

[REDACTED]

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

[REDACTED]

ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE
SINAIS ALEATÓRIOS POR ANÁLISE ESPECTRAL

MARCELO SAMPAIO DE ALENCAR

CAMPINA GRANDE
DEZEMBRO-1988

[REDACTED]

MARCELO SAMPAIO DE ALENCAR

ESTIMAÇÃO DA DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE
SINAIS ALEATÓRIOS POR ANÁLISE ESPECTRAL

Dissertação apresentada ao curso de MESTRADO
EM ENGENHARIA ELETRICA da Universidade Federal
da Paraíba, em cumprimento às exigências para
a obtenção do Grau de Mestre.

AREA DE CONCENTRAÇÃO: PROCESSAMENTO DA INFORMAÇÃO

Prof. BENEDITO GUIMARAES AGUIAR NETO, Dr.-Ing.

ORIENTADOR

CAMPINA GRANDE
DEZEMBRO-1988



A368e

Alencar, Marcelo Sampaio de

Estimacao da densidade de propabilidade de sinais aleatorios por analise especial / Marcelo Sampaio de Alencar. - Campina Grande, 1988.

54 f. : il.

Dissertacao (Mestrado em Engenharia Eletrica) _
Universidade Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e Tecnologia.

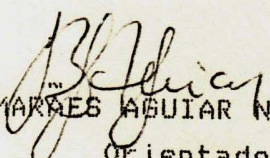
1. Processamento de Comunicacao de Dados 2.
Propabilidade de Sinais Aleatorios 3. Dissertacao I. Aguiar Neto, Benedito Guimaraes, Dr. II. Titulo

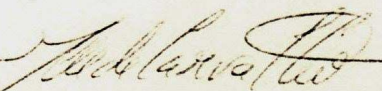
CDU 004.451.7:004.7(043)

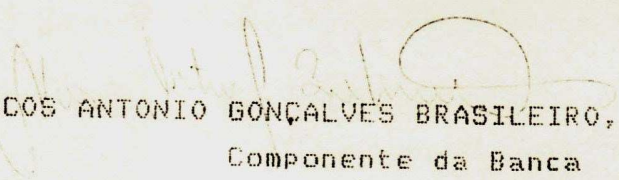
ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE SINAIS
ALEATÓRIOS POR ANÁLISE ESPECTRAL

MARCELO SAMPAIO DE ALENCAR

DISSERTAÇÃO APROVADA EM


BENEDITO GIMARRES AGUIAR NETO, Dr.-Ing., UFPB
Orientador


JOÃO MARQUES DE CARVALHO, Ph.D., UFPB
Componente da Banca


MARCOS ANTONIO GONÇALVES BRASILEIRO, D.Sc., UFPB
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB
DEZEMBRO - 1988

Aos meus Pais

ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE

DE SINAIS ALEATÓRIOS POR ANÁLISE ESPECTRAL

RESUMO

Um novo método é proposto para estimar a função densidade de probabilidade de sinais aleatórios, com aplicação para a área de comunicações. O método utiliza o teorema de Woodward e técnicas de análise espectral, em contrapartida às técnicas usuais de estimação, baseadas na análise temporal.

ABSTRACT

A method is proposed to estimate the probability density function (pdf) of random signals, with application to communications. The method uses the tools from spectral analysis, as opposed to time series analysis techniques.

ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE
SINAIS ALEATÓRIOS POR ANÁLISE ESPECTRAL

ÍNDICE

	página
LISTA DE SÍMBOLOS	
PRÓLOGO	1
I. TEORIA DE PROBABILIDADES E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	
I.1. INTRODUÇÃO	3
I.2. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	3
I.3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONJUNTAS	5
I.4. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	6
II. TÉCNICAS USUAIS PARA A ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE	
II.1. INTRODUÇÃO	13
II.2. ESTIMAÇÃO DA fdp PARA SINAIS ERGÓDICOS	13
II.3. PROCEDIMENTOS PARA ESTIMAÇÃO	17
III. CRITÉRIOS PARA ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE	
III.1. INTRODUÇÃO	19
III.2. MODELAGEM MATEMÁTICA	19

CASO I	20
CASO II	22
CASO III	24
IV. ANÁLISE DO ERRO DE ESTIMAÇÃO	
IV.1. INTRODUÇÃO	31
IV.2. ERRO DO ESTIMADOR LINEAR MEDIO QUADRÁTICO	31
IV.3. ERRO NA ESTIMAÇÃO DA fdp	34
CONCLUSÕES	38
APÊNDICE I	
ESTIMAÇÃO LINEAR MEDIA QUADRÁTICA	41
APÊNDICE II	
ESTIMATIVA PARA A VARIACÃO DE UM PROCESSO LIMITADO EM FREQUÊNCIA	43
APÊNDICE III	
RESULTADOS DA SIMULAÇÃO	45
APÊNDICE IV	
LISTAGENS DE PROGRAMAS DESENVOLVIDOS	48
BIBLIOGRAFIA	53

