



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA

Willames Silva Pinheiro

Efeito Óptico de Sombras em Buracos Negros

Campina Grande, Paraíba, Brasil

16 de abril de 2024

Willames Silva Pinheiro

Efeito Óptico de Sombras em Buracos Negros

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Victor I. Afonso, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Dr. Victor I. Afonso

Campina Grande, Paraíba, Brasil

16 de abril de 2024

P654e Pinheiro, Willames Silva.
Efeito óptico de sombras em buracos negros / Willames Silva Pinheiro
– Campina Grande, 2024.
98 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.
"Orientação: Prof. Dr. Victor Ignácio Afonso."
Referências.

1. Buracos negros. 2. Schwarzschild. 3. Esfera de Fótons. 4. Sombras.
5. Parâmetro de Impacto. 6. Óptica geométrica. I. Afonso, Victor Ignácio.
II. Título.

CDU 524.882(043)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
POS-GRADUACAO EM FISICA
Rua Aprigio Veloso, 882, - Bairro Universitario, Campina Grande/PB, CEP 58429-900

FOLHA DE ASSINATURA PARA TESES E ASSINATURAS

WILLAMES SILVA PINHEIRO

Ata da defesa para concessão do grau de mestre em física, realizada em 06 de fevereiro de 2024.

Aos seis dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e quatro, reuniram-se em caráter de solenidade pública, os membros da comissão designada para avaliar **WILLAMES SILVA PINHEIRO** ao grau de Mestre em Física, área de concentração Física. Foram componentes da Banca Examinadora os especialistas: o professor **Victor Ignácio Afonso** (Orientador) – Doutor em Física, o professor **Francisco de Assis de Brito**– Doutor em Física, o professor **Diego Rubiera-García**– Doutor em Física, sendo o primeiro e o segundo integrantes do corpo docente da Universidade Federal de Campina Grande, e o terceiro, integrante do corpo docente da Universidad Complutense de Madrid, Espanha. HORA DE INÍCIO: **10h00min** – LOCAL: **Sala Virtual**. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca, professor Victor Ignácio Afonso, após declarar os objetivos da reunião, apresentou o(a) candidato(a) **WILLAMES SILVA PINHEIRO**, a quem concedeu a palavra para que dissertasse oral e sucintamente sobre o tema apresentado, intitulado “**Efeito Óptico de Sombras em Buracos Negros**”. Após discorrer o referido tema, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos examinadores na forma regimental. Ato contínuo, passou a Comissão, em caráter secreto, a proceder a avaliação e julgamento do trabalho, concluindo por atribuir-lhe o conceito Aprovado. Face à aprovação, declarou o Presidente estar o(a) avaliado(a), legalmente habilitado(a) a receber o Grau de Mestre em Física, cabendo à Universidade Federal de Campina Grande, providências para a expedição do Diploma a que o(a) mesmo(a) faz jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a ata, que será submetida à aprovação da Comissão Examinadora. Campina Grande, 06 de fevereiro de 2023.

Prof. Dr. Victor Ignácio Afonso

Presidente da Comissão e Orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

Examinador Interno e Coordenador do Programa

Prof. Dr. Diego Rubiera-García

Examinador Externo

Willames Silva Pinheiro

Candidato(a)

2 - APROVAÇÃO

2.1. Segue a presente Ata de Defesa de Tese de Mestrado do(a) candidato(a) **WILLAMES SILVA PINHEIRO**, assinada eletronicamente pela Comissão Examinadora acima identificada.

2.2. No caso de examinadores externos que não possuam credenciamento de usuário externo ativo no SEI, para igual assinatura eletrônica, os examinadores internos signatários certificam que os examinadores externos acima identificados participaram da defesa da tese e tomaram conhecimento do teor deste documento.



Documento assinado eletronicamente por **Diego Rubiera Garcia, Usuário Externo**, em 23/02/2024, às 04:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **FRANCISCO DE ASSIS DE BRITO, COORDENADOR(A)**, em 29/02/2024, às 14:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **VICTOR IGNACIO AFONSO, PROFESSOR 3 GRAU**, em 29/02/2024, às 16:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



Documento assinado eletronicamente por **Willames Silva Pinheiro, Usuário Externo**, em 29/02/2024, às 17:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 8º, caput, da [Portaria SEI nº 002, de 25 de outubro de 2018](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufcg.edu.br/autenticidade>, informando o código verificador **4218869** e o código CRC **A5224282**.

Agradecimentos

- Ao grande arquiteto do universo por ser fonte de dúvidas e ao mesmo tempo de reverência, cuja a dimensão e profundidade são incomensuráveis para a mente humana.
- Ao meu orientador, cuja orientação foi baseada no respeito, seriedade e responsabilidade. Agradeço pela sua paciência e pela atenção rigorosa dedicada a execução deste trabalho. Além disso, sou grato pelas suas sugestões e críticas construtivas que servem de inspiração para o perfil acadêmico que desejo trilhar em minha carreira.
- Aos professores João Rafael L. dos Santos, Francisco de Assis Brito, Victor I. Afonso, que além de contribuírem para a minha formação, de forma indireta colaboraram para o início e o fim do presente trabalho.
- Agradeço á minha família, em especial aos meus pais Marlene e José Pinheiro, pelo carinho e suporte. Á minha irmã Williane pelo incentivo e apoio.
- Aos colegas de pesquisa, Johnnathan Sperândio (conhecido como “Bolívia”), Adriel Porfírio e Samuel Victor, cujas contribuições, mesmo que de maneira indireta, foram significativas para o desenvolvimento deste trabalho. Em, especial destaco a proximidade com Johnnathan, com quem compartilhei afinidade, principalmente devido a temática de pesquisa comum a ambos.
- Á meu amigo Jéferson André Sales Fortunato (conhecido com “Jefinho”), pelo incentivo e apoio para o ingresso no programa.
- Aos professores Edmundo e Carlos Romero da UFPB, pelo apoio e motivação para o ingresso no programa.
- Á Kerolayne (conhecida como “Donna Mary”) que, apesar de não estarmos tão próximos quanto eu gostaria, quero expressar minha gratidão por ser uma verdadeira válvula de escape em momentos de estresse e desânimo. Obrigado por sua presença em minha vida.
- Aos colegas da Pós-Graduação da Unidade Acadêmica de Física, da UFCG, que iniciaram a jornada acadêmica comigo e aqueles com quem eu me aproximei ao longo dos anos de mestrado. Em especial, para Flávio Pereira e Roberta Dárlla, pela atenção, suporte e companheirismo.
- Aos professores e colegas da URCA, que tive a oportunidade de conhecer, em especial os professores Ivan Carneiro (conhecido com “Brother”), Wilson Hugo e Job Saraiva,

com quem tive maior proximidade e que com quem pude compartilhar conhecimento e aprendizados significativos em minha jornada do mestrado.

- Aos meus Pets, os três felinos, Jack (amarelinho) e em memória dos queridos e muito amados Thompson (branquinho) e Jolie.
- A todos meus amigos.

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”
(Albert Einstein)

Resumo

Neste estudo examinamos a aparência de um buraco negro de Schwarzschild cercado por um disco de acreção. Nesse contexto, uma sombra é uma área escura que é delimitada pela imagem dos raios emitidos a partir do disco, que não foram capturados pelo buraco negro. Para entender este efeito óptico, exploramos alguns conceitos fundamentais da Relatividade Geral e obtivemos a métrica desses objetos massivos e esféricos.

Em seguida, derivamos a fórmula para o ângulo de deflexão de uma partícula submetida a uma força gravitacional, que nos permite compreender a curvatura do espaço-tempo ao redor do buraco negro. Analisamos as trajetórias para vários parâmetros de impacto, especialmente para buracos negros estáticos não carregados (Schwarzschild). Além disso, introduzimos o conceito de lente gravitacional ao fazer uma comparação entre a perturbação do espaço-tempo e o princípio de Fermat. Esse conceito nos ajuda a entender como a gravidade do buraco negro pode desviar a luz de estrelas distantes, resultando em imagens distorcidas e amplificadas. Ao final, utilizamos a técnica de rastreamento de raios de luz, o que nos permitiu exibir os elementos que contribuem para aparência observacional de um buraco negro, através de gráficos interpretativos que exploram a emissão de intensidade luminosa em três modelos simplificados de buraco negro acompanhados de um fino disco de acreção.

Palavras-chave: Buracos Negros. Schwarzschild. Esfera de Fótons. Sombras. Parâmetro de Impacto.

Abstract

In this study we examine the appearance of a Schwarzschild black hole surrounded by an accretion disk. In this context, a shadow is a dark area that is bounded by the image of rays emitted from the disk, which were not captured by the black hole. To understand this optical effect, we explored some fundamental concepts of general relativity and obtained the metrics of these massive, spherical objects. We then derive the formula for the deflection angle of a particle subjected to a gravitational force and show the trajectories for various impact parameters, especially for uncharged (Schwarzschild) black holes. We begin by examining the formula for the deflection angle of a particle subjected to a force gravitational, which allows us to understand the curvature of space-time around the black hole. Trajectories for different impact parameters are analyzed, focusing on uncharged (Schwarzschild) black holes. Furthermore, we introduce the concept of gravitational lensing by making a comparison between spacetime perturbation and Fermat's principle. This concept helps us understand how black hole gravity can bend light from distant stars, resulting in distorted and amplified images. In the end, we used the light ray tracing technique, which allowed us to display the elements that contribute to the observational appearance of a black hole, through interpretive graphics that explore the emission of light intensity in three simplified black hole models accompanied by a thin accretion disk.

Keywords: Black Holes. Schwarzschild. Photon Sphere. Shadows. Impact Parameter.

Lista de Figuras

Figura 1 – Reflexão e refração de um raio luminoso numa interface dielétrica. Figura extraída de: [1]	23
Figura 2 – Princípio de Fermat. Figura extraída de [2]	24
Figura 3 – O mapa exponencial leva um vetor em T_p a um ponto em \mathbf{M} que está na unidade parâmetro afim ao longo da geodésica à qual o vetor é tangente. Figura extraída de:[3].	25
Figura 4 – Diagrama da trajetória de um fóton passando perto de um buraco negro. O observador está localizado em O e a fonte emissora da partícula em F . Figura extraída de [4]	36
Figura 5 – Comparação entre a deflexão precisa dos fótons em uma métrica de Schwarzschild e as duas aproximações abordadas no texto. O parâmetro de impacto é expresso em termos do raio de Schwarzschild. Figura extraída de [5]	43
Figura 6 – Trajetória dos fótons considerando três parâmetros de impacto distintos em relação a uma fonte F e um observador situado em O , passando próximos a um buraco negro representado pela esfera em preto. Na Figura (a) o parâmetro de impacto é $u = 3r_s$; na Figura (b) $u = 5r_s$; e em (c) $u = 10r_s$, onde $r_s = 2M$ é o raio de Schwarzschild. Figura extraída de: [4]	46
Figura 7 – Diagrama que descreve como a radiação que chega é atenuada exponencialmente ao longo de um caminho s do raio de luz, e como a função fonte contribui para essa queda exponencial em relação à distância. Figura extraída de [6].	51
Figura 8 – Potencial efetivo para órbitas circulares de fótons numa métrica tipo Schwarzschild. Gráfico reproduzido com o Mathematica.	57
Figura 9 – Diagrama da esfera de fótons mostrando o ponto de maior aproximação do raio de luz até R . Denotamos r_{sph} como o raio da esfera de fótons, onde os raios de luz são emitidos de uma fonte com uma inclinação α . Gráfico reproduzido com o Mathematica.	58
Figura 10 – Potenciais efetivos para o movimento de partículas tipo luz em função da distância r . A linha pontilhada é o raio crítico, a linha verde corresponde a $L = 1$, a vermelha a $L = 2$ e a linha azul a $L = 3$. Gráfico reproduzido com o Mathematica.	60

Figura 11 – Comportamento dos raios de luz em um espaço-tempo tipo Schwarzschild em função do parâmetro de impacto u . O círculo tracejado preto é a esfera de fótons, raios de luz na cor vermelho: Anel de fótons, raios de luz na cor magenta: efeito lente, raio de luz na cor laranja: imagem direta, o círculo de fundo preto representa o horizonte. Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].	62
Figura 12 – Número de órbitas $n \equiv \pi/2\pi$ em função do parâmetro de impacto u . A linha tracejada é o ângulo de desvio exato, a linha na cor preta é a emissão direta, a linha na cor laranja é o efeito lente e a linha na cor vermelha é o anel de fótons. Figura extraída de [8]	63
Figura 13 – As três primeiras funções de transferência para as emissões direta (linha laranja), efeito lente(linha magenta) e anel de fótons(linha vermelha) para a solução de Schwarzschild. Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].	65
Figura 14 – Modelo 1: (a) Intensidade luminosa observada para cada tipo de emissão; (b) Aparência óptica do BN com máxima emissão no r_{ISCO} . Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].	66
Figura 15 – Modelo 2: (a) Intensidade luminosa observada para cada tipo de emissão; (b) Aparência óptica do buraco negro que inicia a emissão fora da curva crítica. Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].	67
Figura 16 – Modelo 3: (a)Intensidade luminosa observada; (b) Aparência óptica do buraco negro cuja emissão vai até o horizonte. Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].	68
Figura 17 – Aparência de buracos negros. O brilho de Schwarzschild (b) é mais intenso do que do Schwarzschild-de-Sitter (a). Figura extraída de [9]	69
Figura 18 – Fluxo líquido F_ν e intensidade específica I_ν	76

Sumário

	Lista de Figuras	13
	1 INTRODUÇÃO	17
	2 ELEMENTOS BÁSICOS	22
2.1	Óptica Geométrica	22
2.1.1	Princípio de Fermat	24
2.2	Equação da Geodésica	25
2.3	Equações de Einstein	27
2.4	Métrica de Schwarzschild	28
2.4.1	Trajetórias das Geodésicas no Espaço de Schwarzschild	31
	3 DEFLEXÃO DA LUZ E LENTES GRAVITACIONAIS	34
3.1	Ângulo de Deflexão	34
3.1.1	Parâmetro de Impacto e Ângulo de Desvio	35
3.1.2	Parâmetro de Impacto e Potencial Efetivo.	37
3.2	Ângulo de Desvio. Solução Exata e seus Limites	38
3.2.1	Limite de Deformação Fraca (WDL)	40
3.2.2	Limite de Deformação Forte (SDL)	41
3.2.3	Comparando os Limites de Deformação	42
3.3	Lente Gravitacional	44
3.3.1	Relação com o Princípio de Fermat	46
3.4	Teoria de Transferência Radiativa	49
3.4.1	Formulação Clássica	49
3.4.2	Formulação Relativística	52
	4 SOMBRAS E ANÉIS DE FÓTONS	55
4.1	Anéis e Imagens de Buracos Negros Estáticos com Disco Fino de Acreção	55
4.1.1	Órbitas de Fótons e o Potencial Efetivo de um Buraco Negro Estático	56
4.2	Classes de Raios de Luz: Imagem Direta, Efeito Lente e Anel de Fótons	60
4.3	Perfis de Intensidade de Sombras de Buracos Negros Estáticos	63
4.3.1	Emissão do Disco Óptico Geometricamente Fino	64
	5 CONCLUSÕES	70

APÊNDICE A	INTENSIDADE INVARIANTE DE LORENTZ . . .	75
APÊNDICE B	ESFERA DE FÓTONS DO BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD-DE-SITTER	77
APÊNDICE C	ACREÇÃO ESTÁTICA ESFÉRICA	80
REFERÊNCIAS	84
ANEXO A	SCRIPT MATHEMATICA PARA OS PERFIS DE INTENSIDADE DA SOMBRA	90
A.1	Integrador Básico	90
A.2	Integrador Automático para N Geodésicas	91
A.3	Gerando mais Pontos para o Anel de Fótons	92
A.4	Gerando os Perfis de Intensidade	92

Capítulo 1

Introdução

A teoria da Relatividade Geral de Einstein (RG) é uma teoria sobre tempo, espaço e gravidade. Essa teoria descreve com grande propriedade um efeito que vivenciamos em nosso cotidiano - a gravitação, em termos de uma estrutura matemática rigorosa e refinada, a geometria diferencial de curvas no espaço-tempo.

No entanto, apesar de sua grande elegância, a aplicabilidade desta teoria em relação ao senso comum da humanidade é limitada à percepção dos efeitos relativísticos, que somente se manifestam em larga escala, com grandes densidades de matéria, ou quando lidamos com sistemas de alta energia, como corpos que se deslocam com velocidades muito próximas a da luz. Por essa razão, de acordo com [3], o que experimentamos como “força de gravidade” neste regime de validade é um efeito puramente geométrico: uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Isso significa que, na presença de massa e/ou energia, como no caso de sistemas massivos como estrelas, galáxias, etc., a curvatura do tecido espaço-tempo é significativamente modificada.

Em se tratando de sistemas massivos e compactos, a teoria da Relatividade Geral aborda fenômenos que sequer haviam de ser possíveis em uma análise do ponto de vista da teoria clássica (newtoniana): os objetos denominados de buracos negros (BN). Esses objetos despertam grande interesse na comunidade científica, especialmente nos campos da astronomia e da astrofísica. Além disso, eles também são temas explorados em diversas formas de mídia, como literatura, cinema, televisão e internet, sendo fascinantes para o público leigo.

Os buracos negros são soluções das equações de Einstein (equações dinâmicas da RG) sob certas condições. Eles possuem uma densidade central infinita, com o qual a gravidade (curvatura) resulta radicalmente alterada na região ao seu redor.

Quando uma estrela esgota seu combustível nuclear, perde a energia necessária para sustentar sua estrutura. Como resultado, a estrela entra em colapso, o que aumenta sua densidade, gerando no espaço-tempo uma região de alta curvatura. Se a estrela é

suficientemente massiva, essa curvatura intensa cria um poço gravitacional tão profundo que nem mesmo a luz pode escapar dele. A interpretação mais plausível sobre o produto final desse processo de colapso é a da formação de um buraco negro (BN), ou algum objeto ultracompacto semelhante.

Os buracos negros representam um campo vasto e fascinante a ser explorado pela Física contemporânea. A presença dos buracos negros é notada devido à sua intensa força gravitacional, e é um suposto cada vez mais consolidado que muitas galáxias possuem um buraco negro em seu centro. Essa poderosa atração gravitacional exerce uma influência significativa no ambiente galáctico e desempenha um papel fundamental na organização e evolução das estruturas cósmicas. Assim, além de desempenharem um papel crucial na formação das estruturas presentes no Universo, eles também atuam como um elo de coesão interna das galáxias, pelo que o estudo dos buracos negros nos permite compreender melhor a natureza do Universo e desvendar os mistérios do seu funcionamento.

Embora tenhamos feito avanços significativos no entendimento do assunto, pelas próprias características dos buracos negros, parece muito pouco provável conseguir encontrar um mecanismo que permita detectar buracos negros isolados diretamente. Contudo, na última década uma revolução aconteceu no estudo das interações gravitacionais, a partir das observações de ondas gravitacionais feitas pelo Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferometria a Laser (LIGO). Conforme [10], a observação direta de ondas gravitacionais nos fornecem testes para a Relatividade Geral, especialmente na dinâmica de campo forte.

Por outro lado, os buracos negros possuem uma estrutura conhecida como horizonte de eventos, delimitado pelo raio de Schwarzschild, também chamado de raio do buraco negro. Quando a luz se aproxima do horizonte de eventos de um buraco, sucumbe à sua poderosa ação gravitacional, sendo impossível escapar. Além disso, o seu interior é invisível ao mundo externo. Por esta razão, nos resta examinar a região imediatamente externa a ele. É a partir desta análise que traçamos pistas indiretas sobre os efeitos que os buracos negros exercem sobre a luz e o espaço-tempo.

Ao passar por uma região com um campo gravitacional extremamente intenso, a luz segue trajetórias curvas. Assim, os feixes de luz que atravessam regiões muito próximas aos horizontes de eventos, comparados aos feixes que não conseguem “escapar”, demarcarão regiões que indicam a ausência parcial de luz, ou “sombras”, e permitem construir “imagens” desses objetos. Assim, a concepção da sombra de um BN confronta a impossibilidade da observação direta desses objetos.

Nesse sentido, o projeto Event Horizon Telescope (*ETH*, Telescópio de Horizonte de Eventos) é um dos mais promissores esforços de observação de buracos negros através das suas imagens. Até agora, a rede global de telescópios *ETH* estudou o buraco negro *SgrA**, localizado no centro da Via Láctea, objeto que não é visível no alcance óptico devido à presença de densas nuvens de poeira. O observatório também analisou o buraco

negro $M87^*$ [11], situado no centro da galáxia elíptica supergigante Messier 87 (abreviada como $M87$), na constelação de Virgo. Em 10 de abril de 2019, o *ETH* conseguiu gerar uma imagem (fotografia) desse objeto, localizado a uma distância de 55 milhões de anos-luz da Terra, e mapear a sua sombra. Em ambos os casos, as sombras observadas são consistentes com as previsões teóricas [12, 13].

Portanto, o estudo das sombras constitui uma ferramenta extremamente importante para avançar na compreensão dos BNs e objetos ultracompactos pois, a partir da análise conjunta dos dados ópticos e gravitacionais podemos determinar se o raio de Schwarzschild previsto para a sombra corresponde ao valor medido pelas ondas gravitacionais, e concluir então se esses objetos são consistentes com a definição de buracos negros, o que viria confirmar assim a sua existência.

Assim, o estudo das sombras de buracos negros emerge como um dos campos de pesquisa mais promissores para nos revelar informações sobre a natureza de tão fascinantes objetos. A análise teórica da formação da sombra contribui diretamente em proporcionar um avanço em nosso conhecimento, bem como possibilita a descoberta de novos fenômenos, ao mesmo tempo que aprimora disciplinas científicas relevantes para um futuro próximo.

Na perspectiva de estarmos na vanguarda do progresso científico, técnicas como as desenvolvidas pelo *ETH*, bem como a literatura disponível sobre o assunto, suscitam nosso interesse e nos inspiram a repensar e expandir nossa compreensão tradicional frente aos mistérios do universo ao nosso redor.

O objetivo geral deste trabalho é compreender o efeito óptico de “sombra” nas imagens de objetos compactos. Mais especificamente buscamos: de forma conceitual, compreender os fundamentos teóricos da relatividade geral e a sua relação com a formação de sombras em buracos negros; compreender como a gravidade influencia a trajetória da luz e a sua analogia com uma lente gravitacional; do ponto de vista procedimental, trabalhamos para desenvolver e aplicar habilidades e técnicas computacionais para a exploração do assunto sob investigação.

No presente trabalho buscamos analisar os efeitos ópticos produzidos no entorno de buracos negros, especificamente, a formação das sombras resultantes do comportamento dos feixes de luz originados na região conhecida como disco de acreção, que cerca certos buracos negros. Concretamente, investigamos a formação das sombras no contexto de buracos negros rodeados por um disco de acreção fino, e a implementação numérica de modelos teóricos para a obtenção de gráficos ilustrando esse fenômeno, úteis para a análise de dados observacionais.

Metodologicamente, o nosso trabalho foi conduzido por meio de uma abordagem que envolveu pesquisa bibliográfica, desenvolvimentos analíticos e cálculo computacional, exigido pela complexidade das equações envolvidas.

Inicialmente, realizamos uma revisão dos elementos básicos que compõem a teoria estudada, em literaturas de ótica clássica e relatividade geral. Para iniciar nossa pesquisa, utilizamos [3], [14],[15] e [2] como ponto de partida. Em seguida, aprofundamos nosso estudo sobre sombras de buracos negros em literaturas mais especializadas, concentrando-nos nos trabalhos de [4], [5], [16] e [17], [18], [19], [8] e [20] que fornecem uma abordagem mais completa sobre o assunto em questão. Ampliamos nossos estudos, quando tomamos referências que tem sido promissoras em testes observacionais e ótimas simulações hidrodinâmicas como [13], [11] e [12], que trazem resultados bastante significativos sobre o assunto.

Como estratégia de trabalho optamos por considerar uma métrica para objetos massivos, esféricos, estáticos e sem carga elétrica (buraco negro de Schwarzschild), por ser esta a solução mais simples de ser implementada na prática.

A partir desta solução realizamos uma investigação bastante detalhada sobre a propagação dos raios de luz em torno de objetos compactos estáticos, utilizando o conceito de lente gravitacional e fazendo comparações com o princípio de Fermat. Isso permite obter duas aproximações distintas, conhecidas como limite de deflexão fraca (*WDL*) e limite de deflexão forte (*SDL*). Assim, foram realizados cálculos do ângulo de desvio da luz em ambos os cenários, no intuito de melhor visualizar os efeitos gravitacionais que afetam a trajetória da luz na presença dos buracos negros.

Em seguida, desenvolvemos a teoria de transferência radiativa e, a partir deste estágio, aprofundamos os capítulos anteriores na descrição das características observacionais dos nossos objetos alvo.

Neste estudo aparecem funções que não podem ser resolvidas de forma analítica, mas sim por métodos numéricos. A abordagem dessas etapas da tarefa foi possível mediante uma ferramenta computacional robusta, o software Wolfram MathematicaTM [21].

