup$ denota a convergência fraca;
- o símbolo $\overset{comp.}{\hookrightarrow}$ denota imersões compactas;
- *q.t.p.* abreviação para quase todo ponto ou quase sempre;
- $\sigma(A)$ é o conjunto de autovalores reais da matriz A;
- $\sigma(S)$ é o conjunto de autovalores reais do operador S;
- $\sigma(-\Delta)$ é o conjunto de autovalores do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$;
- os termos da forma $U = (u, v)$ também podem ser escritos na forma matricial $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Da mesma forma para $-\Delta U = (-\Delta u, -\Delta v)$ que pode ser escrito $-\Delta U = \begin{pmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \end{pmatrix}$;
- $\|\cdot\|_*$ denota a norma usual em $H_0^1(\Omega)$, ou seja,
$$\|u\|_*^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx;$$
- E denota o espaço Banach $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$, com norma
$$\|U\| = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C(\overline{\Omega})}$$
onde $U = (u, v) \in E$;
- E_1 denota o espaço Banach $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$, com norma
$$\|U\|_1 = \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C^1(\overline{\Omega})};$$
- $z = (\alpha, \beta) > 0$ ou $z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} > 0$, se $\alpha, \beta > 0$;
- $\|\cdot\|_H$, é uma norma em $H = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, dada por
$$\|U\|_H = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$
onde $U = (u, v)$ com $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Introdução

Neste trabalho, temos por objetivo o estudo da existência de soluções positivas, via Teoria da Bifurcação, para os seguintes problemas não-locais

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(\lambda - \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u^p(y)dy\right), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de fronteira suave com $N \geq 1$, $p > 0$ e $K : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não-negativa com $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$.

O outro problema estudado é dado por uma classe de sistemas de equações

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(a - \displaystyle\int_\Omega K(x,y)f(u,v)dy\right)u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = \left(d - \displaystyle\int_\Omega \Gamma(x,y)g(u,v)dy\right)v + cu, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_0}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de fronteira suave com $N \geq 1$, $K, \Gamma : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções não-negativas que satisfazem algumas hipóteses que serão mencionadas posteriormente, assim como as funções f e g. Temos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

A motivação para estudar os problemas supracitados é a equação logística clássica. Esta, trata-se de um problema local que normalmente é usado para modelar o comportamento de uma espécie que habita em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Aqui estamos considerando que Ω é cercado por áreas inóspitas, em consequência das condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Tal equação logística clássica é dada por

$$\begin{cases} -\Delta u = u(\lambda - b(x)u^p), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

na qual $u(x)$ denota a densidade populacional num ponto $x \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é a taxa de crescimento da determinada espécie e por fim, $b(x)$ é uma função positiva representando a capacidade de suporte, ou seja, descreve o efeito limitante da aglomeração da população e $p > 0$.

Tendo em vista que o problema (1) é local, então o efeito da aglomeração da população u em x somente dependerá do valor da população no mesmo ponto x. Mas note que o problema (1) não condiz com a realidade. Para melhorar o modelo e fazê-lo mais próximo do fenômeno real, é necessário fazer uma análise do efeito de aglomeração não só de um ponto isolado da área, mas também observar o que ocorre ao redor desse ponto. Pensando nisso, Chipot em [11], estudou o efeito da aglomeração dependendo do valor da população em torno do ponto x, ou seja, o efeito da aglomeração é diretamente dependente da integral que envolve a função u na bola $B_r(x)$, com $r > 0$. Isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(\lambda - \displaystyle\int_{\Omega \cap B_r(x)} b(y)u^p dy\right), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

onde b é uma função contínua não-negativa e não-trivial. Neste trabalho, estamos estudando um problema mais geral, que é o problema (P).

Gostaríamos de salientar que o termo "não -local" também tem sido utilizado para representar o processo de seleção de uma população com base em critérios fenotípicos, tal fato pode ser observado em [24].

Muitos trabalhos foram desenvolvidos com relação a (P) considerando diferentes condições sobre K. Um desses trabalhos é o de Corrêa, Delgado e Suárez em [12]. Eles consideraram K com variáveis separavéis, ou seja,

$$K(x, y) = g(x)h(y), \quad h \geq 0, h \neq 0 \text{ e } g > 0 \text{ em } \Omega.$$

Com isso, eles provaram que (P) possui uma única solução positiva para $\lambda > \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do menos Laplaciano.

Ao considerar $g \equiv 1$, $p > 1$, sob condições de contorno de Neumann homegêneas, Coville em [15] e Leman, Méléard e Mirrahimi em [20], provaram em seus trabalhos que

(P) com sua solução positiva é capaz de atrair todas as possíveis soluções da equação parabólica correspondente associada à (P).

Corrêa, Delgado e Suárez em [12] consideraram $g \geq 0$, $g \neq 0$, $g \equiv 0$ em $\Omega_0 \subset \Omega$ e observaram que o problema (P) possui uma única solução positiva para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$, na qual λ_0 representa o principal autovalor do menos Laplaciano em Ω_0.

Allegretto e Nistri em [1] provaram que para $K(x,y) = K_\delta(|x-y|)$, com $K_\delta(|x-y|) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} K_\delta(|x-y|)dy = 1$, para todo x com

$$K_\delta(|x-y|) = 0, \text{ se } |x-y| \geq \delta$$

e

$$K_\delta(|x-y|) \text{ limitada longe de zero, sendo } |x-y| < \mu < \delta.$$

Nessas condições temos que K se anula longe da diagonal de $\Omega \times \Omega$.

Já para o caso onde

$$K(x,y) \geq K_0 > 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$$

Leman, Méléard e Mirrahimi em [20] provaram a existência de uma solução positiva para (P) se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$. Um resultado análogo também pode ser encontrado em [15].

Sob a hipótese de $p = 1$ e $K \in C^0(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ uma função não-negativa tal que para todo $\phi > 0$, tem-se

$$\int_\Omega K(x,y)\phi(y)dy > 0.$$

Em [10], Chen e Shi conseguiram mostrar que existe um $\lambda^* > \lambda_1$ tal que (P) possui ao menos uma solução positiva para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*]$. Neste trabalho os autores utilizaram o Teorema da Função Implícita.

Em [20], Leman, Méléard e Mirrahimi também estudaram o caso de $N = 1$. Nessa situação, (P) terá solução positiva se,

$$K(x,x) \geq K_0 > 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Quando $K(x,y) = K_1(|x-y|)$ e $\Omega = (-1,1)$, tal que $K_1 : [0,2] \longrightarrow (0,\infty)$ é uma aplicação contínua por partes e não-decrescente com

$$\int_0^2 K_1(y)dy > 0.$$

Sun, Shi e Wang em [27] mostraram que (P) possui solução positiva.

Alves, Delgado, Souto e Suárez em [5] em seu trabalho, provaram a existência e não-existência de soluções positivas para o problema (P). Mas para isso, estabeleceram uma classe $\mathcal{K}$ formada por funções $K : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ onde tais funções satisfazem

- $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ e $K(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in \Omega$.
- Se w é mensurável e $\displaystyle\int_{\Omega\times\Omega} K(x, y)|w(y)|^p w(x)^2 dxdy = 0$, então $w = 0$ q.t.p em Ω.

Eles consideram que $K \in \mathcal{K}$ e atráves da Teoria da Bifurcação mostram que (P) tem solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano. Esse trabalho é a base do Capítulo 2 dessa dissertação.

Observe que a integral do problema (2) pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega\cap B_r(x)} b(y)u^p dy = \int_\Omega \chi_{B_r(x)}(y)b(y)u^p dy.$$

Considerando $K(x, y) = \chi_{B_r(x)}(y)b(y) \in \mathcal{K}$ pois b é positiva em Ω, então pelos resultados obtidos em [5], temos que o problema (2) tem solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$.

Para o estudo do problema (P_0) nossa inspiração foi o trabalho dos autores de Lima e Souto em [22], onde inspirados no trabalho de Alves, Delgado, Souto e Suárez em [5], eles modelaram o comportamento de duas espécies habitando um domínio limitado suave $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Com isso, o problema ganhou a forma matricial. A inspiração para a realização da pesquisa utilizando matrizes, segundo de Lima e Souto [22], vem dos artigos de Corrêa e Souto [13], [14] e Souto [26]. Em [26], por exemplo, Souto fez uma pesquisa sobre a existência de solução atráves do índice de ponto fixo em cones para sistemas da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta u = m_{11}(x)u + m_{12}(x)v + f(x, u, v), & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = m_{21}(x)u + m_{22}(x)v + g(x, u, v), & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{Q_0}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $M(x) = (m_{ij}(x))$ e f, g satisfazem algumas propriedades que são necessárias para o desenvolvimento da pesquisa. Vale ressaltar que as pesquisas realizadas em [13], [14] e [26], que tratam-se de um problema local, é completamente diferente do estudo em [22], que é um problema não-local, eles adaptaram as ideias de [13], [14] e [26] e abordaram o sistema (P_0). Neste trabalho, eles mostraram a existência de soluções positivas para o problema (P_0) através da Teoria da Bifurcação e algumas hipóteses adicionais.

Para problemas populacionais de uma competição entre duas espécies, o leitor interessado em casos mais simples e introdutórios, pode observar no livro de Bassanezi e Ferreira Jr., em [7], onde eles consideraram que a taxa de crescimento de cada uma das espécies estudadas, seria reduzida por um fator proporcional à população da outra espécie. O modelo estudado foi o seguinte

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - bx - \alpha y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(c - dy - \beta u) \quad (x, y \geq 0) \end{cases}$$

onde, x e y são as populações das espécies em estudo. O sistema indica que as taxas de crescimento das duas populações são inibidas de uma forma linear. Foi realizado um estudo qualitativo de soluções para o sistema acima.

Por fim, destacamos que este trabalho está dividido em quatro capítulos e dois apêndices. No Capítulo 1, apresentamos conceitos introdutórios sobre a Teoria de Bifurcação, tais como: Bifurcação do autovalor simples; Grau de Brouwer e Leray-Schauder com suas principais propriedades; grau para aplicações contínuas; entre outras definições. Por fim, apresentamos o principal teorema do capítulo que é o Teorema Global da Bifurcação segundo Rabinowitz.

No Capítulo 2, norteados pelo trabalho de Alves, Delgado, Souto e Suárez [5], definimos a classe de funções $\mathcal{K}$ citada anteriormente e usando a Teoria da Bifurcação, provamos em detalhes o seguinte teorema:

Teorema: *Suponha que $K \in \mathcal{K}$. Então o problema (P) tem uma solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$.*

No Capítulo 3, seguindo as mesmas ideias desenvolvidas por de Lima e Souto [22], supomos que $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ e considerando a existência de $\gamma > 0$, as funções f e g satisfazem algumas hipóteses que se farão úteis no decorrer do trabalho, além disso apresentamos propriedades de termos não-locais e a formulação matricial do problema e incluimos um parâmetro t no problema homogêneo.

No Capítulo 4, ainda norteados por de Lima e Souto [22], demonstramos em detalhes os seguintes teoremas

Teorema: *Suponha que* $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ *e as hipóteses de* f *e* g *válidas. Seja* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *uma matriz com* $a, b, c, d > 0$ *e* $\lambda > 0$ *seu maior autovalor. O sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u = (a - \displaystyle\int_\Omega K(x,y)f(u,v)dy)u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = (d - \displaystyle\int_\Omega \Gamma(x,y)g(u,v)dy)v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$*, onde* λ_1 *é o primeiro autovalor do problema* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

No caso de $f = g$ e $K = \Gamma$, provamos

Teorema: *Suponha que* $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ *e as hipóteses de* f *e* g *válidas. Seja* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *uma matriz tal que: existe um maior autovalor positivo de* A *que é o único autovalor positivo* λ *com um autovetor* $z > 0$ *e* $dim N(\lambda I - A) = 1$*. Então, o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(a - \displaystyle\int_\Omega K(x,y)f(u,v)dy\right) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = \left(d - \displaystyle\int_\Omega K(x,y)f(u,v)dy\right) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução para todo $\lambda > \lambda_1$*, onde* λ_1 *é o primeiro autovalor de problema* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

No Apêndice A, recordamos alguns resultados importantes da Análise do $\mathbb{R}^N$, medida e integração, espaços métricos, Análise Funcional e Álgebra Linear. No Apêndice B, apresentamos algumas propriedades do operador solução S.

Capítulo 1

Conceitos Básicos da Teoria de Bifurcação

Neste capítulo, iremos introduzir alguns conceitos básicos da Teoria da Bifurcação, na intenção de demonstrar o principal resultado desse capítulo, que é o Teorema Global da Bifurcação de Rabinowitz, tal teorema é a principal ferramenta utilizada para demonstrar os principais resultados desse trabalho. Para isso, se faz necessário definirmos os graus de Brouwer e Leray-Schauder e algumas de suas principais propriedades. Para mais detalhes dos resultados que aqui serão apresentados e demonstrações dos teoremas, proposições e lemas apresentados nessa seção, ver as referências [3] e [4].

1.1 Ponto de Bifurcação

Considere X e Y espaços de Banach. Consideremos a equação

$$S(\lambda, u) = 0, \tag{1.1}$$

onde $S : \mathbb{R} \times X \to Y$ satisfaz

$$S(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Observe que, a equação (1.1) tem solução trivial, pois é satisfeita para $u = 0$. Para as soluções não-triviais de (1.1), definamos o conjunto

$$\Sigma_S = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : u \neq 0, S(\lambda, u) = 0\}.$$

Definição 1.1. *Um ponto de bifurcação para (1.1) é um número real* $\hat{\lambda}$ *tal que* $(\hat{\lambda}, 0) \in \overline{\Sigma}_S$*, isto é,* $\hat{\lambda}$ *é um ponto de bifurcação se existem sequências* $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ *e* $(u_n) \subset X \backslash \{0\}$ *tais que*

(a_1) $S(\lambda_n, u_n) = 0$*;*

(b_1) $(\lambda_n, u_n) \to (\hat{\lambda}, 0)$*.*

A Teoria de Bifurcação se propõe a garantir condições nessárias para encontrarmos pontos de bifurcação e, de modo geral, estudar a estrutura do conjunto Σ_S.

Proposição 1.2. *Se* $\hat{\lambda}$ *é um ponto de bifurcação de (1.1), então* $S'_u(\hat{\lambda}, u) \in \mathcal{L}(X, Y)$ *não é invertível. Em outras palavras, se* $S(\lambda, u) = \lambda u - T(u)$*, onde* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$*, então qualquer ponto de bifurcação de (1.1) pertence ao espectro de* $T'(0)$*.*

A recíproca da Proposição 1.2 não é válida. Vejamos este fato no seguinte exemplo.

Exemplo 1. *Seja* $X = Y = \mathbb{R}^2$ *e seja* $S(\lambda, u) = \lambda u - T(u)$*, onde* $u = (x, y)$ *e* $T : X \mapsto Y$ *é definido como*

$$T(x, y) = (x + y^3, y - x^3).$$

Assim, temos

$$S(\lambda, u) = \lambda u - T(u) = 0 \Leftrightarrow \lambda(x, y) = T(x, y) \Leftrightarrow \lambda(x, y) = (x + y^3, y - x^3)$$

Logo, as soluções de $S(\lambda, u) = \lambda u - T(u) = 0$ *são os pares* $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\begin{cases} \lambda x = x + y^3 \\ \lambda y = y - x^3. \end{cases} \tag{1.3}$$

Um sistema equivalente ao (1.3) é o seguinte

$$\begin{cases} \lambda xy = xy + y^4 \\ -\lambda xy = -xy + x^4, \end{cases} \tag{1.4}$$

daí, $x^4 + y^4 = 0$*, para que isso ocorra devemos ter* $x = y = 0$*, ou seja,* $(x, y) = u = 0$*, sendo assim, tem apenas a solução trivial, logo, não existe ponto de bifurcação. Por outro lado,*

$$T'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 3y^2 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

assim,

$$T'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 0^2 \\ -3 \cdot 0^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ou seja, a derivada $T'(0)$ é a matriz identidade do $M_2(\mathbb{R})$, e portanto $\hat{\lambda} = 1$ é um autovalor de $T'(0)$, de fato é o único autovalor.

1.2 A redução de Lyapunov-Schmidt

Considere $S \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ e $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que

$$L = S'_u(\hat{\lambda}, 0) \tag{1.5}$$

não é inversível. Aqui estaremos considerando um núcleo não-trivial. Seja $V = ker(L)$ e $R = im(L)$. Suponha que

(V) V tem um complemento topológico W em X;

(R) R é fechado e tem um complemento topológico Z em Y.

Pelos resultados de Análise Funcional, qualquer operador linear de Fredholm L satisfaz as condições (V) e (R), pois V tem dimensão finita, R é fechado e Z tem dimensão finita. Além disso, se L é Fredholm com índice zero, então $dim(V) = dim(Z)$.

Se preservarmos a condição (V), temos que existe $W \subset X$ fechado tal que $X = V \oplus W$, e para qualquer $u \in X$ existem únicos $v \in V$ e $w \in W$ tais que $u = v + w$, da mesma forma, se preservarmos a condição (R), existe um $Z \subset Y$ fechado, tal que $Y = Z \oplus R$. Podemos também definir projeções conjugadas P, Q de Y sobre Z e R, respectivamente. Defina $u = v + w$, aplicando P e Q em (1.1) temos

$$PS(\lambda, v + w) = 0 \tag{1.6}$$

e

$$QS(\lambda, v + w) = 0 \textbf{ (Equação Auxiliar)}. \tag{1.7}$$

Lema 1.1. *A equação auxiliar (1.7) possui uma única solução em W, localmente numa vizinhança de $(\hat{\lambda}, 0)$. Mais precisamente, existem vizinhanças $\hat{\Lambda}$ de $\hat{\lambda}$, V_0 de $v = 0$ em V, W_0 de $w = 0$ em W, e a aplicação $w = w(\lambda, v) \in C^2(\hat{\Lambda} \times V_0, W)$ tal que*

$$QS(\lambda, v + w) = 0, (\lambda, v, w) \in \hat{\Lambda} \times V_0 \times W_0 \Leftrightarrow w = w(\lambda, v).$$

Além disso,

$$w(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in \hat{\Lambda} \tag{1.8}$$

e

$$w'_v(\hat{\lambda}, 0) = 0. \tag{1.9}$$

Ao substituirmos $w = w(\lambda, v)$ na equação (1.6) obtemos a seguinte equação de bifurcação

$$PS(\lambda, v + w(\lambda, v)) = 0. \tag{1.10}$$

Agora, suponha que exista uma sequência de soluções para (1.10), tal que $(\lambda_n, v_n) \to (\hat{\lambda}, 0)$ com $v_n \neq 0$. Definindo $u_n = v_n + w(\lambda_n, v_n)$ teremos que $S(\lambda_n, u_n) = 0$. E mais, conforme (1.8) temos que $w(\lambda_n, u_n) \to 0$. Assim, se $v_n \neq 0$ então $u_n = v_n + w(\lambda_n, v_n) \neq 0$, pois note que, se $u_n = v_n + w(\lambda_n, v_n) = 0$, então teríamos $\|w(\lambda_n, v_n)\| = \|v_n\|$, dividindo ambos os lados dessa igualdade por $\|v_n\|$ temos que

$$0 \leftarrow \frac{\|w(\lambda_n, v_n)\|}{\|v_n\|} = 1$$

uma vez que, $w(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \hat{\Lambda}$ e $w'_v(\hat{\lambda}, 0) = 0$. Chegando a uma contradição. Logo, (λ_n, u_n) é solução não - trivial de (1.1). Com isso, mostramos o seguinte resultado.

Teorema 1.3. *Seja $S \in C^1(\mathbb{R} \times X, Y)$ satisfazendo (V) e (R). Suponha que a equação de bifurcação (1.10) possui uma sequência de soluções $(\lambda_n, v_n) \to (\hat{\lambda}, 0)$, com $v_n \neq 0$. Então definindo $u_n = v_n + w(\lambda_n, v_n)$, tem-se que $(\lambda_n, u_n) \in \Sigma_S$, $u_n \to 0$ e assim $\hat{\lambda}$ é um ponto de bifurcação de (1.1).*

1.3 Bifurcação de Autovalor Simples

Conforme o Teorema 1.3, iremos estabelecer condições de tal forma que a equação de bifurcação (1.10) tenha soluções. Primeiramente, vamos discutir o caso do **autovalor simples**, ou seja, quando V é unidimensional e a codimenção de R é um.

Vamos considerar as condições (V) e (R) válidas, e mais

(V_1) existe $\hat{u} \in X$, $\hat{u} \neq 0$, tal que $V = span\{\hat{u}\}$;

(R_1) existe $\psi \in \hat{Y}$, $\psi \neq 0$, tal que $R = \{y \in Y : \langle \psi, y \rangle = 0\}$.

Observação 1.1. *No caso em que* $X = Y$ *e* $S(\lambda, u) = u - \lambda Au - T(u)$, *com* T *contínuo e* $T(0) = 0$, $T'(0) = 0$, *e* $A \in \mathcal{L}(X, X)$ *compacto, temos que* $L = I - \hat{\lambda}A$, *na qual* I *é o operador identidade em* X. *Suponha que* $\hat{\lambda}$ *é um autovalor simples de* A, *no sentido*
(a_2) $ker(I - \hat{\lambda}A)$ *é unidimensional, e*
(b_2) *a codimensão de* $im(I - \hat{\lambda}A)$ *é um, e* $ker(I - \hat{\lambda}A) \cap im(I - \hat{\lambda}A) = \{0\}$.

Assim, (a_2) e (b_2) são equivalentes a (V_1) e (R_1). Agora, considere $v = t\hat{u}$, $t \in \mathbb{R}$, assim a solução da equação auxiliar tem a forma $w(\lambda, v) = w(\lambda, t\hat{u})$. Além disso, temos

$$PS(\lambda, v + w(\lambda, v)) = PS(\lambda, t\hat{u} + w(\lambda, t\hat{u})).$$

Logo, por (R_1), a equação da bifurcação $PS = 0$ fica

$$\beta(\lambda, t) := \langle \psi, S(\lambda, t\hat{u} + w(\lambda, t\hat{u})) \rangle = 0.$$

Pela propriedade (1.8) de w conseguimos

$$\beta(\lambda, 0) = \langle \psi, S(\lambda, 0 + w(\lambda, 0)) \rangle = \langle \psi, S(\lambda, 0) \rangle. \tag{1.11}$$

Como $S(\lambda, 0) \equiv 0$, concluímos que

$$\beta(\lambda, 0) \equiv 0. \tag{1.12}$$

Agora, vamos calcular a derivada parcial β'_t de β com relação a t

$$\beta'_t(\lambda, t) = \langle \psi, S'_u(\lambda, t\hat{u} + w(\lambda, t\hat{u}))[(\hat{u} + w'_v(\lambda, t\hat{u}))(\hat{u})] \rangle.$$

Para $t = 0$ temos

$$\begin{aligned} \beta'_t(\lambda, 0) &= \langle \psi, S'_u(\lambda, 0 + w(\lambda, 0))(\hat{u} + w'_v(\lambda, 0))(\hat{u}) \rangle \\ &= \langle \psi, S'_u(\lambda, 0)[\hat{u} + w'_v(\lambda, 0)(\hat{u})] \rangle. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Em particular, para $\lambda = \hat{\lambda}$ e usando (1.9) e (1.5) obtemos

$$\begin{aligned} \beta'_t(\hat{\lambda}, 0) &= \langle \psi, S'_u(\hat{\lambda}, 0)[(\hat{u} + w'_v(\hat{\lambda}, 0)(\hat{u})] \rangle \\ &= \langle \psi, S'_u(\hat{\lambda}, 0)[(\hat{u} + 0 \cdot \hat{u}] \rangle \\ &= \langle \psi, L\hat{u} \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\beta_t'(\hat{\lambda}, 0) = 0 \tag{1.14}$$

pois $L\hat{u} \in im(L)$.