LISTA DE SÍMBOLOS

- $P(A)$ - Probabilidade associada ao evento A.
- $P_X(x)$ - Função densidade de probabilidade (fdp) da variável ou processo aleatório X.
- $P_X(x)$ - Função cumulativa de probabilidade (FCP).
- $E[X]$ - Valor esperado da variável ou processo aleatório X.
- m_n - Momento estatístico de ordem n.
- σ_X^2 - Variância de X.
- $P_X(w)$ - Função característica.
- $E[X^k Y^r]$ - Valor esperado conjunto em X e Y de ordem k+r
- m_{ij} - Momento conjunto de ordem i+j.
- $P_X(w_1, w_2)$ - Função característica bidimensional.
- $R_X(t_1, t_2)$ - Autocorrelação do processo X.
- $R_X(u)$ - Autocorrelação do processo estacionário X.
- $V[X]$ - Variância de X.
- P_X - Potência de X.
- $C_X(u) = \text{COV}[X]$ - Covariância de X.
- $S_X(w)$ - Densidade espectral de potência do processo X, (DEP).
- $e^2[X]$ - Erro médio quadrático.
- $b[X]$ - Polarização.
- d_m - Dimensão da janela no processo $m(t)$.
- T_A - Tempo de análise.
- $\hat{P}_X(x)$ - Estimativa da fdp $P_X(x)$.
- $m(t)$ - Sinal mensagem.

- $v(t)$ - Sinal modulante.
- $s(t)$ - Sinal modulado.
- $\hat{R}_X(u)$ - Estimativa da autocorrelação.
- $\hat{S}_X(w)$ - Estimativa da DEP.
- $J_n(x)$ - Função de Bessel de primeira espécie e ordem n .
- $E_S(B)$ - Erro de aproximação em função do índice de modulação.

ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE SINAIS ALEATORIOS POR ANÁLISE ESPECTRAL

PRÓLOGO

Como muitos outros campos da ciência e tecnologia a Teoria Moderna de Comunicações está fortemente ligada à Teoria de Processos Aleatórios. De fato, lida-se constantemente com fenômenos aleatórios e suas propriedades estatísticas quando se opera equipamentos de comunicações na presença de perturbações aleatórias, quando se avalia o comportamento de sistemas automáticos de controle a partir de excitações aleatórias, ao se projetar equipamentos imunes ao ruído, no processamento e detecção de sinais ou mesmo no diagnóstico de enfermidades .

Instrumentos para a análise estatística de sinais estão se tornando indispensáveis à pesquisa acadêmica ou ao desenvolvimento de projetos /4//8/.

A natureza da análise estatística privilegia a avaliação de médias, onde resultados confiáveis podem ser obtidos quando se dispõe de uma quantidade suficiente de dados estatísticos.

De modo geral, os processos aleatórios ou estocásticos são mais difíceis de identificar e modelar que os sinais determinísticos, tendo em conta que a análise estatística pode envolver processos estacionários ou não-estacionários, ergódicos ou não-ergódicos /4/.

O problema fundamental da inferência estatística é a estimação de quantidades desconhecidas a partir de dados observados.

O objetivo deste trabalho é estimar e medir a Função Densidade de Probabilidade (fdp) de sinais aleatórios a partir do teorema de Woodward utilizando técnicas de Correlação e Análise Espectral /5//11/.

Procura-se desenvolver uma nova formulação para o teorema citado, com a introdução do estimador linear médio quadrático, e o estabelecimento de um limite superior para o erro de estimação do processo, baseado na desigualdade de Papoulis /9/.

Esta nova formulação permite estimar-se a fdp de um sinal qualquer através do cálculo da Densidade Espectral de Potência (DEP) de um sinal modulado em frequência, parametrizado pelo índice de modulação, utilizando-se o sinal de interesse como sinal modulante.

O texto está subdividido em quatro capítulos:

O Capítulo I esboça os rudimentos da Teoria de Probabilidades e Processos Estocásticos necessários ao acompanhamento dos capítulos subsequentes.

O Capítulo II faz uma análise das técnicas comumente utilizadas na estimação de função densidade de probabilidade a partir de Análise Temporal.

Os critérios para estimação da função densidade de probabilidade através da Análise Espectral são estabelecidos no Capítulo III.

Finalmente, o Capítulo IV analisa o erro cometido com a utilização da Análise Espectral, na estimação da fdp.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece aos colegas Eurico Bezerra de Souza e Cursino Brandão Jacobina pelo inestimável apoio emprestado na simulação computacional, à Rosilda Maria Costa pelo apoio na digitação do texto e ao Prof. Benedito G. Aguiar Neto pela orientação do trabalho.

I. TEORIA DE PROBABILIDADES E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

I.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo resume as definições básicas da Teoria de Probabilidades e Variáveis Aleatórias e Processos Aleatórios. Esses resultados e conclusões serão utilizados nos capítulos subsequentes.

A Teoria de Probabilidades é geralmente apresentada a partir de três enfoques: a abordagem clássica, o enfoque por frequência relativa e a abordagem axiomática.

Tendo em vista os problemas apresentados pelas duas primeiras teorias, com relação à definição cíclica para a primeira e o problema de convergência para a segunda, apenas a abordagem axiomática será tratada aqui.

Os axiomas da probabilidade permitem o desenvolvimento de toda a teoria e resumem-se a três:

1. $P(S) = 1$, onde S representa o espaço amostral ou conjunto universo e $P(\cdot)$ a probabilidade associada.
2. $P(A) \geq 0$, onde A representa um evento do conjunto universo.
3. $P(A+B) = P(A)+P(B)$, onde A e B são eventos mutuamente exclusivos e $A+B$ representa a união dos eventos A e B .