Portanto, como seguinte passo consideramos inicialmente a técnica do traçado de raios de luz e, posteriormente, a obtenção dos perfis de intensidade em um cenário de um buraco negro estático e de simetria esférica. Para essa parte do trabalho, utilizamos um programa desenvolvido e facilitado por um grupo de pesquisa parceiro [7].

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 realizamos uma abordagem teórica e conceitual do que denominamos de “Elementos Básicos” que nos auxiliam no tratamento formal do assunto em específico. Para isto, realizamos uma breve introdução a ótica clássica, em seguida a relatividade geral, e enfatizamos alguns conceitos teóricos que serão imprescindíveis para o desenvolvimento de nosso trabalho; em seguida, no capítulo 3, aprofundamos nosso estudo ao explorar assuntos que estão presentes no objeto alvo de nossa investigação principal: sombras de buracos negros. Nesta fase, apresentamos o efeito da gravidade sobre a trajetória dos raios de luz, denominado de

lente gravitacional e sua relação imediata com a inclinação resultante, ou seja, o ângulo de desvio e a partir deste passo, retiramos informações cruciais a nosso estudo: parâmetro de impacto e potencial efetivo. Em sequência, apresentamos os regimes de aproximação para campo gravitacional fraco e forte, fazendo a devida comparação entre ambos; retomamos um tópico do capítulo 2: princípio de Fermat e analisamos a correspondência que há desta lei física no contexto da Relatividade Geral, utilizando para isto a abordagem de lente gravitacional. Ao final deste capítulo, apresentamos de maneira formal a interação da radiação eletromagnética com a matéria denominada de transferência radiativa, que aparece de forma abrangente em diferentes meios. Para nosso caso em específico, estamos interessados em ambientes astrofísicos. No capítulo 4 de posse de toda essa construção teórica anterior, exibimos as sombras dos buracos negros por meio da reprodução de um código programado em linguagem Mathematica, e assim destacamos os principais resultados de nosso estudo.

Ao longo do nosso trabalho, foi utilizado como convenção o Sistema de Unidades Gaussianas, onde a constante da gravitação newtoniana e a velocidade da luz no vácuo são iguais à unidade: ($G = c = 1$). Neste sistema, a massa, a energia e o comprimento têm a mesma dimensão.

Capítulo 2

Elementos Básicos

Neste capítulo iremos abordar alguns assuntos que são essenciais à condução de nossa pesquisa, envolvendo técnicas da ótica geométrica e da Relatividade Geral. A escolha desses pontos se deu por serem a base teórica mais fundamental na descrição do fenômeno estudado. Ou seja, temos interesse em investigar a trajetória do raio de luz na presença de objetos compactos e massivos, e as suas possíveis consequências. Começamos com uma breve introdução á ótica clássica, para, numa próxima seção, discutir elementos que compõem a teoria da Relatividade Geral, como por exemplo, o conceito de geodésica. Em seguida, abordamos de forma sucinta as equações de campo de Einstein. Ao final do capítulo, analisamos a solução exata das equações de Einstein no caso estático com simetria esférica: a solução de Schwarzschild.

2.1 Ótica Geométrica

As ondas eletromagnéticas são formadas por dois campos variáveis: um campo elétrico e um campo magnético, cujo comportamento é governado pelas equações de Maxwell do eletromagnetismo, que em unidades gaussianas tem a forma:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, & \nabla \times \mathbf{H} - c^{-1}\partial_t\mathbf{D} &= 4\pi c^{-1}\mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + c^{-1}\partial_t\mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

onde está implícita a equação de continuidade da carga $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial_t\rho$.

A propagação das ondas eletromagnéticas num meio, e da luz em particular, bem como a de outras ondas clássicas ou quânticas, é dominada pelos efeitos de interação dessas ondas com a matéria que forma o(s) meio(s), e a(s) superfície(s) e volume(s) nele presentes [22]. Assim, é possível verificar as relações: $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$, onde \mathbf{P} e \mathbf{M} são, respectivamente, os vetores de polarização e magnetização, que surgem como uma resposta induzida pela interação da onda eletromagnética com o meio em que ela se propaga. Certos meios apresentam uma resposta linear, que é caracterizada pelas suscetibilidades magnética (η) e elétrica (χ), na forma $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ e $\mathbf{M} = \eta\mathbf{H}$. [22]

Com base na teoria eletromagnética, vamos nos concentrar no estudo dos princípios da ótica geométrica (OG), que se dedica principalmente à análise da propagação da luz, na forma de raios luminosos. Para isto, em vez das grandezas descritas acima, é

conveniente caracterizar o meio material através do qual a onda se desloca definindo o índice de refração n :

$$n = \frac{c}{v}, \quad (2.1)$$

que é relação entre as velocidades de propagação da luz no vácuo (c) e no meio material (v).

Quando a velocidade da luz em um meio material é a mesma em todos os pontos e em todas as direções, o meio é chamado de homogêneo e isotrópico, e seu índice de refração será constante; se a velocidade varia em cada ponto com a direção de propagação, é chamado de anisotrópico; e se ela e, portanto, o índice, variam de um ponto a outro, mas em cada um deles é independente da direção da propagação, o meio é chamado heterogêneo e também GRIN (Gradiente de Índice)[2].

Como consequência dessas diferenças no índice de refração, a propagação do raio de luz varia dependendo do meio material ser homogêneo ou não homogêneo. No caso de um meio homogêneo o índice de refração é constante e o raio de luz se propaga em linha reta. Agora, quando a luz passa de um meio homogêneo para outro, também homogêneo mas com índice de refração diferente, ocorre o fenômeno de refração [15]. Isto é, quando um raio de luz atinge uma interface plana e homogênea (dioptra) com certo ângulo de incidência θ_i , parte da luz é refletida com um certo ângulo de reflexão θ_r em relação ao meio 1, cujo índice de refração é n_1 . A parte da luz que atravessa a interface se encontra em um novo meio material, com um índice de refração n_2 . Então o raio luminoso é refratado com um ângulo de refração θ_r .

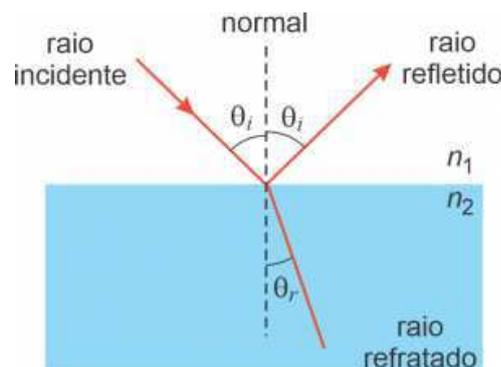


Figura 1 – Reflexão e refração de um raio luminoso numa interface dielétrica. Figura extraída de: [1]

Ao analisar a imagem apresentada na Figura 1, é possível identificar e descrever os princípios fundamentais da óptica geométrica:

1. Propagação retilínea do raio de luz - “As trajetórias do feixe de luz em um meio homogêneo e isotrópico são retílineas”.

2. Independência do raio de luz - “Quando dois ou mais feixes de luz se cruzam, um não interfere no outro, cada um segue sua trajetória, de forma independente”.
3. Reversibilidade do raio de luz - “O raio de luz não inverte sua direção, quando inverte seu sentido”.

2.1.1 Princípio de Fermat

Com base nas discussões anteriores sobre óptica geométrica (OG), podemos aprofundar nossa análise considerando um postulado fundamental conhecido como princípio de Fermat. Esse princípio pode ser enunciado a partir do conceito de “caminho óptico”. Para essa abordagem consideramos [2], que define o caminho óptico L ao longo de um meio homogêneo e transparente como sendo o produto do índice de refração da luz, n , vezes o comprimento do percurso, s :

$$L = ns . \quad (2.2)$$

Para uma sequência de meios diferentes, temos:

$$L = n_1 S_1 + n_2 S_2 + \dots + \sum n_i S_i . \quad (2.3)$$

Já se nosso meio é não homogêneo, o índice de refração varia continuamente. Logo, deveremos decompor a trajetória da luz em comprimentos infinitesimais ds , dentro dos quais podemos considerar que o índice de refração é constante, portanto a expressão para o caminho óptico (CO) entre dois pontos A e B é obtido pela integral:

$$(L) = \int_A^B n ds = \text{constante} . \quad (2.4)$$

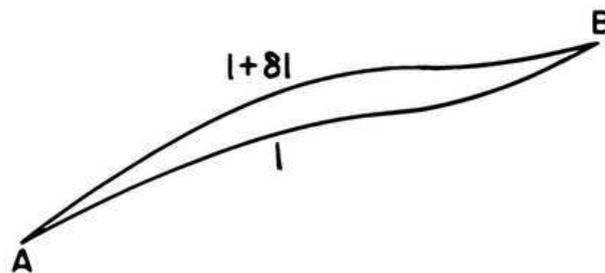


Figura 2 – Princípio de Fermat. Figura extraída de [2]

Como consequência, se consideramos todos os possíveis caminhos conectando os pontos A e B , isto é, consideramos variações infinitesimais $l + \delta l$ para definir o comprimento l (Figura 2), essas variações correspondem a correções de primeira ordem em torno da trajetória física e, portanto, o caminho óptico (2.4) será estacionário, permitindo-nos desprezar os termos de ordem superior. Assim, podemos descartar todos os termos de ordem superior, pois eles não contribuem para a variação.

O princípio de Fermat (PF) estabelece que “a luz segue o caminho óptico que requer *o menor tempo de viagem* entre dois pontos”. Em outras palavras, a luz escolhe o trajeto que minimiza o *tempo* necessário para percorrer a distância. [15]

Portanto, escrevendo o tempo total como a integral do intervalo infinitesimal de tempo dt empregado em percorrer uma distância infinitesimal $ds = cdt$, podemos relacionar o princípio de Fermat com o caminho ótico (2.3), obtemos a versão variacional do princípio de Fermat na forma:

$$\delta(t) = \delta \int_A^B dt = \delta \int_A^B \frac{ds}{v} = c^{-1} \delta \int_A^B n ds = \delta(L) = 0, \quad (2.5)$$

onde v é a velocidade da luz no meio com índice de refração n , definido em (2.1).

2.2 Equação da Geodésica

Um conceito essencial da RG é o de transporte paralelo de vetores, que consiste em uma generalização para o espaço curvo da ideia de “manter um vetor constante” à medida que o “movemos” ao longo de um caminho; da mesma forma para um tensor de *rank* arbitrário [3]. A partir dessa formulação geométrica para campos vetoriais definidos em uma variedade diferenciável \mathbf{M} , é possível achar uma equação fundamental para determinar a trajetória seguida por partículas em um espaço com curvatura não nula, como aquelas influenciadas pela presença de massa, chamada de equação das geodésicas. As suas soluções são as curvas conhecidas como geodésicas.

As geodésicas se classificam em dois tipos. As ditas “geodésicas afins” são curvas em que o vetor tangente é transportado paralelamente a si mesmo (linhas “mais retas possíveis”). Uma segunda definição é a das “geodésicas métricas”, que são as curvas que minimizam a distância entre dois pontos no espaço-tempo curvo (linhas “mais curtas possíveis”).

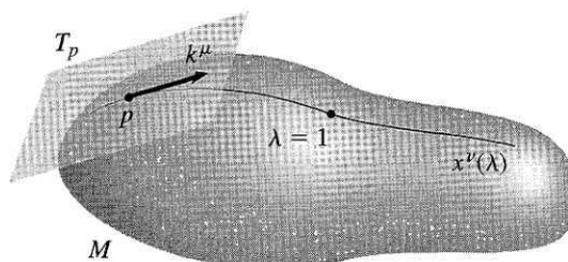


Figura 3 – O mapa exponencial leva um vetor em T_p a um ponto em \mathbf{M} que está na unidade parâmetro afim ao longo da geodésica à qual o vetor é tangente. Figura extraída de:[3].

Geodésica métrica. Para obter a equação da geodésica que minimiza (extremiza) a distância entre dois pontos no espaço curvo é conveniente utilizar o método variacional

do princípio de Hamilton (equivalente ao de mínima ação). De acordo com [23], a “ação” é definida como a integral:

$$I[q(\tau)] = \int \mathcal{F}(q, \dot{q}, \tau) d\tau , \quad (2.6)$$

sendo $\mathcal{F}(q, \dot{q}, \tau)$, um funcional bem comportado ao longo do caminho $q(\tau)$. A variação da ação (2.6), nos leva nas equações de Euler:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} = 0 . \quad (2.7)$$

Vamos explorar a conexão entre as geodésicas e as equações de Euler-Lagrange. Para isto, consideramos o tensor métrico g_{ij} , definido sobre uma região com um sistema de coordenadas generalizadas $\{x\}$. Ele permite escrever um deslocamento infinitesimal ds em função de variação infinitesimal das coordenadas dx na forma:

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j . \quad (2.8)$$

Logo, podemos escrever de forma conveniente parametrizando a curva pelo tempo próprio τ :

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{\frac{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{d\tau d\tau}} . \quad (2.9)$$

Integrando essa equação com respeito ao tempo próprio τ , segue que o comprimento de arco da curva vem dado por:

$$I = s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} d\tau . \quad (2.10)$$

Ao minimizarmos o comprimento de arco¹, obtemos a equação da geodésica, que é dada pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0 , \quad (2.11)$$

onde os objetos $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ são denominados “símbolos de Christoffel”.

Geodésica afim. Uma outra abordagem para a obtenção de geodésicas é buscar construir o caminho mais direto ou “reto” entre dois pontos. Dada uma curva arbitrária $x^\mu(\lambda)$, para que obtenhamos um tensor T constante ao longo dessa curva no espaço plano, exigimos:

$$\frac{dT}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial T}{\partial x^\mu} = 0 . \quad (2.12)$$

A partir deste ponto, podemos estabelecer a derivada absoluta ao longo desse caminho no plano em termos do operador ∇_μ (derivada covariante) da forma:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu . \quad (2.13)$$

¹ Note que, como discutido na seção 2.1.1, o princípio de Fermat afirma que o caminho percorrido por um raio de luz para ir de um ponto a outro é tal que o tempo necessário para percorrê-lo (e não o comprimento) é mínimo [15].

Por fim, estabelecemos a definição do *transporte paralelo* do tensor T ao longo do caminho $x^\mu(\lambda)$ da seguinte maneira

$$\left(\frac{DT}{d\lambda}\right)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l} = 0 . \quad (2.14)$$

Nesse ponto, temos a capacidade de estabelecer a equação para o transporte paralelo, que descreve como um tensor T se mantém constante ao longo de um caminho dado:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 . \quad (2.15)$$

A equação (2.15) define as curvas auto-paralelas, onde o objeto $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ é denominado de conexão afim [3].

Geodésicas na Relatividade Geral. No caso em que as componentes da conexão afim $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ coincidem com os símbolos de Christoffel $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$, a equação (2.11) coincide com a equação das geodésicas (2.15), e as geodésicas métricas e afins descrevem exatamente as mesmas curvas.

É interessante notar que na RG existe uma “compatibilidade” entre a conexão afim e a métrica se, e somente se, dois requisitos forem atendidos:

- (i) Tanto o tensor de Levi-Civita quanto o tensor inverso da métrica possuem derivada covariante nula.

$$\nabla_\lambda \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 , \quad \nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0 .$$

- (ii) Uma derivada covariante compatível com a métrica “comuta com a subida e baixada de índices”. Ou seja, se V^λ é um vetor, temos:

$$g_{\mu\lambda} \nabla_\rho V^\lambda = \nabla_\rho (g_{\mu\lambda} V^\lambda) = \nabla_\rho V_\mu . \quad (2.16)$$

A partir da relação entre a métrica e a conexão, é possível demonstrar a fórmula geral descrita na literatura como conexão métrica ou conexão de Levi-Civita:

$$\Gamma_{\sigma\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\rho g_{\mu\nu}) . \quad (2.17)$$

2.3 Equações de Einstein

Na Relatividade Geral de Einstein, a equação de campo para a gravitação é estabelecida de forma semi-heurística, propondo-se a expressão [14] utilizando ($G = c = 1$):

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} , \quad (2.18)$$

onde no lado esquerdo temos o tensor e o escalar de curvatura de Ricci, denotados por $R_{\mu\nu}$ e R , respectivamente; e no lado direito temos o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$, que é

um objeto construído de maneira um pouco *ad hoc*, seguindo princípios da física clássica . Isto nos permite compreender de que maneira a métrica reage na presença de matéria [3].

Uma outra possibilidade para a equação de campo de Einstein surge ao considerarmos a energia do vácuo. Podemos decompor o tensor energia-momento em duas componentes, uma contendo a matéria e outra contendo a energia do vácuo. A partir deste ponto, para preservar a equação de campo da gravitação, é necessário adicionar um termo adicional conhecido como “constante cosmológica”, e denotado por Λ .

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

Aplicar a operação de traço ao tensor de Einstein na Eq. (2.19), obtemos o seguinte resultado:

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = R - 2R + 4\Lambda \quad (2.20)$$

De posse do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e seu inverso $g^{\mu\nu}$, observamos que o traço do tensor métrico contraído com seu inverso é $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ (a dimensão do espaço). A partir disso, podemos reescrever as equações de campo de Einstein de forma conveniente, relacionando o traço do tensor energia-momento com o tensor de curvatura de Ricci, obtendo:

$$R = -8\pi T + 4\Lambda \quad (2.21)$$

Estas equações serão de extrema importância no cálculo do comprimento de arco em torno de buracos negros, que nos permitirá determinar a formação das sombras.

2.4 Métrica de Schwarzschild

Iniciamos nossa análise com uma solução generalizada para investigar um objeto massivo esfericamente simétrico, compacto e *estático*, que poderá se corresponder com um buraco negro ou uma estrela de nêutrons. Como discutido em [24] e [14], em um sistema de coordenadas esféricas temos

$$ds^2 = -e^{2F(r)} dt^2 + e^{2H(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2, \quad (2.22)$$

onde as funções $F(r)$ e $H(r)$ podem ser determinadas via equação de campo de Einstein. Para isto, tomamos a métrica e a sua inversa:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2F} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

e o tensor de curvatura de Ricci, que é definido como:

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\rho, \quad (2.24)$$

onde as componentes da conexão de Levi-Civita vem dadas pelos símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (2.25)$$

Para a métrica (2.23), os símbolos de Christoffel não nulos e suas derivadas resultam:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^r &= F', & \Gamma_{rr}^r &= H', & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2H}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= \sin^2(\theta) \cdot R_{\theta\theta}^r \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin(\theta) \cos(\theta), & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \cot(\theta) \end{aligned}$$

Logo, as componentes não nulas do tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, são:

$$G_{tt} = -\frac{1}{r^2} e^{2F-2H} (1 - 2rH' - e^{2H}), \quad (2.26)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2F-2H} (1 + 2rF' - e^{2H}), \quad (2.27)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2H} \left[F'' + \left(F' + \frac{1}{r} \right) (F' - H') \right], \quad (2.28)$$

$$G_{\varphi\varphi} = G_{\theta\theta} \sin^2(\theta). \quad (2.29)$$

O tensor de energia-momento para um fluido de pressão p , densidade ρ e quadrivelocidade u^μ , conforme apresentado em [24] e [14], tem a forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

Nossa intenção é descrever o fluido estático ($u_r = u_\theta = u_\varphi = 0$), logo o tensor das tensões em termos de energia é dado por: $T_{tt} = \rho u_t u_t + p(u_t u_t + g_{tt})$, $T_{rr} = p g_{rr}$, $T_{\theta\theta} = p g_{\theta\theta}$ e $T_{\varphi\varphi} = p g_{\varphi\varphi}$, enquanto que as demais componentes não contribuem.

Em seguida, normalizamos o quadri-vector velocidade tal que $u_\mu u_\nu g^{\mu\nu} = -1$, com isso, veremos que $u_t u_t = -g_{tt} = e^{2F}$. Escrivendo as componentes do tensor em termos da pressão e densidade, chegamos a

$$T_{tt} = \rho e^{2F} \quad (2.31)$$

$$T_{rr} = p e^{2H} \quad (2.32)$$

$$T_{\theta\theta} = p r^2 \quad (2.33)$$

$$T_{\varphi\varphi} = p r^2 \sin^2 \theta \quad (2.34)$$

Para uma esfera estática de raio r e densidade ρ com centro na origem vemos que a densidade e a pressão são funções que dependem unicamente do raio, e fora da esfera

$r = R$ são nulas. Com base nisso, podemos utilizar o lado esquerdo da equação de Einstein para obter três equações referentes às componentes G_{tt} , G_{rr} , $G_{\theta\theta}$ e $G_{\varphi\varphi}$, que têm a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} e^{2F} \frac{d}{dr} [(1 - e^{2H})] &= 8\pi e^{2F} \rho(r) = G_{tt} \\ \frac{1}{r^2} e^{2F} \frac{d}{dr} [(1 + 2rF' - e^{2H})] &= 8\pi e^{2H} p(r) = G_{rr} \\ r^2 e^{-2H} \left[F'' + \left(F' + \frac{1}{r} \right) (F' - H') \right] &= 8\pi r^2 p(r) = G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

É importante observar que as componentes $G_{\theta\theta}$ e $G_{\varphi\varphi}$ são idênticas e todas as demais componentes se anulam no vácuo. Portanto, resta-nos analisar as equações referentes às componentes G_{tt} e G_{rr} . Ao considerar a expressão G_{tt} ,

$$\frac{1}{r^2} e^{2F} \frac{d}{dr} [(1 - e^{2H})] = 8\pi e^{2F} \rho(r) \quad (2.35)$$

e resolver por integração com relação a $H(r)$, obtemos:

$$H(r) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right), \quad \text{onde } m(r) \equiv 4\pi \int dr r^2 \rho(r). \quad (2.36)$$

Escolhendo a condição inicial $m(0) = 0$, podemos interpretar $m(r)$ como sendo a massa total da esfera de raio r e densidade ρ .

Analisamos agora a outra equação, onde:

$$\frac{1}{r^2} = (1 + 2rF' - e^{2H}) = 8\pi e^{2H} p(r) \quad (2.37)$$

Resolvendo (2.37) para $F(r)$, temos:

$$F(r) = \int dr \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r [r - 2m(r)]} \quad (2.38)$$

A solução (2.38) não é possível de se obter para $r < R$ de forma analítica e, portanto, não é discutida em [24]. No entanto, quando temos $r > R$, podemos considerar o limite assintótico $r \rightarrow \infty$, onde devemos recuperar a gravitação newtoniana, e assim deduzimos que $m(r) \rightarrow M$, (a massa total da esfera). Com isso, para distâncias muito grandes esperamos obter a métrica de Minkowski. Assim, a solução obtida é análoga ao caso anterior, conforme segue:

$$F(r) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (2.39)$$

Após substituir todos os resultados prévios, a equação $\theta\theta$ toma a forma:

$$p'(r) + F'(r)(\rho(r) + p(r)) = 0 \quad (2.40)$$

Esta equação diferencial determina a distribuição da pressão radial da matéria dentro da esfera, e é tal que a pressão repulsiva balanceia a atração da gravidade em todo ponto, mantendo a configuração estática da matéria dentro da esfera.

Como nosso interesse é apenas na região muito afastada da distribuição de massa do objeto compacto e esfericamente simétrico, então a geometria do interior da esfera não é alvo de nossa análise, portanto, o comprimento de arco para essa métrica segue:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.41)$$

O resultado apresentado na equação (2.41) é a solução de Schwarzschild, que possui propriedades únicas, sendo assintoticamente plana e satisfazendo a equação de Einstein do vácuo. A partir da solução de Schwarzschild, é possível investigar o efeito óptico das sombras em buracos negros, como analisado por [16], [25], [4]. Esse conteúdo será discutido com mais detalhes na próxima seção.

2.4.1 Trajetórias das Geodésicas no Espaço de Schwarzschild

Mais adiante abordaremos a completude geodésica do espaço-tempo ao resolver a equação das geodésicas na teoria da Relatividade Geral (GR). Além disso, investigaremos casos em que essa equação resulta em trajetórias incompletas. Para isso, precisamos primeiro obter uma expressão para a equação das geodésicas em termos de parâmetros convenientes.