Por (1.13) temos que a segunda derivada mista $\beta_{t,\lambda}''$ satisfaz

$$\begin{aligned} \beta_{t,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0) &= \langle \psi, S_{u,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0)[\hat{u} + w_v'(\hat{\lambda}, 0)(\hat{u})] \rangle + \langle \psi, S_u'(\hat{\lambda}, 0)[w_{t,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0)(\hat{u})] \rangle \\ &= \langle \psi, S_{u,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0)[\hat{u}] \rangle + \langle \psi, L[w_{t,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0)(\hat{u})] \rangle. \end{aligned}$$

Como $L[w_{t,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0)(\hat{u})] \in R$, então $\langle \psi, L[w_{t,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0)(\hat{u})] \rangle = 0$. Assim, temos

$$\beta_{t,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0) = \langle \psi, S_{u,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0)[\hat{u}] \rangle. \tag{1.15}$$

Teorema 1.4. *Considere (V_1) e (R_1) válidas e suponha que*

$$S_{u,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0)[\hat{u}] \notin R. \tag{1.16}$$

Então, $\hat{\lambda}$ é um ponto de bifurcação para S.

Demonstração. Defina uma função $h \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ em uma vizinhança de $(\hat{\lambda}, 0) \in \mathbb{R}^2$, dada por

$$h(\lambda, t) = \begin{cases} \dfrac{\beta(\lambda, t)}{t}, & \text{se } t \neq 0 \\ \beta_t'(\lambda, 0), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Pela igualdade (1.14) temos que $h(\hat{\lambda}, 0) = 0$, e por (1.15) temos

$$h_\lambda'(\hat{\lambda}, 0) = \beta_{t,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0) = \langle \psi, S_{u,\lambda}''(\hat{\lambda}, 0)[\hat{u}] \rangle.$$

Logo, pela hipótese (1.16) segue que $h_\lambda'(\hat{\lambda}, 0) \neq 0$. Aplicando o Teorema da Função Implícita sobre h, existe $\lambda = \lambda(t)$ definido em uma ε-vizinhança de $t = 0$, tal que

$$\lambda(0) = \hat{\lambda}, \ h(\lambda(t), t) = 0, \ \ \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Se $h(\lambda(t), t) = 0$ para $t \neq 0$, então $\beta(\lambda(t), t) = 0$, assim $(\lambda(t), u(t))$, com $u(t) = t\hat{u} + w(\lambda(t), t)$, é uma solução da equação de bifurcação $PS = 0$ tal que

$$(\lambda(t), u(t)) \to (\hat{\lambda}, 0), \ \text{quando } t \to 0.$$

Note que, quando $t \neq 0$ então $u(t) \neq 0$. Assim, deduzimos que $\hat{\lambda}$ é um ponto de bifurcação de S. □

Observação 1.2.

- *O conjunto Σ_S de soluções não-triviais de S, é uma curva suave que tem uma representação cartesiana no núcleo V de L.*

- *É possível descrever Σ_S de maneira mais precisa. Note que*

$$\lambda'(0) = -\frac{h'_t(\hat{\lambda}, 0)}{h'_\lambda(\hat{\lambda}, 0)}.$$

Como

$$h'_\lambda(\hat{\lambda}, 0) = \langle \psi, S''_{u,\lambda}(\hat{\lambda}, 0)[\hat{u}] \rangle := a$$

e

$$h'_t(\hat{\lambda}, 0) = \frac{1}{2}\beta''_{t,t}(\hat{\lambda}, 0) := b,$$

obtemos,

$$b = \frac{1}{2}\langle \psi, S''_{u,u}(\hat{\lambda}, 0)[\hat{u}]^2 \rangle.$$

Logo, se $b \neq 0$ então

$$\lambda(t) = \hat{\lambda} - \frac{b}{a}t + \theta(t), \ \textit{com}\ t \to 0.$$

*Isso mostra que existem ramos de soluções não-triviais que se bifurca a partir de $(\hat{\lambda}, 0)$ tanto para $\lambda > \hat{\lambda}$ quanto para $\lambda < \hat{\lambda}$, isto chama-se **bifurcação transcrítica**. No caso em que $b = 0$, a estrutura de Σ_S dependerá das derivadas de ordem superior de S em relação a u. Um exemplo é o caso de S ser ímpar em relação a u, assim temos*

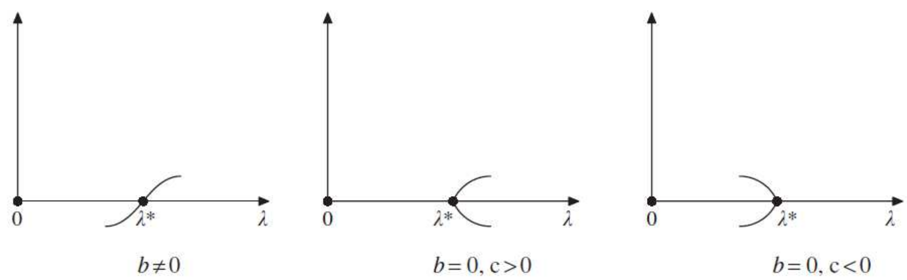
$$\lambda''(0) = -\frac{1}{3a}\langle \psi, S'''_{u,u,u}(\hat{\lambda}, 0)[\hat{u}]^3 \rangle$$

e se $\lambda''(0) \neq 0$ teremos

$$u = \pm \left(\frac{\lambda - \hat{\lambda}}{2c} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{u} + 0 \cdot (\lambda - \hat{\lambda}), \ \textit{na qual}\ c := \lambda''(0).$$

*Logo, se $c > 0$, as soluções não-triviais se ramificam à direita de $\hat{\lambda}$, ou seja, $\lambda > \hat{\lambda}$, que chamamos de **bifurcação super-crítica**, no entanto se $c < 0$ a ramificação será à esquerda de $\hat{\lambda}$, $\lambda < \hat{\lambda}$, isso chamamos de **bifurcação subcrítica**.*

Figura 1.1: Tipos de Bifurcação



Fonte: Ambrosetti e Malchiodi (2007, p.22) em [4].

Retornando ao caso descrito na observação (1.1), ou seja, quando $X = Y$ e supomos que S é da forma $S(\lambda, u) = u - \lambda Au - T(u)$, onde $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Tendo essa situação, o teorema 1.4 fica da seguinte forma:

Teorema 1.5. *Seja $T \in C^2(X, X)$ tal que $T(0) = 0$ e $T'(0) = 0$. Além disso, seja A compacto. Então, qualquer autovalor simples $\hat{\lambda}$ de A é um ponto de bifurcação para $S(\lambda, u) = u - \lambda Au - T(u) = 0$.*

1.4 Grau de Brouwer

Vamos supor que:

(a_3) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$;

(b_3) $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma aplicação contínua, onde as componentes de f serão denotadas por f_i;

(c_3) $p \in \mathbb{R}^N$ tal que $p \notin f(\partial\Omega)$.

Para cada terna (f, Ω, p) que satisfaz $(a_3) - (c_3)$ é possível associar um inteiro $d(f, \Omega, p)$, que chamamos de **grau de** f (com relação a Ω e p). O número $d(f, \Omega, p)$ tem as seguintes propriedades básicas:

($P1$) **Normalização:** se I denota a aplicação identidade em $\mathbb{R}^N$, então

$$d(I, \Omega, p) = \begin{cases} 1, \text{ se } p \in \Omega; \\ 0, \text{ se } p \notin \Omega. \end{cases}$$

($P2$) **Propriedade de solução:** se $d(f, \Omega, p) \neq 0$, então existe $z \in \Omega; f(z) = p$;

($P3$) $d(f, \Omega, p) = d(f - p, \Omega, 0)$;

($P4$) **Aditividade:** Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, se $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, então

$$d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega_1, p) + d(f, \Omega_2, p).$$

Faremos agora um procedimento não usual para definir o grau, omitindo a consistência da definição e a verificação das propriedades $(P1)-(P4)$. A construção completa será feita posteriormente.

Inicialmente, considere f uma aplicação de classe C^1 e p um valor regular. Lembrando que, por definição, p é um valor regular de f, se o Jacobiano $J_f(x)$ é diferente de zero para todo $x \in f^{-1}(p)$. Assim, se p é um valor regular, então o conjunto $f^{-1}(p)$ é finito. Logo, para p um valor regular de f, podemos definir o grau de Brouwer da seguinte forma:

Definição 1.6. *Seja $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 e $p \notin f(\partial\Omega)$ um valor regular de f. Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação f em relação a Ω no ponto p, como sendo o número inteiro*

$$d(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} sgn[J_f(x)] \tag{1.17}$$

onde, para $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$sgn(b) = \begin{cases} 1, & se\ b > 0 \\ -1, & se\ b < 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Note que a definição de grau de f em (1.17) satisfaz as propriedades $(P1)-(P4)$. Definimos o conjunto S_f como sendo $S_f = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$.

Exemplo 2. *Considere a aplicação $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = senx$, com $\Omega = (0, \pi)$ e $p = \dfrac{\pi}{4}$. Nosso objetivo é calcular o grau topológico de Brouwer de φ com relação a Ω no ponto p, ou seja, $d(\varphi, \Omega, p)$. A princípio, para garantir que $d(\varphi, \Omega, p)$ está bem definida, devemos verificar que $p \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. De fato,*

$$\partial\Omega = \{0, \pi\} \Rightarrow \varphi(\partial\Omega) = \{sen\ 0, sen\ \pi\} = \{0\}$$

e

$$\varphi(S) = \{x \in (0, \pi); cosx = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow \varphi(S) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \{1\}$$

Logo, $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S) = \{0, 1\}$. Com isso, concluímos que $p = \dfrac{\pi}{4} \notin \{0, 1\}$. Assim, $\varphi^{-1}\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right) = \{\xi_1, \xi_2\}$ e pela definição de grau

$$d\left(\varphi, (0, \pi), \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi[\xi])$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\left(\varphi, (0, \pi), \frac{\pi}{4}\right) &= sgn(\varphi'(\xi_1)) + sgn(\varphi'(\xi_2)) \\ &= sgn(cos(\xi_1)) + sgn(cos(\xi_2)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

É possível expandir a definição acima a qualquer função contínua f e qualquer ponto p. Para isso, será necessário utilizar um procedimento de aproximação. Primeiramente, para aproximar p por valores regulares p_k aplicaremos o Teorema de Sard.

Teorema 1.7 (Teorema de Sard)**.** *Seja* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *e* $S_f = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$. *Então,* $f(S_f)$ *é um conjunto de medida nula.*

O conjunto S_f é chamado de **conjunto dos pontos singulares de** f. Para qualquer u onde $f(u) = p$, chamamos de solução não singular da equação $f(u) = p$ se $u \notin S_f$. Conforme o Teorema de Sard, $f(S_f)$ tem medida nula, assim o complemento de $f(S_f)$ é denso em $\mathbb{R}^N$. Logo, existe uma sequência $(p_k) \notin f(S_f)$ tal que $p_k \to p$, quando $k \to \infty$. Quando p_k está suficientemente próximo de p, então p_k satisfaz (c_3) sendo assim é coerente definir $d(f, \Omega, p_k)$ dado em (1.17). Além disso, é possível mostrar que para $k \gg 1$, $d(f, \Omega, p_k)$ é constante e independe da escolha da sequência (p_k). Dessa forma, podemos definir o grau de $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ em qualquer $p \notin f(\partial\Omega)$ como

$$d(f, \Omega, p) = \lim_{k \to \infty} d(f, \Omega, p_k).$$

Da mesma forma, seja $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $p \notin f(\partial\Omega)$. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, temos que existe uma sequência $(f_k) \subset C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $f_k \to f$ uniformemente em $\overline{\Omega}$.

Se $K \gg 1$, então qualquer (f_k, Ω, p) que verifica $(a_3) - (c_3)$ pode-se considerar o grau $d(f_k, \Omega, p_k)$. Assim, $\lim d(f_k, \Omega, p)$ independe da escolha da sequência (f_k) e dessa forma podemos definir o grau de f por

$$d(f, \Omega, p) = \lim_{k \to \infty} d(f_k, \Omega, p).$$

O grau definido acima possui uma importante propriedade que é a **invariância por homotopia**, que é uma aplicação $H = H(\lambda, x)$ tal que $H \in C^0([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Esta aplicação H é admissível, com respeito a Ω e p, se $H(\lambda, x) \neq p$ para todo $(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial\Omega$.

$(P5)$ **Invariância por homotopia:** Se H é uma homotopia admissível, então

$$d(H(\lambda, \cdot), \Omega, p) \equiv constante, \forall \lambda \in [0,1].$$

Em particular, se $f(x) = H(0, x)$ e $g(x) = H(1, x)$, então

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p).$$

Uma consequência imediata da invariância por homotopia é a seguinte:

Teorema 1.8 (Dependência dos valores de contorno)**.** *Sejam $f, g \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \partial\Omega$ e seja $p \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$. Então,*

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p).$$

Agora, vamos apresentar mais algumas propriedades do grau:

$(P6)$ **Continuidade:** Se $f_k \to f$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, então

$$d(f_k, \Omega, p) \to d(f, \Omega, p).$$

Além disso, $d(f, \Omega, p)$ é contínuo com respeito a p.

$(P7)$ **Propriedade de Excisão:** Seja $\Omega_0 \subset \Omega$ um conjunto aberto tal que $f(x) \neq p$, para todo $x \in \Omega \backslash \Omega_0$. Então,

$$d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega_0, p).$$

A propriedade $(P7)$ nos possibilita a definir o **índice** de uma solução isolada $f(x) = p$. Considere $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = p$, e suponha que existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq p$, para todo $x \in \overline{B_r(x_0)} \backslash \{x_0\}$. Usando a propriedade de excisão, com $\Omega = B_r(x_0)$ e $\Omega_0 = B_\rho(x_0)$, $\rho \in (0, r)$ deduzimos que

$$d(f, B_\rho(x_0), p) = d(f, B_r(x_0), p), \quad \forall \rho \in (0, r).$$

Este valor comum é definido como sendo o índice de f com respeito a x_0, denotado da seguinte forma:

$$i(f, x_0) = \lim_{\rho \to 0} d(f, B_\rho(x_0), p), \quad p = f(x_0)$$

também podemos denotar como $i(f, x_0) = d(f, B_\rho(x_0), p)$, para todo $\rho > 0$.

Além disso, se $f^{-1}(p) = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$, $x_j \in \Omega$, então

$(P8)$

$$d(f, \Omega, p) = \sum_{j=1}^{k} i(f, x_j).$$

Para provar essa propriedade $(P8)$ basta considerar $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Fazendo $\Omega_0 = B_\rho(x_1) \cup \cdots \cup B_\rho(x_k)$ e usando as propriedades $(P4)$ e $(P7)$ obtemos

$$\begin{aligned} d(f,\Omega,p) &= d(f,\Omega_0,p) \\ &= d(f,B_\rho(x_1),p) + \cdots + d(f,B_\rho(x_k),p) \\ &= \sum_{j=1}^{k} d(f,B_\rho(x_j),p) \\ &= \sum_{j=1}^{k} i(f,x_j). \end{aligned}$$

Sejam $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ e p um valor regular de f ($J_f(x_0) \neq 0$), para todo $x_0 \in f^{-1}(p)$). Já sabemos que se p é um valor regular de f, então temos o conjunto $f^{-1}(p)$ discreto. Em particular, qualquer solução x_0 de $f(x) = p$ é isolada. Sendo assim, é coerente considerar o índice $i(f,x_0)$.

Lema 1.2. *Suponha que $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^N) \cap C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ e seja $x_0 \in \Omega$ tal que $p = f(x_0)$ é um valor regular de f. Então,*

$$i(f,x_0) = (-1)^\beta$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os autovalores negativos de $f'(x_0)$.

1.5 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Aqui, estamos supondo que $d(f,\Omega,p)$ satisfaz todas as propriedades apresentadas anteriormente, além de estar bem definido. De fato, veremos que com essas informações podemos obter o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Para isso, se faz necessário o seguinte resultado preliminar. Seja $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$ a bola unitária aberta em $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.9. *A esfera unitária $\partial\overline{B}_1$ não é um "retrato" da bola unitária $\overline{B}_1$. Isto é, não existe uma aplicação contínua $f : \overline{B}_1 \longrightarrow \partial\overline{B}_1$ tal que $f(x) = x$, para todo $x \in \partial\overline{B}_1$.*

Observação 1.3. *Note que, de forma geral, se Ω é qualquer aberto limitado e convexo ou se Ω é um domínio limitado homeomorfo a um conjunto convexo, então não é possível "retratar" Ω sobre sua fronteira $\partial\Omega$.*

Teorema 1.10 (Teorema do ponto Fixo de Brouwer). *Se f é uma aplicação contínua de um conjunto convexo fechado e limitado $C \subset \mathbb{R}^N$, então existe $z \in C$ tal que $f(z) = z$.*

Demonstração. Seja C o fecho da bola unitária B_1 em $\mathbb{R}^N$. Se $f(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{B}_1$, então defina $\tilde{f} : \overline{B}_1 \to \partial\overline{B}_1$ tal que $\tilde{f}(x)$ é a intersecção de $\partial\overline{B}_1$ com a semi - reta que passa por $f(x)$ e x. Observe que $\tilde{f}(x)$ é contínua tal que $\tilde{f}(x) = x$ para todo $x \in \partial\overline{B}_1$ contradizendo o teorema (1.9). Para o caso em que C seja qualquer conjunto convexo limitado e fechado será análogo ao comentário da observação (1.3). □

1.6 Definição Analítica do Grau de Brouwer

Agora, vamos fazer uma construção do grau topológico e suas propriedades atráves de uma abordagem mais analítica, diferente do que foi feito até agora.

1.6.1 Grau para Aplicação C^2

Suponha que as condições $(a_3)-(c_3)$ são válidas. Considere $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e seja $J_f(x)$ a matriz Jacobiana de f. Da condição (c_3) temos que

$$\min\{|f(x) - p| : x \in \partial\Omega\} > 0.$$

Escolha $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha < \min_{x \in \partial\Omega} |f(x) - p|$$

e considere uma função contínua de valor real φ definida em $[0, \infty)$ e tal que

(a_4) $supp(\varphi) \subset (0, \infty)$;

(b_4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1,$

assim, podemos enunciar:

Definição 1.11. *Para $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ definimos*

$$d(f, \Omega, p) = \int_\Omega \varphi(|f(x) - p|)J_f(x)dx.$$

Para justificar essa definição, basta mostrar que ela independe da escolha de α e β satisfazendo (a_4) e (b_4), mais precisamente, é necessário mostrar que se $\alpha_1, \varphi_1, \alpha_2, \varphi_2$ satisfazem (a_4) e (b_4) então

$$\int_\Omega \varphi_1(|f(x) - p|)J_f(x)dx = \int_\Omega \varphi_2(|f(x) - p|)J_f(x)dx.$$

Exemplo 3. *Seja $f = A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ com A não singular. Então,*

$$\begin{aligned} d(A,\Omega,p) &= \int_\Omega \varphi(|A(x)-p|)J_A(x)dx \\ &= \int_\Omega \varphi(|A(x)-p|)\det(A)dx \\ &= sgn[\det(A)]\int_\Omega \varphi(|A(x)-p|)|\det(A)|dx \end{aligned}$$

consequentemente,

$$d(A,\Omega,p) = \int_{A(\Omega)} \varphi(|y-p|)sgn[\det(A)]dy. \tag{1.19}$$

Tome $\alpha < \min_{\partial\Omega} |A(x)-p|$ tal que

$$\begin{cases} B_\alpha(p) \subset A(\Omega), & se\ p \in A(\Omega) \\ B_\alpha(p) \cap A(\overline{\Omega}) = \emptyset, & se\ p \notin A(\Omega). \end{cases}$$

Como o suporte de $\varphi(\cdot - p)$ está contido na bola $B_\alpha(p)$, então temos que

$$d(A,\Omega,p) = \begin{cases} sgn(\det(A)), & se\ p \in A(\Omega) \\ 0, & se\ p \notin A(\Omega) \end{cases}$$

pois o suporte de φ está fora de $A(\Omega)$ assim (1.19) é 0. Particularmente,

$$d(I,\Omega,p) = \begin{cases} 1, & se\ p \in \Omega \\ 0, & se\ p \notin \Omega \end{cases}$$

ou seja, $(P1)$ é válida.

1.6.2 Grau para Aplicações Contínuas

Veremos agora a definição de grau para aplicações contínuas f que satisfazem $(a_3)-(c_3)$.

Lema 1.3. *Para $i = 1,2$, seja $f_i \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|f_i(x)-p| > \alpha > 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. Dado $\varepsilon \in \left(0, \frac{\alpha}{6}\right)$, suponha que $|f_2(x) - f_1(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então,*

$$d(f_1,\Omega,p) = d(f_2,\Omega,p)$$

Com o Lema acima, temos condições de definir o grau de qualquer que seja a aplicação contínua

$$f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \text{ tal que } f(x) \neq p, \ \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Sendo $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ denso em $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, devido ao Teorema de Aproximação de Weierstrass, então existe uma sequência de funções $(f_k) \subset C^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ que convergem uniformemente para f em $\overline{\Omega}$. Como $f(x) \neq p$ para todo $x \in \partial\Omega$ e pela convergencia uniforme $f_k \to f$, temos que $f_k \neq p$ para todo $x \in \partial\Omega$ e para k suficientemente grande, assim conseguimos o grau de f_k para todo $k \gg 1$, ou seja, $d(f_k, \Omega, p)$ está bem definido. E mais, pelo Lema 1.3 temos que $d(f_k, \Omega, p)$ é constante para $k \gg 1$. Com isso, podemos definir o grau de f com respeito a Ω e p como

$$d(f, \Omega, p) = \lim_{k \to \infty} d(f_k, \Omega, p).$$

1.7 O Grau de Leray-Schauder

Normalmente, em equações diferenciais, os espaços de funções que se trabalha são espaços de dimensão infinita. Com isso, surgiu a necessidade de estender a definição do grau para espaços de dimensão infinita. A partir dessa necessidade, surgiu o grau de Leray-Schauder, ou seja, o grau para aplicações $f \in C^0(X, X)$, com X um espaço de Banach e f é uma perturbação compacta da identidade $I = I_X$.

1.7.1 Definindo o Grau de Leray-Schauder

Considere D um subconjunto aberto e limitado do espaço de Banach X. Vamos trabalhar com perturbações compactas da identidade, ou seja, com operadores $S \in C^0(\overline{D}, X)$ tal que $S = I - T$, onde T é compacto.

Vamos provar que, se G é um subespaço fechado de $\overline{D}$, então teremos que $S(G)$ é fechado em X. De fato, considere $G \subset \overline{D}$ fechado e $(u_n) \subset G$ tal que $S(u_n) \to u_0$ em X. Mostremos que $u_0 \in S(G)$. Sabemos que T é um operador compacto, sendo assim, existe uma subsequência (u_{ni}) de (u_n) e $v_0 \in X$ tal que $T(u_{ni}) \to v_0$ em X. Como $S = I - T$, temos

$$S(u_{ni}) = I(u_{ni}) - T(u_{ni})$$

ou seja,

$$S(u_{ni}) = u_{ni} - T(u_{ni}) \Rightarrow u_{ni} = S(u_{ni}) + T(u_{ni}). \tag{1.20}$$

Como $T(u_{ni}) \to v_0$ e $S(u_n) \to u_0$, passando o limite em (1.20) temos $u_{ni} \to u_0 + v_0$ em

X. Pela continuidade de S, obtemos

$$S(u_{ni}) \to S(u_0 + v_0)$$

e pela unicidade dos limites, temos

$$S(u_0 + v_0) = u_0.$$

Como G é fechado em X, $(u_n) \subset G$ e $u_{ni} \to u_0 + v_0$, então $u_0 + v_0 \in G$. Logo, $u_0 \in S(G)$, ou seja, $S(G)$ é fechado, com G fechado, como queríamos. Em particular, $S(\partial G)$ é fechado, pois ∂D é fechado.

Agora considere $p \notin S(\partial D)$ e $S(\partial D)$ é fechado, assim

$$r := dist(p, S(\partial D)) > 0.$$

Pela compacidade de T, existe uma sequência $T_k \in C^0(\overline{D}, X)$ tal que $T_k \to T$ uniformemente em $\overline{D}$ e

$$T_k(\overline{D}) \subset F_k \subset X, \text{ com } dim(F_k) < \infty. \tag{1.21}$$

(Ver Brezis em [9]). Iremos definir o grau de $I - T$ como sendo o limite dos graus de $I - T_k$ que vamos apresentar agora. Para isso, é necessário alguns conceitos preliminares.