I.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Considere X uma variável aleatória, com função densidade de probabilidades $p_X(x)$ onde $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$. A probabilidade de X encontrar-se no intervalo (a,b) é dada por:

$$\text{Prob}(a < X < b) = \int_a^b p_X(x)dx \quad (1)$$

Deve-se lembrar que a função cumulativa de probabilidades (F.C.P) é definida como a integral de $p_X(x)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x)dx \quad (2)$$

Seja $f(X)$ uma função da variável aleatória, o valor esperado da função $f(X)$ é determinado por:

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x) dx \quad (3)$$

Os momentos de X têm especial importância e interpretação física e são definidos por:

$$m_1 = E[X], \quad \text{média aritmética} \quad (4)$$

$$m_2 = E[X^2], \quad \text{média quadrática} \quad (5)$$

$$m_3 = E[X^3], \quad \text{medida de assimetria} \quad (6)$$

$$m_4 = E[X^4], \quad \text{medida de achatamento} \quad (7)$$

Também importante, a variância de X é definida como segue:

$$\sigma_X^2 = E[X - m_1]^2 = m_2 - m_1^2 \quad (8)$$

sendo o desvio padrão σ_X igual à raiz quadrada da variância.

A função característica (ou função geratriz de momentos), é geralmente definida por:

$$P_X(w) = E[e^{jwX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwx} p_X(x) dx, \quad j = \sqrt{-1} \quad (9)$$

Observe que $P_X(w)$ é a transformada de Fourier de $p_X(x)$, com o sinal trocado.

Os momentos de X podem ser obtidos diretamente a partir da função característica,

$$m_n = \frac{1}{j^n} \left. \frac{\partial^n P_X(w)}{\partial w^n} \right|_{w=0} \quad (10)$$

Sendo X uma variável aleatória, então $Y = f(X)$ é também uma variável aleatória, obtida através da aplicação da transformação f. A densidade de probabilidade (fdp) de Y é relacionada àquela de X pela fórmula

$$P_Y(y) = \frac{P_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \Big|_{x = f^{-1}(y)} \quad (11)$$

onde f^{-1} é a inversa da função f. A fórmula acima, supõe a existência da inversa de f em todos os pontos, assim como sua derivada.

A variável aleatória com f.d.p. gaussiana (ou Normal), como expressa abaixo, tem um papel extremamente importante na engenharia, tendo em vista que os processos mais conhecidos podem ser descritos ou aproximados por essa função densidade de probabilidade.

$$P_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (12)$$

Na expressão acima, m é o valor médio aritmético e σ_X^2 a variância da fdp da variável aleatória X, Figura 1.

Pode-se ver outros exemplos de fdps e FCPs nas Figuras 2 e 3.

1.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONJUNTAS

Considerando que X e Y representam um par de variáveis aleatórias (V.A.) reais, com fdp conjunta $P_{XY}(x,y)$, então

$$\text{Prob}(a < x < b \text{ e } c < y < d) = \int_a^b \int_c^d P_{XY}(x,y) dy dx \quad (13)$$

As densidades individuais são obtidas pela integração da densidade conjunta,

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x,y) dy \quad (14)$$

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(x,y) dx \quad (15)$$

A média conjunta é calculada por

$$E [f(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) P_{XY}(x,y) dx dy \quad (16)$$

para qualquer função de X e Y.

Os momentos conjuntos, de ordem ij, são dados por:

$$m_{ij} = E [X^i Y^j] \quad (17)$$

e a função característica bidimensional é definida como a transformada bidimensional de $P_{XY}(x,y)$,

$$P(w_1, w_2) = E [\exp(jw_1 X + jw_2 Y)] \quad (18)$$

I.4 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Processo Estocástico (Aleatório) é uma extensão do conceito de variável aleatória, compreendendo o espaço amostral, o conjunto de sinais e as funções densidade de probabilidades associadas. Um processo estocástico é dito estacionário se as densidades de probabilidades associadas ao processo são independentes de tempo.

Um processo aleatório (ou processo estocástico) $X(t)$ define uma variável aleatória para cada ponto t.

Um importante momento conjunto do processo $X(t)$ é a sua função de autocorrelação

$$R_X(t_1, t_2) = E[X_1 X_2] \quad (19)$$

onde

$$E[X_1 X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 P_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (20)$$

representa o momento conjunto m_{11} para a V. A. X_1 em t_1 e X_2 em t_2 .

Caso a autocorrelação dependa apenas do intervalo de separação entre X_1 e X_2 , $u = t_2 - t_1$, o processo é dito estacionário no sentido amplo.

Um processo estritamente estacionário tem f.d.p.s conjuntas de todas as ordens independentes da posição no tempo, o que implica serem todos os momentos constantes em relação ao tempo.

Um processo é ergódico quando suas médias estatísticas que são funções do tempo, podem ser aproximadas pelas médias temporais, que são variáveis aleatórias, com um desvio padrão próximo a zero. A ergodicidade pode se manifestar apenas no valor médio do processo, sendo então o processo considerado ergódico na média.