Conforme [26], vamos nos concentrar nas geodésicas da métrica $g_{\mu\nu}$, que são as trajetórias que os campos de matéria devem observar de acordo com o princípio de equivalência de Einstein ². Para aplicarmos o princípio de Hamilton como em (2.10), de forma a simplificar os cálculos, a partir do elemento de linha escrevemos

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = g_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda} \quad (2.42)$$

Logo, introduzimos a ação

$$S = \frac{1}{2} \int d\lambda g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (2.43)$$

na qual o comprimento diferencial de um espaço esfericamente simétrico geral tem a forma $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -C(x)dt^2 + B^{-1}(x)dx^2 + r^2(x)d\Omega^2$ leva a:

$$S = \frac{1}{2} \int d\lambda \left[-C(x)\dot{t}^2 + \frac{1}{B(x)}\dot{x}^2 + r^2(x)\dot{\theta}^2 + r^2(x)\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \quad (2.44)$$

² Em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, as leis físicas se reduzem às da Relatividade Especial, pois é impossível detectar a existência de campo gravitacional por meio de experimentos locais [3]

Para escrever a representação hamiltoniana associada precisamos dos momentos canônicos conjugados:

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \dot{t}C(x) , \quad (2.45)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{B(x)} , \quad (2.46)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2(x)\dot{\theta} , \quad (2.47)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2(x)\sin^2\theta\dot{\varphi} . \quad (2.48)$$

Dado que no lagrangiano de (2.44) não há termos de potenciais, verificamos que o Hamiltoniano: $H = p_t\dot{t} + p_x\dot{x} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L$ é igual ao Lagrangiano [26], e podemos reescrevê-lo como

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(x)p_\mu p_\nu . \quad (2.49)$$

Logo, a equação da geodésica pode ser escrita na forma:

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = g^{\mu\nu}p_\nu , \quad (2.50)$$

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta . \quad (2.51)$$

Podemos verificar que \dot{p}_t e \dot{p}_θ não contribuem, ou seja, p_t e p_θ são constantes do movimento, o que implica em $\frac{dH}{d\lambda} = 0$. Portanto, H também é conservado. Com isso, teremos

$$p_t = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)C(x) = E , \quad (2.52)$$

$$p_\varphi = \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)r^2\sin^2\theta = L , \quad (2.53)$$

logo,

$$2H = -\frac{p_t^2}{C(x)} + B(x)p_x^2(x) + \frac{p_\theta^2}{r^2(x)} + \frac{p_\varphi^2}{r^2(x)\sin^2\theta} , \quad (2.54)$$

$$\Rightarrow 2H = -\frac{E^2}{C(x)} + \frac{\dot{x}^2}{B(x)} + \frac{L^2}{r^2} . \quad (2.55)$$

A conservação do momento angular, expressa pela constância do momento p_θ , garante que a equação (2.51) acima descreve um movimento em um plano. Portanto, podemos simplificar a análise fixando $\theta = \pi/2$ sem perda de generalidade. Por outro lado, se $H \neq 0$, podemos realizar um redimensionamento do parâmetro afim $\lambda \rightarrow \lambda/\sqrt{|2H|}$, destacando que o sinal de H resulta fisicamente relevante, pois nos permite classificar as geodésicas em três tipos distintos: as tipo espaço ($H > 0$), as tipo tempo ($H < 0$), e as nulas ($H = 0$). Podemos, a partir deste ponto, denotar $k \equiv 2H$ ($k = 1, 0, -1$). Com isso obtemos uma expressão unificada para todas as geodésicas:

$$\frac{C(x)}{B(x)}\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - C(x)\left(\frac{L^2}{r^2(x) - k}\right) . \quad (2.56)$$

Essa equação pode ser utilizada para explorar o alcance de λ em alguns cenários.

A equação (2.56) foi obtida a partir das equações de movimento da partícula e revela que a energia total é composta por três termos distintos, cada um com um significado físico específico [26]. Podemos verificar que as quantidades conservadas energia, E , e momento angular, L , estão relacionadas aos seus coeficientes métricos $C(x)$ e $B(x)$, e suas respectivas derivadas em termos da coordenada radial na direção x . A importância dessa equação é que podemos estudar o movimento da partícula e da luz no espaço-tempo em um contexto de simetria esférica, considerando sua interação com campos externos.

Capítulo 3

Deflexão da Luz e Lentes Gravitacionais

Nesse capítulo, já temos maturidade suficiente para abordarmos o estudo de tópicos mais especializados que estão intrinsecamente relacionados ao assunto de sombras de buracos negros, fornecendo uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos envolvidos. Primeiramente, faremos a correlação entre a deflexão da luz e o efeito de lentes gravitacionais. Nesta etapa, iremos discutir alguns conceitos de extrema relevância: ângulo de desvio, parâmetro de impacto e potencial efetivo, por exemplo. Em seguida, abordaremos o ângulo de desvio da luz em dois cenários: aproximação de campo gravitacional fraco e aproximação de campo gravitacional forte, e os compararemos com a solução exata do ângulo de deflexão. Posteriormente, iremos analisar o fenômeno de lentes gravitacionais da RG, para então retornarmos à ótica geométrica, relacionando dito fenômeno com o princípio de Fermat. Ao final do capítulo, abordaremos a teoria da transferência radiativa, realizando de início uma abordagem clássica e, em seguida, uma extensão para o caso relativístico. A transferência radiativa é importante em nosso estudo, pois está presente na maioria dos fenômenos astrofísicos.

3.1 Ângulo de Deflexão

O ângulo em que será defletido um feixe de luz passando próximo ao objeto massivo (no caso, o buraco negro) é determinado pelo desvio geodésico obtido a partir da métrica do espaço. Vimos que para objetos massivos compactos esféricos, o elemento de linha em coordenadas esféricas e unidades gaussianas ($G = c = 1$) toma a forma:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{A(r)}dr^2 + r^2dr^2(d\theta^2 \sin^2(\theta) + d\varphi^2) . \quad (3.1)$$

Devido à simetria esférica, que implica na conservação do momento angular, as partículas se movimentam em um plano fixo. Logo, sem perda de generalidade, podemos adotar a orientação da base coordenada tal que esse plano seja o definido por $\theta = \pi/2$. Assim, as equações para a energia cinética e o momento dos fótons podem ser obtidas a partir de (2.7), tomando:

$$\mathcal{F} = \sqrt{\frac{ds^2|_{\theta=\pi/2}}{d\tau^2}} = -A(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{A(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \quad (3.2)$$

Diferenciando com respeito à coordenada temporal e ao ângulo azimutal vamos ter:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{t}} = -2A(r)\dot{t} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \dot{t} = \frac{E}{A(r)}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\varphi}} = 2r^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}. \quad (3.4)$$

As equações apresentadas em (3.3) e (3.4) nos fornecem duas quantidades constantes, representadas por E e L , que dizem respeito à energia e ao momento angular do fóton, respectivamente. Verificamos que a curvatura κ é definida por:

$$\kappa = \begin{cases} 0 & \text{para geodésica tipo luz} \\ -1 & \text{para geodésica tipo tempo} \\ +1 & \text{para geodésica tipo espaço} \end{cases}$$

Como nossa análise tem interesse na trajetória da luz ao redor de buracos negros, então nos interessam as geodésicas nulas, ou seja, as que cumprem $ds^2 = 0 = \mathcal{F}$, ou

$$0 = -A(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{A(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (3.5)$$

Notando que já temos as derivadas das coordenadas azimutal e temporal, substituindo, obtemos

$$0 = -A(r) \left(\frac{E}{A(r)} \right)^2 + \frac{1}{A(r)}\dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{L}{r^2} + \kappa \right)^2, \quad (3.6)$$

de onde chegamos à versão da Eq. (2.56) para o nosso caso:

$$\dot{r}^2 = L^2 \left(\frac{E^2}{L^2} - \frac{A(r)}{r^2} \right). \quad (3.7)$$

Sendo a solução de Schwarzschild $A(r) = (1 - 2M/r)$, resolvemos a equação (3.7) conforme [14] para \dot{r} e, em seguida, tomando o quociente $\dot{\varphi}/\dot{r}$, temos

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{L}{r^2} \left[E^2 - \frac{L^2}{r^3} (r - 2M) \right]^{-1/2}. \quad (3.8)$$

Com base nesse resultado, extrairemos uma informação de significativa relevância para o nosso estudo, a qual será devidamente formalizada na seção subsequente.

3.1.1 Parâmetro de Impacto e Ângulo de Desvio

É importante destacar que, como observamos que na equação (3.7), o movimento dos fótons não depende individualmente do momento angular L ou da energia E , mas do quociente entre essas duas grandezas. Esse quociente irá determinar uma nova quantidade,

conhecida como “parâmetro de impacto” u . O parâmetro de impacto corresponde à distância perpendicular entre a trajetória aparente da luz e o centro de potencial ou buraco negro [27], e é definido como o quociente entre o momento angular e a energia:

$$u \equiv L/E. \quad (3.9)$$

Assim, a Eq.(3.7) fica

$$\dot{r} = L\sqrt{\frac{1}{u^2} - \frac{A(r)}{r^2}} \quad (3.10)$$

Ângulo de desvio. Para determinarmos o ângulo de desvio da luz, consideramos que os fótons se aproximam do buraco negro vindos do infinito, passam muito próximos a ele, e depois se afastam novamente. Com base nessa suposição, e usando a expressão (3.10) na equação (3.3) segue que:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{L/r^2}{\sqrt{L^2\left(\frac{1}{u^2} - \frac{A(r)}{r^2}\right)}} = \frac{1/r^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - \frac{A(r)}{r^2}\right)}}. \quad (3.11)$$

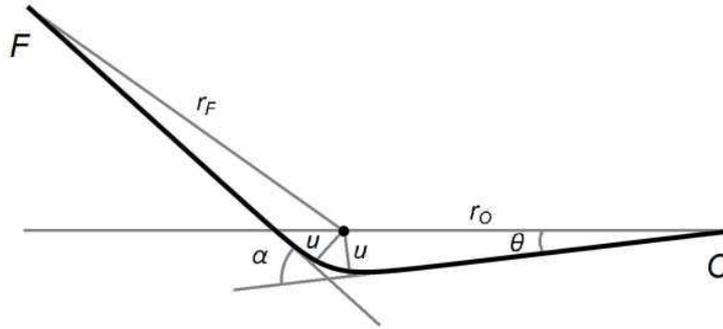


Figura 4 – Diagrama da trajetória de um fóton passando perto de um buraco negro. O observador está localizado em O e a fonte emissora da partícula em F . Figura extraída de [4]

A relação (3.11) representa a taxa de variação do ângulo azimutal em relação a distância radial. A interpretação dessa grandeza é que, à medida que a trajetória dos fótons se aproxima da região central do buraco negro, esta se curva devido à intensa influência gravitacional.

Mediante a análise geométrica da Figura 4 é possível calcular o ângulo total de desvio ou **ângulo de deflexão**:

$$\alpha \equiv -\pi + 2 \int_{r_m}^{\infty} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dx. \quad (3.12)$$

Logo, para o nosso caso a expressão toma a forma:

$$\alpha \equiv -\pi + 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{1/r^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - \frac{A(r)}{r^2}\right)}} dx. \quad (3.13)$$

A integral que aparece em (3.13) é uma integral elíptica. A solução dessas integrais envolve o uso de funções elípticas. No contexto específico desta equação, a solução vem dada pela expressão:

$$\alpha = -4 + \sqrt{\frac{r_m}{s}} F(\varphi, m) , \quad (3.14)$$

onde a função $F(\varphi, m)$ é uma função elíptica incompleta de primeira espécie [28].

3.1.2 Parâmetro de Impacto e Potencial Efetivo.

Invertendo (3.11) temos

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^4 \left(\frac{1}{u^2} - \frac{A(r)}{r^2}\right) . \quad (3.15)$$

Isolamos do lado esquerdo os termos que dependem da coordenada radial:

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{A(r)}{r^2} = \frac{1}{u^2} , \quad (3.16)$$

e, por fim, em termos da métrica de Schwarzschild obtemos:

$$\left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{1}{u^2} . \quad (3.17)$$

De acordo com [5], observamos que o segundo termo à esquerda pode ser interpretado como um potencial efetivo:

$$V(r) \equiv \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) . \quad (3.18)$$

A situação em que os fótons atravessam essa barreira de potencial ocorre quando há convergência entre o ângulo de deflexão α e valores do parâmetro de impacto u suficientemente grandes [16]. No entanto, como o potencial $V(r)$ é máximo em $r = 3M$, então haverá uma divergência entre u e α . Denotaremos por $\bar{u} = [V(3M)]^{-\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}M$ o parâmetro de impacto crítico, que nos indicará se os fótons são capturados pelo buraco negro ($u < \bar{u}$), ou simplesmente defletidos ($u > \bar{u}$). Na situação em que os feixes de luz se aproximam cada vez mais do valor crítico \bar{u} , eles experimentam desvios maiores, incluso superiores a 2π . Isso significa que o feixe de luz defletido realiza uma ou até múltiplas voltas em torno do buraco negro, com um ângulo α dentro do intervalo $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$, antes de se afastar completamente.

Outra análise interessante a se fazer é estabelecer a relação entre a distância mínima r_m e o parâmetro de impacto u . Seguindo os passos executados por [4] através de [5], fazemos $dr|_{r_m} = 0$, de onde $dr/d\varphi = 0$ em (3.17), e ficamos com:

$$\frac{1}{r_m^2} \left(1 - \frac{2M}{r_m}\right) = \frac{1}{u^2} . \quad (3.19)$$

Rearranjando a expressão (3.19)

$$\frac{r_m^2}{u^2} = \left(1 - \frac{2M}{r_m}\right) \quad (3.20)$$

e extraíndo a raiz quadrada em ambos membros chegamos a

$$\frac{r_m}{u} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r_m}\right)} \quad (3.21)$$

A solução da equação (3.21) é obtida numericamente em termos do parâmetro de impacto crítico $\bar{u} = 3\sqrt{3}M$ para um determinado potencial efetivo $V(r)$, que no nosso caso vem dado pela expressão (3.18). Dessa forma temos

$$r_m = u \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(-\frac{3^{3/2}M}{u} \right) \right) \quad (3.22)$$

3.2 Ângulo de Desvio. Solução Exata e seus Limites

Conforme discutido por [29], o algoritmo que resulta no ângulo de desvio α de uma partícula é obtido ao substituímos o potencial efetivo $V(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ na Equação (3.11), realizarmos uma mudança de variável do tipo $y = 1/r$, e integrarmos desde a distância mínima r_m até o infinito. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} = 2 \int_{1/r_m}^0 \frac{-dy}{\sqrt{\frac{1}{u^2} - y^2 \left(1 - 2My\right)}} \\ &= 2 \int_0^{1/r_m} \frac{dy}{\sqrt{2M y^3 - y^2 + \frac{r_m - 2M}{r_m^3}}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Isolando o termo cúbico $r_m^{3/2}$ podemos escrever:

$$\alpha = 2 r_m^{3/2} \int_{1/r_m}^0 \frac{dy}{\sqrt{2M - r_m^3 y^2 + r_m - 2M}} \quad (3.24)$$

É possível verificar que a solução do polinômio de grau 3, conforme mostrado no apêndice de [4], é expressa em termos de $y = 1/r$. Sabendo disto deduzimos as demais fórmulas que aparecem na seção onde discutimos o parâmetro de impacto. Para isso, escrevemos a equação para a nova variável y :

$$\left(y - \frac{1}{r_m}\right) \left(2Mr_m^3 y^2 + (2M - r_m)r_m^2 y + (2M - r_m)\right) \quad (3.25)$$

Resolvendo essa equação polinômica de terceiro grau obtemos

$$y = \frac{-r_m^2(2M - r_m) \pm \sqrt{r_m^4(2M - r_m)^2 - 4 \cdot r_m^3 r_m(2M - r_m)}}{2 \cdot 2Mr_m^3} = \frac{r_m - 2M \pm s}{4Mr_m}$$

onde:

$$s^2 = (2M - r_m)^2 - 8M(2M - r_m) \quad \therefore s = \sqrt{(r_m + 6M)(r_m - 2M)} \quad (3.26)$$

Para representarmos as soluções encontradas selecionamos dois parâmetros, a e b . Nesse caso, a integral será do tipo elíptica:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} F(\varphi, q), [a > b > u \geq c], \quad (3.27)$$

onde $\delta = \arcsin \sqrt{\frac{(a-c)(b-u)}{(b-c)(a-u)}}$ e $q = \sqrt{\frac{(b-c)}{(a-c)}}$.

Considerando $b = 1/r_m$, e ainda $a = \frac{r_m - 2M + s}{4Mr_m}$ e $c = \frac{r_m - 2M - s}{4Mr_m}$ como as duas soluções da equação polinomial em y , se subtrairmos essas duas quantidades, obtemos:

$$\begin{aligned} a - c &= \frac{r_m - 2M + s}{4Mr_m} - \frac{r_m - 2M - s}{4Mr_m} \\ &= \frac{1}{4Mr_m} (r_m - 2M + s - r_m + 2M + s) \quad \therefore \quad a - c = \frac{2s}{4Mr_m}. \end{aligned}$$

Resolvendo a expressão para m em termos dos parâmetros a , b e c , temos $m = \frac{b-c}{a-c}$. Substituindo esses parâmetros, obtemos

$$m = \frac{\frac{1}{r_m} - \frac{r_m - 2M - s}{4Mr_m}}{\frac{2s}{4Mr_m}} = \frac{6M - r_m + s}{2s}.$$

Logo, calculando a integral elíptica temos,

$$\begin{aligned} \varphi &= \arcsin \sqrt{\frac{\frac{2s}{4Mr_m} \left(\frac{1}{r_m} - 0 \right)}{\left(\frac{1}{r_m} - \frac{r_m - 2M - s}{4Mr_m} \right) \left(\frac{r_m - 2M + s}{4Mr_m} - 0 \right)}} \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{2s4M}{(6M - r_m + s)(r_m - 2M + s)}} \\ \therefore \quad \varphi &= \arcsin \sqrt{\frac{2s}{3r_m - 6M + s}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A solução exata para o ângulo de deflexão da trajetória dos fótons é dada quando tomamos (3.28) e substituímos em (3.13),

$$2r_m^{3/2} \int_0^{1/r_m} \frac{dy}{\sqrt{2Mr_m^3(y-a)(y-b)(y-c)}} = \frac{2r_m^{3/2}}{\sqrt{2Mr_m^3}} \frac{2\sqrt{4Mr_m}}{2s} F(\varphi, m). \quad (3.29)$$

Finalmente, chegamos a

$$\alpha = -\pi + 4\sqrt{\frac{r_m}{s}} F(\varphi, m), \quad (3.30)$$

que é o ângulo de deflexão α na forma fechada. Nessa expressão observamos que aparecem algumas quantidades, tanto no argumento da integral quanto na equação para o ângulo de

desvio. Essas quantidades, obtidas nesta seção, podemos exibi-las da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(r_m - 2M)(r_m + 6M)} \\ m &= \frac{(s - r_m + 6M)}{2s} \\ \varphi &= \arcsin \left(\sqrt{\frac{2s}{s + 3r_m - 6M}} \right) \end{aligned}$$

Com o intuito de analisarmos com maior profundidade os efeitos gravitacionais que modificam a trajetória dos fótons, é útil considerar duas aproximações, denominadas de limite de deflexão fraca e limite de deflexão forte (*WDL* e *SDL*, respectivamente, pelas suas siglas em inglês), e fazer a devida comparação entre os dois casos.

3.2.1 Limite de Deformação Fraca (WDL)

De início, consideramos $r \geq r_m \gg 2M$, ou seja, os fótons passam muito distantes do buraco negro. Nesse regime, conhecido como limite de deformação fraca (WDL), é conveniente realizar uma mudança de variáveis. Por simplicidade, escolhamos $x \equiv \frac{M}{u}$.

Tomando a equação (3.22) e, desde que $x \equiv \frac{M}{u} \ll 1$, podemos fazer uma expansão em série de Taylor até primeira ordem:

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(-3x^{3/2}) &\approx \frac{\pi}{2} - (-3x^{3/2}) + \mathcal{O}x^2 \\ \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1}(-3x^{3/2}) \right) &\approx \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}x \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2, \end{aligned}$$

na aproximação $r_m \approx u$ fica

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x - 3\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = u \left(1 - x - \frac{3}{2}x^2 \right) \quad \therefore \quad r_m = u \left(1 - \frac{M}{u} - \frac{3}{2} \left(\frac{M}{u} \right)^2 \right). \quad (3.31)$$

Ao introduzirmos a variável $l \equiv \frac{M}{r_m}$ em (3.13) chegamos a

$$\alpha = \pi + 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{r_m}{u}\right)^2 - y^2 + \frac{2M}{r_m}y^3}}. \quad (3.32)$$

Verificando que em (3.32) temos uma integral de uma função racional do tipo $(1 - y^2)/(1 - y^3)$, e desde que ela é crescente em 1 atingindo seu valor máximo em $3/2$ no intervalo $[0,1]$ podemos integrar cada termo separadamente, de modo que

$$\alpha = -\pi + 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - 2l - y^2 + 2ly^3}} = -\pi + 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2} \sqrt{1 - 2l \frac{1-y^3}{1-y^2}}} \quad (3.33)$$

Considerando que $l \ll 1$ realizamos uma expansão em série de Taylor em torno dessa única variável. A integral em questão é então simplificada e podemos aproximar seu valor usando essa expansão:

$$\alpha(l) = 4l + \frac{15\pi}{4}l^2 + \frac{128}{3}l^3 + \mathcal{O}(l^4). \quad (3.34)$$

Substituindo o valor de l , obtemos o seguinte resultado

$$\alpha(r_m) = 4\frac{M}{r_m} + \frac{15\pi}{4}\left(\frac{M}{r_m}\right)^2 + \frac{128}{3}\left(\frac{M}{r_m}\right)^3 + \mathcal{O}\left[\left(\frac{M}{r_m}\right)^4\right]. \quad (3.35)$$

Como todos os termos de ordem superior desaparecem quando $u \approx r_m$, então somente o primeiro termo sobrevive, e chegamos à expressão:

$$\alpha_{WDL} = \frac{4M}{u}. \quad (3.36)$$

Essa condição é observada quando a luz passa moderadamente próxima à superfície de uma estrela, como o Sol, conforme mostrado em estudos como [16]. Em outras palavras, o efeito óptico é mínimo quando o feixe de luz passa a uma distância $r \gg 2M$ da superfície da estrela ou do buraco negro.

3.2.2 Limite de Deformação Forte (SDL)

Agora, observamos o limite de deformação forte (SDL), de onde poderemos ver que nossa análise está centrada em observar feixes de luz que passam muito próximo do buraco negro. Para obtermos essa aproximação fazemos uma expansão da integral elíptica em série de Taylor para $r_m \approx \bar{u}$, onde :

$$\alpha_{SDL} = -2 \ln \frac{r_m - 3M}{36(2 - \sqrt{3})} - \pi. \quad (3.37)$$

Ao introduzirmos a condição $r_m \approx 3M$, obtemos o seguinte:

$$u = 3\sqrt{3}M + \frac{\sqrt{3}(r_m - 3M)^2}{2M}. \quad (3.38)$$

Combinando as equações (3.37) e (3.38), podemos escrever o ângulo de desvio em termos do parâmetro de impacto u para esta aproximação. Após algumas simplificações, segue que:

$$\alpha_{SDL} = -\ln\left(\frac{u}{\bar{u}} - 1\right) + \ln\left[(7 - 4\sqrt{3})\right] - \pi. \quad (3.39)$$

Conforme mencionado em algumas literaturas, as imagens produzidas em múltiplos loops ou de magnitude superior são uma consequência direta da deformação forte e não aparecem na deformação fraca. Como mencionado em [5], esse efeito óptico, conhecido como “fantasmas de Darwin”, foi previsto pela teoria da Relatividade Geral.

Os estudos mais promissores na observação do efeito óptico descrito em buracos negros estão sendo realizados principalmente com o Telescópio de Horizonte de Eventos (ETH). De acordo com [13], um dos candidatos mais robustos a um buraco negro supermassivo está localizado no centro da galáxia *M87*. As imagens obtidas do buraco negro *M87** estão em concordância com as sombras previstas pela teoria da Relatividade Geral utilizando a métrica de Kerr. Essas simulações hidrodinâmicas (SH) permitem a ampliação da vasta biblioteca da Relatividade Geral para a análise das curvas emitidas pela radiação de plasma que gira próxima à velocidade da luz, fornecendo fortes evidências de que buracos negros são motores ativos nos núcleos das galáxias.

De forma similar, esforços significativos têm sido feitos pelos cientistas no estudo de Sagittarius A* (*SgrA**), um buraco negro supermassivo localizado no centro da Via Láctea, conforme relatado em [12]. De acordo com [30], esse objeto é um dos fortes candidatos para teste da RG no limite de deformação forte. Até o momento, os dados experimentais revelam consistência com a teoria da Relatividade Geral em escalas galácticas, com uma resolução de imagens na faixa de $10^3 - 10^5$ vezes o raio do horizonte de eventos.

Quando comparamos os resultados de *M87** e *SgrA** obtidos pelo ETH, juntamente com os dados de interferometria do LIGO em sistemas binários de estrelas, surgem fortes evidências da presença de estruturas de buracos negros supermassivos nos centros das galáxias, co-evoluindo com seus núcleos ativos. Essa co-evolução está associada à acreção de matéria e à formação de estrelas nas proximidades do núcleo, resultante do aumento do fluxo de gás. A similaridade entre *M87** e *SgrA** reforça a validade da RG em relação muitas teorias de gravidade modificada.

3.2.3 Comparando os Limites de Deformação

Com base nas duas aproximações discutidas, a WDL e a SDL, que são mutuamente opostas e, além disso, tendo obtido a fórmula exata para o ângulo de desvio, nesta seção, seguindo o estudo feito em [4], o próximo passo consiste em agrupar os três casos e analisar a relação entre o ângulo α e o parâmetro de impacto u .