Considere uma aplicação $\phi : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$, com $M \leq N$, onde $\phi \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^M)$. Considere $\mathbb{R}^M$ um subespaço de $\mathbb{R}^N$ cujos pontos tem $N - M$ coordenadas nulas, ou seja,

$$\mathbb{R}^M = \{x \in \mathbb{R}^N : x_{M+1} = \cdots = x_N = 0\}.$$

A função ϕ descrita anteriormente, pode ser considerada como uma aplicação com valores em $\mathbb{R}^N$, na qual as $N - M$ últimas componentes são nulas, ou seja,

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \cdots, \phi_M(x), 0, 0, 0). \tag{1.22}$$

Sejam $g(x) = x - \phi(x)$ e $g_M \in C^0(\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$, onde g_M denota a restrição de g em $\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^M$, ou seja,

$$g_M = g|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^M}.$$

Vamos mostrar que se $p \in \mathbb{R}^M \backslash g(\partial\Omega)$, então

$$d(g, \Omega, p) = d(g_M, \Omega \cap \mathbb{R}^M, p). \tag{1.23}$$

Considere $x \in \Omega$ tal que $g(x) = p$, então $p = x - \phi(x)$ implicando que $x = \phi(x) + p$. Como ϕ tem posto finito em $\mathbb{R}^M$ e $p \in \mathbb{R}^M \backslash g(\partial\Omega)$, então $x \in \Omega \cap \mathbb{R}^M$, ou seja,

$$g_M(x) = g(x) = p.$$

Assim, mostramos que $g^{-1}(p) \subset g_M^{-1}(p)$. A inclusão contrária é trivial, assim conseguimos que

$$g^{-1}(p) = g_M^{-1}(p). \tag{1.24}$$

Vamos supor que $\Omega \cap \mathbb{R}^M \neq \emptyset$, pois caso contrário teríamos $g_M^{-1}(p) = \emptyset$ e como concluímos que $g^{-1}(p) = g_M^{-1}(p)$ então $g^{-1}(p) = \emptyset$. Tome $\phi \in C^1$ definido da mesma forma em (1.22), e tome p um valor regular de g_M. Então, por (1.17) temos

$$d(g, \Omega, p) = \sum_{x \in g^{-1}(p)} sgn[J_g(x)],$$

assim, consequentemente

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \phi(x) \\ &= (\underbrace{x_1 - \phi_1(x)}_{G_1(x)}, \cdots, \underbrace{x_M - \phi_M(x)}_{G_M(x)}, x_{M+1}, \cdots, x_N) \\ &= (G_1(x), \cdots, G_M(x), x_{M+1}, \cdots, x_N) \end{aligned}$$

ou seja, a matriz Jacobiana $g'(x)$ está na forma triângular

$$\begin{pmatrix} g'_M(x) & \cdot \\ 0 & I_{\mathbb{R}^{N-M}} \end{pmatrix}.$$

Logo, $sgn[J_g(x)] = sgn[J_{g_M}(x)]$. Assim,

$$\begin{aligned} d(g, \Omega, p) &= \sum_{x \in g^{-1}(p)} sgn[J_g(x)] \\ &= \sum_{x \in g_M^{-1}(p)} sgn[J_{g_M}(x)], \text{ pois } g^{-1}(p) = g_M^{-1}(p) \\ &= d(g_M, \Omega \cap \mathbb{R}^M, p) \end{aligned}$$

provando (1.23) com p valor regular de g_M.

Para um caso mais geral usamos o Teorema de Sard, daí

$$d(g, \Omega, p) = d(g_M, \Omega \cap \mathbb{R}^M, p).$$

Agora, podemos definir o grau para aplicações g tal que $g(x) = x - \phi(x)$, onde $\phi(\overline{D})$ está contida em um subespaço de dimensão finita F de X. Considere $p \in X$, $p \notin g(\overline{D})$. Seja F_1 um subespaço de X contendo F e p. Sendo, $g_1 = |_{\overline{D} \cap F_1}$, podemos definir

$$d(g, D, p) = d(g_1, D \cap F_1, p). \tag{1.25}$$

Vamos provar que (1.25) independe de F_1. Considere F_2 outro subespaço de X tal que $F \subset F_2$ e $p \in F_2$, logo $F \subset F_1 \subset F_2$ e $p \in F_1 \cap F_2$. Pela igualdade (1.23) temos:

$$d(g_i, D \cap F_i, p) = d(g|_{\overline{D} \cap F_1 \cap F_2}, D \cap F_1 \cap F_2), i = 1, 2.$$

Mostrando que a definição (1.25) é consistente, ou seja, não depende da escolha dos subespaços F_i.

Voltando a aplicação $S = I - T$, com T compacto. Seja $T_k \to T$ satisfazendo (1.21) e seja $S_k = I - T_k$, onde k é tal que

$$\sup_{x \in \overline{D}} \|T(x) - T_k(x)\| < \frac{r}{2}. \tag{1.26}$$

Assim, $p \notin S_k(\overline{D})$, fazendo sentido considerar $d(S_k, D, p)$ definido em (1.25).

Definição 1.12. *Seja $p \notin S(\partial D)$, onde $S = I - T$ com T compacto. Definimos*

$$d(S, D, p) = d(I - T_k, D, p)$$

para todo T_k que satisfaz (1.21) e (1.26).

Vamos mostrar que o grau não depende da aproximação T_k, com isso conseguimos justificar essa definição. Seja T_i, com $i = 1, 2$ tal que (1.21) e (1.26) se verificam. Considere F_i subespaços de dimensão finita tais que

$$T_i(\overline{D}) \subset F_i.$$

Se F é o subespaço gerado por F_1 e F_2 usamos a definição (1.25) e temos

$$d(S_i, D, p) = d(S_i|_{\overline{D} \cap F}, D \cap F, p), \mathrm{i} = 1,\ 2.$$

Considere a homotopia H, dada por

$$H(\lambda, \cdot) = \lambda S_1|_{\overline{D} \cap F} + (1 - \lambda) S_2|_{\overline{D} \cap F}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Suponha que H é não admissível, logo $H(\lambda, x) = p$ para algum $x \in \partial(D \cap F)$ e algum $\lambda \in [0,1]$, segue que

$$
\begin{aligned}
& \lambda S_1(x) + (1-\lambda)S_2(x) = p \\
\Leftrightarrow\ & \lambda(x - T_1(x)) + (1-\lambda)(x - T_2(x)) = p \\
\Leftrightarrow\ & \lambda x - \lambda T_1(x) + x - T_2(x) - \lambda x + \lambda T_2(x) = p \\
\Leftrightarrow\ & x - \lambda T_1(x) - (1-\lambda)T_2(x) = p \\
\Leftrightarrow\ & x - T(x) + T(x) - \lambda T_1(x) - (1-\lambda)T_2(x) = p \\
\Leftrightarrow\ & S(x) + \lambda(T(x) - T_1(x)) + (1-\lambda)(T(x) - T_2(x)) = p \\
\Leftrightarrow\ & p - S(x) = \lambda(T(x) - T_1(x)) + (1-\lambda)(T(x) - T_2(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \|p - S(x)\| = \|\lambda(T(x) - T_1(x)) + (1-\lambda)(T(x) - T_2(x))\|.
\end{aligned}
$$

Temos que $x \in \partial(D \cap F)$, assim por (1.21) e (1.26) conseguimos

$$
\begin{aligned}
r \leq \|p - S(x)\| &\leq \|\lambda(T(x) - T_1(x))\| + \|(1-\lambda)(T(x) - T_2(x))\| \\
&= \lambda\|(T(x) - T_1(x))\| + (1-\lambda)\|(T(x) - T_2(x))\| \\
&< \lambda\frac{r}{2} + (1-\lambda)\frac{r}{2} = \frac{r}{2},
\end{aligned}
$$

o que é um absurdo. Logo, H é admissível em $D \cap F$, então $p \notin H(\lambda, x)$ para $x \in \partial(D \cap F)$. Com isso, temos

$$d(S_1|_{\overline{D \cap F}}, D \cap F, p) = d(S_2|_{\overline{D \cap F}}, D \cap F, p)$$

justificando a definição.

Note que, o grau de Leray-Schauder satisfaz as mesmas propriedades $(P1) - (P8)$ que o grau de dimensão finita (com Ω no lugar de D). Na propriedade de invariância por homotopia $(P5)$, temos que lidar com homotopias $H(\lambda, x) \in C^0([0,1] \times \overline{D}, X)$ tais que para todo $\lambda \in [0,1]$, $H(\cdot, \lambda)$ é uma perturbação compacta da identidade.

Também podemos expandir a noção de índice de uma solução isolada x_0 de $S(x) = x - T(x) = p$, por

$$i(S, x_0) = \lim_{r \to 0} d(S, B_r(x_0), p), \quad p = S(x_0)$$

na qual $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$.

Lema 1.4. *Seja $T \in C^0(X, X)$ um operador compacto e diferenciável em x_0. Então, $T'(x_0)$ é um operador linear compacto, por isso existe somente um número finito de autovalores de $T'(x_0)$ contidos em $(0,1)$ e cada um tem multiplicidade finita.*

Lema 1.5. *Seja $T \in C^1(\overline{D}, X)$ um operador compacto, e suponha que 1 não é um autovalor de $T'(x_0)$. Sejam $S(x) = x - T(x)$ e, $x_0 \in X$, tal que $S(x_0) = p$. Então,*

$$i(S, x_0) = d(S'(x_0), B_r(x_0), p), \quad r \ll 1.$$

Lema 1.6. *Seja L uma aplicação linear compacta em X e suponha que 1 não seja um autovalor de L, então*

$$d(I - L, B_r(0), 0) = (-1)^\beta, \quad r > 0$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os autovalores de L contidos em $(0, 1)$.

Teorema 1.13. *Seja $T \in C^1(\overline{D}, X)$ um operador compacto tal que 1 não seja um autovalor de $T'(x_0)$, para algum $x_0 \in D$. Então, sendo*

$$S(x) = x - T(x) \text{ e } S(x_0) = p,$$

temos que x_0 é uma solução isolada de $S(x) = p$ e vale

$$i(S, x_0) = (-1)^\beta,$$

onde β é a soma das multiplicidades algébricas de todos os autovalores de $T'(x_0)$ contidos em $(0, 1)$.

1.8 Teorema do Ponto Fixo de Schauder

Mostraremos como o grau nos permite obter um resultado clássico sobre a existência de pontos fixos de uma aplicação compacta.

Teorema 1.14. *Seja $D \subset X$ um subconjunto aberto, limitado e convexo do espaço de Banach X tal que $0 \in D$ e seja $T \in C^0(\overline{D}, X)$ um operador compacto tal que $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Então T tem um ponto fixo em $\overline{D}$, isto é, existe*

$$x \in \overline{D} \text{ tal que } T(x) = x.$$

Demonstração. Se existe $x \in \partial D$ com $T(x) = x$, o teorema está demonstrado. Logo, podemos supor que

$$T(x) \neq x, \forall x \in \partial D. \tag{1.27}$$

Com isso, podemos definir o grau de $d(I - T, D, 0)$, assim nosso objetivo será mostrar que $d(I - T, D, 0) \neq 0$ provando o teorema.

Defina a homotopia $H : [0, 1] \times \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $H(\lambda, x) = x - \lambda T(x)$, $\lambda \in [0, 1], x \in \overline{D}$. Para cada $\lambda \in [0, 1]$, considerando $H(\lambda, \cdot) : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $x \longmapsto H(\lambda, x)$ é uma perturbação compacta da identidade em X.

Afirmação 1.15. *$H(\lambda, x) \neq 0$, para todo $(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial D$.*

De fato, suponha por absurdo que existem $\hat{x} \in \partial D$ e $\hat{\lambda} \in [0,1]$ tais que $H(\hat{\lambda}, \hat{x}) = 0$, sendo assim, $\hat{x} = \hat{\lambda}T(\hat{x})$. Por (1.27) temos $\hat{\lambda} < 1$. Como por hipótese $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$, temos que $T(\hat{x}) \in \overline{D}$, assim $\hat{\lambda} < 1$ e como D é convexo temos que $\hat{\lambda}T(\hat{x}) \in D$ contradizendo o fato de $\hat{\lambda}T(\hat{x}) = \hat{x} \in \partial D$. Logo, $H(\lambda, x) \neq 0$ para todo $(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial D$, ou seja, H é uma homotopia admissível.

Pela propriedade de invariância homotópica do grau, temos

$$d(I - T, D, 0) = d(I, D, 0) = 1,$$

pois $0 \in D$. Aplicando a propriedade da solução, tem-se que existe $x \in D$ tal que $x - T(x) = 0$. □

1.9 Generalização da Invariância Homotópica

A propriedade $(P5)$ será útil na demonstração do principal resultado desse capítulo que é o Teorema Global de Bifurcação segundo Rabinowitz. Para isso, vamos apresentar a propriedade $(P5)$ em uma versão mais geral.

Considere X um espaço de Banach e um subconjunto $U \subset [a,b] \times X$ aberto e limitado. Defina

$$U_\lambda = \{x \in X : (\lambda, x) \in U\},$$

onde a fronteira de U_λ denotaremos por ∂U_λ. Note que, em geral temos $\partial U_\lambda \subset (\partial U)_\lambda$. Seja $H(\lambda, x) = x - K(\lambda, x)$, onde $K(\lambda, \cdot)$ é compacto e $0 \notin H(\partial U)$. Essa aplicação H é chamada de homotopia admissível sobre U. Se H é uma homotopia admissível para todo $\lambda \in [a,b]$ e para todo $x \in \partial U_\lambda$, isto é, $H_\lambda(x) := H(\lambda, x) \neq 0$, assim faz sentido considerar $d(H_\lambda, U_\lambda, 0)$.

Teorema 1.16. *Se H é uma homotopia admissível sobre $U \subset [a,b] \times X$, então*

$$d(H_\lambda, U_\lambda, 0) \equiv constante, \quad \forall \lambda \in [a,b].$$

1.10 O Teorema Global de Bifurcação segundo Rabinowitz

Para mais detalhes dessa seção, veja a Seção 3.7 do Capítulo 3 da referência [4].

Sejam X um espaço de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$ é compacto e $T \in C^1(X, X)$ compacto tal que $T(0) = 0$ e $T'(0) = 0$. Defina o conjunto

$$\Sigma = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X, u \neq 0 : S_\lambda(u) = 0\},$$

onde $S_\lambda(u) = u - \lambda A u - T(u)$. Sabemos que se $(\hat{\lambda}, 0) \in \overline{\Sigma}$ então $\hat{\lambda}$ é um ponto de bifurcação para $S_\lambda = 0$. Uma componente conexa de $\overline{\Sigma}$ é um conjunto conexo fechado $\mathcal{C} \subset \overline{\Sigma}$ que é o máximo em relação a inclusão. Pelo Teorema de Bifurcação de Krasnoselski, se $\hat{\lambda}$ é um autovalor ímpar de A, então $\hat{\lambda}$ é um ponto de bifurcação. Considere $\mathcal{C}$ uma componente conexa de $\overline{\Sigma}$ contendo $(\hat{\lambda}, 0)$.

Rabinowitz propõe uma melhora no resultado apresentado por Krasnoselski, mostrando que $\mathcal{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times X$ ou atende outro ponto de bifurcação de $S_\lambda = 0$. Denotaremos por $\sigma(A)$ o conjuntos dos autovalores de A. Antes de demonstrarmos o teorema, precisaremos de dois resultados preliminares, que enunciaremos a seguir.

Lema 1.7. *Seja $\mathcal{C}$ uma componente conexa de $\overline{\Sigma}$ contendo $(\hat{\lambda}, 0)$ e suponha que $\mathcal{C}$ é limitado e não contém nenhum ponto $(\lambda^*, 0)$ com $\lambda^* \in \sigma(A)$, $\lambda^* \neq \hat{\lambda}$. Então, existe um conjunto aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R} \times X$ tal que*

(i_1) *$\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$;*

(i_2) *$\partial \mathcal{O} \cap \Sigma = \emptyset$;*

(i_3) *$\mathcal{O} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (\hat{\lambda} - \varepsilon, \hat{\lambda} + \varepsilon)$ com $\varepsilon > 0$, a distância de $\mathcal{C}$ e $(\sigma(A) \backslash \{\hat{\lambda}\} \times \{0\}$;*

(i_4) *Existe $\alpha > 0$ tal que se $(\lambda, u) \in \mathcal{O}$ com $|\lambda - \hat{\lambda}| \geq \varepsilon$, então $\|u\| \geq \alpha$.*

Lema 1.8. *Sejam C_1, C_2 subconjuntos fechados e disjuntos do espaço métrico compacto $\mathcal{J}$. Se não houver componentes conexas de $\mathcal{J}$ com interseção não-vazia com C_1, C_2, então $\mathcal{J} = K_1 \cup K_2$ com K_1, K_2 fechados, e $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $C_1 \subset K_1$, $C_2 \subset K_2$.*

Agora, enunciaremos o Teorema de Rabinowitz e faremos um esboço dos principais pontos da demonstração.

Teorema 1.17 (Bifurcação Global de Rabinowitz)**.** *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ um compacto e seja $T \in C^1(X, X)$ compacto tal que $T(0) = 0$ e $T'(0) = 0$. Suponha que $\hat{\lambda}$ é um autovalor de A com multiplicidade ímpar. Seja $\mathcal{C}$ a componente conexa de $\overline{\Sigma}$ contendo $(\hat{\lambda}, 0)$. Então*

(A) $\mathcal{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times X$, ou

(B) existe $\lambda^* \in \sigma(A) \backslash \{\hat{\lambda}\}$ tal que $(\lambda^*, 0) \in \mathcal{C}$.

Demonstração. Suponha por contradição que (A) e (B) não são válidas, assim pelo Lema 1.7 conseguimos um conjunto aberto $\mathcal{O}$ satisfazendo $(i_1) - (i_4)$. Usaremos a invariância de homotopia geral (Teorema 1.16) aplicada à homotopia S_λ. Para ajudar o leitor dividimos a demonstração em etapas.

Passo 1: Considere um β tal que $\mathcal{O}_\beta = \emptyset$ e considere um intervalo $J = [\hat{\lambda} + 2\varepsilon, \beta]$. Tome ε menor possível, podemos assumir que nenhum ponto de $\sigma(A)$ pertence a $(\hat{\lambda}, \hat{\lambda} + 2\varepsilon]$. Usando a propriedade (i_4) do Lema 1.7 tem-se que $\mathcal{O}_\lambda \cap B_\alpha = \emptyset$, para todo $\lambda \in J$. Esta e as outras propriedades de $\mathcal{O}$ indicadas no Lema 1.7 implicam que $S_\lambda(u) \neq 0$ para todo $u \in \partial\mathcal{O}_\lambda$ e todo $\lambda \in J$, pois temos que $\partial\mathcal{O}_\lambda \cap \Sigma \subset (\partial\mathcal{O})_\lambda \cap \Sigma = \emptyset$. Assim, $S_\lambda(u) \neq 0$ ou $u = 0$. Note que $u \in \partial\mathcal{O}_\lambda \subset (\partial\mathcal{O})_\lambda$, implicando que $u \in (\partial\mathcal{O})_\lambda$. Com isso, $(\lambda, u) \in \partial\mathcal{O}$. Se $u = 0$, então $(\lambda, 0) \in \partial\mathcal{O}$ com $\lambda \geq \lambda + 2\varepsilon$, chegando a uma contradição, pois pela propriedade (i_3) do Lema 1.7 temos que $(\lambda, 0) \in \partial\mathcal{O}$ para $\lambda \in (\hat{\lambda} - \varepsilon, \hat{\lambda} + \varepsilon)$.

Segue que pela invariância de homotopia deduzimos que $d(S_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, 0)$ é constante para todo $\lambda \in J$. Em particular, como $\mathcal{O}_\beta = \emptyset$ temos

$$d(S_{\lambda+2\varepsilon}, \mathcal{O}_{\lambda+2\varepsilon}, 0) = 0. \tag{1.28}$$

Passo 2: Pegue $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ e defina $J' = [\hat{\lambda} + \varepsilon', \hat{\lambda} + 2\varepsilon]$. Como J' não contém qualquer ponto em $\sigma(A)$, e $\mathcal{C} \cap (J' \times X)$ é compacto, existe $\rho_0 > 0$ (com $\rho_0 \leq \alpha$) tal que $\overline{\Sigma} \cap (J' \times \overline{B}_\rho) = \emptyset$ para todo $0 < \rho \leq \rho_0$. Assim, S_λ é admissível no conjunto $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap (J' \times (X \backslash \overline{B}_\rho))$ e aí vale

$$d(S_{\lambda+\varepsilon'}, \mathcal{O}'_{\hat{\lambda}+\varepsilon'}, 0) = d(S_{\hat{\lambda}+2\varepsilon}, \mathcal{O}'_{\hat{\lambda}+2\varepsilon}, 0).$$

Assim, o fato de $\mathcal{O}'_{\hat{\lambda}+\varepsilon'} = \mathcal{O}_{\hat{\lambda}+\varepsilon'} \backslash \overline{B}_\rho$ e $\mathcal{O}'_{\hat{\lambda}+2\varepsilon} = \mathcal{O}_{\hat{\lambda}+2\varepsilon}$ em conjunto com (1.28) implica

$$d(S_{\hat{\lambda}+\varepsilon'}, \mathcal{O}_{\hat{\lambda}+\varepsilon'} \backslash \overline{B}_\rho, 0) = 0, \quad \forall \rho \in (0, \rho_0]$$

e assim,

$$d(S_{\hat{\lambda}+\varepsilon'}, \mathcal{O}_{\hat{\lambda}+\varepsilon'}, 0) = d(S_{\hat{\lambda}+\varepsilon'}, B_\rho, 0), \quad \forall \rho \in (0, \rho_0]. \tag{1.29}$$

Por um argumento similar encontramos

$$d(S_{\hat{\lambda}-\varepsilon'}, \mathcal{O}_{\hat{\lambda}-\varepsilon'}, 0) = d(S_{\hat{\lambda}-\varepsilon'}, B_\rho, 0), \quad \forall \rho \in (0, \rho_0]. \tag{1.30}$$

Passo 3: Usamos mais uma vez a invariância de homotipia de S_λ no conjunto $\mathcal{O} \cap ([\hat{\lambda} - \varepsilon', \hat{\lambda} + \varepsilon'] \times X)$ para inferir

$$d(S_{\hat{\lambda}-\varepsilon'}, \mathcal{O}_{\hat{\lambda}-\varepsilon'}, 0) = d(S_{\hat{\lambda}+\varepsilon'}, \mathcal{O}_{\hat{\lambda}+\varepsilon'}, 0), \quad \forall \rho \in (0, \rho_0]. \tag{1.31}$$

Passo 4: Juntando (1.29), (1.30) e (1.31) deduzimos

$$d(S_{\hat{\lambda}+\varepsilon'}, B_\rho, 0) = d(S_{\hat{\lambda}-\varepsilon'}, B_\rho, 0), \quad \forall \rho \in (0, \rho_0].$$

Isso significa que o índice $i(S_{\hat{\lambda}+\varepsilon'}, 0)$ é igual ao índice $i(S_{\hat{\lambda}-\varepsilon'}, 0)$ mas, pelo Teorema Krasnoselski, isso não pode ser verdade, porque $[\hat{\lambda} - \varepsilon', \hat{\lambda} + \varepsilon'] \cap \sigma(A) = \{\hat{\lambda}\}$ e $\hat{\lambda}$ tem multiplicidade ímpar. A contradição prova o teorema. $\square$

Capítulo 2

Um modelo populacional logístico de uma espécie vivendo em um ambiente limitado

Este capítulo é dedicado ao estudo do problema (P), que foi estudado por Alves, Delgado, Souto e Suárez em [5].

Recordando o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u\left(\lambda - \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u^p(y)dy\right), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de fronteira suave com $N \geq 1$, $p > 0$ e $K \in \mathcal{K}$ é uma função não-negativa com $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$.

Como em [5], consideramos K uma função pertencendo a classe $\mathcal{K}$ formada por funções $K : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que verificam as seguintes condições:

(i) $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ e $K(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in \Omega$;

(ii) Se w é mensurável e $\displaystyle\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)|w(y)|^p w(x)^2 dxdy = 0$, então $w = 0$ $q.t.p$ em Ω.