A autocorrelação goza das seguintes propriedades:

$$R_X(-u) = R_X(u), \text{ função par} \quad (21)$$

$$|R_X(u)| \leq R_X(0), \text{ máximo na origem} \quad (22)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} R_X(u) = P_X, \text{ potência total} \quad (23)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} R_X(u) = E^2[X(t)], \text{ potência DC} \quad (24)$$

$$V[X] = \lim_{u \rightarrow 0} R_X(u) - \lim_{u \rightarrow \infty} R_X(u), \text{ potência AC} \quad (25)$$

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad , \quad \text{potência total} \quad (26)$$

$$C_X(t_1, t_2) = \text{COV}[X] = R_X(t_1, t_2) - E^2[X] \quad (27)$$

$$C_X(u) = R_X(u) - E^2[X], \text{ para processos estacionários} \quad (28)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} C_X(u) = R_X(0) - E^2[X] = V[X] \quad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_X(u) R_Y(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) S_Y(\omega) d\omega \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_X(u)^2 du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)^2 d\omega \quad (31)$$

Onde se define o seguinte par de transformadas, conhecido como Teorema de Wiener - Khintchine,

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(u) e^{-j\omega u} du \quad (32)$$

$$R_X(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega u} d\omega \quad (33)$$

$S_X(\omega)$ é a densidade espectral de potência do processo aleatório $X(t)$.

As Figuras 4.a e 4.b seguintes ilustram algumas das propriedades da função de autocorrelação e da densidade espectral de potência (DEP).