A Figura 5 apresenta três curvas representando diferentes valores do ângulo de desvio em função do parâmetro de impacto u , expresso em unidades do raio de Schwarzschild r_m . De acordo com [5], os fenômenos da Relatividade Geral conhecidos como anéis de Einstein ¹ e ângulo de deflexão de Darwin convergem para valores suficientemente grandes do parâmetro de impacto.

De acordo com a nossa abordagem anterior observamos que para valores muito

¹ Um anel de Einstein é uma imagem em forma de anel que aparece quando há um alinhamento entre a lente gravitacional e uma fonte de luz, como, por exemplo, um buraco negro. Para saber mais, consulte: [17].

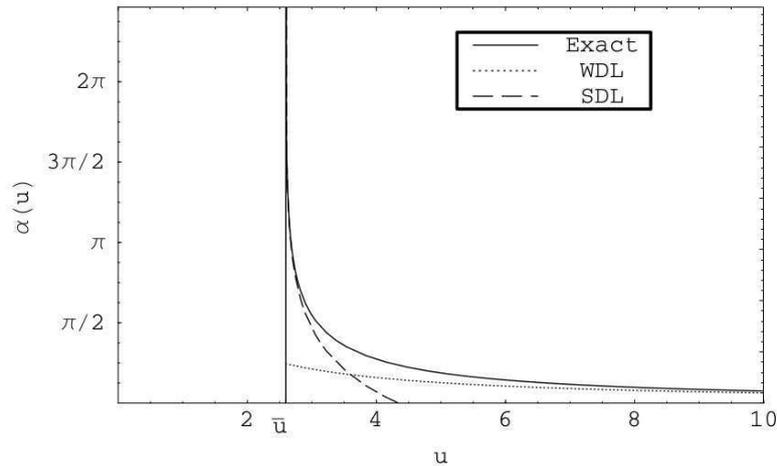


Figura 5 – Comparação entre a deflexão precisa dos fótons em uma métrica de Schwarzschild e as duas aproximações abordadas no texto. O parâmetro de impacto é expresso em termos do raio de Schwarzschild. Figura extraída de [5]

grandes do parâmetro de impacto u os fótons conseguem escapar do buraco negro. Nessa região, o ângulo exato de deflexão e a aproximação de deformação fraca são muito próximas entre si. No entanto, quando os fótons estão muito próximos da região central do buraco negro, eles sofrem uma deflexão significativa, podendo realizar múltiplas voltas ao redor do horizonte do buraco negro, levando a valores de α maiores que 2π .

Além disso, é evidente que a fronteira “óptica” de um buraco negro corresponde aos raios de luz que estão presos em órbitas marginais ao redor do buraco negro. Esses raios de luz seguem trajetórias em espiral, percorrendo várias voltas antes de alcançar um observador. No nosso caso, a borda ótica está localizada em $\bar{u} = 3\sqrt{3}M$. Outra possibilidade que temos é analisar o efeito de “miragem”² causado pelos feixes de luz ao formar múltiplas imagens de si quando sujeitos à deformação forte, após espiralarem em torno do buraco negro.

Resolvendo numericamente a equação (3.39), se obtém uma solução exponencial em termos de u :

$$u = \bar{u} + 0,6702 \bar{u} \exp(-\alpha + 2n\pi) . \quad (3.40)$$

Para valores de n maiores que 2, a exponencial se anula, resultando na recuperação do limite crítico de impacto. Consequentemente, os feixes de luz que chegam a um observador externo formam um buraco negro com $\bar{u} = 3\sqrt{3}M$. Os feixes mais externos correspondem àqueles que não conseguiram completar nenhuma volta antes de serem capturados pelo buraco negro.

² A luz emitida pela parte superior é visível e sofre uma ligeira distorção, enquanto a parte inferior do disco também é visível como uma imagem indireta devido aos raios de luz altamente curvos. [25]

3.3 Lente Gravitacional

Uma das implicações mais conhecidas previstas pela Relatividade Geral é o fenômeno de lente gravitacional: nas proximidades de um objeto muito denso (buraco negro, galaxia, quasar, etc.), o espaço-tempo é fortemente curvado pela intensa gravidade. Essa curvatura pode atuar como uma lente natural, desviando a luz de sua trajetória original.

Considerando que o fóton deve seguir sua trajetória natural, determinada pelo parâmetro de impacto, podemos descrever o seguinte processo: os fótons são emitidos a partir da fonte luminosa e se aproximam do buraco negro de Schwarzschild até atingirem uma distância mínima r_m . Em seguida, eles continuam sua jornada e eventualmente alcançam o observador.

Segundo [17],

“Uma vez que os fótons não são criados nem destruídos pelo efeito de lente, o brilho da fonte permanecerá inalterado. No entanto, o tamanho da fonte pode ser alterado pela lente. Se a fonte for ampliada, ela parecerá mais brilhante; caso contrário, parecerá mais fraca.”

Nesse sentido, teremos duas variáveis importantes: a posição da fonte de fótons e a posição do observador em um dado sistema de coordenadas. Supondo que a fonte se encontre nas coordenadas (r_F, φ_F) e o observador esteja localizado nas coordenadas (r_o, φ_o) , e denotando por \dot{r} a derivada tangencial dos fótons emitidos pela fonte de luz em relação ao observador, a trajetória dos fótons pode ser dividida em duas fases distintas. Quando os fótons estão se aproximando do observador, temos $\dot{r} < 0$, indicando que sua distância está diminuindo. Por outro lado, quando os fótons estão se afastando do observador, temos $\dot{r} > 0$, indicando que sua distância está aumentando.

Ao utilizar a equação (3.11) e realizar uma mudança de coordenadas azimutal, representada por $\gamma(u, r_o, r_F)$, para a partícula, obtemos o seguinte resultado:

$$\gamma(u, r_o, r_F) = \int_{r_F}^{r_m} \frac{1/r^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - \frac{A(r)}{r^2}\right)}} (-dr) + \int_{r_m}^{r_o} \frac{1/r^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - \frac{A(r)}{r^2}\right)}} dr . \quad (3.41)$$

Rearranjando (3.41) de forma conveniente, obtemos:

$$\gamma(u, r_o, r_F) = \left(\int_{r_m}^{r_F} + \int_{r_m}^{r_o} \right) \frac{1/r^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2} - \frac{A(r)}{r^2}\right)}} dr . \quad (3.42)$$

Impomos a condição de que a equação da lente pode ser expressa em termos do deslocamento azimutal, o qual representa a diferença em azimute ³ entre a fonte e o

³ É o arco medido sobre o horizonte, no sentido horário (NLSO), com origem no ponto cardeal Norte e fim no vertical do astro. O azimute varia entre 0 a 2π . [31]

observador, de módulo igual a 2π :

$$\gamma(u, r_o, r_F) = \Delta\varphi \equiv \varphi_o - \varphi_F + 2n\pi . \quad (3.43)$$

A partir da integração numérica da equação (3.37) verificamos dois resultados distintos:

1. A deflexão máxima ocorre quando $\bar{u} \approx 2,598 r_s$, sendo $r_s = 2M$ o raio de Schwarzschild, que corresponde a duas vezes a massa relativística do buraco negro.
2. Para valores do parâmetro de impacto $u = 10 r_s$, observamos que há um desvio mínimo da partícula, ou seja, a deflexão é praticamente insignificante.

O ângulo em que um fóton percebe o observador é dado por:

$$\theta = \arcsin \left(u \sqrt{\frac{A(r_o)}{r_o^2}} \right) . \quad (3.44)$$

Na situação em que a fonte e o observador encontram-se muito afastados em relação as outras escalas de distância de u e M , se obtem um limite particular. Para as menores escalas possíveis de u/r_o e u/r_s , chegamos à equação da lente de Ohanian, definida por:

$$\alpha - \theta - \theta_s = -\gamma \equiv \Delta\varphi - \pi . \quad (3.45)$$

A seguir, na Figura 6a, apresentamos as trajetórias de fótons com diferentes parâmetros de impacto, expressos em termos do raio de Schwarzschild, enquanto passam próximos a um buraco negro.

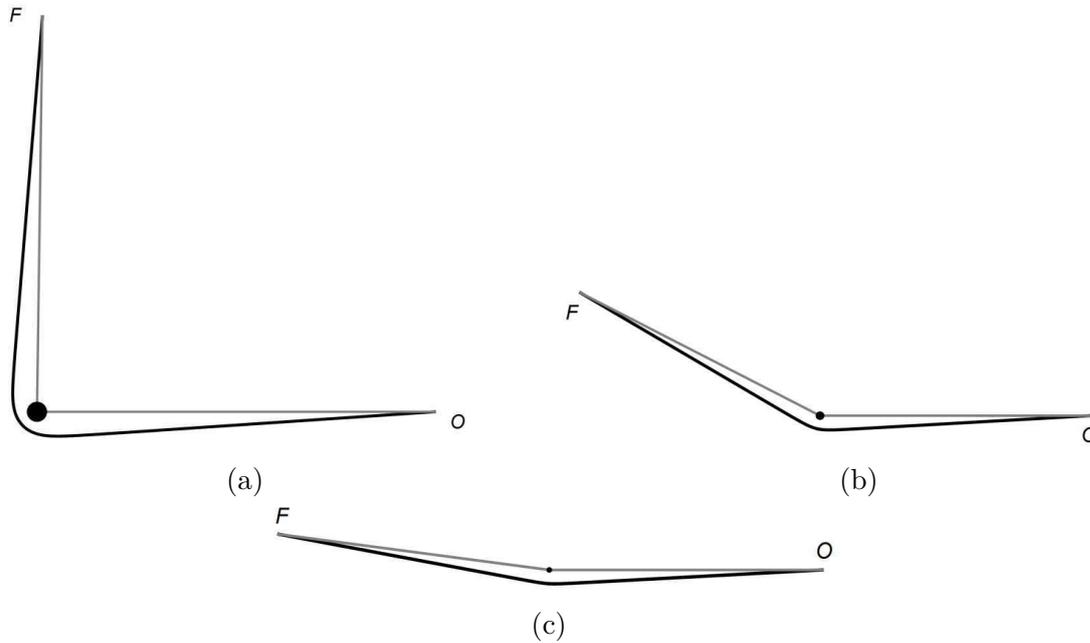


Figura 6 – Trajetória dos fótons considerando três parâmetros de impacto distintos em relação a uma fonte F e um observador situado em O , passando próximos a um buraco negro representado pela esfera em preto. Na Figura (a) o parâmetro de impacto é $u = 3r_s$; na Figura (b) $u = 5r_s$; e em (c) $u = 10r_s$, onde $r_s = 2M$ é o raio de Schwarzschild. Figura extraída de: [4]

3.3.1 Relação com o Princípio de Fermat

Como já mencionado anteriormente, o princípio de Fermat (PF) estabelece que a luz percorre o caminho que requer o menor *tempo* para se deslocar entre dois pontos [15]. De acordo com [17], é possível compreender como o princípio de Fermat é aplicado no contexto das lentes gravitacionais. Para isso, examinamos as equações de campo da Relatividade Geral e investigamos as trajetórias que os feixes de luz seguem em um cenário com um objeto de campo gravitacional extremamente forte. Essas trajetórias, conhecidas como geodésicas, foram abordadas em seções anteriores conforme discutido na referência de [27], focando nas geodésicas tipo luz, que são de nosso interesse.

Para isto, vamos comentar sobre um dos conceitos mais importantes na óptica: o índice de refração n . A velocidade da luz em um meio com um índice de refração n é igual a c/n , sendo c a velocidade da luz no vácuo. Dessa forma, o tempo que a luz percorre dependerá do meio onde ela se encontra. De maneira geral, temos:

$$t = \int \frac{n}{c} dl . \quad (3.46)$$

Conforme vimos anteriormente, para um caminho infinitesimal $\vec{x}(l)$, que envolve dois pontos arbitrários A e B, distintos entre si, o menor trajeto entre esses extremos é da forma:

$$\delta \int_A^B n(\vec{x}(l)) dl = 0 . \quad (3.47)$$

Na situação em que a luz está distante da lente, temos o que chamamos de “lente fraca” [32], ou seja, o potencial newtoniano cumpre $\phi/c^2 \ll 1$, e a métrica é do tipo Minkowski, cujo elemento de linha é:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + (d\vec{x})^2 , \quad (3.48)$$

ou seja, $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$.

Como a luz se propaga ao longo de geodésicas nulas, $ds^2 = 0$, e podemos calcular o índice de refração da luz em relação ao objeto compacto e massivo. Segue que:

$$c' \equiv \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = c \rightarrow n = c/c' = 1 . \quad (3.49)$$

A aproximação apresentada na Equação (3.48) é válida devido ao fato de o raio do buraco negro ser significativamente menor em comparação com as distâncias entre o objeto e a fonte de luz r_F , assim como entre o objeto e o observador r_O . Portanto, estamos lidando com o caso de uma lente *fraca*, onde é possível considerar um formalismo pós-newtoniano (PN), tomando um campo potencial ϕ e supondo que os ângulos de curvatura são pequenos, conforme mencionado em [32]. Por outro lado, para um objeto massivo, compacto e com simetria esférica, um potencial perturbativo está associado à métrica de tal forma que o comprimento de arco diferencial será do tipo lente fraca. Segue então que:

$$ds^2 \approx - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1} (d\vec{x})^2 . \quad (3.50)$$

Para $ds^2 = 0$ em (3.50), encontramos a seguinte condição:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2 dt^2 = \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1} (d\vec{x})^2 . \quad (3.51)$$

A partir da expressão para a velocidade da luz, podemos determinar o índice de refração na presença de um campo gravitacional extremamente intenso, de modo que,

$$c' = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2}}{\left(1 + \frac{2M}{r}\right)} \approx c \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (3.52)$$

$$n = c/c' \rightarrow n \approx \left(1 + \frac{2M}{r}\right) . \quad (3.53)$$

Vemos então que, na presença de um campo gravitacional intenso, o índice de refração do vácuo *deixa de ser constante*. Isso significa que a geometria do espaço-tempo interfere

diretamente na propagação da luz diante do cenário apresentado. O que acabamos de encontrar pode ser interpretado de forma semelhante ao fenômeno da refração na óptica geométrica [15].

Em outra situação, consideramos que $\phi \ll 1$, logo o índice de refração, seguindo os passos anteriores é da forma,

$$n = c/c' \rightarrow n \approx \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (3.54)$$

Quando há uma mudança do meio, a velocidade da luz também é alterada. Para a condição explorada, $\phi \leq 0$ e $n \geq 1$, concluímos então, que a velocidade c' , apesar de também estar na presença do vácuo é inferior a velocidade c , como era esperado.

Façamos o caminho infinitesimal dl em termos do parâmetro de curva $\vec{x}(\lambda)$:

$$dl = \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right| d\lambda = \delta \int_A^B d\lambda n(\vec{x}(\lambda)) \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|. \quad (3.55)$$

Aplicando o método variacional temos que, ao igualarmos nossa expressão (3.55) a zero, podemos abordar a situação considerando um Lagrangeano da forma:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \lambda) \equiv n(\vec{x}) \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|. \quad (3.56)$$

As equações de Euler-Lagrange são da forma:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = 0. \quad (3.57)$$

Combinando as duas expressões (3.56) e (3.57) obtemos uma equação diferencial para n :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = |\dot{\vec{x}}| \frac{\partial n}{\partial \vec{x}} = (\vec{\nabla} n) |\dot{\vec{x}}|, \quad (3.58)$$

supondo que $\dot{\vec{x}}$ seja parametrizado por λ , e considerando que $|\dot{\vec{x}}| = 1$, podemos selecionar um vetor unitário \vec{e} de tal forma que $\vec{e} \equiv \dot{\vec{x}} = d\vec{x}/d\lambda$. Esse vetor é tangente à trajetória dos fótons. Portanto, temos

$$\frac{d}{d\lambda} (n\vec{e}) - \vec{\nabla} n = 0 \rightarrow n\dot{\vec{e}} = \vec{\nabla} n - \vec{e}(\vec{\nabla} n \cdot \vec{e}). \quad (3.59)$$

Na equação (3.59) o segundo termo do lado direito representa a derivada ao longo do caminho da luz. Portanto, o lado direito como um todo corresponde ao gradiente de índice n (GRIN) perpendicular ao caminho da luz [17],

$$\dot{\vec{e}} = \frac{1}{n} \vec{\nabla} \perp n = \vec{\nabla} \perp \ln(n). \quad (3.60)$$

Para o caso estudado, fazemos a aproximação $n \approx 1 + \frac{2M}{r}$, o que implica em $\ln(n) \approx \frac{2M}{r}$. Logo, a derivada que iremos obter,

$$\vec{\nabla} n \perp n = 2M \left(\frac{\partial_x 1/r}{\partial_y 1/r} \right) = -\frac{2M}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Como estamos lidando com uma lente fraca, podemos utilizar a aproximação de Born. Nessa aproximação, o ângulo no qual estamos resolvendo a integral é muito pequeno, permitindo-nos negligenciar quaisquer efeitos de potenciais perturbativos. Supondo que os fótons viajam em um caminho \hat{u}_z , segue que para $z = 0$ e um parâmetro de impacto u , temos:

$$\vec{\alpha}(u) = - \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \dot{\vec{e}} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\nabla} \perp \ln(n) dz = \frac{2M}{r^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{r^{3/2}} = \frac{4M}{u^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

O resultado obtido é o mesmo analisado anteriormente para o limite de deformação fraca (*WDL*). Observamos que $r = u^2 + z^2$ e, expressando $u^2 = x^2 + y^2$, obtemos o ângulo total de deflexão dos fótons, definido por:

$$|\vec{\alpha}(u)| = \frac{4M}{u^2} \cdot u = \frac{4M}{u} . \quad (3.63)$$

Conforme mencionado em [17], o ângulo de deflexão $\vec{\alpha}$ é proporcional à massa do objeto massivo e compacto. No caso específico da deflexão total de fótons em relação a um pequeno ponto de massa em um buraco negro, que foi o caso examinado nesta seção, o ângulo de deflexão excede em um fator de 2 o resultado previsto pela gravitação newtoniana.

Na seção seguinte, abordaremos o formalismo da transferência radiativa, um procedimento amplamente encontrado em diversos fenômenos astrofísicos, o qual assume uma importância relevante em nosso estudo.

3.4 Teoria de Transferência Radiativa

3.4.1 Formulação Clássica

Na física, o fenômeno da propagação da energia na forma de radiação eletromagnética é denominado transferência radiativa (TR). A característica fundamental da transferência radiativa é a descrição de como ocorre a distribuição de partículas em um determinado meio, levando em consideração o seu deslocamento e as interações com o próprio meio. A TR tem aplicações em diversos fenômenos naturais em muitos campos de estudo como astrofísica, física de partículas, meteorologia, ciência dos materiais, etc.

De início, iremos analisar o caso newtoniano. Ou seja, não levamos em conta quaisquer efeitos relativísticos como, por exemplo, o efeito de lentes gravitacionais [19]. Nesse caso, podemos estabelecer a relação entre fonte e sumidouro do meio através da

transferência radiativa [33], que é expressa por:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + J_\nu , \quad (3.64)$$

onde, I_ν é a intensidade específica do raio de frequência ν com relação a um elemento diferencial de distância, ds ; e com α_ν e J_ν , os coeficientes de absorção e emissão, respectivamente.

Em termos gerais, (3.64) nos mostra a evolução da intensidade radiante em relação ao caminho da luz em um meio que é capaz de absorver, espalhar ou emitir radiação. A partir dessa expressão podemos deduzir dois cenários [34]: O primeiro corresponde a situação em que há emissão apenas, ou seja $\alpha_\nu = 0$. Logo temos

$$\frac{dI_\nu}{ds} = J_\nu , \quad (3.65)$$

que tem como solução formal:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s J_\nu(s') ds' . \quad (3.66)$$

Com essa solução, percebemos que o brilho é proporcional à integração do coeficiente de transmissão.

O segundo caso corresponde a situação em que temos apenas absorção, ou seja $J_\nu = 0$, com isso temos:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu , \quad (3.67)$$

cuja solução é:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right] . \quad (3.68)$$

Daqui vemos que o brilho diminui radialmente devido à exponencial do coeficiente de absorção integrado ao longo do percurso.

Levando em consideração que existe uma perda líquida no processo de transferência radiativa, o que é indicado pelo sinal negativo na equação (3.64), iremos avaliar de maneira quantitativa a absorção ou espalhamento da energia radiante que se propaga em um meio. Para isso, introduzimos o conceito de profundidade óptica ⁴ $\tau_\nu(s)$ em relação à distância entre dois meios s_0 e s , através da integração direta do coeficiente de absorção:

$$\tau_\nu(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' . \quad (3.69)$$

De posse de (3.67) e (3.68) podemos obter a seguinte relação

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{J_\nu}{\alpha_\nu} = I_\nu + S_\nu , \quad (3.70)$$

sendo S_ν a denominada de “função fonte”, que depende dos coeficientes de absorção e transmissão do meio [34].

⁴ Indica o grau de atenuação da radiação ao passar através da camada de um material opaco. [34]

A partir deste momento temos informações suficientes para resolver formalmente a equação da transferência radiativa, visto que podemos levar em consideração que todas as quantidades anteriores dependem explicitamente da profundidade óptica $\tau_\nu(s)$ em vez de S_ν . Para isso, adicionamos um fator integrante e^{τ_ν} e definimos as quantidades $\mathcal{J} \equiv I_\nu e^{\tau_\nu}$ e $\mathcal{S} \equiv S_\nu e^{\tau_\nu}$, em termos das quais chegamos a:

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\tau_\nu} = \mathcal{S}, \quad (3.71)$$

de onde temos como solução:

$$\mathcal{J}(\tau_\nu) = \mathcal{J}(0) + \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (3.72)$$

Reescrevendo (3.72) em termos da intensidade I_ν e da função da fonte S_ν , estabelecemos a solução formal da TR conforme [6]:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu. \quad (3.73)$$

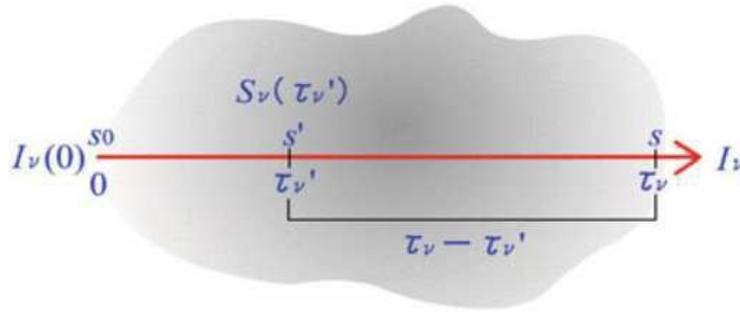


Figura 7 – Diagrama que descreve como a radiação que chega é atenuada exponencialmente ao longo de um caminho s do raio de luz, e como a função fonte contribui para essa queda exponencial em relação à distância. Figura extraída de [6].

Nessa expressão (3.73), o primeiro termo à direita sugere que a radiação incidente $I_\nu(0)$ decai exponencialmente ao longo do trajeto do raio de luz, diminuindo-se pelo fator $e^{-\tau_\nu}$, enquanto o segundo termo, que diz respeito a função fonte, é dado pela soma de todas as intensidades $S_\nu(\tau_\nu)$ emitidas em diferentes profundidades ópticas τ_ν , ao longo do percurso do feixe de luz. Essas emissões também estão sujeitas à atenuação exponencial com um fator extra $e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)}$. Em particular, considerando que a função fonte depende da profundidade óptica, a integração sobre todo o percurso da luz torna-se possível.

Em se tratando de regiões opticamente espessas ($\tau_\nu \rightarrow \infty$), a intensidade específica se aproxima da função fonte ($\tau_\nu \rightarrow \infty$). Por outro lado, no limite opticamente fino ($\tau_\nu \ll 1$) a relação entre a intensidade específica e a função fonte torna-se $I_\nu \approx S_\nu \tau_\nu$, desde que a intensidade incidente seja pequena.

3.4.2 Formulação Relativística

No tratamento relativístico geral (RG) a teoria de transferência radiativa muda de maneira significativa, pois agora consideramos um espaço-tempo curvo, onde a luz se move ao longo de trajetórias geodésicas nulas.

A condição de normalização $k_\alpha k^\alpha = 0$ nos garante que qualquer vetor de onda k^μ transportado paralelamente sobre si é um vetor nulo no espaço-tempo, satisfazendo a equação da geodésica

$$k^\sigma \nabla_\sigma k_\mu = 0, \quad (3.74)$$

sendo ∇_σ a derivada covariante.

Nesse cenário, as partículas estão sujeitas à interação com um campo gravitacional muito intenso e se deslocam com velocidades relativísticas, ou seja, seu comportamento se aproxima muito da velocidade da luz. Consideramos agora o transporte dessas partículas (em particular, fótons), que se movem em relação a um meio. De acordo com [35], para investigarmos a hidrodinâmica do fluxo de acreção em torno de buracos negros é necessário um tratamento covariante dos processos de transferência radiativa no modelo de absorção e emissão. Derivamos essa formulação covariante da lei de conservação do volume do espaço de fase e do número de partículas. Para podermos fazer isso, usamos $\mathcal{I}_\nu \equiv I_\nu/\nu^3$, denominada de *Intensidade Invariante de Lorentz*. (Essa expressão é deduzida em maiores detalhes no apêndice A.)