O principal resultado deste capítulo é enunciado abaixo:

Teorema 2.1. *Suponha que $K \in \mathcal{K}$. Então, o problema (P) tem uma solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.*

2.1 Preliminares

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades do termo não-local e demonstraremos alguns resultados preliminares que são fundamentais para demonstração do teorema principal.

Inicialmente, observe que se $K \in \mathcal{K}$ e $w \in L^\infty(\Omega)$ podemos definir a função $\phi_w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_w(x) := \int_\Omega K(x,y)|w(y)|^p dy. \tag{2.1}$$

Note que na função acima, estamos considerando $|w(y)|^p$ dentro do módulo, diferente do problema (P). Isto se dá pelo fato de que, se o problema (P) tem solução, a mesma deverá ser positiva. Porém no decorrer do estudo esse módulo será descartado, voltando a forma original do problema (P).

Temos que K e w são limitadas, pois $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ e $w \in L^\infty(\Omega)$. Assim, ϕ_w está bem definida, pois se $w \in L^\infty(\Omega)$, então $\phi_w \in L^\infty(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}|\phi_w(x)| =& \left|\int_\Omega K(x,y)|w(y)|^p dy\right| \\ \leq& \int_\Omega |K(x,y)||w(y)|^p dy \\ \leq& \|K\|_\infty \|w\|_\infty^p |\Omega|.\end{aligned}$$

Lema 2.1. *A função ϕ_w satisfaz as seguintes propriedades:*

(ϕ_1) $t^p\phi_w(x) = \phi_{tw}(x)$, *para todo* $w \in L^\infty(\Omega) e t > 0$*;*

(ϕ_2) $\|\phi_w\|_\infty \leq \|K\|_\infty |\Omega| \|w\|_\infty^p$, *para todo* $w \in L^\infty(\Omega)$*;*

(ϕ_3) $\|\phi_w - \phi_v\|_\infty \leq \|K\|_\infty |\Omega| \||w|^p - |v|^p\|_\infty$, *para todos* $w, v \in L^\infty(\Omega)$*;*

(ϕ_4) $\phi : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega), \phi(u) = \phi_u$ *é uniformemente contínua em* $L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. (ϕ_1) : Para $w \in L^\infty(\Omega)$ e $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}\phi_{tw}(x) &= \int_\Omega K(x,y)|tw(y)|^p dy \\ &= \int_\Omega K(x,y)|t|^p|w(y)|^p dy \\ &= t^p \int_\Omega K(x,y)|w(y)|^p dy\end{aligned}$$

ou seja, $\phi_{tw}(x) = t^p\phi_w(x)$.

(ϕ_2) : Para $w \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} |\phi_w(x)| &= \left| \int_\Omega K(x,y)|w(y)|^p dy \right| \\ &\leq \int_\Omega |K(x,y)||w(y)|^p dy \\ &\leq \int_\Omega \|K\|_\infty \|w\|_\infty^p dy \\ &\leq \|K\|_\infty \|w\|_\infty^p |\Omega| \end{aligned}$$

consequentemente, $\|\phi_w(x)\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|w\|_\infty^p |\Omega|$.

(ϕ_3) : Para $w, v \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} |\phi_w(x) - \phi_v(x)| &= \left| \int_\Omega K(x,y)|w(y)|^p dy - \int_\Omega K(x,y)|v(y)|^p dy \right| \\ &= \left| \int_\Omega K(x,y)(|w(y)|^p - |v(y)|^p) dy \right| \\ &\leq \int_\Omega |K(x,y)|||w(y)|^p - |v(y)|^p| dy \\ &\leq \|K\|_\infty \||w|^p - |v|^p\|_\infty |\Omega| \end{aligned}$$

desta forma, $\|\phi_w - \phi_v\|_\infty \leq \|K\|_\infty \||w|^p - |v|^p\|_\infty |\Omega|$.

(ϕ_4) : Consequência direta da propriedade (ϕ_3). □

Vamos considerar $\phi_u(x) = \displaystyle\int_\Omega K(x,y)u^p(y)dy$, sendo este o termo não-local. Assim, ficaremos com o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - \phi_u(x)u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P'}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_u(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P''}$$

Segue que u será solução positiva de (P) se, e somente se, u for solução positiva do problema (P'') no sentido fraco, ou seja, se $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega \phi_u uv dx = \lambda \int_\Omega uv dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Nosso objetivo é mostrar que existe solução positiva para o problema (P'') utilizando o Teorema Global de Bifurcação de Rabinowitz. Observe que, existe $C = C_\infty(\Omega) > 0$ tal que: para cada $f \in L^\infty(\Omega)$, existe um único $w \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo:

$$\begin{cases} -\Delta w = f(x) & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\|w\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_\infty.$$

Daí, podemos definir o operador solução $S : C^0(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ dado por

$$S(u) = w_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta w_1 = u, & \text{em } \Omega \\ w_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

que está bem definido e é linear (ver Apêndice B). Além disso, o operador S verifica a seguinte desigualdade

$$\|S(u)\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \forall u \in C^0(\overline{\Omega}). \tag{2.4}$$

O operador $S : C^0(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ pode ser "visto" como $S : C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$, tornando-se um operador compacto, pois pelas imersões de Sobolev temos que $C^1(\overline{\Omega}) \overset{comp.}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$, ver [2]. Note que, o espectro de S, é dado por

$$\sigma(S) = \{\lambda_j^{-1} : \lambda_j \text{ é um autovalor do menos Laplaciano}\}.$$

Agora, vamos definir um operador não-linear $G : C^0(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ onde

$$G(u) = w_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta w_2 + \phi_u u = 0, & \text{em } \Omega \\ w_2 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} -\Delta w_2 = -\phi_u u, & \text{em } \Omega \\ w_2 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Assim, temos que $S(-\phi_u u) = w_2 = G(u)$. Logo, o operador G está bem definido e é contínuo, pois é a composição de aplicações contínuas. Além disso, pela desigualdade (2.4) e (ϕ_2) o operador G satisfaz

$$\|G(u)\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C\|\phi_u u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C\|\phi_u\|_\infty \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \forall u \in C^0(\overline{\Omega}). \tag{2.7}$$

Analogamente, como verificado para S, temos que G é um operador compacto, podendo ser escrito como $G : C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$. Uma vez que

$$\|G(u)\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \|G(u)\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \tag{2.8}$$

dividindo ambos os lados da desigualdade (2.8) por $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}$ e usando a desigualdade (2.7) temos

$$\left\| \frac{G(u)}{\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}} \right\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \frac{\|G(u)\|_{C^1(\overline{\Omega})}}{\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}} \leq \frac{C\|\phi_u\|_\infty \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}} \leq C\|\phi_u\|_\infty,$$

passando o limite e usando a propriedade (ϕ_4) temos que

$$\lim_{u\to 0} \frac{G(u)}{\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}} = 0$$

ou seja, $G(u) = o(\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})})$.

Afirmamos que, (λ, u) é solução do problema (P'') no sentido fraco se, e somente se

$$u = F(\lambda, u) := \lambda S(u) + G(u). \tag{2.9}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}
u = \lambda S(u) + G(u) \quad &\Leftrightarrow \quad u - G(u) = \lambda S(u) \Leftrightarrow \\
\lambda^{-1}(u - G(u)) = S(u) \quad &\Leftrightarrow \quad -\Delta(\lambda^{-1}(u - G(u))) = u \Leftrightarrow \\
-\Delta(u - G(u)) = \lambda u \quad &\Leftrightarrow \quad -\Delta u - (-\Delta G(u)) = \lambda u \Leftrightarrow \\
-\Delta u - (-\Delta w_2) = \lambda u \quad &\Leftrightarrow \quad -\Delta u - (-\phi_u(x) u) = \lambda u \Leftrightarrow \\
-\Delta u + \phi_u(x) u = \lambda u & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.10)
\end{aligned}$$

ou seja, encontrar uma solução para (P'') é equivalente a encontrar uma solução para (2.9).

Sabemos que, a primeira autofunção φ_1 associada ao autovalor λ_1 pode ser escolhida positiva e temos que λ_1^{-1} é um autovalor com multiplicidade um (ímpar) para o operador S. Através do Teorema Global da Bifurcação de Rabinowitz, existe uma componente conexa fechada, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\lambda_1}$, de soluções para o problema (P), que irá satisfazer a condição (A) ou (B) do teorema. É importante destacar, que as propriedades de S e G são fundamentais para utilização desse teorema.

Lema 2.2. *Existe $\delta > 0$ tal que se $(\lambda, u) \in \mathcal{C}$ com $|\lambda - \lambda_1| + \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} < \delta$ e $u \neq 0$, então u tem sinal definido, ou seja,*

$$u(x) > 0, \forall x \in \Omega \quad ou \quad u(x) < 0, \forall x \in \Omega.$$

Demonstração. Seja $(u_n) \subset C^0(\overline{\Omega})$ e $\lambda_n \to \lambda_1$, tal que,

$$u_n \neq 0, \|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0 \text{ e } u_n = F(\lambda_n, u_n).$$

Agora, considere $w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}}$ em (2.10), logo

$$\frac{-\Delta u_n + \phi_{u_n}(x) u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}} = \frac{\lambda_n u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}}$$

ou seja,

$$-\Delta \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}} \right) + \phi_{u_n}(x) \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}} \right) = \lambda_n \frac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}}$$

consequentemente

$$-\Delta w_n + \phi_{u_n}(x) w_n = \lambda_n w_n.$$

Daí, podemos observar que

$$\begin{cases} -\Delta w_n + \phi_{u_n} w_n = \lambda_n w_n, & \text{em } \Omega \\ w_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} -\Delta w_n = \lambda_n w_n - \phi_{u_n} w_n, & \text{em } \Omega \\ w_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

dessa forma $S(\lambda_n w_n - \phi_{u_n} w_n) = w_n$. Com isso, temos

$$
\begin{aligned}
\|w_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} &\leq C\|\lambda_n w_n - \phi_{u_n} w_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \\
&\leq C\left(\|\lambda_n w_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|\phi_{u_n} w_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}\right) \\
&\leq C\left(\lambda_n \|w_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|\phi_{u_n}\|_\infty \|w_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}\right) \\
&\leq C\left[(\lambda_n + \|\phi_{u_n}\|_\infty)\left(\|w_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}\right)\right] \\
&= C\left[(\lambda_n + \|\phi_{u_n}\|_\infty)\left(\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}}\right\|_{C^0(\overline{\Omega})}\right)\right] \\
&= C\left[(\lambda_n + \|\phi_{u_n}\|_\infty)\left(\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}\frac{1}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}}\right)\right],
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\|w_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C[(\lambda_n + \|\phi_{u_n}\|_\infty)], \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}
$$

Por outro lado, sabemos que $u_n = \lambda_n S(u_n) + G(u_n)$, daí dividindo essa igualdade por $\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}$, temos

$$
\frac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}} = \frac{\lambda_n S(u_n)}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}} + \frac{G(u_n)}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}}
$$

daí,

$$
w_n = \lambda_n S(w_n) + o_n(1). \tag{2.14}
$$

Pela desigualdade (2.13), a sequência (w_n) é limitada em $C^0(\overline{\Omega})$ que é o domínio do operador S. Como S é um operador compacto, então S leva conjuntos limitados em conjuntos pré-compactos. Assim, $S(w_n)$ é convergente, a menos de subsequência.

Se $S(w_n)$ é convergente e sabemos que $\lambda_n \to \lambda_1$, então pela igualdade (2.14), (w_n) também é convergente, suponha que para algum w em $C^0(\overline{\Omega})$, pois $S : C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ é compacto, assim temos que $S(w_n) \to S(w)$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Daí, passando o limite em (2.14), obtemos

$$
w_n = \lambda_n S(w_n) + o_n(1) \to \lambda_1 S(w) \quad \text{em } C^1(\overline{\Omega})
$$

ou seja,

$$
w_n \to \lambda_1 S(w) \quad \text{em } C^1(\overline{\Omega}) \tag{2.15}
$$

mas, pela imersão de Sobolev teremos $w_n \to \lambda_1 S(w)$ em $C^0(\overline{\Omega})$. Por outro lado, sabemos que $w_n \to w$ em $C^0(\overline{\Omega})$, sendo assim $w = \lambda_1 S(w)$, ou seja,

$$
\begin{cases}
-\Delta w = \lambda_1 w, & \text{em } \Omega \\
w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{2.16}
$$

Além disso, sabemos que $w \neq 0$, pois $w_n \to w$ em $C^0(\overline{\Omega})$, daí, $\|w_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \to \|w\|_{C^0(\overline{\Omega})}$, mas $\|w_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} = 1$, então $\|w\|_{C^0(\overline{\Omega})} = 1$, ou seja, $w \neq 0$ em Ω. Então, pela Teoria Espectral, temos que $w(x) > 0$, para todo $x \in \Omega$ ou $w(x) < 0$ para todo $x \in \Omega$.

Sem perda de generalidade, vamos supor que $w(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Como $\lim w_n = w$ em $C^1(\overline{\Omega})$, devemos ter que $w_n(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ e para n suficientemente grande, pois $w_n \to w$ uniformemente. Dessa forma, o sinal de (u_n) é o mesmo de (w_n) para n suficientemente grande, como queríamos demonstrar. □

Agora, note que, se $(\lambda, u) \in \Sigma$, então $(\lambda, -u)$ também pertence a Σ. De fato, como o operador G é não-linear, precisamos verificar se a igualdade $-G(u) = G(-u)$ é válida. Sabemos que $G(u) = w_2 = S(-\phi_u(x)u)$, assim,

$$G(-u) = S(-\phi_{-u}(x)(-u)) = -S(\phi_{-u}(x)(-u)) = -S(\phi_u(x)(-u)) = -S(-\phi_u(x)u) = -G(u).$$

Portanto, se $(\lambda, u) \in \Sigma$, temos

$$u = \lambda S(u) + G(u), \tag{2.17}$$

então multiplicando a igualdade (2.17) por (-1), obtemos

$$-u = -\lambda S(u) - G(u) = \lambda S(-u) + G(-u) \Rightarrow (\lambda, -u) \in \Sigma.$$

Com isso, vamos decompor $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$. Para tal decomposição, estaremos considerando

$$\mathcal{C}^+ = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C} : u(x) > 0, \forall x \in \Omega\} \cup \{(\lambda_1, 0)\}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C} : u(x) < 0, \forall x \in \Omega\} \cup \{(\lambda_1, 0)\}$$

Além disso, consideramos o conjunto

$$\mathcal{C}^\pm = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C} : u^\pm(x) \neq 0, \forall x \in \Omega\}.$$

Claramente, temos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}^\pm$. Então, devemos mostrar que $\mathcal{C}^\pm = \emptyset$.

Afirmação 2.2. $\overline{\mathcal{C}^\pm} = \emptyset$

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$ são fechados. De fato, seja $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^+$, com $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$ e $u_n \to u$ em $C^0(\overline{\Omega})$. Temos que, sem perda de generalidade, $u_n > 0$, então pela convergência $u \geq 0$ em Ω. Temos dois casos a considerar, $u = 0$ e $u \geq 0$, com $u \neq 0$.

- $1^{\underline{o}}$ Caso: Se $u = 0$, então teremos que $(\lambda_n, u_n) \to (\lambda, 0)$. Assim, queremos mostrar que $(\lambda, 0) \in \mathcal{C}^+$, para isso, vamos mostrar que $\lambda = \lambda_1$, ou seja, $(\lambda, u) = (\lambda_1, 0) \in \mathcal{C}^+$. Sabemos que $u_n = \lambda_n S(u_n) + G(u_n)$ dividindo essa igualdade por $\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}$, temos

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}} = \lambda_n S\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}}\right) + \frac{G(u_n)}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}} \tag{2.18}$$

Considerando $w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}}$, por (2.18) temos

$$w_n = \lambda_n S(w_n) + o_n(1). \tag{2.19}$$

Por argumentos análogos aos do Lema 2.2, temos que w_n, a menos de subsequência, é convergente. Seja $w_n \to w$ em $C^0(\overline{\Omega})$, então passando ao limite em (2.19) temos

$$w = \lambda S(w)$$

ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w, & \text{em } \Omega \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.20}$$

Note que w tem sinal definido, ou seja, $w \geq 0$ e mais $w \neq 0$, pois $\|w\|_{C^0(\overline{\Omega})} = 1$. Como $w \geq 0$ e $w \neq 0$, pelo Princípio do Máximo (ver Apêndice A), $w > 0$ em Ω, ou seja, w é autofunção associada ao autovalor $\lambda > 0$ com sinal definido. Sendo assim, já sabemos que o único autovalor do Laplaciano que tem uma autofunção com sinal definido é λ_1. Portanto, $\lambda = \lambda_1$, ou seja, $(\lambda, u) = (\lambda_1, 0) \in \mathcal{C}^+$.

- $2^{\underline{o}}$ Caso: Se $u \geq 0$, com $u \neq 0$. Sabemos que

$$u_n = \lambda_n S(u_n) + G(u_n) \tag{2.21}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_u(x) u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.22}$$

Note que $\lambda u \geq 0$, pois $u \geq 0$ e por hipótese temos que $\phi_u(x) \geq 0$. Assim, pelo Princípio do Máximo (ver Apêndice A), $u > 0$. Daí, pela continuidade dos operadores S e G, e passando ao limite em (2.21) obtemos

$$u = \lambda S(u) + G(u).$$

Logo, (λ, u) é solução, ou seja, $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$.

Assim, pelos casos apresentados acima, temos que $\mathcal{C}^+$ é fechado. Para demonstrar que $\mathcal{C}^-$ é fechado, segue analogomente.

Agora, suponha por contradição, que $\overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset$, então devemos ter

- $\mathcal{C}$ é conexo em $\mathbb{R} \times C^0(\mathbb{R})$ (consequência do Teorema Global de Bifurcação);
- $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ é fechado e não-vazio com
$$(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \mathcal{C}^\pm = \emptyset$$
e
$$(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset$$

De fato, $(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \mathcal{C}^\pm = \emptyset$ é imediato, pela definição dos conjuntos em questão. Vamos mostrar que $(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset$. Sabemos que $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$ são componentes conexas fechadas, assim $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ é fechado.

Logo, $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ e $\mathcal{C}^\pm$ são o complementar um do outro em relação a $\mathcal{C}$, ou seja, $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ e $\mathcal{C}^\pm$ são relativamente abertos. Note que, se tivermos $(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \overline{\mathcal{C}^\pm} = \emptyset$, então $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- = \emptyset$ ou $\overline{\mathcal{C}^\pm} = \emptyset$, mas já sabemos que $(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \neq \emptyset$, pois teria pelo menos o ponto $(\lambda_1, 0)$ e, por hipótese, temos que $\overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset$, sendo assim, $(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset$.

Como $(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \overline{\mathcal{C}^\pm} \neq \emptyset$, então existe $(\lambda, u) \in (\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-) \cap \overline{\mathcal{C}^\pm}$ que é solução do problema (P), tal que $(\lambda_n, u_n) \in (\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-)$ e $(s_n, v_n) \subset \mathcal{C}^\pm$ onde,
$$\lambda_n, s_n \to \lambda \text{ em } \mathbb{R}$$
e
$$u_n, v_n \to u \text{ em } C^0(\overline{\Omega}).$$

Note que $u \neq 0$, pois se (λ, u) é solução, com $u = 0$, então $(\lambda, 0) \in \mathcal{C}$, ou seja, $(\lambda, 0) \in \mathcal{C}^+$ ou $(\lambda, 0) \in \mathcal{C}^-$, assim, teríamos $\lambda = \lambda_1$, ou seja, $(\lambda, 0) = (\lambda_1, 0)$. Consequentemente, $\lambda_n \to \lambda_1$ e $v_n \to 0$, logo pelo Lema 2.2, v_n tem sinal definido, o que é um absurdo, pois $v_n \in \mathcal{C}^\pm$. Assim, $u \neq 0$. Agora, note que $(\lambda_n, u_n) \in (\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-)$, ou seja, $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^+$ ou $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^-$, a menos de subsequência, sem perda de generalidade, suponha que $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^+$, então $u \geq 0$ em Ω e $u \neq 0$.

Como (λ, u) é solução, então satisfaz
$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$
com $b(x) = \phi_u(x) \geq 0$.

Logo, pelo Princípio do Máximo (ver Apêndice A), temos que $u > 0$ em Ω. Como $v_n \to u$ em $C^0(\overline{\Omega})$, então $v_n > 0$, para n suficientemente grande, chegando a uma contradição, pois $v_n \in \mathcal{C}^\pm$. Portanto, $\mathcal{C}^\pm = \emptyset$.

Deste modo, concluímos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$, como queríamos demonstrar. □

Agora, observemos que $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(\lambda_1, 0)\}$ e $\mathcal{C}^- = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C} : (\lambda, -u) \in \mathcal{C}^+\}$. De fato, considere $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^-$ então $(\lambda, u) \in \mathcal{C}$ e $u \leq 0$. Assim, $(\lambda, -u) \in \mathcal{C}$ e $-u \geq 0$. Logo $(\lambda, -u) \in \mathcal{C}^+$. Por outro lado, considerando $(\lambda, -u) \in \mathcal{C}^+$, então $(\lambda, -u) \in \mathcal{C}$ e $-u \geq 0$. Assim, $(\lambda, u) \in \mathcal{C}$ e $u \leq 0$. Logo, $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^-$. Desta forma, $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(\lambda_1, 0)\}$ e $\mathcal{C}^- = \{(\lambda, u) \in \mathcal{C} : (\lambda, -u) \in \mathcal{C}^+\}$.

Além disso, com as afirmações acima, podemos observar que $\mathcal{C}^+$ é ilimitada se, e somente se, $\mathcal{C}^-$ é ilimitada.

Note, que atráves do Lema 2.2 e das propriedades apresentadas acima, podemos demonstrar que (B) do Teorema Global de Bifurcação de Rabinowitz, não ocorre, na certeza de alcançarmos os nossos objetivos.

Lema 2.3. *$\mathcal{C}^+$ é ilimitada.*

Demonstração. Suponha por absurdo, que $\mathcal{C}^+$ é limitada. Então, $\mathcal{C}$ também é limitada. Pelo Teorema Global de Bifurcação, temos que $\mathcal{C}$ contém $(\hat{\lambda}, 0)$, tal que $\hat{\lambda} \neq \lambda_1$ e $\hat{\lambda}^{-1} \in \sigma(S)$. Agora, considere (u_n) em $C^0(\overline{\Omega})$ e $\lambda_n \to \hat{\lambda}$ tal que, $u_n \neq 0, \|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0$ e $u_n = F(\lambda_n, u_n)$.

Considere $w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})}}$. Pela demonstração do Lema 2.2, vimos que satisfaz o problema (2.11) e se considerarmos uma subsequência adquada, teremos que $w_n \to w$ em $C^1(\overline{\Omega})$, que é uma solução diferente de zero para o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta w = \hat{\lambda} w, & \text{em } \Omega \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

Dessa forma, mostramos que w é uma autofunção associada ao autovalor $\hat{\lambda}$. Como $\hat{\lambda} \neq \lambda_1$, então o sinal de w deve mudar. Assim, para n suficientemente grande, cada w_n deve mudar o sinal, assim como $u_n = \|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} w_n$, chegando a um absurdo, pois $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^+$ ou $(\lambda_n, u_n) \in \mathcal{C}^-$. Logo, $\mathcal{C}^+$ é ilimitada, como queríamos.

□

2.2 Uma Estimativa a Priori

Nesta seção, apresentaremos uma estimativa a priori, que mostrará que a componente conexa $\mathcal{C}^+$ intersecta o hiperplano $\{\lambda\} \times H_0^1(\Omega)$, para $\lambda > \lambda_1$.

Lema 2.4. *Suponha que $K \in \mathcal{K}$. Para qualquer $\Lambda > 0$, existe $r > 0$ tal que, se $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ e $\lambda \leq \Lambda$, devemos ter que $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq r$.*

Demonstração.