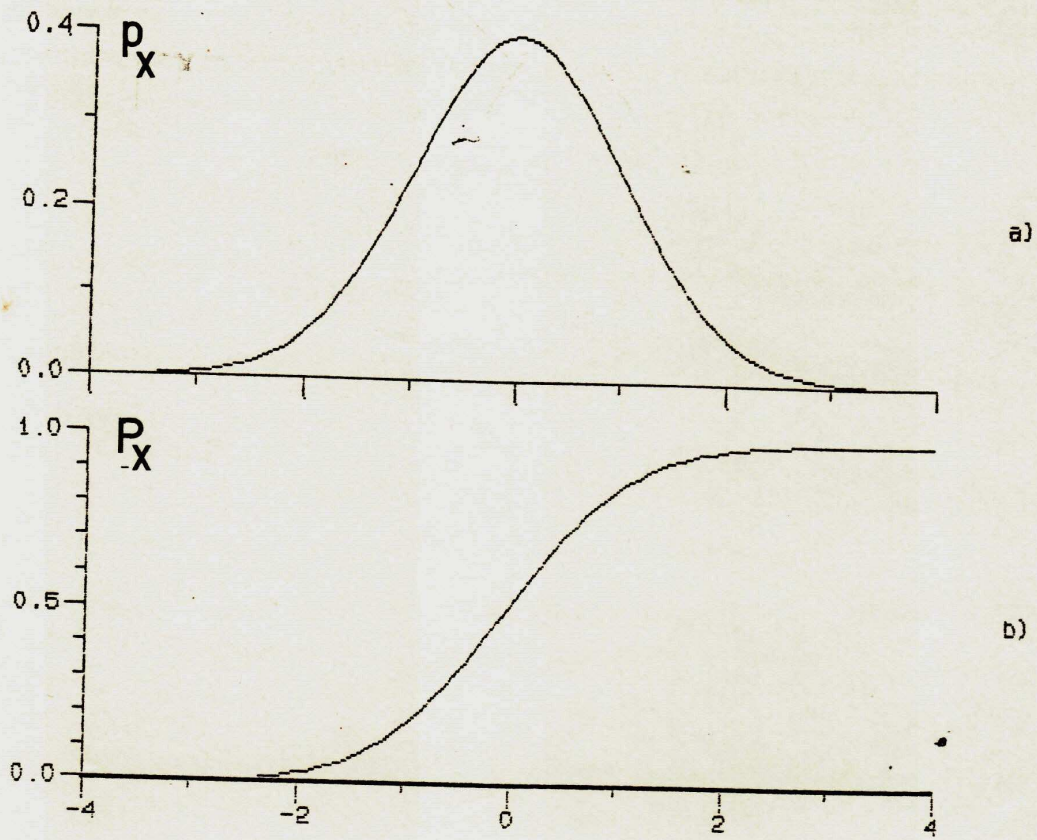


FIG.1 a) fdp GAUSSIANA b) FCP GAUSSIANA

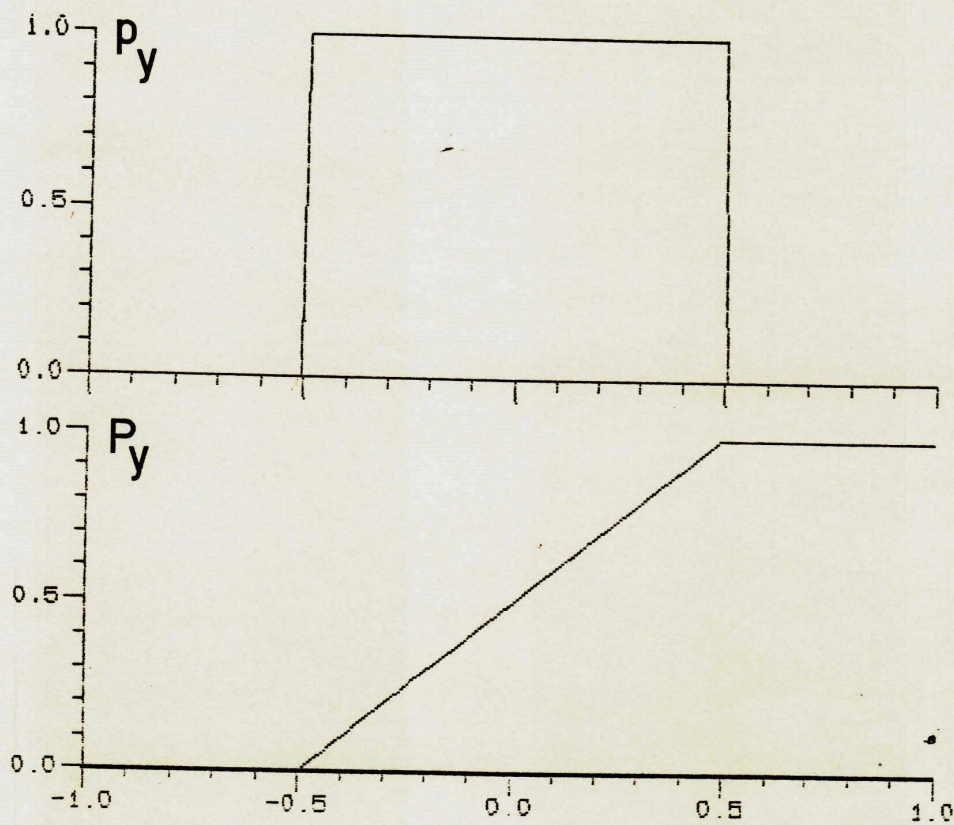


FIG.2 a) fdp UNIFORME b) FCP UNIFORME

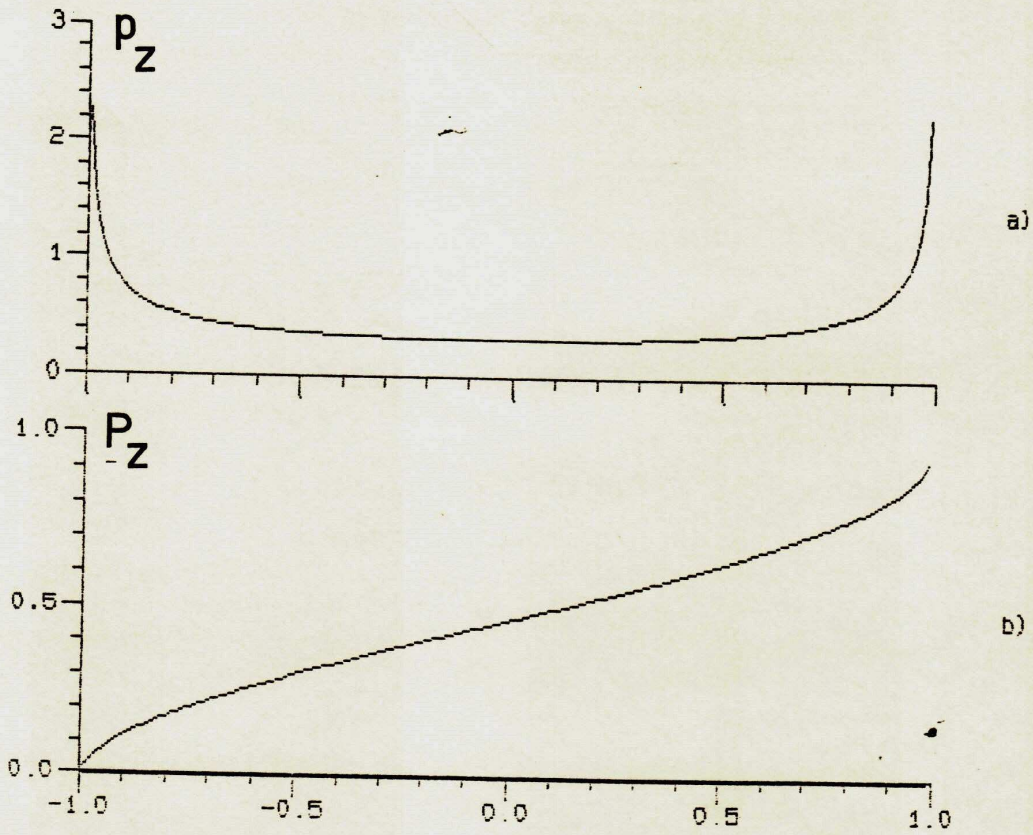


FIG.3 a) fdp do SEN0 b) FCP do SEN0

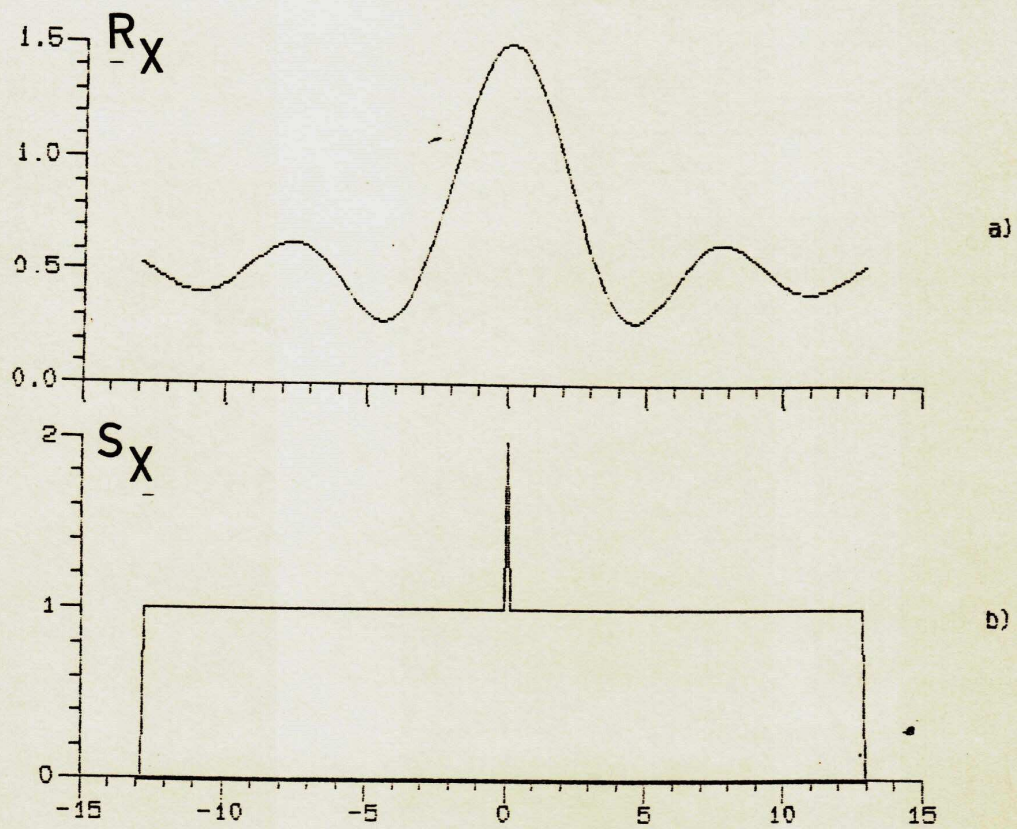


FIG.4 Exemplos para: a) AUTOCORRELAÇÃO b) DEP

II. TÉCNICAS USUAIS PARA ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

II.1 INTRODUÇÃO

As propriedades descritivas de uma variável ou processo aleatório não podem ser precisamente determinadas a partir dos dados amostrados. Apenas estimativas dos parâmetros de interesse podem ser obtidas a partir de um conjunto finito de observações /5/.

A estimação de função densidade de probabilidades a partir de métodos convencionais normalmente assume a estacionaridade do processo em análise, bem como a sua ergodicidade /5//11/.

Frequentemente, a fdp para valores instantâneos de um processo aleatório é analisada por um dos seguintes métodos: 1. medição da fração de tempo que uma realização do processo aleatório permanece acima de um nível (ou intervalo) pre-determinado. 2. Através de amostragem discreta, contando-se o número de amostras obtidas em um intervalo de amplitudes, durante um certo tempo.

No estudo de estimação se considera que um estimador é não polarizado, quando seu valor médio coincide com o valor esperado verdadeiro da quantidade a ser estimada.

Um estimador eficiente é aquele que produz a menor variância do erro de estimação. Quando a variância tende a zero para um estimador não polarizado, diz-se que ele é consistente.