De posse de \mathcal{I}_ν , podemos satisfazer a equação da transferência radiativa relativística aplicada em ambientes astrofísicos, conforme discutido por [9]

$$\frac{d\mathcal{I}_\nu}{d\lambda} = \frac{\mathcal{J}(\nu)}{\nu^2} - \mathcal{I}_\nu \nu \mathcal{X}(\nu), \quad (3.75)$$

onde a técnica do traçado inverso de raios de luz [20] (terminologia do inglês chamada de *backward ray tracing*) é empregada para o cálculo do caminho das geodésicas em uma geometria de um espaço-tempo curvo arbitrário. Verificamos que as quantidades $\mathcal{J}(\nu)$ e $\mathcal{X}(\nu)$ correspondem aos coeficientes de emissão e absorção invariantes, respectivamente. Essa expressão (3.75) generaliza a (3.70), ao incorporar os efeitos relativísticos, incluindo a geometria do espaço-tempo e o redshift gravitacional. A partir dessa equação, podemos explorar de forma mais detalhada como a intensidade específica varia ao longo do caminho do fóton, tendo como referência os aspectos de emissão e absorção [9].

Para fótons ou partículas sem massa, a frequência ν medida por um observador é dada em função da geometria do espaço-tempo, do movimento da partícula, e do redshift gravitacional. Na abordagem da hidrodinâmica relativística, que examina o comportamento de fluidos (matéria em acreção, gás ou plasma) em movimento [6], supomos que a frequência de propagação ν de um fóton que se desloca em um fluido com uma quadri-velocidade u^α

é medida por um observador em termos de

$$\nu = -g_{\alpha\beta}k^\beta u^\alpha, \quad (3.76)$$

sendo k^α o quadri-momento (contravariante) do fóton e $g_{\alpha\beta}$ a métrica do espaço-tempo. A velocidade do fóton pode ser obtida através da projeção do quadri-momento na estrutura co-móvel do fluido [33], ou seja:

$$u^\beta = P^{\beta\alpha}k_\alpha = k^\beta + (k_\alpha u^\alpha)u^\beta. \quad (3.77)$$

Tomamos agora a variação do comprimento de arco s com respeito ao parâmetro afim λ para expressar a partícula no referencial co-móvel do fluido:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\lambda} &= -\|k^\beta\| \Big|_{\lambda_{\text{obs}}} = -\sqrt{g_{\alpha\beta}(k^\alpha + (k_\beta u^\beta))(k^\beta + (k_\alpha u^\alpha)u^\beta)} \Big|_{\lambda_{\text{obs}}} \\ &= -\sqrt{k_\beta k^\beta + (k_\alpha u^\alpha)^2 u^\beta u_\beta + 2(k_\alpha u^\alpha)^2} \Big|_{\lambda_{\text{obs}}} \\ &= -k_\alpha u^\alpha \Big|_{\lambda_{\text{obs}}}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde usamos a sinatura do espaço-tempo $(-, +, +, +)$.

Para um observador estacionário, que está muito distante de um objeto massivo e compacto, a condição $p_\beta u^\beta = -E_{\text{obs}}$ é satisfeita. Dessa forma, a energia relativa entre um fóton e o referencial de um observador nas coordenadas co-móveis é dada por:

$$\gamma^{-1} = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{-k_\alpha u^\alpha|_\lambda}{k_\beta u^\beta|_{\lambda_{\text{obs}}}}. \quad (3.79)$$

Recorrendo as quantidades invariantes \mathcal{I}_ν , $\mathcal{J}(\nu)$ e $\chi(\nu)$ e da profundidade óptica $\tau_\nu = \alpha_\nu ds$, teremos a seguinte relação:

$$\frac{d\mathcal{I}_\nu}{ds} = -\alpha_\nu \mathcal{I} + \frac{\mathcal{J}(\nu)}{\chi(\nu)} = -\mathcal{I} + \mathcal{S}, \quad (3.80)$$

onde $\mathcal{I} = \alpha_\nu \mathcal{I}$ e $\mathcal{S} = \mathcal{J}/\chi$. Reescrevemos de forma conveniente, de modo que:

$$\frac{d\mathcal{I}}{ds} = -k_\alpha u^\alpha|_\lambda \left(-\alpha_{0,\nu} \mathcal{I} + \frac{J_{0,\nu}}{\nu^3} \right). \quad (3.81)$$

O que encontramos é a equação radiativa relativística para um fóton se propagando em um fluido com 4-velocidade u^α . Esse resultado relaciona a mudança da intensidade da radiação em termos do comprimento de onda e do caminho percorrido pelo fóton. Para a situação em que temos um observador distante: $-k_\alpha u^\alpha|_{\lambda_{\text{obs}}}$ pode ser ajustada para uma escala unitária. A equação da transferência radiativa, pode ser expressa por duas equações diferenciais desacopladas.

$$\frac{d\tau_\nu}{d\lambda} = \gamma^{-1} \alpha_{0,\nu}, \quad (3.82)$$

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} = \gamma^{-1} \left(\frac{J_{0,\nu}}{\nu^3} \right) e^{-\tau_\nu}. \quad (3.83)$$

As Equações (3.82) e (3.83) nos fornecem uma análise teórica mais robusta em transferência relativística, pois permitem o cálculo da intensidade na linha de visão do raio de luz, independente de se o raio foi traçado para frente ou para trás.

No próximo capítulo iremos discutir as características que influenciam o perfil observacional da aparência óptica de buracos negros estáticos (BNE), rodeados por um disco fino de acreção, e a estruturação de sombras e anéis de fótons.

Capítulo 4

Sombras e Anéis de Fótons

Iniciamos o capítulo central de nosso trabalho apresentando os elementos que compõem a imagem de um objeto massivo compacto e estático. De início relacionamos o percurso do raio de luz com o potencial efetivo. Nesse estágio, apresentamos a esfera de fótons, para que possamos examinar com mais profundidade a trajetória dos raios de luz ao redor desses objetos. Em seguida, iremos explicar o procedimento adotado em nosso estudo para o rastreamento dos raios de luz para poder, posteriormente, apresentar as sombras de buracos negros estáticos (BNE) com um disco fino de acreção. Ao final desse capítulo, exibimos a intensidade observada dos três modelos analisados no estudo.

4.1 Anéis e Imagens de Buracos Negros Estáticos com Disco Fino de Acreção

Um buraco negro absorve toda a radiação que está próxima o suficiente do horizonte de eventos, criando uma silhueta escura quando iluminada por um disco de acreção. A essa silhueta denominamos de sombra. A terminologia de sombra destacou-se frente às demais interpretações da comunidade científica, de acordo com [19], [8] e [18] como, por exemplo, “anel de fótons”, “curva crítica”, entre outras. Posteriormente, foi adotada pelo EHT [12] e tornou-se um termo amplamente utilizado pela crescente literatura especializada sobre o assunto.

Para aprimorar a compreensão da imagem de um BN, os pesquisadores do *ETH* empreenderam esforços significativos [12, 8, 19] para individualizar e caracterizar cada elemento que compõe a imagem, com o intuito de compreender sua contribuição efetiva na formação da aparência observacional do objeto.

Em síntese, a sombra é a imagem da esfera de fótons que sofre uma distorção gravitacional muito acentuada devido à presença de um campo gravitacional extremamente intenso na linha de visão local de um observador.

No caso do anel de fótons, podemos dizer que se trata de um sistema complexo de imagens lenteadas da região emissora, que quase se sobrepõe à borda da sombra. Esse sistema que forma o anel de fótons é constituído de múltiplos anéis de luz concêntricos, cada vez mais tênues e, por isto, desafiadores de se observar.

Assim, a sombra do BN é a projeção da região denominada de órbita circular estável mais interna (ISCO) em torno do buraco negro, o qual é o mínimo raio em que uma partícula pode orbitar de forma estável sem “cair” para o interior do buraco negro.

Conforme discutido por [19] e [36], a simulação da aparência observacional de um BN traça modelos de toros de acreção opticamente finos ou grossos, o que é evidenciado pela atenuação do brilho ou redução. Sob tais circunstâncias, a forma da sombra traz informações cruciais sobre o próprio BN: se é um objeto rotante, estático, esférico, entre outras características. Desta forma, para podermos aprofundar nosso estudo, devemos considerar a análise de muitos fatores, como o potencial, a geometria e a emissão de matéria em acreção. Por razões pedagógicas, revisitaremos tópicos já discutidos em capítulos anteriores, visando uma compreensão mais robusta desses elementos.

4.1.1 Órbitas de Fótons e o Potencial Efetivo de um Buraco Negro Estático

Nosso interesse é descrever o percurso do raio de luz no espaço-tempo. Por esta razão trabalhamos com as geodésicas nulas, ou seja, tomando o elemento de linha $ds = 0$ para uma métrica estática e esfericamente simétrica arbitrária [37]

$$A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + D(r)d\phi^2 = 0 \quad (4.1)$$

Usando $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, sendo λ o parâmetro afim, a 4-velocidade do fóton resulta:

$$-A(r)\dot{t}^2 + B(r)\dot{r}^2 + D(r)\dot{\phi}^2 = 0. \quad (4.2)$$

Verificamos previamente no Capítulo 3 que, ao utilizarmos o formalismo de Hamilton, obtemos duas soluções para essa equação, as quais representam as equações de movimento do fóton:

$$\dot{t} = \frac{E}{A(r)}, \quad (4.3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\Phi}{D(r)}. \quad (4.4)$$

Onde E e Φ correspondem à energia e ao momento angular do fóton, respectivamente. Substituindo as expressões (4.3) e (4.4) em (4.2) obtemos:

$$A(r) \left(\frac{E}{A(r)} \right)^2 + B(r)\dot{r}^2 + D(r) \left(\frac{\Phi}{D(r)} \right)^2 = 0, \quad (4.5)$$

e simplificando chegamos a

$$\frac{E^2}{A(r)} + B(r)\dot{r}^2 + \frac{\Phi^2}{D(r)} = 0 \quad (4.6)$$

Com isso, podemos reescrever a equação da geodésica:

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{B(r)} \left(\frac{E^2}{A(r)} - \frac{\Phi^2}{D(r)} \right). \quad (4.7)$$

Como nossa análise está centrada no plano equatorial, é conveniente reescrever (4.7) em termos da variação com relação ao ângulo azimutal, ou seja:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{\Phi}{D(r)} \frac{dr}{d\phi}. \quad (4.8)$$

Com isso obtemos:

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{D^2(r)}{\Phi^2 B(r)} \left(\frac{E^2}{A(r)} - \frac{\Phi^2}{D(r)} \right) = \frac{D(r)}{B(r)} \left(\left(\frac{E}{\Phi} \right)^2 \frac{D(r)}{A(r)} - 1 \right). \quad (4.9)$$

Como esperamos, a equação da órbita do fóton, dada uma métrica qualquer, depende apenas de uma única constante de movimento [38] e, conforme mencionado em [39], esse resultado tem a mesma forma da lei de conservação da energia na mecânica clássica. Definimos:

$$h^2(r) = \frac{D(r)}{A(r)}, \quad (4.10)$$

denominado de “potencial efetivo”, que se refere à influência combinada do potencial gravitacional e de outras quantidades presentes no sistema físico analisado.

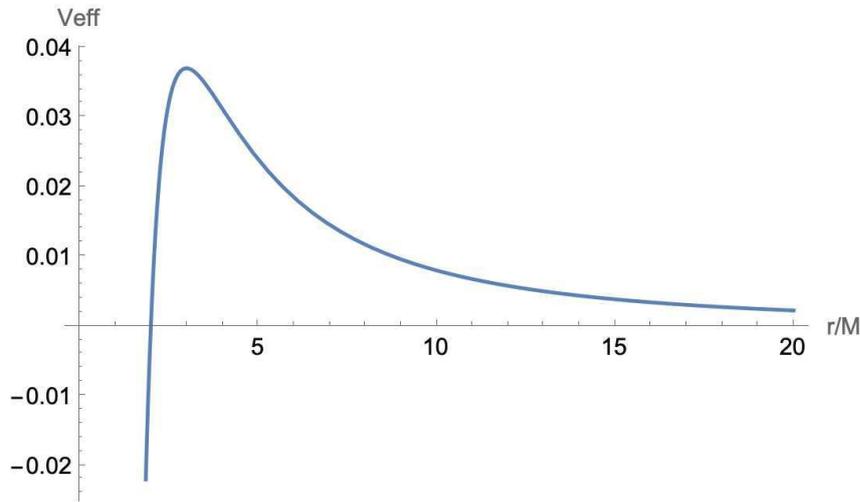


Figura 8 – Potencial efetivo para órbitas circulares de fótons numa métrica tipo Schwarzschild. Gráfico reproduzido com o Mathematica.

Substituindo a (4.10) em (4.9) obtemos:

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{D(r)}{B(r)} \left(\left(\frac{E}{\Phi} \right)^2 h^2(r) - 1 \right). \quad (4.11)$$

Agora, para fótons em órbitas circulares, \dot{r} e \ddot{r} se anulam. Para o caso em que $\dot{r} = 0$ em (4.11) resulta em:

$$h^2(r_{\text{sph}}) = \left(\frac{\Phi}{E} \right)^2 \quad (4.12)$$

Esse resultado (4.12) é conhecido na literatura [40] como parâmetro de impacto, onde observamos

$$h(R) = u, \quad (4.13)$$

que corresponde à distância perpendicular entre a geodésica e a linha que passa pela origem.

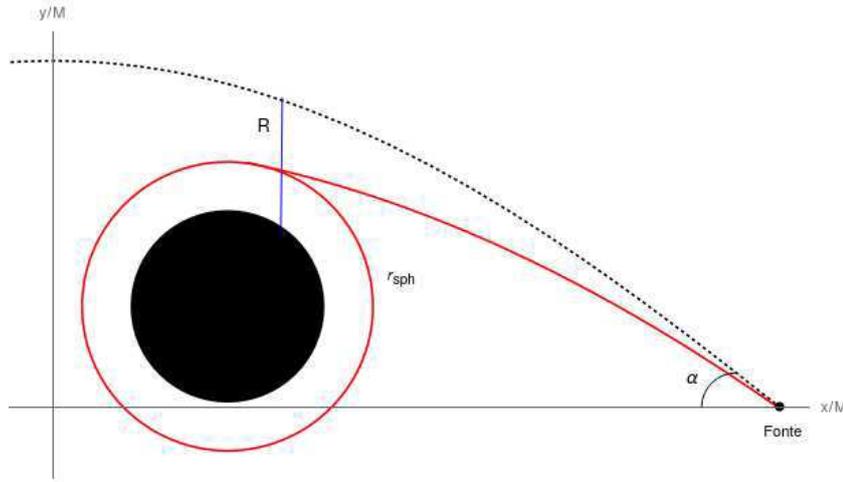


Figura 9 – Diagrama da esfera de fótons mostrando o ponto de maior aproximação do raio de luz até R . Denotamos r_{sph} como o raio da esfera de fótons, onde os raios de luz são emitidos de uma fonte com uma inclinação α . Gráfico reproduzido com o Mathematica.

Esfera de Fótons. Em síntese, uma esfera de fótons é um conceito teórico que, de maneira geral, corresponde a uma esfera geométrica no espaço-tempo, existindo em qualquer intervalo de tempo. Podemos dizer que essa fronteira, que corresponde aos raios de luz que não escapam ao infinito e nem caem ao horizonte de eventos, ficando aprisionados nos limites do espaço-tempo, é um conceito qualitativo, enquanto o parâmetro de impacto u é quantitativo.

Para o caso em que $\ddot{r} = 0$, chegamos a:

$$\left(\frac{d}{dr}h^2(r)\right)_{r=r_{sph}} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{D'(r)}{A'(r)}\right)_{r=r_{sph}} = \frac{D(r)}{A(r)}. \quad (4.14)$$

Com isso obtemos uma medida da posição e do movimento das partículas nessa região, que é uma superfície preenchida por geodésicas circulares tipo luz, instáveis em relação a perturbações radiais [39].

Para um buraco negro (objeto massivo compacto com simetria esférica) apresentando uma esfera de fótons, a posição do máximo do potencial corresponde ao limite de estabilidade das geodésicas nulas circulares em torno da estrutura formada no parâmetro de impacto crítico \bar{u} [40]. Na condição em que $u > \bar{u}$, temos que $dr/d\phi = 0$ indica um ponto de retorno para a geodésica nula. A inexistência de um ponto de retorno resulta no

raio de luz ser direcionado até o horizonte de eventos, onde é capturado pelo buraco negro. Portanto, podemos assumir:

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{u^2}, \quad V'_{eff}(r) = 0 . \quad (4.15)$$

Por conveniência, consideramos o caso de um buraco negro estático (BNE) e, a partir disso, podemos examinar o comportamento do potencial efetivo em relação a trajetórias de partículas ao seu redor, ou seja:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - V^2(r) . \quad (4.16)$$

No caso dos fótons temos:

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} V^2(r) , \quad (4.17)$$

sendo $V(r) = (1 - 2M/r)$. Resolvemos (4.17) para o movimento da partícula, obtendo:

$$0 = \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2}\right) \right] . \quad (4.18)$$

Expandindo a expressão dentro da derivada:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} \right] , \quad (4.19)$$

e derivando (4.19) obtemos:

$$\frac{2ML^2(3M - r)}{r^4} .$$

Expandindo novamente ficamos com:

$$\frac{6ML^2}{r_c^4} - \frac{2L^2}{r_c^3} = 0 , \quad (4.20)$$

onde r_c é o raio da órbita circular.

Ao resolvermos essa expressão (4.20) para r_c buscamos encontrar um ponto onde o potencial $V(r)$ atinge seu máximo para cada valor de L , e obtemos:

$$r_c = 3M . \quad (4.21)$$

Em um cenário de um universo em expansão, que tem a métrica de Schwarzschild com o horizonte de Sitter, obtemos o mesmo resultado análogo ao raio da esfera de fótons $r = 3M$ do caso de Schwarzschild puro. Diante desse cenário, onde há o horizonte de Sitter relacionado à expansão do universo em larga escala, bem como o horizonte de Schwarzschild, o que indica a presença de uma massa central (objeto compacto), a esfera de fótons em ambas as métricas é uma órbita instável, o que será discutido no apêndice B.

Para partículas sem massa, sempre existirá uma barreira de potencial (exceto, para $L = 0$, quando o potencial some completamente), apesar de que um fóton altamente energético, irá transpor a barreira e será direcionado ao seu centro. Portanto, para raios maiores que $3M$ o fóton será engolido e, para raios menores, ele será desviado. Podemos visualizar o potencial efetivo para muitas órbitas de fótons, utilizando para isto a plataforma computacional Wolfram Mathematica.

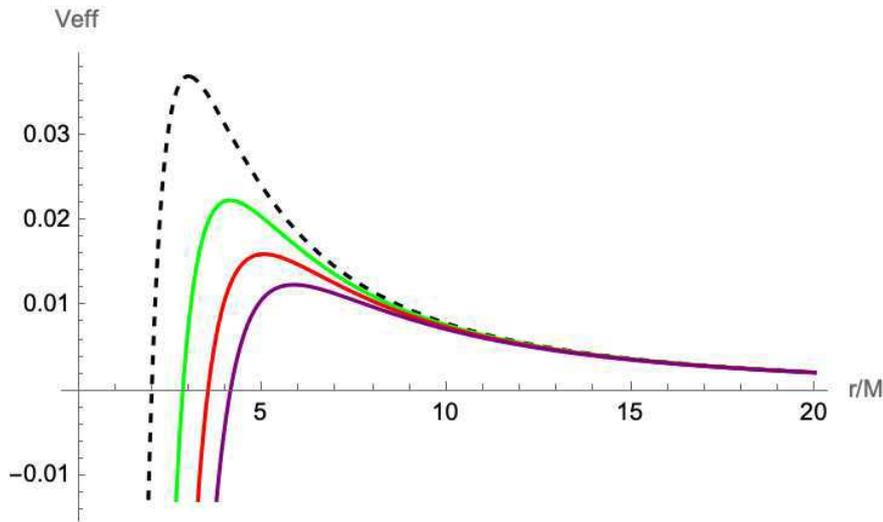


Figura 10 – Potenciais efetivos para o movimento de partículas tipo luz em função da distância r . A linha pontilhada é o raio crítico, a linha verde corresponde a $L = 1$, a vermelha a $L = 2$ e a linha azul a $L = 3$. Gráfico reproduzido com o Mathematica.

Utilizando a análise computacional e os conhecimentos em RG foi possível interpretar e reproduzir o programa fornecido por grupo de pesquisa de colaborador [7], o qual aborda o traçado de raios de luz e o cálculo dos perfis de intensidade das sombras, os quais são os temas a serem investigados nas próximas seções desse capítulo.

4.2 Classes de Raios de Luz: Imagem Direta, Efeito Lente e Anel de Fótons

O cenário físico estudado é o de objeto compacto e massivo (OCM) iluminado por uma fonte plana que emite luz isotropicamente, ou seja, em todas as direções, e possui um brilho uniforme. O procedimento comum na maioria da literatura é o do traçado de raios de luz (RTL) [8]. Para determinarmos a aparência óptica do objeto, integramos a equação da geodésica em relação à coordenada azimutal, então, de forma conveniente conforme [18], [8], [41] e [42] em seus trabalhos, utilizamos:

$$\frac{d\phi}{dx} = \mp \frac{u^2}{r} \sqrt{1 - \frac{u^2 A(x)}{r^2(x)}}, \quad (4.22)$$

onde o sinal \mp , indica as geodésicas de entrada e de saída, respectivamente.

Acompanhando o Script [7] que usa a técnica *RTL*, verificamos que primeiramente, é necessário definir o número total de órbitas realizadas por um único raio de luz em seu percurso até um observador, onde a mudança na equação angular-radial (normalizada) é dada em função de $n \equiv 2\pi$. O número de órbitas depende do parâmetro de impacto, o qual foi calculado numericamente e obtivemos o valor $\bar{u} = 3\sqrt{3}M \approx 5.19615M$, e a partir dele iremos ilustrar o comportamento da trajetória dos raios de luz em diferentes regiões do BN.

A partir do processo de integração numérica de (4.22), iremos definir as três primeiras imagens da órbita dos fótons ao redor do BN. Para isto, supomos que o raio de luz se propaga desde uma posição inicial $x_i = 0$ com um tempo próprio inicial $\tau_i = 0$, por esta razão é conveniente reescrevermos (4.22) da seguinte forma

$$\tau'[x] = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{u^2(1-\frac{2}{x})}{x^2}}}. \quad (4.23)$$

A solução dessa expressão será fundamental para descrição da trajetória dos raios de luz em torno do BN. Essa equação (4.23) resolvida numericamente, só tem dependência de um único parâmetro, o parâmetro de impacto u , como já vimos anteriormente. O parâmetro de impacto vai nos indicar a posição da geodésica com respeito a posição do observador, podendo estar mais próximo ou mais longe da linha de visão do observador.

Para o modelo teórico utilizado na literatura, e que serviu como referência em nosso trabalho, consideramos que o disco de acreção ¹ é infinitamente fino e fixo no plano equatorial. Além disso, ele deve ser opticamente fino, indicando que cada raio de luz percorrendo $n/2$ órbitas contribui para o resultado final da imagem.

A figura (11) nos mostra os diferentes tipos de raios de luz em relação ao horizonte de eventos de um BNE. O primeiro caso é o dos raios na cor laranja, $n < 3/4$ que são aqueles que interceptam o disco de acreção uma única vez. Em seguida, temos os raios de luz que estão na cor magenta, $3/4 < n < 5/4$, que interceptam o disco de acreção ao menos duas vezes e, por último, os raios de luz na cor vermelha $n > 5/4$ que cortam o plano equatorial no mínimo três vezes. [43]

¹ Região em forma de disco, onde se acumula matéria (essencialmente poeira ou gás) o em torno de um objeto massivo, como uma estrela de nêutrons ou um buraco negro [31].