Afirmação 2.3. *Para qualquer $\Lambda > 0$, existe $r > 0$ tal que se $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ e $\lambda \leq \Lambda$, devemos ter $\|u\|_* \leq r$.*

Suponha, por contradição, que existe $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $(\lambda_n) \subset [0, \Lambda]$ tal que, $\|u_n\|_* \to \infty$ e $u_n = F(\lambda_n, u_n)$. Dividindo (2.10) por $\|u_n\|_*$, obtemos

$$\frac{-\Delta u_n + \phi_{u_n}(x) u_n}{\|u_n\|_*} = \frac{\lambda_n u_n}{\|u_n\|_*}$$

implicando que

$$-\Delta\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_*}\right) + \phi_{u_n}(x)\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_*}\right) = \lambda_n\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_*}\right)$$

ou seja,

$$-\Delta w_n + \phi_{u_n}(x) w_n = \lambda_n w_n, \tag{2.24}$$

onde $w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_*}$. Multiplicando (2.24) por v e integrando sobre Ω, temos:

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla v dx + \int_\Omega \phi_{u_n}(x) w_n v dx = \lambda_n \int_\Omega w_n v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.25}$$

Sabemos que (w_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, assim, sem perda de de generalidade, vamos supor que existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

pelas imersões de Sobolev sabemos que $H_0^1(\Omega) \overset{comp.}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, então

$$w_n \to w \text{ em } L^2(\Omega),$$

e, além disso,

$$w_n(x) \to w(x), \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Considerando $v = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_*^{p+1}}$ como uma função teste em (2.25), e usando a propriedade (ϕ_1), obtemos:

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla w_n \nabla \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_*^{p+1}} \right) dx + \int_\Omega \phi_{u_n}(x) w_n \frac{u_n}{\|u_n\|_*^{p+1}} dx = \lambda_n \int_\Omega w_n \frac{u_n}{\|u_n\|_*^{p+1}} dx \\
\Rightarrow \quad & \int_\Omega \nabla w_n \nabla \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_*} \frac{1}{\|u_n\|_*^p} \right) dx + \int_\Omega \phi_{u_n}(x) w_n \frac{u_n}{\|u_n\|_*} \frac{1}{\|u_n\|_*^p} dx = \lambda_n \int_\Omega w_n \frac{u_n}{\|u_n\|_*} \frac{1}{\|u_n\|_*^p} dx \\
\Rightarrow \quad & \int_\Omega \nabla w_n \nabla w_n \frac{1}{\|u_n\|_*^p} dx + \int_\Omega \phi_{u_n}(x) w_n w_n \frac{1}{\|u_n\|_*^p} dx = \lambda_n \int_\Omega w_n w_n \frac{1}{\|u_n\|_*^p} dx \\
\Rightarrow \quad & \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \frac{1}{\|u_n\|_*^p} dx + \int_\Omega \phi_{u_n}(x) w_n^2 \frac{1}{\|u_n\|_*^p} dx = \lambda_n \int_\Omega \frac{w_n^2}{\|u_n\|_*^p} dx \\
\Rightarrow \quad & \|w_n\|_*^2 \frac{1}{\|u_n\|_*^p} + \int_\Omega \phi_{u_n}(x) w_n^2 \frac{1}{\|u_n\|_*^p} dx = \lambda_n \int_\Omega \frac{w_n^2}{\|u_n\|_*^p} dx \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{\|u_n\|_*^p} + \int_\Omega \left(\frac{1}{\|u_n\|_*} \right)^p \phi_{u_n}(x) w_n^2 dx = \lambda_n \frac{1}{\|u_n\|_*^p} \int_\Omega w_n^2 dx \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{\|u_n\|_*^p} + \int_\Omega \phi_{\frac{1}{\|u_n\|_*} u_n}(x) w_n^2 dx = \frac{\lambda_n}{\|u_n\|_*^p} \int_\Omega w_n^2 dx \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{\|u_n\|_*^p} + \int_\Omega \phi_{\frac{u_n}{\|u_n\|_*}}(x) w_n^2 dx = \frac{\lambda_n}{\|u_n\|_*^p} \int_\Omega w_n^2 dx
\end{aligned}
$$

daí,

$$
\frac{1}{\|u_n\|_*^p} + \int_\Omega \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx = \frac{\lambda_n}{\|u_n\|_*^p} \int_\Omega w_n^2 dx. \tag{2.26}
$$

Recordando que $\|u_n\|_* \to \infty$ e (λ_n) é limitada, então passando o limite em (2.26) temos

$$
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx = 0
$$

logo, pelo Lema de Fatou, conseguimos

$$
0 \le \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx
$$

e, consequentemente,

$$
0 \le \int_\Omega \phi_w(x) w^2 dx \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx = 0
$$

ou seja,

$$
\int_\Omega \phi_w(x) w^2 dx = 0
$$

finalmente,

$$
\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)|w(y)|^p |w(x)|^2 dxdy = 0.
$$

Como por hipótese $K \in \mathcal{K}$, então pelo item (ii) temos que $w = 0$. Sendo assim, $w_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, tome $v = w_n$ como uma função teste em (2.25), assim,

$$\int_\Omega \nabla w_n \nabla w_n dx + \int_\Omega \phi_{u_n}(x) w_n w_n dx = \lambda_n \int_\Omega w_n w_n dx$$

donde

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx + \int_\Omega \phi_{u_n}(x) w_n^2 dx = \lambda_n \int_\Omega w_n^2 dx, \tag{2.27}$$

observando que (λ_n) é limitado por Λ, $(\lambda_n) \subset [0, \Lambda]$ e $\int_\Omega \phi_{u_n}(x) w_n^2 dx \geq 0$, temos

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx \leq \Lambda \int_\Omega w_n^2 dx. \tag{2.28}$$

Passando o limite em (2.28), concluímos que $\|w_n\|_* \to 0$, o que é um absurdo, pois sabemos que $\|w_n\|_* = \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|_*} \right\|_* = \|u_n\|_* \frac{1}{\|u_n\|_*} = 1$, para todo n, validando a afirmação.

Como (u_n) é limitado em $H_0^1(\Omega)$, por regularização teremos que (u_n) é limitada em $L^\infty(\Omega)$. □

2.3 Demonstração do Teorema Principal

Do Lema 2.4, notamos que para todo $\lambda > \lambda_1$, temos $(\{\lambda\} \times H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^+ \neq \emptyset$, isto é, $\mathcal{C}^+$ cruza o hiperplano $\{\lambda\} \times H_0^1(\Omega)$. Observe que, caso contrário, existe $\Lambda > \lambda_1$ tal que $\mathcal{C}^+$ não cruza o hiperplano $\{\Lambda\} \times H_0^1(\Omega)$, sendo assim, pelo Lema 2.4, existe $r > 0$ tal que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$, $\lambda \leq \Lambda$ e $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq r$. Logo, $\mathcal{C}^+$ seria limitada, contradizendo o Lema 2.3.

Agora, para concluirmos a demonstração do Teorema 2.1, vamos mostrar que não existe solução para $\lambda \leq \lambda_1$, fazendo isso, conseguiremos mostrar que $\mathcal{C}^+$ não intersecta $[0, \lambda_1] \times H_0^1(\Omega)$.

Suponha, por absurdo, que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+ \cap ([0, \lambda_1] \times H_0^1(\Omega)$. Tome $v = \varphi_1$ como uma função teste em (2.2), onde φ_1 é autofunção do autovalor λ_1 de $(-\Delta)$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx + \int_\Omega u \varphi_1 \phi_u(x) dx = \lambda \int_\Omega u \varphi_1 dx,$$

logo,

$$\lambda_1 \int_\Omega u \varphi_1 dx < \lambda_1 \int_\Omega u \varphi_1 dx + \int_\Omega \phi_u(x) u \varphi_1 = \lambda \int_\Omega u \varphi_1 dx. \tag{2.29}$$

Como $\int_\Omega u \varphi_1 dx > 0$, a desigualdade (2.29) nos mostra que $\lambda_1 < \lambda$. Portanto, concluímos que o problema (P) tem uma solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$, como queríamos demonstrar.

Capítulo 3

Resultados e Conceitos Preliminares para o Estudo de um Sistema Populacional Logístico

Este capítulo, tem como foco apresentar os elementos básicos para o estudo de existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas não-locais

$$\begin{cases} -\Delta u = \left(a - \displaystyle\int_\Omega K(x,y) f(u,v)dy\right) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = \left(d - \displaystyle\int_\Omega \Gamma(x,y) g(u,v)dy\right) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_0}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave com $N \geq 1$, $K, \Gamma : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ são funções não-negativas que pertencem a classe $\mathcal{K}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Este problema, foi estudado pelos autores de Lima e Souto em [22].

Note que no caso de $a, b, c, d > 0$, teremos um sistema cooperativo, ou seja, as duas espécies em estudo, cooperam mutuamente para o seu crescimente. Se $bc < 0$, teremos uma estrutura envolvendo predador e presa. Já no caso de $b, c < 0$, então há competição entre as duas espécies.

Os teoremas de existência de solução serão demonstrados no próximo capítulo. As funções $f, g : [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ verificam as seguintes hipóteses

(f_1) $f, g : [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são funções contínuas;

(f_2) Existe $\epsilon > 0$, tal que $f(t,s) \geq \epsilon|t|^p$ e $g(t,s) \geq \epsilon|s|^p$, para todo $t, s \in [0, \infty)$ e $p > 0$;

(f_3) $f(\xi t, \xi s) = \xi^p f(t,s)$ e $g(\xi t, \xi s) = \xi^p g(t,s)$ para todo $t, s \in [0, \infty)$ e $\xi > 0$, onde $p > 0$.

Note que $f(t,s) = |t|^p + |s|^{p-\mu}|t|^\mu$ e $g(t,s) = C_1|t|^p + C_2|s|^p$ são exemplos de funções que satistazem as condições $(f_1) - (f_3)$.

Os principais resultados serão:

Teorema 3.1. *Suponha que $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ e $(f_1) - (f_3)$ sejam válidas. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz com $a, b, c, d > 0$ e $\lambda > 0$ seu maior autovalor. O sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u = (a - \int_\Omega K(x,y) f(u,v) dy) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = (d - \int_\Omega \Gamma(x,y) g(u,v) dy) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_1}$$

tem solução se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Se tivermos $f = g$ e $K = \Gamma$, então temos o seguinte resultado

Teorema 3.2. *Suponha que $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ e $(f_1) - (f_3)$ sejam válidas. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz tal que: existe um maior autovalor positivo de A que é o único autovalor positivo λ com um autovetor $z > 0$ e $dim N(\lambda I - A) = 1$. Então, o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta u = (a - \int_\Omega K(x,y) f(u,v) dy) u + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = (d - \int_\Omega K(x,y) f(u,v) dy) v + cu, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_2}$$

tem solução para todo $\lambda > \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Novamente, destacamos que as demonstrações serão apresentadas no próximo capítulo.

3.1 Os termos não locais e a formulação matricial

Como $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ e $(f_1) - (f_3)$ são válidas, definimos $\phi, \psi : L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ tais que

$$\phi_{(u,v)}(x) = \int_\Omega K(x,y) f(|u(y)|, |v(y)|) dy \tag{3.1}$$

e

$$\psi_{(u,v)}(x) = \int_\Omega \Gamma(x,y) g(|u(y)|, |v(y)|) dy. \tag{3.2}$$

Note que ϕ e ψ estão bem definidas. De fato,

$$\begin{aligned} |\phi_{(u,v)}(x)| &= \left| \int_\Omega K(x,y) f(|u(y)|, |v(y)|) dy \right| \\ &\leq \int_\Omega |K(x,y)| f(|u(y)|, |v(y)|) dy, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\phi_{(u,v)}(x)| \leq \|K\|_\infty \int_\Omega f(|u(y)|, |v(y)|) dy.$$

Agora, sem perda de generalidade, considerando $\|u\|_\infty \geq \|v\|_\infty$ e usando as propriedades (f_1) e (f_3), temos

$$\frac{1}{\|u\|_\infty^p} f(|u(y)|, |v(y)|) = f\left(\frac{|u(y)|}{\|u\|_\infty}, \frac{|v(y)|}{\|u\|_\infty} \right) \leq c, \quad \forall p > 0$$

ou seja,

$$\frac{1}{\|u\|_\infty^p} f(|u(y)|, |v(y)|) \leq c$$

implicando que

$$f(|u(y)|, |v(y)|) \leq c\|u\|_\infty^p$$

sendo assim, temos

$$|\phi_{(u,v)}(x)| \leq \|K\|_\infty \int_\Omega c\|u\|_\infty^p dy$$

logo,

$$|\phi_{(u,v)}(x)| \leq \|K\|_\infty \cdot c\|u\|_\infty^p |\Omega| < \infty, \quad \forall x \in \Omega.$$

Portanto, ϕ está bem definida. A boa definição de ψ segue analogamente.

Lema 3.1. *As funções ϕ e ψ satisfazem as seguintes propriedades:*

(β_1) $t^p\phi_{(u,v)}(x) = \phi_{(tu,tv)}(x)$ *e* $t^p\psi_{(u,v)}(x) = \psi_{(tu,tv)}(x)$, *para todo* $u, v \in L^\infty(\Omega), t > 0$ *e* $p > 0$;

(β_2) $\|\phi_{(u,v)}\|_\infty \leq \|K\|_\infty|\Omega|\|f(|u|,|v|)\|_\infty$ *e* $\|\psi_{(u,v)}\|_\infty \leq \|K\|_\infty|\Omega|\|g(|u|,|v|)\|_\infty$ *para todo* $u, v \in L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. (β_1) : Para $u, v \in L^\infty(\Omega), t > 0$ e $p > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\phi_{(tu,tv)}(x) &= \int_\Omega K(x,y)f(|tu(y)|,|tv(y)|)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)f(|t||u(y)|,|t||v(y)|)dy \\
&= \int_\Omega K(x,y)|t|^p f(|u(y)|,|v(y)|)dy \\
&= t^p \int_\Omega K(x,y)f(|u(y)|,|v(y)|)dy \\
&= t^p\phi_{(u,v)}(x)
\end{aligned}$$

desta forma, $\phi_{(tu,tv)}(x) = t^p\phi_{(u,v)}(x)$. Analogamente,

$$\begin{aligned}
\psi_{(tu,tv)}(x) &= \int_\Omega \Gamma(x,y)g(|tu(y)|,|tv(y)|)dy \\
&= \int_\Omega \Gamma(x,y)g(|t||u(y)|,|t||v(y)|)dy \\
&= \int_\Omega \Gamma(x,y)|t|^p g(|u(y)|,|v(y)|)dy \\
&= t^p \int_\Omega \Gamma(x,y)g(|u(y)|,|v(y)|)dy \\
&= t^p\psi_{(u,v)}(x)
\end{aligned}$$

ou seja, $\psi_{(tu,tv)}(x) = t^p\psi_{(u,v)}(x)$.

(β_2) : Para $u, v \in L^\infty(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}
|\phi_{(u,v)}(x)| &= \left|\int_\Omega K(x,y)f(|u(y)|,|v(y)|)dy\right| \\
&\leq \int_\Omega |K(x,y)||f(|u(y)|,|v(y)|)|dy \\
&\leq \|K\|_\infty\|f(|u|,|v|)\|_\infty|\Omega|
\end{aligned}$$

ou seja, $\|\phi_{(u,v)}\|_\infty \leq \|K\|_\infty\|f(|u|,|v|)\|_\infty|\Omega|$. Da mesma forma, temos

$$\begin{aligned}
|\psi_{(u,v)}(x)| &= \left|\int_\Omega \Gamma(x,y)g(|u(y)|,|v(y)|)dy\right| \\
&\leq \int_\Omega |\Gamma(x,y)||g(|u(y)|,|v(y)|)|dy \\
&\leq \|\Gamma\|_\infty\|g(|u|,|v|)\|_\infty|\Omega|,
\end{aligned}$$

ou seja, $\|\psi_{(u,v)}\|_\infty \leq \|\Gamma\|_\infty \|g(|u|,|v|)\|_\infty |\Omega|$. □

Com as informações anteriores, podemos definir

$$\Phi_U(x) := \begin{pmatrix} \phi_{(u,v)}(x)u \\ \psi_{(u,v)}(x)v \end{pmatrix}, \text{ onde } U = (u,v) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega).$$

Com isso, podemos reescrever o problema (P_1) da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta U + \Phi_U(x) = AU, & \text{em } \Omega \\ U > 0, & \text{em } \Omega \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_3}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_{(u,v)}u = au + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v + \psi_{(u,v)}v = cu + dv, & \text{em } \Omega \\ u, v > 0, & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_4}$$

Temos que $U = (u,v)$ satisfaz o problema (P_4) no sentido fraco, se $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega \phi_{(u,v)}(x) u \varphi dx = \int_\Omega (au + bv)\varphi dx \tag{3.3}$$

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \eta dx + \int_\Omega \psi_{(u,v)}(x) v \eta dx = \int_\Omega (cu + dv)\eta dx \tag{3.4}$$

para todo $\varphi, \eta \in H_0^1(\Omega)$.

No caso de $f = g$ e $K = \Gamma$, temos $\phi_{(u,v)} = \psi_{(u,v)}$ e, consequentemente $\Phi_U(x) = \phi(x)U$, onde $\phi(x) = \phi_{(u,v)}(x)$. Dessa forma, podemos escrever o problema (P_2) como

$$\begin{cases} -\Delta U + \phi(x)U = AU & \text{em } \Omega, \\ U > 0, & \text{em } \Omega, \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_5}$$

Temos como principal objetivo, provar que (P_1) e (P_2) possuem solução positiva usando o Teorema Global de Bifurcação de Rabinowitz.

Sabemos que existe $C = C_\infty(\Omega) > 0$ tal que: para cada $h \in L^\infty(\Omega)$, existe uma única função $w \in C^1(\overline{\Omega})$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w = h(x) & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\|w\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C\|h\|_\infty.$$

Considere o operador solução $S_0 : E \to E_1$ dado por:

$$S_0(u,v) = (u_1, v_1) \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta u_1 = au + bv, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v_1 = cu + dv, & \text{em } \Omega \\ u_1 = v_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

na forma matricial temos

$$S_0(U) = U_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta U_1 = AU, & \text{em } \Omega \\ U_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $U = (u, v)$ e $U_1 = (u_1, v_1)$.

O operador S_0 está bem definido e é linear (ver Apêndice B).

Além disso, o operador S_0 satisfaz

$$\|S_0(U)\|_1 \leq C\|U\|, \forall U \in E \text{ e algum } C > 0. \tag{3.7}$$

O operador $S_0 : E \to E_1$ pode ser visto como $S_0 : E \to E$, que é um operador compacto, devido as imersões de Sobolev, pois $C^1(\overline{\Omega}) \overset{comp.}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$.

Agora, defina o operador não-linear $G_0 : E \to E_1$ dado por:

$$G_0(u,v) = (u_2, v_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta u_2 + \phi_{(u,v)}(x)u = 0, & \text{em } \Omega \\ -\Delta v_2 + \psi_{(u,v)}(x)v = 0, & \text{em } \Omega \\ u_2 = v_2 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

que na forma matricial, pode ser reescrito como

$$G_0(U) = U_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta U_2 + \Phi_U(x) = 0, & \text{em } \Omega \\ U_2 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

onde $\Phi_U(x) = \begin{pmatrix} \phi_{(u,v)}(x)u \\ \psi_{(u,v)}(x)v \end{pmatrix}$, $U = (u,v)$ e $U_2 = (u_2, v_2)$, ou ainda equivalentemente,

$$\begin{cases} -\Delta U_2 = -\Phi_U(x), & \text{em } \Omega \\ U_2 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Daí, temos que $S_0(-\Phi_U(x)) = U_2 = (u_2, v_2)$. Logo, o operador G_0 está bem definido e é contínuo, pois é a composição de aplicações contínuas. Mais ainda, G_0 verifica

$$\|G_0(U)\|_1 \leq C(\|\phi_{(u,v)}\|_\infty + \|\psi_{(u,v)}\|_\infty)\|U\|, \forall U \in E. \tag{3.11}$$

Novamente pelas imersões de Sobolev, sabemos que $G_0 : E \to E$ é um operador compacto. Além disso, dividindo a desigualdade (3.11) por $\|U\|$ e usando a propriedade (β_2), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\|G_0\|_1}{\|U\|} &\leq \frac{C(\|\phi_{(u,v)}\|_\infty + \|\psi_{(u,v)}\|_\infty)\|U\|}{\|U\|} \\ &\leq C(\|\phi_{(u,v)}\|_\infty + \|\psi_{(u,v)}\|_\infty) \\ &= C\|\phi_{(u,v)}\|_\infty + C\|\psi_{(u,v)}\|_\infty \\ &\leq C\|K\|_\infty|\Omega| \cdot \|f(|u|,|v|)\|_\infty + C\|\Gamma\|_\infty|\Omega| \cdot \|g(|u|,|v|)\|_\infty, \end{aligned}$$

daí,

$$\frac{\|G_0\|_1}{\|U\|} \leq C_0 = max\{\|K\|_\infty, \|\Gamma\|_\infty\} \cdot |\Omega| \cdot C(\|f(|u|,|v|)\|_\infty + \|g(|u|,|v|)\|_\infty) \tag{3.12}$$

passando o limite em (3.12) obtemos

$$\lim_{U \to 0} \frac{G_0(U)}{\|U\|} = 0$$

ou seja, $G_0(U) = o(\|U\|)$.

3.2 Resultado para o Sistema Homogêneo Linear

Lema 3.2. *Suponha que exista uma solução não-trivial* $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *para o sistema homogêneo*

$$\begin{cases} -\Delta U = AU, & \textit{em } \Omega \\ U = 0, & \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv, & \textit{em } \Omega \\ -\Delta v = cu + dv, & \textit{em } \Omega \\ u = v = 0, & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{Q_1}$$

Então, A tem um autovalor real que também é um autovalor do problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Ademais,

(a) Se $\lambda_j \in \sigma(-\Delta) \cap \sigma(A)$, para ϕ_j uma autofunção do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associado ao autovalor λ_j, temos que se $z = \begin{pmatrix} \int_\Omega u\phi_j dx \\ \int_\Omega v\phi_j dx \end{pmatrix} \neq 0$, z é um autovetor de A associado ao autovalor λ_j;

(b) Se $\sigma(-\Delta) \cap \sigma(A) = \{\lambda_j\}$ e $dim N(A - \lambda_j I) = 1$, então toda solução de (Q_1) é da forma $U = \phi_j z$, onde z é um autovetor de A associado a λ_j. Além disso, o subespaço $N_A = \{U \in E; U$ é uma solução do problema $(Q_1)\}$ tem a mesma dimensão do autoespaço associado a λ_j como autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$;

(c) Se $\sigma(-\Delta) \cap \sigma(A) = \{\lambda_j, \lambda_m\}$, $m \neq j$, então toda solução de (Q_1) é da forma $U = \phi_j z + \phi_m w$, onde z é um autovetor de A associado a λ_j e w é um autovetor de A associado a λ_m. Nesse caso, $dim N_A$ é a soma da dimensão do autoespaço associado a λ_j como autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e a dimensão do autoespaço associado a λ_m como autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Demonstração. Vamos supor que $\displaystyle\int_\Omega u\phi_j dx \neq 0$, para algum $j \in \mathbb{N}$. Multiplicando as equações de (Q_1) por ϕ_j, onde ϕ_j é autofunção do autovalor λ_j do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, e integrando sobre Ω, temos que

$$\int_\Omega (-\Delta u)\phi_j dx = \int_\Omega au\phi_j dx + \int_\Omega bv\phi_j dx$$

daí,

$$\lambda_j \int_\Omega u\phi_j dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_j dx = a\int_\Omega u\phi_j dx + b\int_\Omega v\phi_j dx$$

e, analogamente

$$\int_\Omega (-\Delta v)\phi_j dx = \int_\Omega cu\phi_j dx + \int_\Omega dv\phi_j dx$$

ou seja,

$$\lambda_j \int_\Omega v\phi_j dx = \int_\Omega \nabla v \nabla \phi_j dx = c\int_\Omega u\phi_j dx + d\int_\Omega v\phi_j dx$$

na forma matricial, podemos concluir que

$$Az = \lambda_j z, \text{ onde } z = \begin{pmatrix} \int_\Omega u\phi_j dx \\ \int_\Omega v\phi_j dx \end{pmatrix}$$

ou seja, λ_j é o autovalor de A com autovetor $z \neq 0$, mostrando a primeira parte do lema. Consequentemente,

(a) É uma aplicação direta da primeira parte da demonstração.