I.2 ESTIMAÇÃO DA fdp PARA SINAIS ERGÓDICOS

Para um processo $m(t)$ estacionário e ergódico, há uma relação bem definida entre a sua fdp e a fração de tempo dispendida por uma realização do referido processo num intervalo de níveis dm (entre os níveis m e $m + dm$). Mais especificamente, a relação entre o tempo total dispendido no intervalo e o tempo de observação da função T , vezes o intervalo dm , é um estimador para a fdp.

Formalmente,

$$\hat{p}_M(m) = \frac{1}{dm} \sum_i \frac{t_i}{T} = \frac{T_M}{T \cdot dm} \quad (33)$$

$$p_M(m) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ dm \rightarrow 0}} \hat{p}_M(m) \quad (34)$$

onde $p_M(m)$ é a função densidade de probabilidade de m .

Para a maior parte das fdps

$$E[\hat{p}_M(m)] \neq p_M(m) \quad (35)$$

mostrando que $\hat{p}_M(m)$ é um estimador polarizado de $p_M(m)$.

O erro médio quadrático do estimador $\hat{p}_M(m)$ pode ser determinado /5/,

$$e^2[\hat{p}_M(m)] = E[(\hat{p}_M(m) - p_M(m))^2] = V[\hat{p}_M(m)] + b^2 E[\hat{p}_M(m)] \quad (36)$$

onde a variância do estimador é dada por

$$V[\hat{p}_M(m)] = E[(\hat{p}_M(m) - E[\hat{p}_M(m)])^2] \quad (37)$$

e a polarização do estimador

$$b E[\hat{p}_M(m)] = E[\hat{p}_M(m) - p_M(m)] \quad (38)$$

Para avaliar a variância de um estimador $\hat{p}_M(m)$, é necessário conhecer as propriedades estatísticas dos intervalos de tempo t_i que integram T_M . Infelizmente, estas estatísticas para um processo aleatório, são muito difíceis de obter.