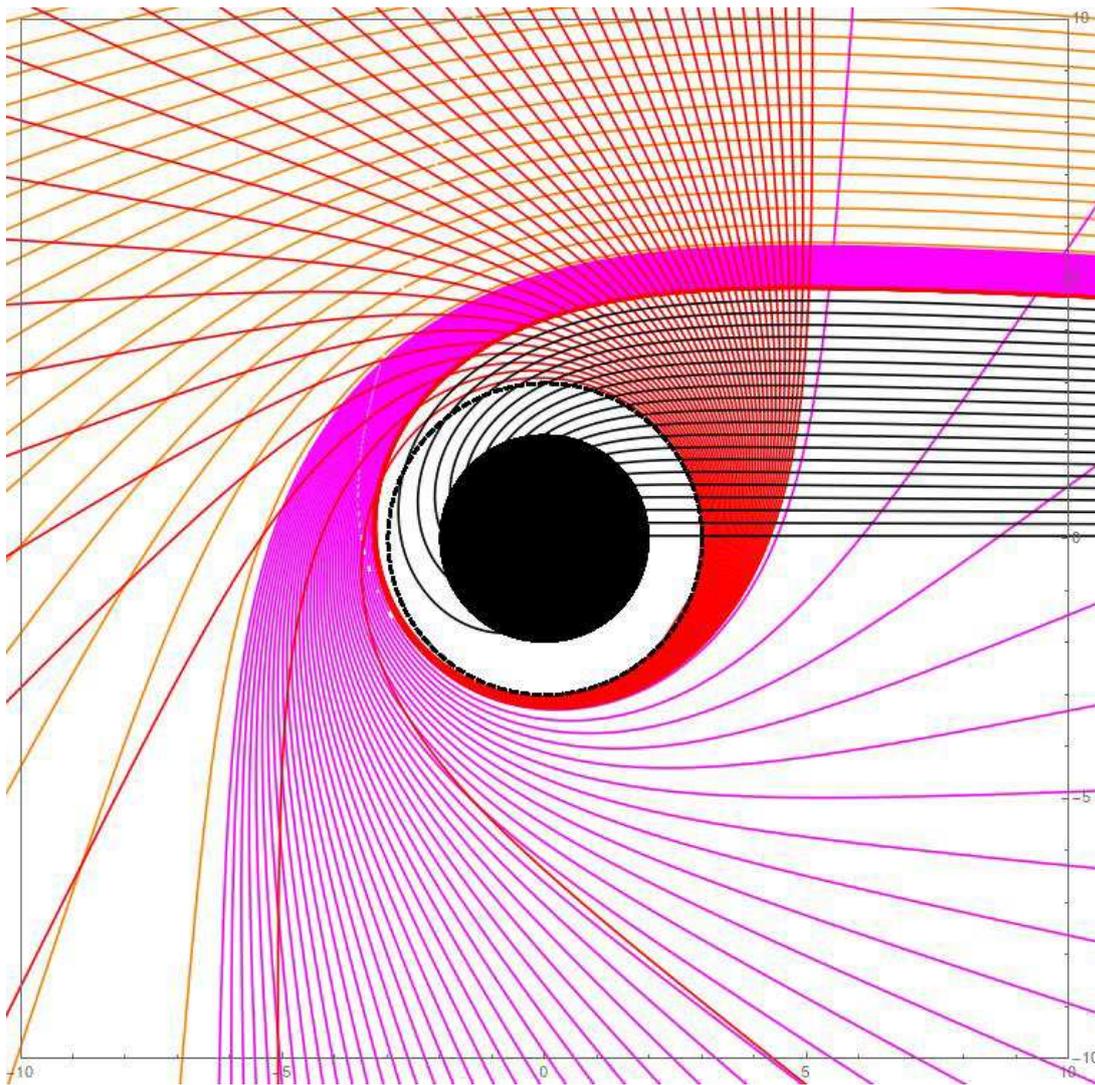


Figura 11 – Comportamento dos raios de luz em um espaço-tempo tipo Schwarzschild em função do parâmetro de impacto u . O círculo tracejado preto é a esfera de fótons, raios de luz na cor vermelho: Anel de fótons, raios de luz na cor magenta: efeito lente, raio de luz na cor laranja: imagem direta, o círculo de fundo preto representa o horizonte. Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].

Como passo seguinte em nosso estudo, pretendemos reproduzir o resultado da Figura 12 que exhibe o comportamento de uma fração de n fótons em relação ao ângulo total φ no plano azimutal.

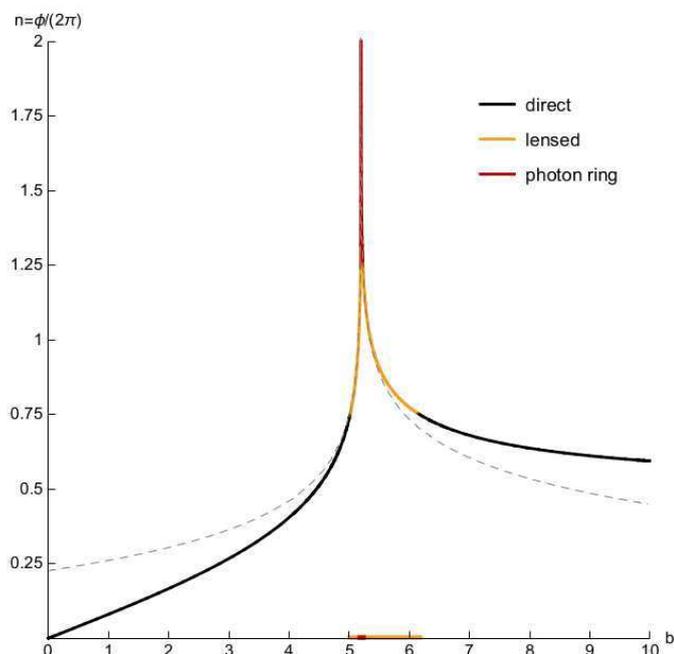


Figura 12 – Número de órbitas $n \equiv \pi/2\pi$ em função do parâmetro de impacto u . A linha tracejada é o ângulo de desvio exato, a linha na cor preta é a emissão direta, a linha na cor laranja é o efeito lente e a linha na cor vermelha é o anel de fótons. Figura extraída de [8]

Uma vez que o raio de luz irá extrair energia do disco de acreção sempre que passar por ele, cada uma das configurações contribui de forma diferente para a aparência observacional do OCM. Ou seja, a intensidade se atenua ou diminui a depender das próprias características do disco. No capítulo a seguir, iremos examinar o tipo de intensidade para cada tipo de sombra de um BNE.

4.3 Perfis de Intensidade de Sombras de Buracos Negros Estáticos

Como resultado dos efeitos discutidos até aqui, alguns dos fótons que viajam perto do buraco negro permanecem na suas proximidades, enquanto outros podem ser capturados e direcionados para o seu interior, criando o efeito de regiões pouco iluminadas conhecidas como sombras, ao interior da imagem do disco de acreção. A sombra de um buraco negro é modelada pelo perfil do disco de acreção [8]. Em outras palavras, a estrutura de matéria difusa em processo de emissão e absorção é quem pode nos revelar informações importantes sobre a aparência óptica desses objetos astrofísicos.

4.3.1 Emissão do Disco Óptico Geometricamente Fino

Para simplificarmos o estudo, exploramos o cenário onde o processo de radiação se origina em um disco de acreção fino, geometricamente estático e próximo ao buraco negro [8]. Ao considerar a região frontal do disco, iremos lidar com cenários mais realistas [9] que modelam acreção de gás em queda livre ou em órbita. Como uma forma de complementar a discussão sobre o nosso estudo, no apêndice C, apresentamos o processo de acreção em objetos compactos e de simetria esférica.

Supomos que os jatos do plasma do disco de acreção fino são emitidos isotropicamente do referencial das linhas de universo estáticas, a intensidade específica obedece a

$$I_{obs}(r_{obs}, \nu_{obs}) = g(r)^3 I_{em}(r, \nu) , \quad (4.24)$$

sendo $g(r) = \nu_{obs}/\nu = \sqrt{f(r)}$ denominado fator de *redshift*, $I_{obs}(r_{obs}, \nu_{obs})$ a intensidade observada e $I_{em}(r, \nu)$ a intensidade específica emitida do disco de acreção. [44]

No contexto de um BNE, $\mathcal{I}_\nu = I_\nu/\nu^3$ é invariante ao longo do caminho ótico (CO) do fóton. Dessa forma, podemos dizer que a intensidade total resultante de uma fonte emissora de radiação localizada em um referencial de repouso r é, conforme [9], expressa da forma

$$I_{obs}(r_{obs}) = \int I_{obs}(r_{obs}, \nu_{obs}) d\nu_{obs} = \int g(r)^4 I_{em}(r, \nu) d\nu = g(r)^4 I_{em}(r) . \quad (4.25)$$

A partir da técnica do traçado inverso de raios de luz, supondo que o percurso do raio luminoso a partir de um observador foi enviado para o passado, ele irá interceptar o disco de acreção em algum ponto, capturando assim, o seu brilho. Como o brilho aumenta conforme o número de vezes com que o raio de luz toca o disco de acreção, somamos todas essas contribuições da luminosidade e chegamos a

$$I_{obs}(u) = \sum_g \left[g^4 I_{em} \right] \Big|_{r=r_m(u)} , \quad (4.26)$$

sendo $r_m(u)$ as chamadas funções de transferência (FT), que preveem o comportamento da luz ao viajar próxima de campos gravitacionais intensos. [8]

A função de transferência com $m = 1$ corresponde à “imagem direta” do disco de acreção. A inclinação é aproximadamente 1 em toda a sua extensão e, por esta razão, o perfil da imagem direta é essencialmente o perfil de origem do desvio para o vermelho (redshift). A segunda função de transferência ($m = 2$), está associada ao “efeito lente”, incluindo uma porção do “anel de fótons” para esta faixa do parâmetro de impacto u .

Conforme os valores de u começam a aumentar na região do “anel de lente” o observador perceberá uma imagem diminuída da região posterior do disco, com uma desmagnificação que varia conforme à curva. A terceira e última função de transferência

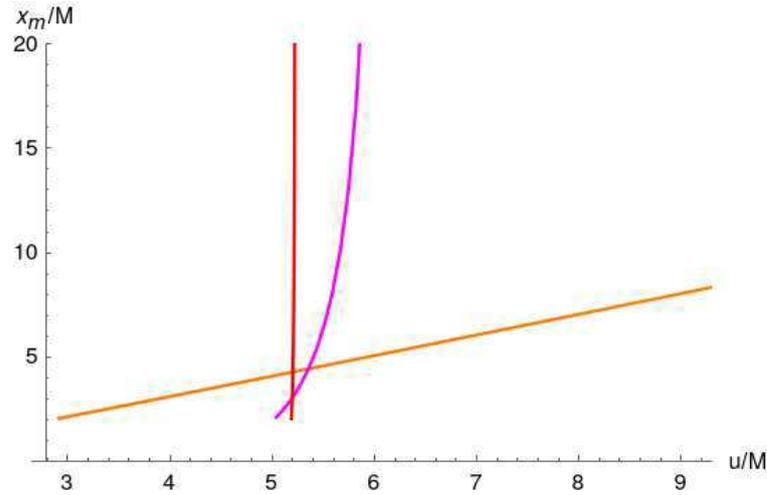


Figura 13 – As três primeiras funções de transferência para as emissões direta (linha laranja), efeito lente (linha magenta) e anel de fótons (linha vermelha) para a solução de Schwarzschild. Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].

($m = 3$) corresponde apenas ao “anel de fótons”. Para esta faixa de u a inclinação está muito próxima do infinito, neste caso, o observador perceberá uma imagem extremamente desampliada da parte frontal do disco [8].

Essas ferramentas nos proporcionam interpretações mais robustas das características observacionais das sombras de buracos negros, para além de serem somente áreas escuras vistas contra a luminosidade do ambiente circundante.

Ao utilizarmos as funções de transferência, consideraremos o que temos na literatura como “modelos de brinquedo” (*toy models*) para o disco de acreção². Conforme discutido em [18] e [44], consideramos um modelo de emissão específico do disco de acreção, que depende exclusivamente da coordenada radial e, com isso, calcularemos a intensidade para cada um dos três tipos de emissão. Essa abordagem nos permitirá verificar de forma efetiva a contribuição dos raios de luz via imagem direta, efeito lente e anel de fótons, para visualizar a sombra do BN.

Modelo 1. Para o primeiro caso, consideramos que a emissão tem um pico acentuado no ISCO para um observador local tipo tempo, enquanto cai assintoticamente na região interna, e assume o valor zero para fora dela. Para este perfil, o horizonte é $r_{ISCO} = \sqrt{36M^2 - a^2}$. Logo, tomando $a = 0$ obtemos $r_{ISCO} = 6M$. Assumindo unidades gaussianas $G = M = c = 1$, teremos o seguinte:

$$I_1(r) = \begin{cases} \frac{1}{(r - (r_{ISCO} - 1))^2}, & \text{se } r \geq r_{ISCO} \\ 0, & \text{se } r < r_{ISCO} \end{cases} \quad (4.27)$$

A partir desse primeiro resultado, podemos exibir os gráficos para os perfis de intensidade e para a sombra, apresentados abaixo na Figura 14.

² Cenários realistas consideram uma emissão do plasma mais complexa, e exigem simulação magneto-hidrodinâmica completa [45].

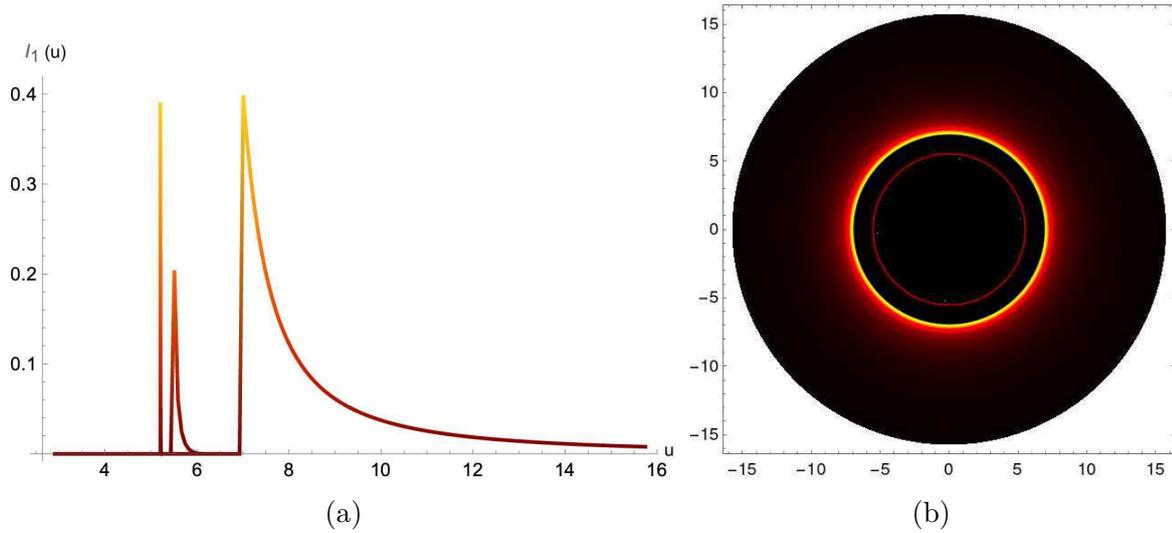


Figura 14 – Modelo 1: (a) Intensidade luminosa observada para cada tipo de emissão; (b) Aparência óptica do BN com máxima emissão no r_{ISCO} . Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].

No modelo 1, a emissão se inicia no ponto da órbita estável mais interna (ISCO) para observadores tipo tempo, uma vez que a luminosidade total é dominada amplamente pela emissão direta em relação aos parâmetros de impacto, apresentando um anel mais fino e de maior brilho (efeito de lente) e terminando em um anel ainda mais fino e mais escuro (anel de fótons), que é pouco perceptível a olho nu.

A figura 14a nos mostra que a emissão direta é a curva de maior altura, prevalecendo sobre os demais tipos. Esse fenômeno ocorre quando o raio de luz desde um observador é propagado em sentido reverso, atingindo o disco de acreção com uma inclinação de $\pi/2$ somente uma única vez. Por outro lado, para uma inclinação de $3\pi/2$, resulta na imagem tipo lente: o pico de menor amplitude da figura. Por fim, quando temos um ângulo de $5\pi/2$, temos o anel de fótons, que é o maior ângulo total, ou seja, todos os raios de luz deram mais de uma volta, e acabam ficando em sua maioria concentrados nessa reta praticamente vertical.

Modelo 2. No segundo caso, a emissão é resultante do disco que chega até a esfera de fótons. Para este perfil a expressão é dada por $r_{sph} = \sqrt{9M^2 - 1}$. Com $a = 0$ vamos ter um resultado já conhecido: $r_{sph} = 3M$.

$$I^2(r) = \begin{cases} \frac{1}{(r - (r_{sph} - 1))^3}, & \text{se } r \geq r_{sph} \\ 0, & \text{se } r < r_{sph} \end{cases} \quad (4.28)$$

Assim, no modelo 2, temos o caso em que a borda interna do disco de acreção estende-se até a curva crítica, o que possibilita emissão através da correção do redshift gravitacional. O que se torna a principal fonte de emissão para a região do fator de parâmetro de impacto.

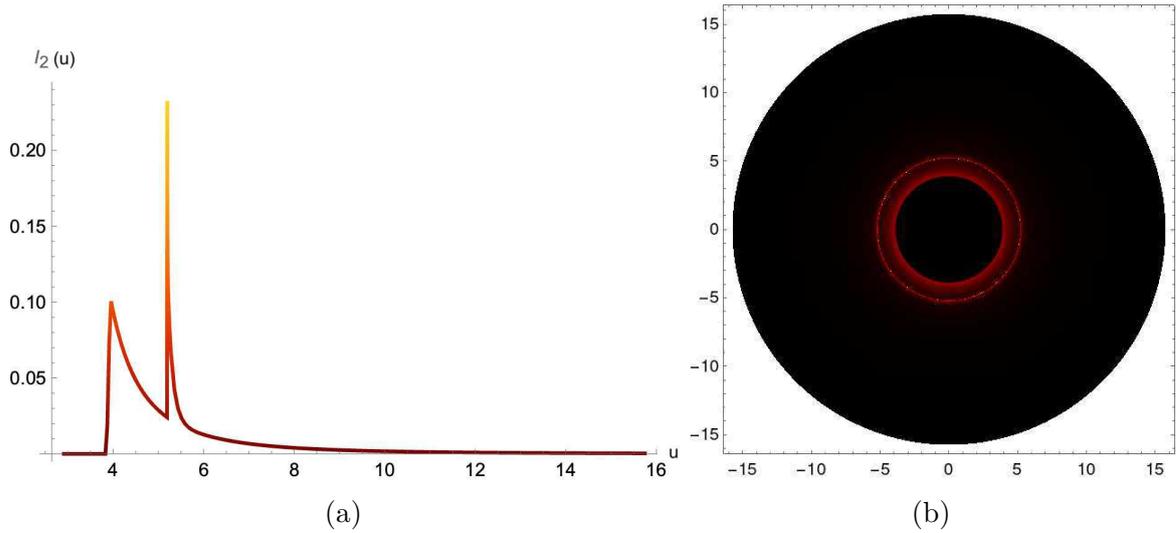


Figura 15 – Modelo 2: (a) Intensidade luminosa observada para cada tipo de emissão; (b) Aparência óptica do buraco negro que inicia a emissão fora da curva crítica. Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].

Assim, como vemos na Figura 15, valores maiores do parâmetro de impacto geram um pico mais alto, combinando as emissões do tipo lente e anel de fótons, em relação à emissão direta. O resultado é uma aparência óptica de um brilho dominante, com um anel mais fino na parte externa.

Comparando a Figura 15a com o perfil anterior, verificamos que a transferência de imagens não é tão nítida quanto antes. Anteriormente, era possível identificar a contribuição de cada um dos caminhos óticos (OC) dos fótons do disco de acreção até o observador em um dado espaço-tempo. Isso resultava em três tipos de imagens: imagem direta, defletida (por efeito de lente gravitacional), e a proveniente da curva crítica (esfera de fótons). Percebemos que somente a partir de $r = 3M$ não temos luz, e após o primeiro evento, a emissão produz uma imagem direta. Em seguida, está o efeito lente e, sobreposto a ele, o anel de fótons. Por outro lado, o perfil circular apresenta um brilho mais intenso para o anel de fótons, o que não era observado no primeiro modelo.

Modelo 3. O último modelo estudado nesse trabalho corresponde ao caso em que a emissão vai até o horizonte de eventos.

$$I^3(r) = \begin{cases} \frac{\pi/2 - \arctan(r-5)}{\pi/2 - \arctan(r_{hor}-5)}, & \text{se } r \geq r_{hor} \\ 0, & \text{se } r < r_{hor} \end{cases} \quad (4.29)$$

O horizonte é dado por $r_{hor} = \sqrt{4M^2 - a^2}$, resultando em $r_{hor} = 2M$ para $a = 0$. Para este perfil levamos em consideração não somente a intensidade, mas também a influência do *redshift* gravitacional.

No modelo 3, a extensão da borda fina do disco até o horizonte de eventos resulta em uma região de maior amplitude de luminosidade na radiação observada. Percebemos

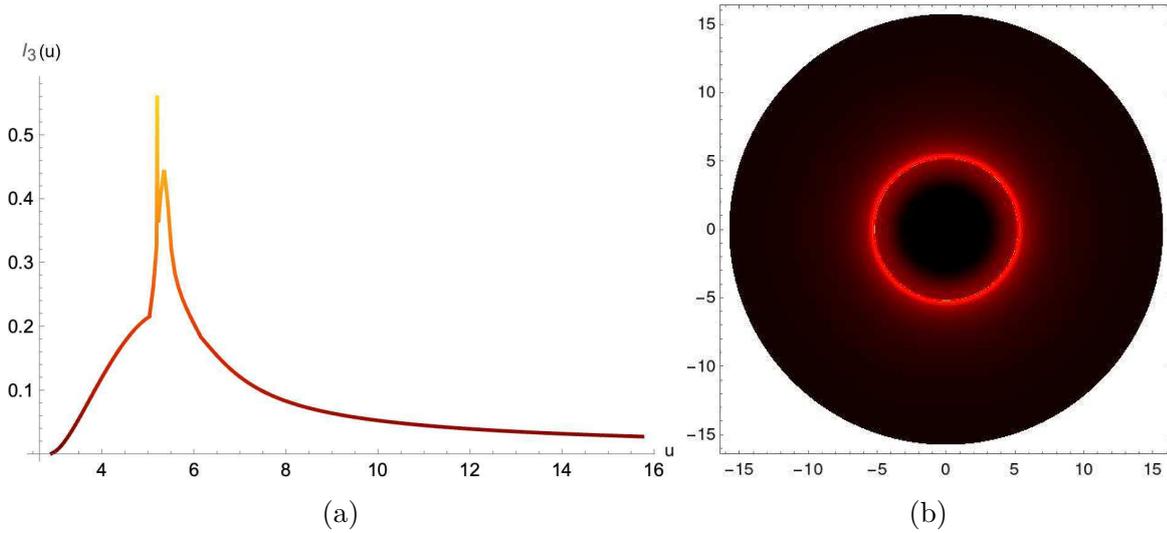


Figura 16 – Modelo 3: (a) Intensidade luminosa observada; (b) Aparência óptica do buraco negro cuja emissão vai até o horizonte. Gráfico reproduzido com o código Mathematica [7].

agora (Fig. 16a) que a emissão do efeito lente e do anel de fótons aparecem como dois picos separados, no entanto, sobrepostos à emissão direta. A análise desses resultados indica que a aparência óptica revela uma borda mais luminosa e mais espessa no centro, e outro anel, mais fino e fraco, na borda interna.

A figura (16a) indica que, quando a emissão está muito próxima do horizonte de eventos, a intensidade luminosa é consideravelmente alta [8]. No entanto, o redshift associado é também extremamente elevado, o que leva o raio de luz a ser capturado pelo horizonte de eventos. Por essa razão, a intensidade máxima observada está mais na parte interna, onde o redshift é maior e a intensidade é reduzida.

De maneira geral, para discos ópticos de acreção finos, concluímos que:

- A emissão direta é dominante nos três casos, com contribuição mínima da imagem tipo lente e insignificante do anel de fótons;
- O anel de fótons ocorre sempre próximo a $5,2 M$, enquanto o efeito lente ocorre fora desse raio;
- O tamanho da área escura central depende do modelo de emissão;

Em nossos estudos, abordamos o caso geral de modelos de objetos teóricos ultracompactos, que tem sido fundamentais para RG desde a década de 1960. A existência de buracos negros estáticos (BNE), os quais possuem a métrica tipo Schwarzschild, tem implicações físicas significativas na física teórica, especialmente na cosmologia e na astrofísica. Um possível caminho para estender a nossa análise realizada a partir dos trabalhos [18], [43] e [46], é considerarmos outras fontes que abordam, por exemplo, o caso de BNs com

dois horizontes. No trabalho [44] foi considerado um espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter, muito útil para investigar o cenário de um universo em expansão.