(b) Multiplicando as equações de (Q_1) por ϕ_k, onde ϕ_k é autofunção do autovalor λ_k do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, e integrando sobre Ω, com $k \neq j$, temos

$$\lambda_k \int_\Omega u\phi_k dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_k dx = a\int_\Omega u\phi_k dx + b\int_\Omega v\phi_k dx \tag{3.13}$$

e

$$\lambda_k \int_\Omega v\phi_k dx = \int_\Omega \nabla v \nabla \phi_k dx = c\int_\Omega u\phi_k dx + d\int_\Omega v\phi_k dx \tag{3.14}$$

na forma matricial, temos

$$\lambda_k \begin{pmatrix} \int_\Omega u\phi_k dx \\ \int_\Omega v\phi_k dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_\Omega u\phi_k dx \\ \int_\Omega v\phi_k dx \end{pmatrix}.$$

Desta forma, temos que $\lambda_k \in \sigma(-\Delta) \cap \sigma(A)$, se $\begin{pmatrix} \int_\Omega u\phi_k dx \\ \int_\Omega v\phi_k dx \end{pmatrix} \neq 0$. Mas, por hipótese, temos $\sigma(-\Delta) \cap \sigma(A) = \{\lambda_j\}$, como $k \neq j$ e sabemos que autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais, dessa forma,

$$\int_\Omega u\phi_k dx = \int_\Omega v\phi_k dx = 0, \forall k \neq j.$$

Segue que

$$u = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \cdots + \alpha_n\phi_n + \cdots \tag{3.15}$$

$$v = \beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2 + \cdots + \beta_n\phi_n + \cdots \tag{3.16}$$

Multiplicando (3.15) e (3.16) por ϕ_i e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega u\phi_i dx = \alpha_1 \int_\Omega \phi_1\phi_i + \alpha_2 \int_\Omega \phi_2\phi_i + \cdots + \alpha_n \int_\Omega \phi_n\phi_i + \cdots$$

e

$$\int_\Omega v\phi_i dx = \beta_1 \int_\Omega \phi_1\phi_i + \beta_2 \int_\Omega \phi_2\phi_i + \cdots + \beta_n \int_\Omega \phi_n\phi_i + \cdots$$

para $i \neq j$ temos

$$0 = \int_\Omega u\phi_i dx = \alpha_i \int_\Omega \phi_i^2 = \alpha_i$$

e

$$0 = \int_\Omega v\phi_i dx = \beta_i \int_\Omega \phi_i^2 = \beta_i.$$

Sendo assim,

$$u = \alpha_j\phi_j \tag{3.17}$$

e

$$v = \beta_j\phi_j \tag{3.18}$$

logo, $U = \phi_j z$ com $z = (\alpha_j, \beta_j)$. Portanto, por (3.17) e (3.18) temos que

$$-\Delta u = -\Delta(\alpha_j\phi_j) = \alpha_j(-\Delta)(\phi_j) = \alpha_j\lambda_j\phi_j \tag{3.19}$$

e

$$-\Delta v = -\Delta(\beta_j\phi_j) = \beta_j(-\Delta)(\phi_j) = \beta_j\lambda_j\phi_j \tag{3.20}$$

Assim,

$$-\Delta U = -\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\Delta \begin{pmatrix} \alpha_j\phi_j \\ \beta_j\phi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_j\lambda_j\phi_j \\ \beta_j\lambda_j\phi_j \end{pmatrix} = \lambda_j\phi_j \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} = \lambda_j\phi_j z = \lambda_j U,$$

lembrando que $Az = \lambda_j z$, obtemos

$$AU = A\begin{pmatrix} \alpha_j\phi_j \\ \beta_j\phi_j \end{pmatrix} = A\phi_j\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} = A\phi_j z = \phi_j A z = \phi_j\lambda_j z = \lambda_j(\phi_j z) = \lambda_j U.$$

Dessa forma, fica claro que z é autovetor de A associado ao autovalor λ_j. Consequentemente, U será solução para o problema (Q_1), se for escrito da forma $U = \phi_j z$, onde z é autovetor de A associado a λ_j. Agora, note que N_A terá a mesma dimensão do autoespaço associado a λ_j como autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, pois temos por hipótese que $dimN(A-\lambda_j I) = 1$. Finalizando a demonstração do item (b).

(c) Multiplicando as equações de (Q_1) por ϕ_k, onde ϕ_k é autofunção do autovalor λ_k do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, e integrando sobre Ω, com $k \neq j, m$, obtemos

$$\lambda_k\int_\Omega u\phi_k dx = \int_\Omega \nabla u\nabla\phi_k dx = a\int_\Omega u\phi_k dx + b\int_\Omega v\phi_k dx \tag{3.21}$$

e

$$\lambda_k\int_\Omega v\phi_k dx = \int_\Omega \nabla v\nabla\phi_k dx = c\int_\Omega u\phi_k dx + d\int_\Omega v\phi_k dx \tag{3.22}$$

na forma matricial,

$$\lambda_k\begin{pmatrix} \int_\Omega u\phi_k dx \\ \int_\Omega v\phi_k dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \int_\Omega u\phi_k dx \\ \int_\Omega v\phi_k dx \end{pmatrix}.$$

Assim, $\lambda_k \in \sigma(-\Delta)\cap\sigma(A)$, se $\begin{pmatrix} \int_\Omega u\phi_k dx \\ \int_\Omega v\phi_k dx \end{pmatrix} \neq 0$. Mas por hipótese, $\sigma(-\Delta)\cap\sigma(A) = \{\lambda_j, \lambda_m\}$, com $m \neq j$, como $k \neq j, m$ e sabemos que autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais, então temos que

$$\int_\Omega u\phi_k dx = \int_\Omega v\phi_k dx = 0, \forall k \neq j, m.$$

Segue que

$$u = (\alpha_1\phi_1 + \beta_1\phi_1) + (\alpha_1\phi_2 + \beta_1\phi_2) + \cdots + (\alpha_1\phi_n + \beta_1\phi_n) + \cdots \tag{3.23}$$

e

$$v = (\alpha_2\phi_1 + \beta_2\phi_1) + (\alpha_2\phi_2 + \beta_2\phi_2) + \cdots + (\alpha_2\phi_n + \beta_2\phi_n) + \cdots \tag{3.24}$$

Multiplicando (3.23) e (3.24) por ϕ_i e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega u\phi_i = \alpha_1 \int_\Omega \phi_1\phi_i + \beta_1 \int_\Omega \phi_1\phi_i + \cdots + \alpha_1 \int_\Omega \phi_n\phi_i + \beta_1 \int_\Omega \phi_n\phi_i + \cdots$$

e

$$\int_\Omega v\phi_i = \alpha_2 \int_\Omega \phi_1\phi_i + \beta_2 \int_\Omega \phi_1\phi_i + \cdots + \alpha_2 \int_\Omega \phi_n\phi_i + \beta_2 \int_\Omega \phi_n\phi_i + \cdots$$

para $i \neq j, m$ temos

$$0 = \int_\Omega u\phi_i dx = \alpha_1 \int_\Omega \phi_i^2 + \beta_1 \int_\Omega \phi_i^2 = \alpha_1 + \beta_1$$

e

$$0 = \int_\Omega v\phi_i dx = \alpha_2 \int_\Omega \phi_i^2 + \beta_2 \int_\Omega \phi_i^2 = \alpha_2 + \beta_2.$$

Assim,

$$u = \alpha_1\phi_j + \beta_1\phi_m \tag{3.25}$$

e

$$v = \alpha_2\phi_j + \beta_2\phi_m, \tag{3.26}$$

com isso, $U = \phi_j z + \phi_m w$ com $z = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $w = (\beta_1, \beta_2)$, ou seja, (α_1, α_2) são autovetores de A associados a λ_j e (β_1, β_2) são autovetores de A associados a λ_m. De fato, pelas igualdades (3.25) e (3.26), obtemos

$$-\Delta u = -\Delta(\alpha_1\phi_j + \beta_1\phi_m) = \alpha_1(-\Delta)(\phi_j) + \beta_1(-\Delta)(\phi_m) = \alpha_1\lambda_j\phi_j + \beta_1\lambda_m\phi_m \tag{3.27}$$

e

$$-\Delta v = -\Delta(\alpha_2\phi_j + \beta_2\phi_m) = \alpha_2(-\Delta)(\phi_j) + \beta_2(-\Delta)(\phi_m) = \alpha_2\lambda_j\phi_j + \beta_2\lambda_m\phi_m. \tag{3.28}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
-\Delta U &= -\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\Delta \begin{pmatrix} \alpha_1\phi_j + \beta_1\phi_m \\ \alpha_2\phi_j + \beta_2\phi_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda_j\phi_j + \beta_1\lambda_m\phi_m \\ \alpha_2\lambda_j\phi_j + \beta_2\lambda_m\phi_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda_j\phi_j \\ \alpha_2\lambda_j\phi_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1\lambda_m\phi_m \\ \beta_2\lambda_m\phi_m \end{pmatrix} \\
&= \lambda_j\phi_j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \lambda_m\phi_m \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda_j\phi_j z + \lambda_m\phi_m w
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
AU &= A \begin{pmatrix} \alpha_1\phi_j + \beta_1\phi_m \\ \alpha_2\phi_j + \beta_2\phi_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1\phi_j \\ \alpha_2\phi_j \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \beta_1\phi_m \\ \beta_2\phi_m \end{pmatrix} \\
&= A\phi_j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + A\phi_m \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \\
&= A\phi_j z + A\phi_m w = \lambda_j\phi_j z + \lambda_m\phi_m w.
\end{aligned}
$$

Com isso, temos que z é autovetor de A associado ao autovalor λ_j e w é autovetor de A associado ao autovalor λ_m, como queríamos. Portanto, U será solução de (Q_1) se, e somente se for escrito da forma $U = \phi_j z + \phi_m w$, onde z e w são outovetores de A associados aos autovalores λ_j e λ_m respectivamente. Assim, teremos que $dimN_A$ será a soma da dimensão do autoespaço associado a λ_j e a dimensão do autoespaço associado a λ_m, com λ_j e λ_m autovalores do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. □

Lema 3.3. *Suponha que existe uma solução não-trivial e não-negativa* $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *do sistema homogêneo*

$$
\begin{cases} -\Delta U = AU, & \text{em } \Omega, \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.29}
$$

Então, A tem λ_1 como um dos seus autovalores, que possui um autovetor associado com coordenadas positivas.

Demonstração. Do Lema 3.2, item (c), obtemos $u = \alpha_1\phi_j + \beta_1\phi_m$ e $v = \alpha_2\phi_j + \beta_2\phi_m$.

Afirmação 3.3. *$j = 1$ ou $m = 1$.*

De fato, suponha por absurdo que $j, m \neq 1$. Multiplicando $u = \alpha_1\phi_j + \beta_1\phi_m$ por ϕ_1 e integrando sobre Ω, temos

$$\int_\Omega u\phi_1 dx = \alpha_1 \int_\Omega \phi_j\phi_1 dx + \beta_1 \int_\Omega \phi_m\phi_1 dx$$

Sabemos que $\phi_1 > 0$ em Ω e, por hipótese, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0$ e $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq 0$, com isso temos a certeza de que pelo menos uma das coordenadas é não-trivial. Sem perda de generalidade, vamos supor que u é não-trivial e não-negativa, assim, $\int_\Omega u\phi_1 dx > 0$ e sabemos que autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais, logo

$$0 < \int_\Omega u\phi_1 dx = \alpha_1 \int_\Omega \phi_j\phi_1 dx + \beta_1 \int_\Omega \phi_m\phi_1 dx = 0, \forall j, m \neq 1$$

o que é um absurdo. Agora, sem perda de generalidade, suponha que $j = 1$, $m \neq 1$ e u não-negativa e não-trivial. Então, $u = \alpha_1\phi_1 + \beta_1\phi_m$ e $v = \alpha_2\phi_1 + \beta_2\phi_m$. Multiplicando $u = \alpha_1\phi_1 + \beta_1\phi_m$ por ϕ_1 e integrando sobre Ω obtemos

$$\int_\Omega u\phi_1 dx = \alpha_1 \int_\Omega \phi_1\phi_1 dx + \beta_1 \int_\Omega \phi_m\phi_1 dx$$

daí,

$$0 < \int_\Omega u\phi_1 dx = \alpha_1 \int_\Omega \phi_1^2 dx$$

dessa forma teremos que $\alpha_1 > 0$. De forma análoga, $\alpha_2 > 0$. Note que para o caso de $j = m = 1$, o resultado segue análogo. Portanto, existe um autovetor de A, associado a λ_1, tendo ambas coordenadas positivas, como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 3.4. *Se $\sigma(A) = \{\mu, \lambda\}$, $\mu < \lambda$, $\lambda > 0$ e $z > 0$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ, então, se (Q_1) tem U como solução não-trivial e não-negativa, temos que $\lambda = \lambda_1$ e $U = \phi_1 w$, onde w é um múltiplo de z. Além disso, temos que $U > 0$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3 temos que A tem λ_1 como um de seus autovalores, na qual tem um autovetor associado com coordenadas positivas. Já sabemos que $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ com $\lambda > 0$, note que se $\lambda_1 = \mu$, então teríamos dois autovalores positivos com dois autovetores associados positivos, mas pelos resultados de Álbebra Linear isso não pode ocorrer, então $\lambda = \lambda_1$. Assim, $\sigma(A) \cap \sigma(-\Delta) = \{\lambda_1\}$, pois sabemos que λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta)$, como $\mu < \lambda_1$ então μ não pertence a essa interseção e $dimN(A - \lambda_1 I) = 1$, então $U = \phi_1 w$, onde w é um múltiplo de z. Além disso, como $U \geq 0$ e $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$ (consequência do Lema de Hopf - ver Apêndice A), teremos $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} > 0$, $U = \begin{pmatrix} \alpha\phi_1 \\ \beta\phi_1 \end{pmatrix} > 0$, assim, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial(\alpha\phi_1)}{\partial \eta} = \alpha\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \eta} < 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \dfrac{\partial(\beta\phi_1)}{\partial \eta} = \beta\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$. □

3.3 Inclusão do parâmetro t no Problema Homogêneo Linear

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que A tem um autovalor positivo λ associado a um autovetor positivo $z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Daremos hipóteses sobre $t > 0$ na intenção de que o sistema

$$\begin{cases} -\Delta U = tAU, & \text{em } \Omega \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

possua um espaço de soluções unidimencional com uma solução $U > 0$ em Ω.

Supondo que existe um autovalor positivo λ, considere $t = t_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}$, onde λ_1 é o autovalor do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Daí, temos que $t_1 Az = t_1 \lambda z = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}\lambda z = \lambda_1 z$. Assim, $U = \begin{pmatrix} \alpha\phi_1 \\ \beta\phi_1 \end{pmatrix} = \phi_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \phi_1 z$ é positiva, pois $\phi_1 > 0$ e $z > 0$ e além disso, também satisfaz a igualdade $-\Delta U = t_1 AU$. De fato,

$$-\Delta U = -\Delta \begin{pmatrix} \alpha\phi_1 \\ \beta\phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(-\Delta)\phi_1 \\ \beta(-\Delta)\phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1\phi_1 \\ \beta\lambda_1\phi_1 \end{pmatrix} = \lambda_1\phi_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_1\phi_1 z$$

e

$$t_1AU = \frac{\lambda_1}{\lambda}A\phi_1 z = \frac{\lambda_1}{\lambda}\phi_1(Az) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\phi_1(\lambda z) = \lambda_1\phi_1 z.$$

Dessa forma, o espaço de soluções do problema para $t = t_1$, $N_1 := N_{t_1 A}$ tem dimensão positiva. Nossa intenção é ter um espaço de soluções unidimensional, para isso será necessário considerar a seguinte situação:

(C_1) Se $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$, com $\lambda_1\mu \neq \lambda_j\lambda$, para todo $j > 1$. Neste caso, $\sigma(t_1 A) = \{t_1\mu, \lambda_1\}$. De fato, seja λ um autovalor de A associado ao autovetor z e seja μ autovalor de A associado ao autovetor w. Assim,

- $Az = \lambda z$, logo, $t_1 Az = t_1\lambda z = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}\lambda z = \lambda_1 z$, ou seja, λ_1 é autovalor de $t_1 A$.
- $Aw = \mu w$, logo, $t_1 Aw = t_1\mu w$, ou seja, $t_1\mu$ é autovalor de $t_1 A$.

Como $\dfrac{\lambda_1}{\lambda}\mu \neq \lambda_j \Rightarrow t_1\mu \neq \lambda_j$, para todo $j > 1$ e $\sigma(t_1 A) \cap \sigma(-\Delta) = \{\lambda_1\}$, segue do Lema 3.2 (b) que $dimN_1 = 1$.

Se considerarmos $\lambda > \mu$, (C_1) será sempre satisfeita, pois $t_1\mu < t_1\lambda = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}\lambda = \lambda_1 < \lambda_j$, para todo $j > 1$.

Note que se a matriz A tem dois autovalores positivos, λ associado ao autovetor positivo z, e μ associado ao autovetor positivo w, então, pelo Lema 3.2 temos que $dimN_{(tA)} = 1$, para $t = t_1$ e $t = s_1$, onde $t_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}$ e $s_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu}$. Além disso, temos que, $0 < z\phi_1 \in N_{(t_1 A)}$ e $0 < w\phi_1 \in N_{(s_1 A)}$. Como nosso objetivo é usar o Teorema Global de Bifurcação de Rabinowitz, nessas condições acima, podemos ter uma bifurcação que inicia de $t = t_1$ e finaliza em $t = s_1$. Essa é uma situação que devemos evitar. Para isso se faz necessário considerar uma hipótese sobre a matriz A, sendo ela a seguinte:

A matriz A deve possuir pelo menos um autovalor positivo λ com $dimN(A-\lambda I) = 1$, na qual λ deve estar associado a um autovetor positivo z. Além do mais, se A tiver outro autovalor positivo μ, então μ deve estar associado a um autovetor $w = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ com $\alpha_2\beta_2 < 0$, ver Apêndice A.

Considerando A com essas hipóteses, veremos que uma bifurcação de soluções positivas do problema parte de $t = t_1$.

No próximo capítulo, faremos finalmente as demonstrações dos Teoremas 3.1 e 3.2, utilizando todos os resultados e informações do presente capítulo.

Capítulo 4

Existência de Soluções para um Sistema Populacional logístico de duas espécies vivendo em um ambiente limitado

Este capítulo é dedicado as demonstrações dos teoremas 3.1 e 3.2 em que provamos a existência de solução para os sitemas (P_1) e (P_2).

4.1 Demonstração do Teorema 3.1

Para demonstrarmos o Teorema 3.1 utilizando a Teoria de Bifurcação, será necessário introduzir o parâmetro $t > 0$ no problema (P_1) e demonstrar o seguinte lema.

Lema 4.1. *Suponha que $K, \Gamma \in \mathcal{K}$ e $(f_1) - (f_3)$ sejam válidas. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz com $a, b, c, d > 0$ e $\lambda > 0$ seu maior autovalor. Para $t \in \mathbb{R}$, o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta U + \Phi_U(x) = tAU & \text{em } \Omega, \\ U > 0, & \text{em } \Omega, \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_6}$$

tem solução se, e somente se, $t > t_1$*, onde* $t_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}$ *e* λ_1 *é o primeiro autovalor do problema* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Note que, pelas definições dos operadores S_0 e G_0, temos que $(t, U) \in \mathbb{R} \times E$ é solução de (P_6) no sentido fraco se, e somente se,

$$U = F(t, U) := tS_0(U) + G_0(U). \tag{4.1}$$

Para verificar a igualdade acima, siga os mesmo passos feitos no Capítulo 2.

Para demonstrarmos o Lema 4.1, vamos usar o Teorema Global de Bifurcação de Rabinowitz. Recorde que concluímos na Seção 3.3, que uma autofunção U_1 associada ao autovalor t_1 do problema linear pode ser escolhida positiva. E mais, t_1^{-1} é um autovalor de multiplicidade 1 para S_0. O Teorema Global de Bifurcação nos garante que existe uma componente conexa fechada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{t_1}$ de soluções para (P_6), que satisfazem (A) ou (B). Mostraremos a seguinte afirmação:

Afirmação 4.1. *(B) não ocorre.*

Para demonstrar essa afirmação, precisaremos de alguns resultados, que demonstraremos a seguir:

Lema 4.2. *Existe* $\delta > 0$ *tal que se* $(t, U) \in \mathcal{C}$ *com* $|t - t_1| + \|U\| < \delta$ *e* $U \neq 0$*, então* U *tem sinal definido, ou seja,*

$$U(x) > 0, \forall x \in \Omega \quad \text{ou} \quad U(x) < 0, \forall x \in \Omega.$$

Demonstração. É suficiente mostrar que para quaisquer duas sequências $(U_n) \subset E$ e $t_n \to t_1$, tal que

$$U_n \neq 0, \|U_n\| \to 0 \text{ e } U_n = F(t_n, U_n) = t_n S_0(U_n) + G_0(U_n),$$

U_n tem sinal definido para n suficientemente grande.

Considerando $W_n = \dfrac{U_n}{\|U_n\|}$, temos que

$$W_n = t_n \frac{S_0(U_n)}{\|U_n\|} + \frac{G_0(U_n)}{\|U_n\|} = t_n S_0(W_n) + o_n(1). \tag{4.2}$$

Como S_0 é um operador compacto, então S_0 leva limitado, a menos de subsequência, numa sequência convergente. Assim, $(S_0(W_n))$ é convergente, a menos de subsequência.

Sendo $(S_0(W_n))$ convergente e $t_n \to t_1$, então pela igualdade (4.2), (W_n) também é convergente, suponha que para algum W em E. Daí, passando (4.2) ao limite, obtemos que

$$W = t_1 S_0(W) + 0 \Rightarrow W = t_1 S_0(W)$$

sendo assim, W solução do problema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta W = t_1 AW, & \text{em } \Omega \\ W = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Além disso, sabemos que $W \neq 0$, pois $W_n \to W$, então, $\|W_n\| \to \|W\|$, mas $\|W_n\| = 1$, então $\|W\| = 1$, ou seja, $W \neq 0$ em Ω. Então, pelos Lemas 3.2 e 3.3 concluímos que $W(x) > 0$ ou $W(x) < 0$, para todo $x \in \Omega$.

Sem perda de generalidade, vamos supor que $W(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Como $\lim W_n = W$ em E, devemos ter que $W_n(x) > 0$, pois $W_n \to W$ uniformemente em Ω para n suficientemente grande. Assim, o sinal de (U_n) é o mesmo de (W_n) para n suficientemente grande, ou seja, U_n também é positiva. Concluindo assim a demonstração. $\square$

É importante destacar que, se $(t, U) \in \Sigma$, então $(t, -U)$ também pertence a Σ. Pelos argumentos usados no estudo anterior, e $a, b, c, d > 0$, podemos decompor $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$, onde

$$\mathcal{C}^+ = \{(t, U) \in \mathcal{C}, U > 0\} \cup \{(t_1, 0)\}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C}, U < 0\} \cup \{(t_1, 0)\}.$$

Temos que $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(t_1, 0)\}$ e $\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C} : (t, -U) \in \mathcal{C}^+\}$. E mais, $\mathcal{C}^+$ é ilimitada se, e somente se, $\mathcal{C}^-$ é ilimitada.

A demonstração dessas condições acima são análogas as feitas no Capítulo 2, com simples alterações.

Lema 4.3. *$\mathcal{C}^+$ é ilimitada.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{C}^+$ é limitada. Então, $\mathcal{C}$ também é limitada. Pelo Teorema Global de Bifurcação, temos que $\mathcal{C}$ contém $(\hat{t}, 0)$, tal que $\hat{t} \neq t_1$ e $\hat{t}^{-1} \in \sigma(S_0)$.