Entretanto, a forma geral de uma expressão apropriada para a variância pode ser obtida através de argumentos neurísticos, levando a /5/,

$$V[\hat{p}_M(m)] \approx \frac{p_M(m)}{N \cdot dm} \quad (39)$$

Onde N pode ser determinado, através do Teorema da Amostragem, considerando que num intervalo T , uma trajetória $m(t)$ de banda passante B pode ser completamente reproduzida com $N = 2BT$ valores discretos.

De fato, os N valores discretos não terão necessariamente independência estatística. Por outro lado, para qualquer processo estacionário e ergódico dado, cada trajetória (conjunto de amostras) representará $n = N/c^2$ valores amostrados independentes (graus de liberdade) onde c é uma constante.

Logo, a partir da equação (39)

$$VC [\hat{P}_M(m)] \approx \frac{c^2 P_M(m)}{2BT \, dm} \quad (40)$$

A constante c é dependente da função de autocorrelação do processo e da taxa de amostragem. Para o ruído branco de faixa limitada, os estudos experimentais indicam $c \approx 0,3$. Se o ruído branco for digitalizado com $N = 2BT$ valores discretos as medidas experimentais indicam $c = 1,0$ /5/.

Pode-se obter também uma expressão para a polarização em função da fdp do processo /5/.

$$b [\hat{P}_M(m)] \approx -\frac{dm^2}{24} P_M''(m) \quad (41)$$

onde $P_M''(m)$ é a segunda derivada de $P_M(m)$ em relação a m .

Por conseguinte, o erro médio quadrático total é dado pela adição das equações (40) e (41).

$$\begin{aligned} e^2[\hat{P}_M(m)] &= EC [(P_M(m) - \hat{P}_M(m))^2] = \\ &= c^2 \left[\frac{P_M(m)}{2BT \, dm} \right]^2 + \left[-\frac{dm^2}{24} P_M''(m) \right]^2 \end{aligned} \quad (42)$$

dai o erro normalizado será dado por

$$e^2 = \frac{c^2}{2BTdmp_M(m)} + \frac{dm^4}{576} \left[\frac{P_M'(m)}{P_M(m)} \right] \quad (43)$$

Fica claro, observando-se a equação precedente que existem restrições conflitantes em torno da janela de amplitudes dm , quando se mede a fdp.

Por um lado, um valor elevado de dm é desejado para reduzir o erro aleatório (variância). Por outro lado, um valor pequeno de dm é necessário para suprimir o erro de polarização.

Entretanto, o erro total será limitado à medida em que $T \rightarrow \infty$, se dm for restrita, de forma que $T \cdot dm \rightarrow \infty$. Na prática, valores de $dm < 0,2 \mu$ limitarão usualmente o erro de polarização normalizado para menos de 1%. Isto é válido para funções densidade de probabilidade bem comportadas, que não exibam picos ou transições abruptas indicando derivadas de segunda ordem elevadas.

Para uma fdp gaussiana, a janela dm ótima deverá ter o valor $\sqrt{5}$,

$$dm \approx \frac{3,5}{\sqrt{N}} \mu \quad (44)$$

Um detalhe importante, é relativo ao tempo de análise do processo $m(t)$, que depende do intervalo da trajetória medida (T), da faixa de amplitudes (V) observada no sinal e da largura de janela (dm), ou seja

$$T_A \gg \frac{T \cdot V}{dm} \quad (45)$$

II.3 PROCEDIMENTOS PARA ESTIMAÇÃO

Apresenta-se a seguir as metodologias adotadas para obtenção do estimador $P_M(m)$ da função densidade de probabilidade $P_M(m)$, considerando os procedimentos analógico e digital /5//11/.

Procedimento Analógico

1. Filtragem do sinal em amplitude através de uma janela estreita com dm Voits de largura.
2. Medição do tempo total gasto pelo sinal $m(t)$ na janela (T_M).
3. Avaliação do tempo dispendido na janela em relação ao tempo total de amostragem (T).
4. Divisão do tempo médio gasto na janela pela largura da janela (dm):