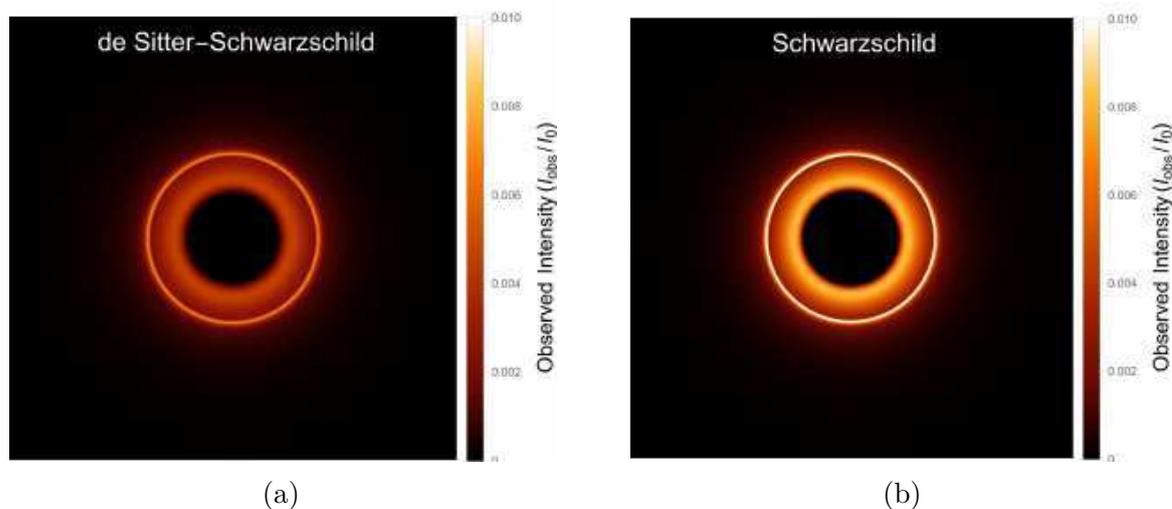


Figura 17 – Aparência de buracos negros. O brilho de Schwarzschild (b) é mais intenso do que do Schwarzschild-de-Sitter (a). Figura extraída de [9]

Na Figura 17, verificamos a relevância do efeito do anel de fótons nesse caso, quando comparado com a solução de Schwarzschild. Podemos ver nitidamente que as imagens, tem similaridade, porém são claramente distintas: para Schwarzschild o brilho é mais acentuado do que no caso Schwarzschild-de-Sitter, pois além de ter que levar em consideração o modelo de disco de acreção e do espaço-tempo ao redor do BN, o horizonte cosmológico de Sitter contribui de forma significativa para a própria imagem do objeto compacto.

Nesse capítulo, nosso intuito foi explicar o significado de cálculos analíticos e numéricos por meio de modelos simplificados para examinar a aparência observacional de objetos massivos ultracompactos. Verificamos que a sombra é influenciada diretamente pelo perfil do disco de acreção e pelo redshift gravitacional, e isso foi percebido por meio da interpretação de gráficos obtidos com o auxílio de software de cálculo numérico-simbólico.

A partir das discussões aqui apresentadas, percebemos que, ao investigar os processos astrofísicos que envolvem a variação rápida de fontes, é do interesse coletivo de grande parte da comunidade científica o estudo da acreção de gás em objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros.

Capítulo 5

Conclusões

O fenômeno óptico de sombras de buracos negros desperta um fascínio entre o público leigo, pois surge a pergunta: como é possível a existência de sombras em um buraco negro? Afinal, esses objetos ultracompactos não emitem radiação e, portanto, as sombras não deveriam existir. No entanto, a análise cuidadosa do assunto revela a presença de regiões pouco iluminadas nas imagens calculadas para a luz advinda de uma região próxima a buracos negros, especialmente dos discos de acreção que os cercam. Essas regiões escuras são o resultado do fortíssimo campo gravitacional gerado pelo buraco negro, que produz uma enorme distorção do espaço-tempo ao seu redor. A curvatura impede que a luz seja capturada diretamente pelo buraco negro, fazendo com que ela sofra “lentificação” ou, ainda, orbite uma ou mais vezes em torno dele antes de chegar no observador. Como resultado, observamos que a luz alcança o observador com diferentes intensidades em função do caminho real percorrido e, ainda, delimita uma região escura na imagem advinda da região central do buraco negro: uma sombra correspondente à parte dos raios de luz que não conseguem escapar do horizonte.

Já entre especialistas da área, o estudo das sombras de buracos negros é uma linha de pesquisa de física teórica nos campos da astrofísica que tem recebido cada vez mais atenção nos anos recentes, devido ao seu grande potencial de trazer informações complementares às obtidas pela incipiente astronomia de ondas gravitacionais puras e multi-mensageira, gerada a partir da coalescência de objetos ultracompactos (tipicamente, buracos negros e/ou estrelas de nêutrons)

Neste estudo abordamos o caso mais simples, que envolve objetos compactos, estacionários e com simetria esférica, acompanhados de um disco fino de acreção. A partir dessa abordagem, desenvolvemos os fundamentos teóricos necessários para a investigação do problema de sombras em buracos negros, o que exigiu o desenvolvimento de cálculos analíticos e a análise de códigos numéricos que representam modelos da aparência observacional desses objetos.

Nos capítulos iniciais, discutimos em forma concisa alguns dos tópicos que são a base teórica mais fundamental para o avanço de nossos estudos. Nesse primeiro enredo, dedicamos uma breve releitura da área da física que investiga o comportamento da luz e dos fenômenos a ela associados, a ótica clássica. Interessados na trajetória da luz, foi discutida a importância do Princípio de Fermat e suas possíveis consequências em um fenômeno

explicado pela teoria moderna, o das lentes gravitacionais. Ainda neste estágio, fizemos a conexão entre a ótica clássica e a Relatividade Geral, introduzindo alguns conceitos básicos como geodésica, métrica e espaço-tempo de Schwarzschild. A partir destes assuntos, foi possível avançar para o nosso objeto alvo de estudo: as sombras de buracos negros.

Em sequência, no capítulo 3, estudamos o efeito resultante da trajetória da luz quando se aproxima de objetos massivos, compactos e esfericamente simétricos. Estabelecemos que o percurso das geodésicas no espaço-tempo implica na deflexão da luz em um certo ângulo. Acompanhando a literatura especializada, chegamos à solução exata para o ângulo de desvio da luz na presença de objetos massivos compactos. Para isso desenvolvemos de forma analítica para obter a medida da proximidade entre o raio de luz e o horizonte de eventos de um buraco negro. Utilizamos para isso o formalismo de Hamilton, onde o parâmetro de impacto, uma quantidade imprescindível para o entendimento do fenômeno estudado, é definido como o quociente entre o momento angular e a energia. Em seguida, investigamos a trajetória dos fótons em duas aproximações, a do limite de campo gravitacional fraco (WDL), e a do limite de campo gravitacional forte (SDL). Comparamos essas duas aproximações com o ângulo de deflexão da luz exato, e verificamos a influência do campo gravitacional forte no cenário do fóton muito próximo do horizonte de eventos de um buraco negro. Isto permitiu estabelecer um valor crítico do parâmetro de impacto: quando o parâmetro de impacto de um fóton é inferior ao valor crítico, o fóton é capturado pelo horizonte. Caso contrário, o raio de luz é desviado. Partículas que experimentam valores de deflexão superiores a 2π , resultam no raio de luz realizar muitas voltas em torno do centro, e os fótons podem ficar aprisionados nessa região.

Posteriormente, exploramos o fenômeno de lente gravitacional, em que evidenciamos mediante gráficos interpretativos que, à medida que um fóton se aproxima do objeto massivo compacto, sua trajetória sofre desvios mínimos quando os valores do parâmetro de impacto são superiores a $10r_s$. Ou seja, a depender da escala entre a fonte e o observador, a deformação do espaço-tempo exerce uma perturbação mínima ou incluso imperceptível. Por fim, revisamos o Princípio de Fermat e, a partir dessa análise, observamos que em um campo gravitacional intenso a ótica clássica é sensivelmente afetada. O índice de refração sofre uma interferência direta devido à geometria do espaço-tempo. Em seguida, revisamos a teoria de transferência radiativa, na qual analisamos o fenômeno da intensidade luminosa observada ao redor do disco de acreção. Nesta seção inicial, abordamos tanto o formalismo clássico quanto o relativístico.

Finalmente, no capítulo 4, que é a parte central deste trabalho, examinamos as características observacionais da aparência óptica de buracos negros estáticos. Retornamos e aprofundamos nossas análises anteriores para as geodésicas nulas. Desenvolvemos os cálculos analíticos para apresentar um conceito teórico crucial em nossa investigação: a esfera de fótons. Estabelecemos uma relação entre a esfera de fótons e o potencial efetivo,

ressaltando que ela contribui para a compreensão do fenômeno, apesar de não haver uma correspondência experimental direta desse efeito. Isso contrasta com a sombra, que pode ser medida por meio de telescópios, como os trabalhos realizados pelo EHT, por exemplo.

Nessa fase, examinamos o comportamento dos raios de luz diante do cenário físico estudado, empregando a técnica de traçado inverso. Por meio da análise e implementação de um código desenvolvido na plataforma Mathematica, facilitado por um grupo de pesquisa em colaboração, conseguimos desenvolver cálculos numéricos para determinar parâmetros essenciais e gerar gráficos para obter uma melhor compreensão do fenômeno investigado.

Finalmente, recorrendo novamente ao estudo numérico, analisamos três perfis de intensidade luminosa para cada tipo de emissão proveniente do disco óptico de acreção, destacamos a diferença entre cada um deles. Isso permitiu interpretações mais robustas do comportamento das sombras em buracos negros estáticos. O estudo nos mostrou que a sombra de um buraco negro é afetada diretamente pelo próprio disco de acreção e pelo redshift gravitacional.

Em nosso trabalho, estudamos sombras, anéis e a esfera de fótons de um objeto massivo e compacto, descrito pela solução exterior de Schwarzschild.

Observamos que para um disco de acreção opticamente e geometricamente fino, a borda externa da sombra, a partir de uma orientação frontal, pode variar para diferentes tipos de emissão e depende do tamanho do buraco negro. Nos três modelos analisados, investigamos os tipos de raios de luz e suas contribuições para a formação da sombra do BN.

No primeiro caso examinado, percebemos que a partir de $r = 6M$, que é o raio da órbita interna mais estável (ISCO), temos intensidade luminosa, para valores inferiores a esse raio, não há informação, ou seja, os raios de luz sucumbiram à atração gravitacional do BN e caíram no horizonte de eventos. Neste perfil, a região de emissão está significativamente distante das órbitas circulares da curva crítica de fótons, ou seja, em $r = 3M$. No primeiro modelo, diferenciamos as intensidades luminosas de cada tipo de emissão, sendo a imagem direta predominante neste perfil específico, por outro lado, o anel de fótons é pouco perceptível.

No segundo caso investigado, a região de emissão está mais ao interior da geometria, atingindo seu pico em $r = 3M$, e caindo em seguida abruptamente para zero. Neste perfil, os efeitos do redshift gravitacional diminuem sensivelmente o fluxo de radiação observada. Uma notável observação a ser feita nesse segundo modelo é que a emissão da imagem tipo lente e a do anel de fótons estão sobrepostas à da imagem direta. Devido a esta configuração, há uma significativa melhora na visualização da emissão dos raios de luz dessa área e, conseqüentemente, do próprio anel de fótons. Nesse modelo, a emissão

direta ainda é dominante, no entanto, há uma certa contribuição do efeito lente para a intensidade total observada.

Por fim, no terceiro modelo examinado, a borda interna do disco de acreção estende-se até o horizonte de eventos, em $r = 2M$. Esse efeito configura uma região de luminosidade muito mais ampla na emissão observada em relação aos modelos anteriores. Observamos que o anel de fótons e a imagem tipo lente aparecem como dois picos separados, porém sobrepostos com a emissão direta. Como resultado dessas contribuições, o resultado observado é uma região de ampla luminosidade, com um anel bem largo no meio, e um anel mais tênue em seu interior. Portanto, as medidas realizadas pelo *EHT*, de acordo com nossos estudos, estão intrinsecamente relacionadas à confiabilidade das suposições teóricas que fundamentam as imagens simuladas utilizadas para ajustar as observações.

As perspectivas que temos a partir do nosso estudo incluem a exploração de métricas distintas da de Schwarzschild, notadamente o caso de buracos negros com rotação, estendendo a abordagem para uma descrição mais realística. Pretendemos examinar a correspondência entre o conhecimento consolidado na literatura sobre o assunto e as implicações mais ricas e diversas que obteríamos. Isso significa que há uma quantidade significativa de informações a serem coletadas e exploradas em trabalhos futuros.

Acreditamos que o presente estudo tem contribuído para uma compreensão mais aprofundada da aparência dos buracos negros e dos efeitos gravitacionais que influenciam a trajetória da luz ao seu redor, auxiliando na interpretação de observações e na validação de teorias relacionadas à Relatividade Geral, e aos buracos negros em particular.

O conhecimento adquirido poderá vir a se tornar uma ferramenta de grande valor em um futuro próximo, fornecendo importante base para a incursão em projetos de pesquisa na área astrofísica e/ou física de buracos negros.

Apêndices

APÊNDICE A

Intensidade Invariante de Lorentz

A intensidade invariante de Lorentz é resultante da conservação do volume do espaço de fase e da conservação do número de partículas. [33]

Supomos um volume do espaço de fase \mathcal{V} conectado por um pequeno feixe de partículas. Para o referencial em movimento, essas partículas ocupam um elemento de volume infinitesimal $d^3x = dx dy dz$

O teorema de Liouville garante que o volume do espaço de fase permanece inalterado com a variação de um parâmetro afim λ , ou seja,

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\lambda} = 0 . \quad (\text{A.1})$$

Desde que o número de partículas também é um invariante de Lorentz ao longo de λ , a densidade do espaço de fase também é, notamos que,

$$f \equiv \frac{dN}{d\mathcal{V}} . \quad (\text{A.2})$$

No caso dos fótons, temos que $|p| = E$ e $d^3p = E^2 dE d\Omega$, onde $d\Omega$ é o elemento infinitesimal de ângulo sólido. Reescrevemos o movimento do feixe de partículas no volume infinitesimal função do elemento de área $d^3x = dA dt$ (aqui por simplicidade adotamos a convenção $c \equiv 1$),

$$f = \frac{dN}{E^2 dA dt dE d\Omega} . \quad (\text{A.3})$$

Como a intensidade específica dos fótons é dada por:

$$I_E = \frac{E dN}{dA dt dE d\Omega} , \quad (\text{A.4})$$

onde $[I_\nu] = \text{ergs s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$.

O fluxo de energia de um fóton, dado um certo elemento de área dA e algum vetor normal arbitrário \hat{n} se relaciona com a frequência ν ao longo do caminho do raio de luz, de modo

$$F_\nu \equiv \int I_\nu \hat{n} d\Omega , \quad (\text{A.5})$$

onde $dF_\nu = I_\nu \cos \theta d\Omega$.

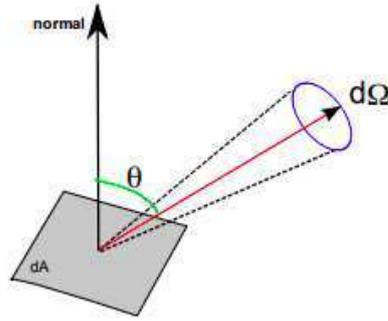


Figura 18 – Fluxo líquido F_ν e intensidade específica I_ν .

Integrando sobre todos os ângulos

$$F_\nu = \int_{4\pi \text{ster}} I_\nu \cos \theta d\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_0^{2\pi} I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\phi, \quad (\text{A.6})$$

obtemos o fluxo líquido. Verificamos então que a intensidade específica é proporcional ao fluxo radiante dividido pelo ângulo sólido da fonte emissora, ou $I_\nu \propto F_\nu/\Delta\Omega$. Além disso, a medida que o ângulo sólido diminui, o fluxo se reduz pela lei do inverso do quadrado da distância. Por essa razão, a intensidade luminosa é independente da distância. [34]

Para mostrar com maiores detalhes que I_ν se conserva no espaço vazio, consideramos uma fonte de luz monocromática ao longo de um caminho.

A densidade de fótons por energia proporcional ao espaço de fase

$$dN = f(\vec{r}, p) = \vec{d}^3r d^3p. \quad (\text{A.7})$$

Pelo teorema de Liouville, a radiação incidente é muito pequena em comparação a área. Com isso, temos:

$$dN = f(\vec{r}, \vec{p}) = dt dA \cos \theta p^2 dp d\Omega, \quad (\text{A.8})$$

sendo $p = E = h\nu$. Após manipularmos de forma algébrica (A.8) obtemos:

$$dE = (h\nu) f(\vec{r}, \vec{p}) dt dA \cos \theta (h\nu)^2 (h d\nu) d\Omega \quad (\text{A.9})$$

Resolvendo essa expressão, obtemos

$$dE = 2h\nu^3 f(\vec{r}, \vec{p}) dA dt d\Omega d\nu. \quad (\text{A.10})$$

Comparando este resultado com a intensidade específica I_ν , observamos que

$$I_\nu = 2h\nu^3 f \quad (\text{A.11})$$

Desde que $I_\nu/\nu^3 \propto f$ é uma quantidade invariante de Lorentz, pois o espaço de fase $f \propto dN d^3x d^3p$ é também invariante. E segue que,

$$\mathcal{I} = \frac{I_\nu}{\nu^3} = \frac{I_\nu}{E^3} \quad (\text{A.12})$$

é uma quantidade invariante de Lorentz.

APÊNDICE B

Esfera de Fótons do Buraco Negro de Schwarzschild-de-Sitter

A métrica de Schwarzschild-de-Sitter é da forma:

$$ds^2 = -f(r)t^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\Phi}^2 \quad (\text{B.1})$$

O lagrangeano para essa métrica é

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{1}{2}\left(-f(r)t^2 + \frac{1}{f(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\Phi}^2\right) \quad (\text{B.2})$$

Das equações de Euler-Lagrange, obtemos:

$$\dot{t} = \frac{E}{f(r)} \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{\phi} = \frac{\Phi}{r^2} \quad (\text{B.4})$$

Onde E e Φ são as duas constantes de movimento.

Sendo $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2$ e $\frac{1}{f(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2}$.

O elemento de linha da métrica de Schwarzschild-de-Sitter em unidades gaussianas ($G = c = 1$) para geodésicas nulas ($ds^2 = 0$) é dado por

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2} + r^2d\Phi^2 \quad (\text{B.5})$$

Resolvendo e rearranjando em ambos os lados, obteremos a seguinte igualdade

$$\frac{\frac{2M}{r_{sph}^2} - \frac{2\Lambda}{3}r_{sph}}{r_{sph}} = \frac{1 - \frac{2M}{r_{sph}} - \frac{\Lambda}{3}r_{sph}^2}{r_{sph}^2} \rightarrow \frac{m}{r_{sph}^3} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{2M}{r_{sph}^3} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{1}{r_{sph}^2} \quad (\text{B.6})$$

Ao resolvermos (B.6), chegamos a $r_{sph} = 3M$, o que nos mostra que o raio de qualquer geodésica nula em órbita circular é independente da constante cosmológica.

O resultado obtido para a esfera de fótons é diferente de zero, o que já era algo esperado, no entanto iremos detalhar um pouco sobre como esses cálculos rigorosos puderam ser aplicados dentro desse contexto de estudo.

De acordo com [37], $f(r)$ deve ser positivo e sua derivada também, pois a métrica é preservada na região externa para um espaço-tempo de Sitter permitindo a propagação das informações. Notamos que,

$$\frac{2M}{r^2} - \frac{2\Lambda}{3r} = 0 \rightarrow r_{extremo}^3 = \frac{3M}{\Lambda} \leftrightarrow r^3 = \frac{r_{sph}}{\Lambda} \neq r_{sph}^3 \quad (\text{B.7})$$

Supondo que $r_{sph} = r_{extremo} = 3M$, então

$$27M^3 = \frac{3M}{\Lambda} \leftrightarrow \Lambda = \frac{1}{9M^2}, \quad (\text{B.8})$$

o que representa um absurdo! Notamos que

$$0 < \Lambda < \frac{1}{9M^2} \quad (\text{B.9})$$

é uma condição que não é aplicada em todos os cenários [38].

Em se tratando de um buraco negro com dois horizontes [37], teremos o horizonte do buraco negro e o horizonte cosmológico, o que se aplica ao caso de Schwarzschild-de-Sitter.

Dessa forma, há um raio máximo, e com isso $f(r_{extremo})$, que é positivo e também é um máximo, pois estamos no domínio da comunicação externa, então segue

$$f(r_{extremo}) = f\left(\left(\frac{3M}{\Lambda}\right)^{1/3}\right) > 0 \rightarrow \frac{\Lambda}{3}r_{extremo}^3 - r_{extremo} + 2M < 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\leftrightarrow \frac{\Lambda}{3} \frac{3M}{\Lambda} - \left(\frac{3M}{\Lambda}\right)^{1/3} + 2M < 0 \leftrightarrow 27M^3 < \frac{3M}{\Lambda} \leftrightarrow \Lambda < \frac{1}{9M^2}. \quad (\text{B.11})$$

Como estamos no espaço-tempo de Sitter $\Lambda > 0$ sempre! Então, podemos escrever as equações de movimento para a partícula, em termos de M e Λ , notamos que

$$\frac{r_{sph}^2}{f(r_{sph})} = \left(\frac{\Phi}{E}\right)^2 \leftrightarrow \frac{9M^2}{f(3M)} = \left(\frac{\Phi}{E}\right)^2 \quad (\text{B.12})$$

Com isso, chegamos a:

$$\frac{27M^3}{3M - 2M - \frac{\Lambda}{3}27M^3} = \left(\frac{\Phi}{E}\right)^2 \quad (\text{B.13})$$

Sendo $r_{sph} = 3M \neq 0$, chegamos a

$$\left(\frac{\Phi}{E}\right)^2 = \frac{1}{27M^2} - \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{B.14})$$

Para o espaço-tempo de Schwarzschild-de-Sitter, as constantes de movimento devem sempre satisfazer essa condição. O raio da esfera de fótons continua sendo $r_{sph} = 3M$, como no caso Schwarzschild puro. Iremos agora mostrar que as geodésicas nulas para a métrica utilizada são órbitas instáveis.

Primeiramente tomamos as duas constantes de movimento e substituímos em (B.1) chegamos a

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{f(r)} \left(\frac{E^2}{f(r)} - \frac{\Phi^2}{f(r)} \right) \quad (\text{B.15})$$

sendo o potencial uma função da energia e a segunda derivada com respeito em relação a coordenada radial (r_{sph}) é negativa, podemos rearranjar (B.14) de forma conveniente

$$E^2 = \dot{r}^2 f(r) f(r)^{-1} + \frac{\Phi^2}{r^2} f(r) \quad (\text{B.16})$$

com isso, chegamos a

$$\dot{r}^2 + V(r) = E^2, \quad V(r) = \frac{\Phi^2}{r^2} f(r) \quad (\text{B.17})$$

Calculando a segunda derivada do potencial e substituindo $r = r_{sph}$ temos

$$\begin{aligned} V''(r) &= \frac{\Phi^2}{r_{sph}^4} \left(r_{sph}^2 f''(r_{sph}) - 4r_{sph} f'(r_{sph}) + 2f(r_{sph}) \right) \\ &= \frac{\Phi^2}{r_{sph}^4} \left(\frac{4\Lambda}{3} r_{sph}^2 - \frac{16M}{r_{sph}} + 2 \right) \\ &= \frac{\Phi^2}{81M^4} \left(\frac{4}{3}(9\Lambda M^2) - \frac{10}{3} \right). \end{aligned}$$

Recorrendo a (B.9) e aplicando,

$$9\Lambda M^2 < 1 \rightarrow \left(\frac{4}{3}(9\Lambda M^2) - \frac{10}{3} \right) < 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}.$$

Assim,

$$V''(r_{sph}) < \frac{\Phi^2}{81M^4} \left(-\frac{7}{3} \right) < 0 \quad (\text{B.18})$$

Concluimos então que a esfera de fótons no caso de Schwarzschild-de-Sitter quanto para Schwarzschild puro é uma órbita instável. O que significa que embora o fóton possa orbitar a uma distância de $3M$ do BN, qualquer perturbação mínima o fará se desviar dessa órbita.

APÊNDICE C

Acreção Estática Esférica

Um objeto compacto, isolado e estacionário encontra-se localizado em alguma região do espaço-tempo, onde está sujeito á acumulação de material do meio interstelar. Como o processo de acumulação de matéria é dado de maneira uniforme, não há motivos para haver perturbações na geometria do objeto, é preferível assumir uma distribuição esférica durante o processo.

A construção da dinâmica dos fluidos relativísticos para esses objetos compactos e esféricamente simétricos no espaço-tempo propõe que

$$ds = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)d\Omega^2, \quad (\text{C.1})$$

sendo $A(r) > 0$, $B(r) > 0$, $C(r) > 0$ funções de r .

Assumindo que a matéria é um fluido perfeito, que é isotrópico e não homogêneo, supondo variações na densidade de energia em fontes próximas de acreção, o tensor momento-energia [47] é dado por

$$T^{\alpha\beta} = \epsilon(u^\alpha u^\beta + p(u^{\alpha u^\beta} - g^{\alpha\beta})) \quad (\text{C.2})$$

sendo ϵ e p a densidade e a pressão do fluido, respectivamente.

A 4-velocidade do fluido u^α é dada por

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (u^t, u^r, 0, 0), \quad (\text{C.3})$$

onde τ é o tempo próprio e pela geometria esférica, temos $u^\theta = 0$, $u^\phi = 0$.