Agora, considere $(t_n, U_n) \subset \mathcal{C}^+$ com $t_n \to \hat{t}$ tal que, $U_n \neq 0, \|U_n\| \to 0$ e $U_n = F(t_n, U_n)$. Definindo $W_n = \dfrac{U_n}{\|U_n\|}$, pela demosntração do Lema 4.2, existe $W \in E$, onde $W_n \to W$ em E, $W \neq 0$, $W \geq 0$ e satisfaz o problema do autovalor

$$\begin{cases} -\Delta W = (\hat{t}A)W, & \text{em } \Omega \\ W = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Pelo Corolário 3.4, temos que $\hat{t}\lambda = \lambda_1$, daí $\hat{t} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda} = t_1$, o que é um absurdo. Logo, $\mathcal{C}^+$ é ilimitada, como queríamos demonstrar.

□

4.1.1 Estimativa a Priori

Pelo Lema 4.3 concluímos que $\mathcal{C}^+$ é ilimitada. Agora, vamos mostrar que a componente conexa $\mathcal{C}^+$ intersecta qualquer conjunto da forma $\{t\} \times E$, para $t > t_1$.

Lema 4.4. *Para todo $\Lambda > 0$, existe $R > 0$ tal que, se $(t, u) \in \mathcal{C}^+$ e $t \in [0, \Lambda]$, então $\|U\| \leq R$.*

Demonstração.

Afirmação 4.2. *Para qualquer $\Lambda > 0$, existe $R > 0$ tal que se $(t, U) \in \mathcal{C}^+$ e $t \leq \Lambda$, então $\|U\|_H \leq R$.*

Suponha por contradição que existe $(U_n) \subset H$ e $(t_n) \subset [0, \Lambda]$ tal que, $\|U_n\|_H \to \infty$ e $U_n = F(t_n, U_n)$. Considere $W_n = \dfrac{U_n}{\|U_n\|_H}$, onde $W_n = (\overline{u}_n, \overline{v}_n)$, com $\overline{u}_n = \dfrac{u_n}{\|U_n\|_H}$ e $\overline{v}_n = \dfrac{v_n}{\|U_n\|_H}$. Sabemos que encontrar uma solução para o problema (P_6) é equivalente a encontrar uma solução para a equação (4.1). Desta forma, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta U_n + \Phi_{U_n}(x) = tAU_n, \ \text{em } \Omega \\ U_n = 0, \ \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \iff \begin{cases} -\Delta u_n + \phi_{(u_n,v_n)}u_n = t_n(au_n + bv_n), \ \text{em } \Omega \\ -\Delta v_n + \psi_{(u_n,v_n)}v_n = t_n(cu_n + dv_n), \ \text{em } \Omega \\ u_n = v_n = 0, \ \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

Sendo assim, dividindo as equações de (4.5) por $\|U_n\|_H$, temos

$$-\Delta\left(\frac{u_n}{\|U_n\|_H}\right)+\phi_{(u_n,v_n)}\left(\frac{u_n}{\|U_n\|_H}\right)=t_n\left[a\left(\frac{u_n}{\|U_n\|_H}\right)+b\left(\frac{v_n}{\|U_n\|_H}\right)\right],\ \text{em } \Omega$$

e

$$-\Delta\left(\frac{v_n}{\|U_n\|_H}\right)+\psi_{(u_n,v_n)}\left(\frac{v_n}{\|U_n\|_H}\right)=t_n\left[c\left(\frac{u_n}{\|U_n\|_H}\right)+d\left(\frac{v_n}{\|U_n\|_H}\right)\right],\ \text{em } \Omega$$

ou equivalentemente,

$$-\Delta\overline{u}_n+\phi_{(u_n,v_n)}\overline{u}_n=t_n(a\overline{u}_n+b\overline{v}_n),\ \text{em } \Omega \tag{4.6}$$

e

$$-\Delta\overline{v}_n+\psi_{(u_n,v_n)}\overline{v}_n=t_n(c\overline{u}_n+d\overline{v}_n),\ \text{em } \Omega. \tag{4.7}$$

Multiplicando (4.6) por φ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}_n\nabla\varphi dx+\int_\Omega \phi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{u}_n\varphi dx=t_n\int_\Omega(a\overline{u}_n+b\overline{v}_n)\varphi dx, \forall\varphi\in H_0^1(\Omega) \tag{4.8}$$

e multiplicando (4.7) por η e integrando sobre Ω temos

$$\int_\Omega \nabla\overline{v}_n\nabla\eta dx+\int_\Omega \psi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{v}_n\eta dx=t_n\int_\Omega(c\overline{u}_n+d\overline{v}_n)\eta dx, \forall\eta\in H_0^1(\Omega). \tag{4.9}$$

Como W_n é limitada em H, então podemos supor, sem perdade de generalidade, que existe $W\in H$ com $W=(u,v)$ que satisfaz

$$\overline{u}_n\rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega)\ \text{ e }\ \overline{v}_n\rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega) \tag{4.10}$$

pelas imersões de Sobolev temos que $H_0^1(\Omega)\overset{comp.}{\hookrightarrow}L^2(\Omega)$, assim

$$\overline{u}_n\to u \text{ em } L^2(\Omega)\ \text{ e }\ \overline{v}_n\to v \text{ em } L^2(\Omega) \tag{4.11}$$

e, além disso,

$$\overline{u}_n(x)\to u(x), q.t.p. \text{ em } \Omega\ \text{ e }\ \overline{v}_n(x)\to v(x), q.t.p. \text{ em } \Omega. \tag{4.12}$$

Tome $\varphi=\dfrac{\overline{u}_n}{\|U_n\|_H^p}$ e $\eta=\dfrac{\overline{v}_n}{\|U_n\|_H^p}$ como funções testes em (4.8) e (4.9) e usando a propriedade (β_1) obtemos:

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla\overline{u}_n\nabla\left(\frac{\overline{u}_n}{\|U_n\|_H^p}\right)dx+\int_\Omega \phi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{u}_n\frac{\overline{u}_n}{\|U_n\|_H^p}dx=t_n\int_\Omega (a\overline{u}_n+b\overline{v}_n)\frac{\overline{u}_n}{\|U_n\|_H^p}dx\\
\Rightarrow\ & \int_\Omega \nabla\overline{u}_n\nabla\left(\overline{u}_n\frac{1}{\|U_n\|_H^p}\right)dx+\int_\Omega \phi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{u}_n\overline{u}_n\frac{1}{\|U_n\|_H^p}dx=\frac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\int_\Omega (a\overline{u}_n+b\overline{v}_n)\overline{u}_n dx\\
\Rightarrow\ & \int_\Omega |\nabla\overline{u}_n|^2\frac{1}{\|U_n\|_H^p}dx+\int_\Omega\left(\frac{1}{\|U_n\|_H}\right)^p\phi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{u}_n^2dx=\frac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\int_\Omega a\overline{u}_n\overline{u}_n+b\overline{v}_n\overline{u}_n dx\\
\Rightarrow\ & \|\overline{u}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\frac{1}{\|U_n\|_H^p}+\int_\Omega \phi_{\left(\frac{1}{\|U_n\|_H}u_n,\frac{1}{\|U_n\|_H}v_n\right)}(x)\overline{u}_n^2dx=\frac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\left(a\int_\Omega \overline{u}_n^2dx+b\int_\Omega \overline{v}_n\overline{u}_n\right)dx
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\|\overline{u}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\frac{1}{\|U_n\|_H^p}+\int_\Omega \phi_{(\overline{u}_n,\overline{v}_n)}(x)\overline{u}_n^2dx=\frac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\left(a\int_\Omega \overline{u}_n^2dx+b\int_\Omega \overline{v}_n\overline{u}_n dx\right) \tag{4.13}
$$

e

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla\overline{v}_n\nabla\left(\frac{\overline{v}_n}{\|U_n\|_H^p}\right)dx+\int_\Omega \psi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{v}_n\frac{\overline{v}_n}{\|U_n\|_H^p}dx=t_n\int_\Omega (c\overline{u}_n+d\overline{v}_n)\frac{\overline{v}_n}{\|U_n\|_H^p}dx\\
\Rightarrow\ & \int_\Omega \nabla\overline{v}_n\nabla\left(\overline{v}_n\frac{1}{\|U_n\|_H^p}\right)dx+\int_\Omega \psi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{v}_n\overline{v}_n\frac{1}{\|U_n\|_H^p}dx=\frac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\int_\Omega (c\overline{u}_n+d\overline{v}_n)\overline{v}_n dx\\
\Rightarrow\ & \int_\Omega |\nabla\overline{v}_n|^2\frac{1}{\|U_n\|_H^p}dx+\int_\Omega\left(\frac{1}{\|U_n\|_H}\right)^p\psi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{v}_n^2dx=\frac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\int_\Omega c\overline{u}_n\overline{v}_n+d\overline{v}_n\overline{v}_n dx\\
\Rightarrow\ & \|\overline{v}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\frac{1}{\|U_n\|_H^p}+\int_\Omega \psi_{\left(\frac{1}{\|U_n\|_H}u_n,\frac{1}{\|U_n\|_H}v_n\right)}(x)\overline{v}_n^2dx=\frac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\left(c\int_\Omega \overline{u}_n\overline{v}_ndx+d\int_\Omega \overline{v}_n^2\right)dx
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\|\overline{v}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\frac{1}{\|U_n\|_H^p}+\int_\Omega \psi_{(\overline{u}_n,\overline{v}_n)}(x)\overline{v}_n^2dx=\frac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\left(c\int_\Omega \overline{u}_n\overline{v}_ndx+d\int_\Omega \overline{v}_n^2\right)dx \tag{4.14}
$$

Usando (4.10) - (4.12) em (4.13), notamos que

$$
\|\overline{u}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\frac{1}{\|U_n\|_H^p}\to 0
$$

pois, $\overline{u}_n$ é limitada em $L^2(\Omega)$ e $\|U_n\|_H\to\infty$, além disso, $\dfrac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\to 0$, pois t_n é limitada e pela desigualdade de Hölder temos que $\|\overline{v}_n\overline{u}_n\|_1\leq\|\overline{v}_n\|_2\|\overline{u}_n\|_2$ sendo assim, $\displaystyle\int_\Omega \overline{v}_n\overline{u}_n$ também é limitada. Da mesma forma, se usarmos (4.10) - (4.12) em (4.14) teremos que $\|\overline{v}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\dfrac{1}{\|U_n\|_H^p}\to 0$, $\dfrac{t_n}{\|U_n\|_H^p}\to 0$ e pela desigualdade de Hölder $\displaystyle\int_\Omega \overline{u}_n\overline{v}_n$ é limitada.

Dessa forma,

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \phi_{(\overline{u}_n,\overline{v}_n)}(x)\overline{u}_n^2dx=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \psi_{(\overline{u}_n,\overline{v}_n)}(x)\overline{v}_n^2dx=0,
$$

daí, pelo Lema de Fatou

$$0 \leq \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \phi_{(\overline{u}_n,\overline{v}_n)}\overline{u}_n^2 dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_{(\overline{u}_n,\overline{v}_n)}(x)\overline{u}_n^2 dx = 0$$

e consequentemente,

$$0 \leq \int_\Omega \phi_{(u,v)} u^2 dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_{(\overline{u}_n,\overline{v}_n)}(x)\overline{u}_n^2 dx = 0$$

ou seja,

$$\int_\Omega \phi_{(u,v)}(x) u^2 dx = 0.$$

Analogamente,

$$\int_\Omega \psi_{(u,v)}(x) v^2 dx = 0.$$

Como consequência, obtemos

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y) f(|u(y)|,|v(y)|)|u(x)|^2 dxdy = \int_{\Omega\times\Omega} \Gamma(x,y) g(|u(y)|,|v(y)|)|v(x)|^2 dxdy = 0$$

Pela hipótese (f_2), que é $f(t,s) \geq \epsilon |t|^p$ e $g(t,s) \geq \epsilon |s|^p$, chegamos que

$$0 \leq \epsilon \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)|u(y)|^p |u(x)|^2 dxdy \leq \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y) f(|u(y)|,|v(y)|)|u(x)|^2 dxdy = 0$$

e

$$0 \leq \epsilon \int_{\Omega\times\Omega} \Gamma(x,y)|v(y)|^p |u(x)|^2 dxdy \leq \int_{\Omega\times\Omega} \Gamma(x,y) g(|u(y)|,|v(y)|)|v(x)|^2 dxdy = 0$$

Desta forma,

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)|u(y)|^p |u(x)|^2 dxdy = \int_{\Omega\times\Omega} \Gamma(x,y)|v(y)|^p |u(x)|^2 dxdy = 0, \tag{4.15}$$

como por hipótese $K, \Gamma \in \mathcal{K}$, então pela propriedade (ii) que é

$$\int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)|w(y)|^p w(x)^2 dxdy = 0, \text{ então } w = 0 \ \ q.t.p. \text{ em } \Omega$$

temos que $u = v = 0$. Logo, $\overline{u}_n$ e $\overline{v}_n$ convergem para 0 em $L^2(\Omega)$. Agora, tomando $\varphi = \overline{u}_n$ e $\eta = \overline{v}_n$ como funções testes em (4.8) e (4.9), obtemos

$$\int_\Omega \nabla\overline{u}_n \nabla\overline{u}_n dx + \int_\Omega \phi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{u}_n\overline{u}_n dx = t_n \int_\Omega (a\overline{u}_n + b\overline{v}_n)\overline{u}_n dx$$

e

$$\int_\Omega \nabla\overline{v}_n\nabla\overline{v}_n dx + \int_\Omega \psi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{v}_n\overline{v}_n dx = t_n \int_\Omega (c\overline{u}_n + d\overline{v}_n)\overline{v}_n dx$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla\overline{u}_n|^2 dx + \int_\Omega \phi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{u}_n^2 dx = t_n \int_\Omega (a\overline{u}_n + b\overline{v}_n)\overline{u}_n dx$$

e

$$\int_\Omega |\nabla\overline{v}_n|^2 dx + \int_\Omega \psi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{v}_n^2 dx = t_n \int_\Omega (c\overline{u}_n + d\overline{v}_n)\overline{v}_n dx.$$

Como (t_n) é limitado por Λ, $(t_n) \subset [0,\Lambda]$ e $\int_\Omega \phi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{u}_n^2 dx \geq 0$ e $\int_\Omega \psi_{(u_n,v_n)}(x)\overline{v}_n^2 dx \geq 0$, temos

$$\int_\Omega |\nabla\overline{u}_n|^2 dx \leq \Lambda \left[a\int_\Omega |\overline{u}_n|^2 dx + b\int_\Omega |\overline{v}_n\overline{u}_n| dx \right] \tag{4.16}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla\overline{v}_n|^2 dx \leq \Lambda \left[c\int_\Omega |\overline{u}_n\overline{v}_n| dx + d\int_\Omega |\overline{v}_n|^2 dx \right]. \tag{4.17}$$

Passando ao limite (4.16) e (4.17), obtemos $\|\overline{u}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \to 0$ e $\|\overline{v}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \to 0$, ou seja, $\|W_n\|_H^2 = \|\overline{u}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\overline{v}_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \to 0$, então $\|W_n\|_H \to 0$, o que é um absurdo, pois sabemos que $\|W_n\|_H = \left\| \frac{U_n}{\|U_n\|_H} \right\|_H = \|U_n\|_H \frac{1}{\|U_n\|_H} = 1$, para todo n, validando a afirmação.

Como (U_n) é limitado em H, por regularização teremos que (U_n) é limitada em $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$. $\square$

4.1.2 Conclusão da demonstração do Lema 4.1 e demonstração do Teorema 3.1

Através do Lema 4.4, notamos que, para todo $t > t_1$, $\mathcal{C}^+$ cruza o hiperplano $\{t\} \times E$, ou seja, $(\{t\} \times E) \cap \mathcal{C}^+ \neq 0$. Observe que, caso contrário, existe $\Lambda > t_1$ na qual $\mathcal{C}^+$ não cruza o hiperplano $\{\Lambda\} \times E$, sendo assim, pelo Lema 4.4, existe $R > 0$ tal que $(t,U) \in \mathcal{C}^+$, $t \in [0,\Lambda]$ e $\|U\| \leq R$. Logo, $\mathcal{C}^+$ seria limitado, contradizendo o Lema 4.3.

Agora, para finalizar a demonstração do Lema 4.1, vamos mostrar que não existe solução para o problema (P_6) se $t \leq t_1$. De fato, suponha, por contradição, que (t,U) é solução de (P_6) com $t \leq t_1$ e $U \geq 0$, assim temos

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_{(u,v)}(x)u = t\left[au + \dfrac{b}{\sigma}(\sigma v)\right], & \text{em } \Omega \\ -\Delta(\sigma v) + \psi_{(u,v)}(x)(\sigma v) = t[(c\sigma)u + d(\sigma v)], & \text{em } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.18}$$

para todo $\sigma > 0$. Em particular, se $\sigma^2 = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = c\sigma^2 \Rightarrow \dfrac{b}{\sigma} = c\sigma =: \hat{b}$, vamos fixar $w = \sigma v$. Assim, temos $\hat{U} = (u, w) \in E$ é uma solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi_{(u,v)}(x)u = t(au + \hat{b}w), & \text{em } \Omega \\ -\Delta w + \psi_{(u,v)}(x)w = t(\hat{b}u + dw), & \text{em } \Omega \\ u, w > 0, & \text{em } \Omega \\ u = w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.19}$$

Uma vez que $A_0 = \begin{pmatrix} a & \hat{b} \\ \hat{b} & d \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica, temos que

$$\mu|z|^2 \leq \langle A_0 z, z\rangle \leq \lambda|z|^2, \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^2 \tag{4.20}$$

onde μ e λ são autovalores da matriz A, nos quais $\lambda > 0$ e $\lambda > \mu$.

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle tA_0 z, z\rangle\, dx &= \int_\Omega \left\langle t \begin{pmatrix} a & \hat{b} \\ \hat{b} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \right\rangle dx \\ &= \int_\Omega \left\langle t \begin{pmatrix} au + \hat{b}w \\ \hat{b}u + dw \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \right\rangle dx \\ &= \int_\Omega \left\langle \begin{pmatrix} t(au + \hat{b}w) \\ t(\hat{b}u + dw) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \right\rangle dx \\ &= \int_\Omega \left\langle \begin{pmatrix} -\Delta u + \phi_{(u,v)}u \\ -\Delta w + \psi_{(u,v)}w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \right\rangle dx \\ &= \int_\Omega (-\Delta u)u + \phi_{(u,v)}uu dx + \int_\Omega (-\Delta w)w + \psi_{(u,v)}ww dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla u + \phi_{(u,v)}u^2 dx + \int_\Omega \nabla w \nabla w + \psi_{(u,v)}w^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \phi_{(u,v)}u^2 dx + \int_\Omega |\nabla w|^2 + \psi_{(u,v)}w^2 dx \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega \langle tA_0 z, z\rangle \, dx > \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2) dx,$$

pois $\phi_{(u,v)}u^2 > 0$ e $\psi_{(u,v)}w^2 > 0$. Logo, por (4.20)

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2) dx < \int \langle tA_0 z, z\rangle < t\lambda \int_\Omega (|u|^2 + |w|^2) dx. \tag{4.21}$$

Pela desigualdade de Poincaré, chegamos que

$$\lambda_1 \int_\Omega (|u|^2 + |w|^2) dx < t\lambda \int_\Omega (|u|^2 + |w|^2) dx.$$

Portanto, $t > \dfrac{\lambda_1}{\lambda} = t_1$ que é uma contradição. Finalizando a demonstração do Lema 4.1.

Note que pelo Lema 4.1, temos que (P_1) tem solução se, e somente se, $t_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda} < 1$. Assim, (P_1) tem solução se, e somente se $\lambda > \lambda_1$. Provando o Teorema 3.1.

4.2 Demonstração do Teorema 3.2

Da mesma forma que foi feito no Teorema 3.1, vamos introduzir o parâmetro $t > 0$ no problema (P_2), na intenção de demonstrá-lo via Teoria de Bifurcação. Para isso, também se faz necessário a demonstração do seguinte Lema.

Lema 4.5. *Suponha que $K \in \mathcal{K}$ e $(f_1) - (f_3)$ sejam válidas. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz tal que: existe um maior autovalor positivo de A que é o único autovalor positivo λ associada a um autovetor $z > 0$ e $dim N(\lambda I - A) = 1$. Para $t \in \mathbb{R}$, temos que o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta U + \phi(x)U = tAU & \text{em } \Omega, \\ U > 0, & \text{em } \Omega, \\ U = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_7}$$

tem solução para todo $t > t_1$, onde $t_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}$ e λ_1 é o primeiro autovalor do problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Diferentemente do caso anterior, estamos considerando $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Assim, podemos obter soluções nas condições $f = g$ e $K = \Gamma$, ou seja, $\phi = \psi$.

Antes de demonstrar o Lema 4.5, note que pelas definições dos operadores S_0 e G_0, temos que $(t, U) \in \mathbb{R} \times E$ é solução de (P_7) se, e somente se,

$$U = F(t, U) := tS_0(U) + G_0(U).$$

De fato, pelos cálculos feitos para o problema (P_6), chegamos a igualdade

$$-\Delta U + \Phi_U(x) = tAU, \text{ em } \Omega.$$

Mas, note que, neste caso estamos considerando $f = g$ e $K = \Gamma$, ou seja, $\phi = \psi$, dessa forma, teremos que $\Phi_U(x) = \phi(x)U$. Assim,

$$U = tS_0(U) + G_0(U) \Leftrightarrow -\Delta U + \phi(x)U = tAU. \tag{4.22}$$

Sabemos que podemos escolher uma autofunção U_1, associada ao autovalor $t_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}$ de um problema linear, é positiva. E mais, t_1^{-1} é um autovalor de multiplicidade ímpar (um) para S_0. De acordo com o Teorema Global de Bifurcação, existe uma componente conexa fechada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{t_1}$ de soluções para (P_7), que verifica (A) ou (B).

Mostraremos a seguinte afirmação:

Afirmação 4.3. *(B) não ocorre.*

Para demosntrar essa afirmação, será necessário utilizar o seguinte lema:

Lema 4.6. *Existe $\delta > 0$ tal que, se $(t, U) \in \mathcal{C}$ com $|t - t_1| + \|U\| < \delta$ e $U \neq 0$, então U tem sinal definido, ou seja,*

$$U(x) > 0, \forall x \in \Omega \quad ou \quad U(x) < 0, \forall x \in \Omega.$$

O Lema 4.6 é semelhante ao Lema 4.2, a diferença é que neste caso estamos considerando o problema (P_7). A demonstração é análoga, com simples alterações.

Nos casos estudamos anteriormente, utilizando o Príncipio do Máximo (Ver Apêndice A) , conseguimos fazer a decomposição de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ sem problemas. Aqui, será necessário introduzir um operador auxiliar, na qual as propriedades são semelhantes as do operador de Laplace.

Operador Auxíliar

Fixando $\psi \in L^\infty(\overline{\Omega})$ com $\psi \geq 0$, definimos o operador solução $S_L : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tal que $S_L(v) = u$, sendo u a única solução fraca para o problema linear

$$\begin{cases} L(u) = v, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $L(u) = -\Delta u + \psi(x)u$. Esse operador é compacto e auto-adjunto (ver Apêndice B), assim usando os resultados da Teoria Espectral, existe uma base ortonormal completa $\{\phi_n\}$ de $L^2(\Omega)$ e uma correspondente sequência de números reais positivos $\{\lambda_n\}$ com $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ tal que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$$

e

$$\begin{cases} L(\phi_n) = \lambda_n \phi_n, & \text{em } \Omega \\ \phi_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Utilizando o Multiplicador de Lagrange, temos que λ_1 tem a seguinte caracterização

$$\lambda_1 = \inf_{v \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} = \frac{\displaystyle\int_\Omega [|\nabla v|^2 + \psi(x)v^2]dx}{\displaystyle\int_\Omega v^2 dx}.$$

Também é possível demonstrar que λ_1 é um autovalor simples e que uma correspondente autofunção ϕ_1 pode ser escolhida positiva em Ω.

Observe que, se substituirmos $-\Delta U$ por LU e $\sigma(-\Delta)$ por $\sigma(L)$, onde $LU = \begin{pmatrix} L(u) \\ L(v) \end{pmatrix}$ no Lema 3.2, este continua sendo válido. Assim, temos o seguinte lema:

Lema 4.7. *Se o problema*

$$\begin{cases} LU = AU, & \textit{em } \Omega \\ U = 0, & \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução U com $U \geq 0$ e $U \neq 0$, então $\sigma(L) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$. Ademais, $U > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}, \dfrac{\partial v}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$.