Com o interesse que todas as quantidades sejam funções de r , impomos a condição de normalização $u_\mu u^\mu = -1$, verificamos que

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{u^2 + B}{AB}} \quad (\text{C.4})$$

Aqui devemos assumir duas condições para resolver as equações de movimento para o fluido de acordo com [48], as quais são:

- A lei de conservação do fluxo de massa ou do número bariônico,

$$(\epsilon u_\alpha)_{;\alpha} = 0 \quad (\text{C.5})$$

- A lei de conservação do momento,

$$(\epsilon + p)u_{\alpha;\beta}u^\beta = -p_{,u_\alpha} - u_{\alpha,p},{}_\beta u^\beta \quad (\text{equação relativística de Euler}) \quad (\text{C.6})$$

Usando o tensor de energia-momento, temos

$$0 = T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} T^{\alpha\beta} \right)_{,\alpha} + \Gamma^{\beta}{}_{\sigma\alpha} T^{\sigma\alpha} \quad (\text{C.7})$$

e com isso obtemos

$$(\epsilon + p)u \frac{A(r)}{B(r)} \sqrt{u^2 + B(r)C(r)} = A_1, \quad (\text{C.8})$$

sendo A_1 uma constante de integração.

Projetando a lei de conservação de energia na 4-velocidade $u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$, e contraindo todos índices, encontramos a equação da continuidade (conservação da energia)

$$u^\alpha \epsilon_{,\alpha} + (\epsilon + p)u_{\alpha;\alpha} = 0. \quad (\text{C.9})$$

Supondo que a pressão e a densidade de energia são expressas por uma função de estado $p(\epsilon) = p$.

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon + p} + \frac{u'}{u} + \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{C'}{C} = 0, \quad (\text{C.10})$$

O primeiro termo com respeito a r é igual a

$$uC(r) \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} e^{\int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p(\epsilon)}} = -A_0, \quad (\text{C.11})$$

onde A_0 uma constante de integração. Combinando (C.11) com (C.8) obtemos

$$(\epsilon + p) \sqrt{u^2 + B(r)} \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} e^{-\int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p(\epsilon)}} = \frac{A_1}{A_0} \equiv A_3, \quad (\text{C.12})$$

Onde A_3 é uma constante de integração que depende de A_1 e A_0 . Pela simetria esférica tomamos $\theta = \pi/2$, e, com isso chegamos a $\sqrt{-g} = C\sqrt{A/B}$. Pela conservação do fluxo de energia, $0 = J^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d}{dr} (J^r \sqrt{-g})$, o que nos leva a

$$\epsilon u \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} C(r) = A_2. \quad (\text{C.13})$$

Dividindo a expressão (C.8) por (C.13), obtemos:

$$\frac{(\epsilon + p)}{\epsilon} \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} \sqrt{u^2 + B(r)} = \frac{A_1}{A_2} \equiv A_4, \quad (\text{C.14})$$

onde A_2 e A_4 são duas constantes arbitrárias. Diferenciamos a (C.14) com respeito a r obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(u \epsilon \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} C(r) \right) &= \frac{u \epsilon (-A(r)C(r)B'(r) + B(r)(C(r)A'(r) + 2A(r)C'(r))) dr}{2\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} B(r)^2} \\ &+ \epsilon \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} C(r) du. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Agora diferenciando com respeito a ϵ chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{(p + \epsilon) \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} \sqrt{u^2 + B(r)}}{\epsilon} \right) &= \frac{\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} \sqrt{u^2 + B(r)} dp}{\epsilon} \\ &+ \frac{(p + \epsilon) (u^2 B(r) A'(r) + B(r)^2 A'(r) - u^2 A(r) B'(r)) dr}{2\epsilon \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} B(r)^2 \sqrt{u^2 + B(r)}} \\ &+ \frac{u(p + \epsilon) \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} du}{\epsilon \sqrt{u^2 + B(r)}}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Simplificando e escrevendo essas duas equações combinadas em termos de d/du e d/dr , chegamos ao seguinte resultado

$$\left(v^2 - \frac{u^2}{u^2 + B(r)} \right) \frac{du}{u} + \left((v^2 - 1) \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{C'}{C} v^2 - \frac{B'}{2(u^2 + B)} \right) dr = 0 \quad (\text{C.17})$$

Onde iremos introduzir a nova variável

$$v^2 = \frac{d \ln(\epsilon + p)}{d \ln \epsilon} - 1. \quad (\text{C.18})$$

Fazendo os parênteses na expressão (C.17) iguais a zero, iremos encontrar o ponto crítico de acreção, localizado em $r = r_c$. Dessa forma, temos

$$v_c^2 = \frac{u^2}{u^2 + B(r)}, \quad (\text{C.19})$$

$$(v_c^2 - 1) \left[\frac{A'(r_c)}{A(r_c)} - \frac{B'(r_c)}{B(r_c)} \right] + \frac{C'(r_c)}{C(r_c)} v_c^2 = \frac{B'(r_c)}{2(u_c^2 + B(r_c))}$$

Decompomos essa expressão em duas quantidades u_c^2 e v_c^2 , e obtemos

$$u_c^2 = \frac{B(r)C(r)A'(r)}{2A(r)C'(r)}, \quad (\text{C.20})$$

$$v_c^2 = \frac{A(r)C'(r)}{C(r)A'(r) + 2A(r)C'(r)} \quad (\text{C.21})$$

sendo u_c^2 a velocidade crítica do fluxo.

A velocidade do som a ser calculada é expressa por

$$c_{s^2} = \left. \frac{dp}{d\epsilon} \right|_{r=r_c} = A_4 \frac{B(r)}{A(r_c)(u_c^2 + B(r))} - 1. \quad (\text{C.22})$$

De acordo com o que definimos anteriormente, as quantidades $A(r)$ e $B(r)$ são constantes que dependem de r e são positivas. Para qualquer métrica esféricamente simétrica e estacionária é possível calcular o raio crítico no espaço-tempo dado.

A taxa de variação de massa de um buraco negro, é calculada integrando o fluxo sobre a superfície bidimensional do BN é dada por

$$\dot{M} = \int T_0^1 dS \quad (\text{C.23})$$

Onde $dS = \sqrt{g d\theta d\phi}$.

Usando (C.23) podemos obter a taxa de variação da massa de um buraco negro da seguinte forma:

$$\dot{M}_{\text{acc}} = 4\pi A_3 M^2 (p_\infty + \epsilon_\infty). \quad (\text{C.24})$$

O resultado é válido para qualquer equação de estado $p(\epsilon) = p$. Assim, a taxa de variação de um ponto de massa orbitando ao redor de um buraco negro é calculada da forma

$$\dot{M}_{\text{acc}} = 4\pi A_3 M^2 (p + \epsilon), \quad (\text{C.25})$$

com isso, a taxa de variação de massa para o objeto massivo, compacto, estático e esféricamente simétrico é completamente independente de $A(r)$ e $B(r)$.

De acordo com a expressão (C.25), observamos que a massa do buraco negro aumenta para qualquer fluido na condição de $\epsilon + p > 0$ na região exterior. Na região interna, supondo que o fluido se comporta como energia escura, então $p + \epsilon < 0$, então a massa do BN diminui.[47]

Em síntese, cenários astrofísicos mais realistas nos mostram que a massa deixa de ser uma constante pura e fixa, ou seja, há uma evidente dependência da densidade de energia e do tempo na massa do BN. Assim, o processo de acreção resulta no aumento da massa, por outro lado, a radiação Hawking implica na sua diminuição.

Referências

- 1 (UFMG), U. F. de M. G. *Refração da Luz*. 2024. Acesso em: 02 de Janeiro de 2024. Disponível em: <<http://demonstracoes.fisica.ufmg.br/artigos/ver/83/6.-Refracao-da-luz>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 23.
- 2 PELÁEZ, J. C. *Optica*. [S.l.]: Librería Pons, 1994. ISBN 8460500624,9788460500629. Citado 4 vezes nas páginas 13, 20, 23 e 24.
- 3 CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. ISBN 0805387323,9780805387322. Citado 7 vezes nas páginas 13, 17, 20, 25, 27, 28 e 31.
- 4 GUALDA, C. L. *Sombras de Agujeros Negros*. 28 p. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) — Universidade de Valência, Valência, 2018. Citado 8 vezes nas páginas 13, 20, 31, 36, 37, 38, 42 e 46.
- 5 BOZZA, V. Gravitational lensing by black holes. *General Relativity and Gravitation*, Springer Science and Business Media LLC, v. 42, n. 9, p. 2269–2300, may 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2Fs10714-010-0988-2>>. Citado 6 vezes nas páginas 13, 20, 37, 41, 42 e 43.
- 6 KATO, S.; FUKUE, J. *Title of the Book*. [S.l.]: Springer Singapore; Springer, 2020. (Astronomy and Astrophysics Library). ISBN 978-9811541735, 978-9811541742. Citado 3 vezes nas páginas 13, 51 e 52.
- 7 OLMO, G. J. Código desenvolvido na plataforma Wolfram Mathematica, pelo grupo Agujeros negros cuánticos, supergravidad y cosmología, do Depto de Física Teórica da Universidad de Valência. (Comunicação privada, material não publicado), jul. 2023. Citado 10 vezes nas páginas 14, 20, 60, 61, 62, 65, 66, 67, 68 e 90.
- 8 GRALLA, S. E.; HOLZ, D. E.; WALD, R. M. Black hole shadows, photon rings, and lensing rings. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 100, n. 2, jul. 2019. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.024018>>. Citado 8 vezes nas páginas 14, 20, 55, 60, 63, 64, 65 e 68.
- 9 WANG, Z.-L. Shadows and rings of a de sitter–schwarzschild black hole. *The European Physical Journal Plus*, Springer Science and Business Media LLC, v. 138, n. 12, dez. 2023. ISSN 2190-5444. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04756-x>>. Citado 4 vezes nas páginas 14, 52, 64 e 69.
- 10 ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 116, n. 6, feb 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.116.061102>>. Citado na página 18.
- 11 JUNIOR, H. C. D. L. et al. Sombras de buracos negros: desvendando a física por trás da imagem de m87. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 43, p. e20200232, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

- 12 Event Horizon Telescope Collaboration et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *The Astrophysical Journal*, v. 930, n. 1, p. L1, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 42 e 55.
- 13 COLLABORATION, T. E. H. T. et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, The American Astronomical Society, v. 875, n. 1, p. L1, apr 2019. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>>. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 42.
- 14 WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1984. Citado 5 vezes nas páginas 20, 27, 28, 29 e 35.
- 15 ATIENZA, M. F. *Óptica y fotónica: La ciencia de la luz*. Universidade de Catalunha: UOC, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 20, 23, 25, 26, 46 e 48.
- 16 LUMINET, J.-P. Image of a spherical black hole with thin accretion disk. *Astronomy and Astrophysics*, v. 75, p. 228–235, 1979. Citado 4 vezes nas páginas 20, 31, 37 e 41.
- 17 MENEGHETTI, M. *Introduction to Gravitational Lensing*. 2019. <<https://www.gssi.it/programs/phd-in-astroparticle-physics/item/1024-gravitational-lensing>>. Citado 6 vezes nas páginas 20, 42, 44, 46, 48 e 49.
- 18 GUERRERO, M. et al. Shadows and optical appearance of black bounces illuminated by a thin accretion disk. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2021, n. 08, p. 036, ago. 2021. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2021/08/036>>. Citado 5 vezes nas páginas 20, 55, 60, 65 e 68.
- 19 BRONZWAER, T.; FALCKE, H. The nature of black hole shadows. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, v. 920, n. 2, p. 155, oct 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac1738>>. Citado 4 vezes nas páginas 20, 49, 55 e 56.
- 20 CUNHA, P. V.; HERDEIRO, C. A. Stationary black holes and light rings. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 124, n. 18, maio 2020. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.181101>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 52.
- 21 MAGRAB, E. B. *An Engineer's Guide to Mathematica*. [S.l.]: Wiley, 2014. ISBN 9781118821268. Citado na página 20.
- 22 PADILLA, M. L. C. *Optica Avanzada*. [S.l.]: Ariel, 2004. ISBN 8434480522,9788434480520. Citado na página 22.
- 23 QUILLEN, A. *Lecture notes Part 11*. 2015. Universidade de Rochester. Citado na página 26.
- 24 VOJINOVIĆ, M. *SCHWARZSCHILD SOLUTION IN GENERAL RELATIVITY*. 2010. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 30.
- 25 LUMINET, J.-P. Black holes: A general introduction. In: *Black Holes: Theory and Observation*. Springer Berlin Heidelberg, 2003. p. 3–34. Disponível em: <https://doi.org/10.1007%2F978-3-540-49535-2_1>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 43.

- 26 OLMO, G. J. Nonsingular black holes in palatini extensions of general relativity. In: *Theoretical Frontiers in Black Holes and Cosmology*. Springer International Publishing, 2016. p. 183–219. Disponível em: <https://doi.org/10.1007%2F978-3-319-31352-8_5>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 33.
- 27 OHGAMI, T.; SAKAI, N. Wormhole shadows. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 91, n. 12, jun 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.91.124020>>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 46.
- 28 HAHN, W. E. *Tables of Elliptic Integrals*. New York, NY: McGraw-Hill, 1948. Citado na página 37.
- 29 BISNOVATYI-KOGAN, G. S.; TSUPKO, O. Y. Strong gravitational lensing by schwarzschild black holes. *Astrophysics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 51, n. 1, p. 99–111, jan 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2Fs10511-008-0011-8>>. Citado na página 38.
- 30 BOZZA, V.; MANCINI, L. Observing gravitational lensing effects by sgr a* with gravity. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, v. 753, n. 1, p. 56, jun 2012. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/753/1/56>>. Citado na página 42.
- 31 FILHO, K. d. S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. *Astronomia e Astrofísica*. 4ª ed.. ed. [S.l.]: Livraria da Física, 2017. ISBN 978-85-7861-485-0. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 61.
- 32 PERLICK, V. Exact gravitational lens equation in spherically symmetric and static spacetimes. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 69, n. 6, mar 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.69.064017>>. Citado na página 47.
- 33 YOUNSI, Z.; WU, K.; FUERST, S. V. General relativistic radiative transfer: formulation and emission from structured tori around black holes. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 545, p. A13, ago. 2012. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201219599>>. Citado 3 vezes nas páginas 50, 53 e 75.
- 34 RYBICKI, G. B.; LIGHTMAN, A. P. Radiative processes in astrophysics. In: . [s.n.], 1979. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119403227>>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 76.
- 35 WU, K. et al. General relativistic radiative transfer: Emission from accreting black holes in agn. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, v. 6, n. S1, p. 205, dec 2006. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1009-9271/6/S1/27>>. Citado na página 52.
- 36 OKYAY, M.; ÖVGÜN, A. Nonlinear electrodynamics effects on the black hole shadow, deflection angle, quasinormal modes and greybody factors. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2022, n. 01, p. 009, jan. 2022. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2022/01/009>>. Citado na página 56.
- 37 KONOPLYA, R. Shadow of a black hole surrounded by dark matter. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 795, p. 1–6, ago. 2019. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2019.05.043>>. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 78.

- 38 IBRAHIM, A. *Shadows of a Schwarzschild Black Hole Surrounded by a Spherically Symmetric Dark Matter*. Dissertação (Master of Physics thesis) — American University in Cairo, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 78.
- 39 PERLICK, V.; TSUPKO, O. Y. Calculating black hole shadows: Review of analytical studies. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 947, p. 1–39, fev. 2022. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2021.10.004>>. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.
- 40 ZENG, X.-X.; LI, G.-P.; HE, K.-J. The shadows and observational appearance of a noncommutative black hole surrounded by various profiles of accretions. *Nuclear Physics B*, Elsevier BV, v. 974, p. 115639, jan. 2022. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2021.115639>>. Citado na página 58.
- 41 NARAYAN, R.; JOHNSON, M. D.; GAMMIE, C. F. The shadow of a spherically accreting black hole. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 885, n. 2, p. L33, nov. 2019. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ab518c>>. Citado na página 60.
- 42 WANG, H.-M.; LIN, Z.-C.; WEI, S.-W. Optical appearance of einstein-Æther black hole surrounded by thin disk. *Nuclear Physics B*, Elsevier BV, v. 985, p. 116026, dez. 2022. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2022.116026>>. Citado na página 60.
- 43 GUERRERO, M. et al. Multiring images of thin accretion disk of a regular naked compact object. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 106, n. 4, ago. 2022. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.106.044070>>. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 68.
- 44 WANG, X.-J. et al. Rings and images of horndeski hairy black hole illuminated by various thin accretions. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 107, n. 12, jun. 2023. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.107.124052>>. Citado 3 vezes nas páginas 64, 65 e 69.
- 45 MCKINNEY, J. C. General relativistic magnetohydrodynamic simulations of the jet formation and large-scale propagation from black hole accretion systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 368, n. 4, p. 1561–1582, June 2006. Citado na página 65.
- 46 CARDOSO, V.; DUQUE, F.; FOSCHI, A. Light ring and the appearance of matter accreted by black holes. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 103, n. 10, maio 2021. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.103.104044>>. Citado na página 68.
- 47 BAHAMONDE, S.; JAMIL, M. Accretion processes for general spherically symmetric compact objects. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 75, n. 10, out. 2015. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3734-9>>. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 83.
- 48 DAS, T. K. On some transonic aspects of general relativistic spherical accretion on to schwarzschild black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford

University Press (OUP), v. 330, n. 3, p. 563–566, mar. 2002. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05127.x>>. Citado na página 80.

Anexos

ANEXO A

Script Mathematica para os Perfis de Intensidade da Sombra

O Mathematica é uma poderosa plataforma de computação que oferece uma ampla gama de recursos para cálculos matemáticos simbólicos e numéricos. Ele nos permite resolver equações, realizar integrações numéricas, gerar gráficos, entre outras manipulações matemáticas relevantes e de maneira eficiente.

Para abordar em nosso estudo o problema das sombras em BNs, analisamos e reproduzimos um código programado na linguagem do Mathematica, facilitado por colaboradores de um grupo de pesquisa parceiro [7], de maneira privada, pois o código não foi publicado. Por esse motivo, nesse anexo apresentamos uma descrição sucinta da sequência de passos que estruturam o programa, para dar uma noção do processo de resolução do problema.

O código está organizado em três sequências, em que, primeiramente, é implementado o algoritmo básico; em seguida, é aplicada a repetição do algoritmo básico e instruções de condicional para avaliação de eventos físicos; repete-se mais uma vez o algoritmo integrador e as novas quantidades são atualizadas e salvas em classes de listas. Na última etapa, implementam-se os modelos matemáticos para avaliar e exibir gráficos das soluções do problema.

A seguir, detalhamos cada parte do código.

A.1 Integrador Básico

Começamos definindo as funções e as constantes iniciais; consideramos o horizonte $horSch = \sqrt{4 - aa^2}$. A função $HorSch$ depende do parâmetro aa , que no nosso caso será fixado em zero ($aa = 0$);

Definimos os parâmetros físicos do problema, como o raio inicial, r_0 , a massa do buraco negro, definida em termos do raio de Schwarzschild ($r_s = 2M$), o parâmetro de impacto b e demais variáveis para a implementação do código.

Então, usamos o comando **NDSolve** para integrar numericamente a equação diferencial dos eventos que monitoram a trajetória da partícula.

A partir dessa etapa, é gerado um gráfico paramétrico da trajetória da partícula com o comando **ParametricPlot**.

Impomos mais condições à EDO e reproduzimos mais uma vez o cálculo para a trajetória da partícula; em seguida, armazenamos as quantidades obtidas e exibimos com o comando `\Print` o valor numérico para a imagem direta, efeito de lente e anel de fótons.

Ao final, os valores numéricos e gráficos são exibidos na tela.

A.2 Integrador Automático para N Geodésicas

Repetimos os passos anteriores, definindo as funções e as constantes iniciais. Aqui definimos os parâmetros iniciais (r_{cent} , r_{end} , X_p , Y_p) e os parâmetros que estão relacionados à órbita da partícula ($bend$, b_0).

É necessário resolver novamente a EDO, e isso é feito utilizando o comando **NDSolve**. A seguir, é gerado um gráfico paramétrico da trajetória da partícula com o comando **Parametric Plot**. Nessa parte, o código verifica se a variável $X_p > 0$, caso verdadeira essa condição:

- Calcule r_{ip} , uma pequena variação de r_{end} (ponto onde a trajetória foi interrompida);
- Determine o valor de $\phi(r)$ (a inclinação da trajetória no ponto r_{ip});
- resolver uma nova *EDO*, para a *Sol1* (trajetória que continua a partir de r_{ip});
- Plote a nova trajetória P_1 , com as diferentes condições de Y_p ;

Caso contrário (condicional `\False`), não há necessidade de “plotar” uma nova trajetória.

Armazenamos as informações das trajetórias, dependendo de certos eventos e adicionamos a figura atual `\Figs` à lista de figuras.

Implementamos o *loop*, onde definimos o número de etapas (200 nesse caso) e o valor da variação $\epsilon = b_0 - b_{end}/200$. Para cada etapa de 1 até o número de etapas, proceda assim:

- ajuste o valor de r_{cent} para *horSch*;
- ajuste o valor de r_{end} para ser igual a r_{cent} ;
- inicialize X_p , Y_p como 0;
- reduza o valor de b_0 até ϵ ;

Atualizamos as listas e armazenamos mais valores nessas listas e exibimos o gráfico da figura.

Ao final, exibimos numericamente a quantidade de valores de cada lista e os respectivos valores associados a estas listas.

A.3 Gerando mais Pontos para o Anel de Fótons

Repetimos todos os passos anteriores para calcular mais pontos da trajetória da partícula. Em seguida, utiliza-se o comando **Union** para juntar as listas antigas com as que foram geradas, e assim atualizamos os dados obtidos.

A seguir, exibimos os valores numéricos de cada lista e, após isso, mostra-se o gráfico paramétrico da trajetória.

Usamos o comando **ListPlot** para exibir o gráfico das listas, que tem um significado muito importante para o estudo.

A.4 Gerando os Perfis de Intensidade

Nesta parte do código, definimos as funções iniciais $x_{isco} = \sqrt{36 - aa^2}$ e $I_{disk}(x_)= \text{If} \left[x > x_{isco}, \frac{1}{(x - (x_{isco} - 1))^2}, 0 \right]$, do primeiro modelo a ser analisado: o que tem a máxima emissão na órbita interna mais estável (ISCO).

Exibe-se a seguir o gráfico da função $I_{disk}(x_)$, representado por 300 pontos, para uma exibição mais precisa, com valores para o eixo x variando de 0 a 12, e para o eixo y , variando de 0.0 até 1.0.

A seguir definimos a função $gg(x_)=\sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{aa^2 + x^2}}}$, que calcula uma raiz quadrada e três listas são criadas (**DirectIm**, **LensedIm**, **LightRIIm**). Cada lista possui um par de coordenadas ordenadas, onde a segunda coordenada é criada usando a função $gg(x_)$, e a primeira utilizando a função $I_{disk}(x_)$, após isso, ordena-se as listas.

Exibe-se o gráfico dessas listas e modifica-se a cor do gráfico usando o comando **ColorFunction**. A seguir, utiliza-se uma função de interpolação de ordem 1 usando o comando (**InterpolationOrder** → 1) para criar funções que podem estimar os valores intermediários entre os pontos interpolados com os dados originais.

Defini-se o conjunto de pontos inicial e final de cada lista e em seguida, realiza-se uma integração numérica (**NIntegrate**) para cada contribuição desses domínios, normalizando as listas.

Exibe-se com o `\Print` o peso relativo de três componentes (`DirectIm`, `LensedIm`, `LightRIm`), a seguir, utiliza a interpolação para somar os perfis de intensidade.

Por fim, exibe-se o gráfico da soma do conjunto de pontos interpolados, e utiliza-se novamente **ColorFunction**, para dar cor e forma aos resultados.

Utilizam-se os dados originais para exibir os perfis circulares, utilizando-se para este propósito uma função interpoladora, e em seguida, normalizando a função. Para criar o perfil circular, primeiro inicia-se com a tabela de dados original, e cria-se uma tabela para cada variação de ângulo t . Após isso, cria-se uma nova tabela para cada conjunto de dados adicional (com exceção do primeiro), removendo as duplicatas, unindo essa nova tabela com a anterior. Isso resulta em uma nova tabela que contém as coordenadas para todos os conjuntos de pontos, sem repetições. O perfil circular é representado graficamente com o comando **ListDensityPlot**.

Para o Modelo 2, no disco que chega a esfera de fótons, definem-se as funções iniciais $x_{ph} = \sqrt{9 - aa^2}$, $I_{disk}(x_{-}) = \text{If}\left[x > x_{ph}, \frac{1}{(x - (x_{ph} - 1))^3}, 0\right]$, e repetimos todos os passos anteriores para representar os resultados dessa nova análise.

Por fim, o terceiro modelo, definem-se as funções iniciais $x_{or} = \text{Sqrt}[4 - aa^2]$ e $I_{disk}(x_{-}) = \text{If}\left[x > x_{hor}, \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(x-5)}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(x_{hor}-5)}, 0\right]$, do horizonte e do disco, respectivamente, e repete-se todos os passos anteriores para exibir os resultados dessa análise.