Demonstração. Pelos mesmos argumentos utilizados na primeira parte da demonstração do Lema 3.2, temos que $\sigma(L) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$, ou seja, existe pelo menos um autovalor real de A que também é autovalor de L. Além disso, por hipótese do Lema 4.5 existe um maior autovalor positivo de A que é o único autovalor positivo λ associado a um autovetor $z > 0$ e $dimN(\lambda I - A) = 1$, assim $\lambda = \lambda_1$, pois sabemos que $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ com $\lambda > 0$, se $\lambda_1 = \mu$, A teria dois autovalores positivos com dois autovetores positivos o que seria um absurdo, além disso, pelo Lema 3.2 temos que $U = \phi_1 w$, onde w é multiplo de z. Sabemos que $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$ (consequência do Lema de Hopf), então temos $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} > 0$, $U = \begin{pmatrix} \alpha\phi_1 \\ \beta\phi_1 \end{pmatrix} > 0$, onde, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial(\alpha\phi_1)}{\partial \eta} = \alpha\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \eta} < 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \dfrac{\partial(\beta\phi_1)}{\partial \eta} = \beta\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$. □

Para concluirmos a demonstração do Teorema 3.2, vamos precisar dos seguintes resultados

Considere os conjuntos

$$\mathcal{C}^+ = \{(t, U) \in \mathcal{C} : U(x) > 0, \forall x \in \Omega\} \cup \{(t_1, 0)\} \tag{4.23}$$

e

$$\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C} : U(x) < 0, \forall x \in \Omega\} \cup \{(t_1, 0)\} \tag{4.24}$$

Assim, $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$. Observe que $\mathcal{C}^- = \{(t, U) \in \mathcal{C} : (t, -U) \in \mathcal{C}^+\}$, $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \{(t_1, 0)\}$, as demonstrações são análogas as feitas no Capítulo 2. Além disso, $\mathcal{C}^+$ é ilimitado se, e somente se, $\mathcal{C}^-$ é também ilimitado.

Lema 4.8. *$\mathcal{C}^+$ é ilimitada.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{C}^+$ é limitada. Então, $\mathcal{C}$ também é limitada. Pelo Teorema Global de Bifurcação, temos que $\mathcal{C}$ contém $(\hat{t}, 0)$, tal que $\hat{t} \neq t_1$ e $\hat{t}^{-1} \in \sigma(S_0)$. Agora, considere $(t_n, U_n) \subset \mathcal{C}^+$ com $t_n \to \hat{t}$ tal que, $U_n \neq 0$, $\|U_n\| \to 0$ e $U_n = F(t_n, U_n)$.

Defina $W_n = \dfrac{U_n}{\|U_n\|}$. Pela demosntração do Lema 4.6, vimos que existe $W \in E$, onde $W_n \to W$ em E, $W \neq 0$, $W \geq 0$ e satisfaz o problema do autovalor

$$\begin{cases} L(W) = (\hat{t}A)W, & \text{em } \Omega \\ W = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.25}$$

onde $L(W) = -\Delta W + \phi(x)W$. Pelo Lema 4.7, temos que $\hat{t}\lambda = \lambda_1 \Rightarrow \hat{t} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda} = t_1$, o que é um absurdo. Logo, $\mathcal{C}^+$ é ilimitada, como queríamos demonstrar. $\square$

4.2.1 Estimativa a Priori

Lema 4.9. *Para todo $\Lambda > 0$, existe $R > 0$ tal que, se $(t, U) \in \mathcal{C}^+$ e $t \in [0, \Lambda]$, então $\|U\| \leq R$.*

Demonstração.

Afirmação 4.4. *Para qualquer $\Lambda > 0$, existe $R > 0$ tal que se $(t, U) \in \mathcal{C}^+$ e $t \leq \Lambda$, então $\|U\|_H \leq R$.*

Suponha, por contradição, que existe $(U_n) \subset H$ e $(t_n) \subset [0, \Lambda]$ tal que, $\|U_n\|_H \to \infty$ e $U_n = F(t_n, U_n)$.

Considere $W_n = \dfrac{U_n}{\|U_n\|_H}$, onde $W_n = (\overline{u}_n, \overline{v}_n)$, com $\overline{u}_n = \dfrac{u_n}{\|U_n\|_H}$ e $\overline{v}_n = \dfrac{v_n}{\|U_n\|_H}$. Relembre a seguinte identidade,

$$-\Delta U + \phi(x)U = tAU, \text{ em } \Omega \tag{4.26}$$

a qual é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + \phi(x)u = t(au + bv), \text{ em } \Omega \\ -\Delta v + \phi(x)v = t(cu + dv), \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.27}$$

Dividindo (4.27) por $\|U_n\|_H$ e lembrando que $\phi(x) = \phi_{(u,v)}(x)$ temos

$$-\Delta \left(\frac{u_n}{\|U_n\|_H}\right) + \phi(x)\left(\frac{u_n}{\|U_n\|_H}\right) = t_n\left(a\left(\frac{u_n}{\|U_n\|_H}\right) + b\left(\frac{v_n}{\|U_n\|_H}\right)\right)$$

e

$$-\Delta \left(\frac{v_n}{\|U_n\|_H}\right) + \phi(x)\left(\frac{v_n}{\|U_n\|_H}\right) = t_n\left(c\left(\frac{u_n}{\|U_n\|_H}\right) + d\left(\frac{v_n}{\|U_n\|_H}\right)\right)$$

ou seja,

$$-\Delta\overline{u}_n + \phi_{(u,v)}(x)\overline{u}_n = t_n(a\overline{u}_n + b\overline{v}_n) \tag{4.28}$$

e

$$-\Delta\overline{v}_n + \phi_{(u,v)}(x)\overline{v}_n = t_n(c\overline{u}_n + d\overline{v}_n) \tag{4.29}$$

Seguindo os mesmos passos que foram realizados no Lema 4.4 conseguiremos validar a afirmação. □

Conclusão da demonstração do Lema 4.5 e demonstração do Teorema 3.2

Por meio do Lema 4.9, para todo $t > t_1$, temos que $\mathcal{C}^+$ cruza o hiperplano $\{t\} \times E$, ou seja, $(\{t\} \times E) \cap \mathcal{C}^+ \neq 0$. Observe que, do contrário, existe $\Lambda > t_1$ tal que $\mathcal{C}^+$ não cruza o hiperplano $\{\Lambda\} \times E$, com isso, temos pelo Lema 4.9, que existe $R > 0$ tal que $(t, U) \in \mathcal{C}^+$, $t \in [0, \Lambda]$ e $\|U\| \leq R$. Desta forma, $\mathcal{C}^+$ seria limitado, contradizendo o Lema 4.8.

Para concluirmos a demonstração do Teorema 3.2, basta notar que pelo Lema 4.5, fica claro que (P_2) tem solução se $t_1 < 1$. Portanto, (P_2) tem solução se $\lambda > \lambda_1$, como queríamos demonstrar.

Apêndice A

Alguns Resultados Utilizados

Lema A.1 (Lema de Fatou). *Se* (f_n) *pertence a* $M^+(X, X)$, *então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [6]. □

Teorema A.1 (Desigualdade de Hölder). *Seja* $f \in L_p$ *e* $g \in L_q$, *com* $p > 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então* $fg \in L_1$ *e* $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Demonstração. Ver [6]. □

Teorema A.2 (Desigualdade de Poincaré). *Seja* Ω *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^N$. *Então, existe uma constante* $C = C(\Omega, p)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in W_0^{1,p} \quad \textit{com } 1 \leq p < \infty.$$

Demonstração. Ver [23] □

Teorema A.3 (Princípio do Máximo). *Seja* $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) *em* Ω *e suponha que exista um ponto* $y \in \Omega$ *tal que*

$$u(y) = \sup_\Omega u \ (\inf_\Omega u).$$

. *Então* u *é constante.*

Demonstração. Ver [17]. □

Teorema A.4 (Teorema da Função Implícita). *Sejam $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k $(K \geq 1)$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe um retângulo aberto $I \times J$, de centro (x_0, y_0) tal que $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \longrightarrow J$, de classe C^k. Tem-se $\xi'(x) = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$ estas derivadas sendo calculadas no ponto $(x, \xi(x))$.*

Demonstração. Ver [25]. □

Teorema A.5 (Teorema de Aproximação de Weierstrass). *Dada uma função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, existe uma sequência de polinômios p_n tais que*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = f$$

uniformemente em $[a, b]$.

Demonstração. Ver [21]. □

Proposição A.6. *Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $a, b, c, d > 0$, temos que $\sigma(A) = \{\mu, \lambda\}$ e $\lambda > \mu$ com $\lambda > 0$. É bem conhecido que, existe um autovetor $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de A associado ao autovalor λ com $\alpha, \beta > 0$ e todo autovetor $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ de A associado ao autovalor μ com $\alpha_1 \cdot \beta_1 < 0$.*

Demonstração. Ver [18]. □

Teorema A.7 (Agmon-Douglis-Niremberg). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, $f \in L^r(\Omega)$ com $r > 1$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, verificando:*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{A.1}$$

Então, $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe $C > 0$ independente de f, tal que

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^r(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [17]. □

O teorema anterior afirma que dado $f \in L^r(\Omega)$ existe uma única solução $u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ verificando (A.1). Além disso, temos

$$f \in W^{k,r}(\overline{\Omega}) \Rightarrow u \in W^{k+2,r}(\overline{\Omega}).$$

Teorema A.8 (O Teorema de Bifurcação de Krasnoselski)**.** *Seja X um espaço de Banach e seja $T \in C^1(X, X)$ um operador compacto, tal que, $T(0) = 0$ e $T'(0) = 0$. Além disso, seja $A \in \mathcal{L}(X)$ compacto. Então todo autovalor $\hat{\lambda}$ de A com multiplicidade algébrica ímpar é um ponto de bifurcação para $u = \lambda A u + T(u)$.*

Demonstração. Ver [4]. □

Lema A.2 (Hopf)**.** *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ que verifica*

$$\Delta u \leq 0, \ \ em\ \Omega.$$

Se existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

$$u(x_0) \leq u(x), \ \ \forall x \in \Omega$$

temos,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

onde η denota a norma exterior a $\partial\Omega$ em x_0.

Demonstração. Ver [16]. □

Uma conseqência imediata do Lema de Hopf é que,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}(y) < 0, \ \ \forall y \in \partial\Omega$$

onde ϕ_1 é uma autofunção positiva de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ associada a λ_1, isto é

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1, \ \text{em } \Omega \\ \phi_1 > 0, \ \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema A.9 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e $\Psi \in H'$. Então, existe um único $u \in H$ tal que*

$$\Psi(v) = (u, v)_H, \ \ \forall v \in H \ \ \textit{\textbf{e}} \ \ \|\Psi\|_{H'} = \|u\|_H.$$

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema A.10 (Multiplicador de Lagrange)**.** *Consideremos $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe $C^k(K \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^{N+1}$, e $M = \varphi^{-1}(c)$ uma hiperficie contida em U, imagem inversa do valor regular $c \in \mathbb{R}$ por uma função $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k. Um ponto $p \in M$ é ponto crítico de $f|_M$ se, e somente se, existe um número real λ tal que grad $f(p) = \lambda \cdot$ grad $\varphi(p)$.*

Demonstração. Ver [19]. □

Teorema A.11. *São válidas as seguintes imersões:*

- $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq 2^*$;
- $H_0^1(\Omega) \overset{comp.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $2 \leq q \leq 2^*$;
- $W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Omega)$, *para* $0 < \alpha < 1 - \frac{pN}{s}$, *onde* $r = \frac{s}{p}$;
- $C^{1,\alpha}(\Omega) \overset{comp.}{\hookrightarrow} C^1(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$.

Demonstração. Ver [2]. □

Teorema A.12 (Decomposição espectral de operadores compactos e autoadjuntos)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $T : H \longrightarrow H$ um operador compacto e autoadjunto. Então H admite um sistema ortonormal completo formado por autovetores de T. Mais ainda, existem sequências (finitas ou infinitas) de autovalores $(\lambda_n)_n$ de T e de vetores $(v_n)_n$ tais cada v_n é autovetor associado a λ_n e*

$$T(x) = \sum_n \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n$$

para todo $x \in H$.

Demonstração. Ver [8]. □

Apêndice B

Propriedades do Operador S

Seja o operador solução $S : C^0(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ dado por

$$S(u) = w_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta w_1 = u, & \text{em } \Omega \\ w_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{B.1}$$

Este operador possui algumas propriedades que serão apresentadas abaixo.

- **Propriedade 1:** $S : C^0(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ está bem definido, é linear e contínuo.

De fato, dado $f \in L^\infty(\Omega)$, temos, que $f \in L^r(\Omega)$, para todo $r \geq 1$, pois $|\Omega| < \infty$. Assim, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ com

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{B.2}$$

Desta forma, pela Teoria da Regularidade (Agmon-Douglis-Niremberg), $u \in W^{2,r}(\Omega)$, para todo $r \geq 1$ e existe uma constante $C > 0$ independente de f, tal que

$$\|u\|_{2,r} \leq C_r \|f\|_r.$$

Por [2] temos que, se $r = \dfrac{s}{p}$, onde $W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Omega)$, para $0 < \alpha < 1 - \dfrac{pN}{s}$, assim

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq C_r \left(\int_\Omega \|f\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_r \left(\int_\Omega \|f\|_\infty^r \right)^{\frac{1}{r}} = C_r \|f\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{r}},$$

ou seja,

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq C'_r \|f\|_\infty.$$

Como, $C^{1,\alpha}(\Omega) \overset{comp.}{\hookrightarrow} C^1(\Omega)$, ver [2], então temos

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \|u\|_{C^{1,\alpha}(\Omega)} \leq C_\infty \|f\|_\infty.$$

Daí, fica bem definido o operador $S : C^0(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ que é compacto e contínuo, pois $C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Agora, vejamos a linearidade. De fato, considere $u, v \in C^0(\overline{\Omega})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotaremos por w_u, w_v e w_z as soluções dos seguintes problemas lineares

$$\begin{cases} -\Delta w_u = u, & \text{em } \Omega \\ w_u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\begin{cases} -\Delta w_v = v, & \text{em } \Omega \\ w_v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{B.4}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w_z = u + \alpha v, & \text{em } \Omega \\ w_z = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{B.5}$$

ou seja, $S(u) = w_u$, $S(v) = w_v$ e $S(u + \alpha v) = w_z$. Queremos mostrar que $w_z = w_u + \alpha w_v$, na qual implica que $S(u + \alpha v) = S(u) + \alpha S(v)$.

Note que, se $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(w_u + \alpha w_v)\nabla\varphi dx &= \int_\Omega \nabla w_u \nabla\varphi dx + \alpha \int_\Omega \nabla w_v \nabla\varphi dx \\ &= \int_\Omega u\varphi dx + \alpha \int_\Omega v\varphi dx \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla(w_u + \alpha w_v)\nabla\varphi dx = \int_\Omega (u + \alpha v)\varphi dx.$$

Sendo assim, temos que $w_u + \alpha w_v$ é a solução fraca para o problema (B.5). Mas o problema (B.5) tem como única solução a função w_z, então $w_z = w_u + \alpha w_v$. Portanto, S é linear.

- **Propriedade 2:** O operador S é simétrico, ou seja, $(S(u), v)_{L^2(\overline{\Omega})} = (u, S(v))_{L^2(\overline{\Omega})}$, para todo $u, v \in L^2(\overline{\Omega})$.

  De fato, considerando $S(u) = w_u$ e $S(v) = w_v$, temos

$$\int_\Omega \nabla w_u \nabla \varphi dx = \int_\Omega u\varphi dx, \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

  e

$$\int_\Omega \nabla w_v \nabla \psi dx = \int_\Omega v\psi dx, \ \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

  Fazendo $\varphi = w_v$ e $\psi = w_u$ obtemos

$$\int_\Omega \nabla w_u \nabla w_v dx = \int_\Omega u w_v dx,$$

  e

$$\int_\Omega \nabla w_v \nabla w_u dx = \int_\Omega v w_u dx.$$

  Daí, temos que

$$\int_\Omega u w_v dx = \int_\Omega v w_u dx$$

  ou seja,

$$(S(u), v)_{L^2(\overline{\Omega})} = (u, S(v))_{L^2(\overline{\Omega})}.$$

- **Propriedade 3:** O operador S é positivo, ou seja, $(S(u), u)_{L^2(\overline{\Omega})} > 0$, para todo $u \in L^2(\overline{\Omega}) \backslash \{0\}$.

  Seja $S(u) = w_u$, assim

$$\int_\Omega \nabla w_u \nabla \varphi dx = \int_\Omega u\varphi dx, \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

  Fazendo $\varphi = w_u$ temos

$$\int_\Omega |\nabla w_u|^2 dx = \int_\Omega u w_u dx.$$

  Desde que $u \neq 0$, teremos que $w_u \neq 0$. Daí, segue imediato que $\int_\Omega u w_u dx > 0$, ou seja,

$$(S(u), u)_{L^2(\overline{\Omega})} > 0, \ \ \forall u \in L^2(\overline{\Omega}) \backslash \{0\}.$$

- **Propriedade 4:** O operador S contém uma sequência $(\mu_n) \subset (0, \infty)$ de autovalores tais que

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n > \cdots > 0$$

e

$$\mu_n \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

E mais,

$$dim V_{\mu_n} < \infty, \ \ n \in \mathbb{N}$$

e

$$C^0(\overline{\Omega}) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} V_{\mu_j}.$$

Pelos resultados de Análise Funcional, podemos garantir a existência da sequência de autovalores (μ_n). A positividade desses autovalores vem da Propriedade 4, pois S é um operador positivo. Note que, se μ é autovalor de S, então existe $u \in C^0(\overline{\Omega}) \backslash \{0\}$ tal que verifica $S(u) = \mu u$, assim temos

$$0 < (S(u), u)_{C^0(\overline{\Omega})} = \mu \int_\Omega |u|^2 dx = \mu(u, u)_{C^0(\overline{\Omega})}$$

logo, $\mu > 0$.

- **Propriedade 5:** Relação entre os autovalores do operador S com o $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Seja (μ_n) uma sequência de autovalores de S. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_n \in C^0(\overline{\Omega})$ tal que satisfaz

$$S(\varphi_n) = \mu_n \varphi_n, \ \ (\varphi \in H_0^1(\Omega)).$$

Com isso, temos

$$\int_\Omega \nabla(\mu_n \varphi_n) \nabla \psi dx = \int_\Omega \varphi_n \psi dx, \ \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega),$$

logo,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu_n}\right) \nabla(\mu_n \varphi_n) \nabla \psi dx = \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu_n}\right) \varphi_n \psi dx, \ \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla \varphi_n \nabla \psi dx = \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu_n} \varphi_n\right) \psi dx, \ \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Sendo assim, temos que φ_n é solução do seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, & \text{em } \Omega \\ \varphi_n = 0, & \text{sobre } \partial\Omega; \end{cases} \tag{B.6}$$

onde, $\lambda_n = \dfrac{1}{\mu_n}$. Com isso, (λ_n) é uma sequência de autovalores para $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Agora, suponhamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ seja um autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Assim, existe $\varphi \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi, & \text{em } \Omega \\ \varphi = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{B.7}$$

ou equivalentemente,

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla\psi dx = \lambda\int_\Omega \varphi\psi dx, \ \ \forall\psi \in H_0^1(\Omega). \tag{B.8}$$

Assim, devemos ter que $\lambda \neq 0$, pois caso contrário, teríamos que $-\Delta\varphi = \lambda\varphi = 0$, o que é um absurdo, pois $\varphi \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$. Dessa forma, temos que $\lambda > 0$, pois pela igualdade (B.8) temos

$$0 < \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = \lambda\int_\Omega |\varphi|^2 dx \ \ \Rightarrow \ \ \lambda > 0. \tag{B.9}$$

Assim, por (B.8) e (B.9), obtemos

$$\int_\Omega \nabla\left(\frac{1}{\lambda}\varphi\right)\nabla\psi dx = \int_\Omega \varphi\psi dx, \ \ \forall\psi \in H_0^1(\Omega)$$

ou seja, $S(\varphi) = \dfrac{1}{\lambda}\varphi$, indicando que $\dfrac{1}{\lambda}$ é um autovalor de S associado a autofunção φ. Portanto, $\dfrac{1}{\lambda} = \mu_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Observação B.1. *O operador $S_0 : E \to E_1$ do Capítulo 3 e o operador auxiliar $S_L : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ do capítulo 4, verificam as mesmas propriedades apresentadas acima. As demonstrações são análogas as do operador S com simples alterações.*

Bibliografia

[1] Allegretto, W., Nistri P., *On a class of nonlocal problems with applications to mathematical biology*, Differential equations with applications to biology (Halifax, NS, 1997), 1-14, Fields Inst. Commun., 21, Am. Math. Soc., Providence. RI (1999).

[2] Adams, R., A., *Sobolev Spaces*, Londres, Academic Press, 65, 268 p. (1975).

[3] Ambrosetti, A., Arcoya, D., *An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems*, Boston, Birkhauser, 82, 221 p. (2011).

[4] Ambrosetti, A., Malchiodi, A., *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, New York, Cambridge University Press, 328 p. (2007).

[5] Alves, C. O., Delgado, M., Souto, M. A. S., Suárez, A., *Existence of positive solution of a nonlocal logistic population model*, Z. Angew. Math. Phys, 66, 943-953 (2015).

[6] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, (1995).

[7] Bassanezi, R., C., Ferreira Jr., W., C., *Equações Diferenciais com Aplicações*, São Paulo, HARBRA, 572 (1988).

[8] Botelho, G., Pellegrino, D., Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Rio de Janeiro, SBM, 409 p. (2015).

[9] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* New York, Springer, 600 p. (2011).

[10] Chen, S., Shi, J., *Stability and Hopf bifurcation in a diffusive logistic population model with nonlocal delay effect*, J. Differential Equations, 253, 3440-3470 (2012).

[11] Chipot, M., *Remarks on Some Class of Nonlocal Elliptic Problems*, Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues, World Scientific, 79-102 (2006).

[12] Corrêa, F.J.S.A., Delgado, M., Suárez, A., *Some nonlinear heterogeneous problems with nonlocal reaction term*, Advances in Diferential Equations, 16, 623-641 (2011).

[13] Corrêa, F. J. S. A., Souto, M. A. S., *On maximum principles for cooperative elliptic systems via fixed point index*, Nonlinear Anal., 26, 997-1006 (1997).

[14] Corrêa, F. J. S. A., Souto, M. A. S., *Sign-definite results for solutions of a system under Neumann-Dirichlet boundary conditions*, 42º Seminário Brasileiro de Análise, 321-332 (1995).

[15] Coville, J., *Convergence to equilibrium for positive solutions of some mutation-selection model*, arXiv:1308.6471, (2013).

[16] Evans, L., C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 662 p. (1998).

[17] Gilbarg, D., Trudinger, N., S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2, 522 p. (2001).

[18] Hoffman, K., Kunze, R., *Linear Algebra*, Nova Jersey, Prentice-Hall, 2, 407 p. (1971).

[19] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques: et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer, 327 p. (1994).

[20] Leman, H., Méléard, S., Mirrahimi, S., *Infuence of a spatial structure on the long time behavior of a competitive Lotka-Volterra type system*, arXiv:1401.1182v1, (2014).

[21] Lima, E., L., *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro, IMPA, 6, 308 p. (2020).

[22] de Lima, R. N., Souto, M. A. S., *Existence of positive solution for a system of elliptic equations via bifurcation theory*, J. Math. Anal. Appl, 457, 287-304 (2018).

[23] Medeiros, L., A., Miranda, M., M., *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática - UFRJ, 151 p. (2000).

[24] Perthame, B., *Transport Equations in Biology*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser Basel, 12, 198 p. (2007).

[25] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, Estados Unidos, International Series in Pure and Applied Mathematics, 3, 342p. (1976).

[26] Souto, M. A. S., *A priori estimates and existence of positive solutions of nonlinear cooperative elliptic systems*, Diff. and Integral Equations, 8(5), 1245-1258 (1995).

[27] Sun, L., Shi, J., Wang, Y., *Existence and uniqueness of steady state solutions of a nonlocal diffusive logistic equation*, Z. Angew. Math. Phys., 64, 1267-1278 (2013).