$$\hat{P}_M(m) = \frac{T_M}{T \cdot dm} \quad (46)$$

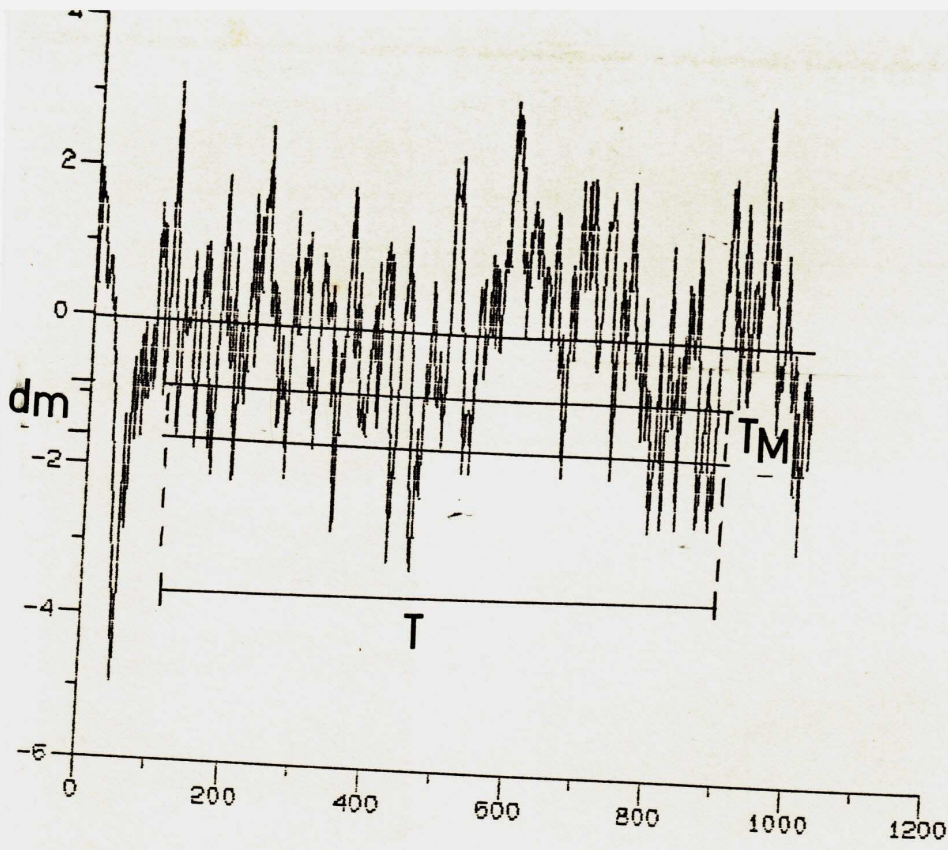
A Figura 5.a ilustra o procedimento.

Procedimento digital

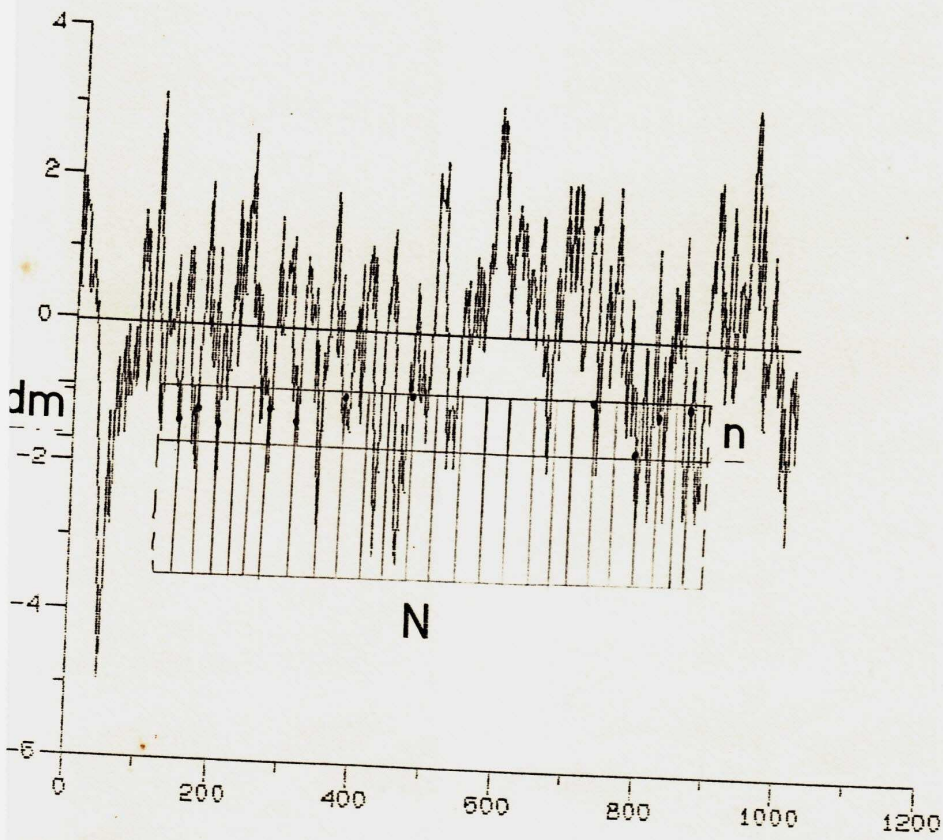
1. Amostra-se o sinal à taxa de Nyquist e **filtra-se** o mesmo com uma janela de largura dm .
2. Conta-se o número de amostras abaixo da janela e subtrai-se o número de amostras acima da janela.
3. Divide-se a diferença obtida (n) pelo número total de amostras no intervalo (N).
4. Divide-se o resultado pela largura da janela e obtém-se o estimador para a densidade de probabilidades, ou seja

$$\hat{P}_M(m) = \frac{n}{N \cdot dm} \quad (47)$$

Pode-se acompanhar o procedimento através da Figura 5.b.



a)



b)

FIG.5 Procedimentos para Estimacao a) Analogico b) Digital

III. CRITÉRIOS PARA ESTIMAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

III.1 INTRODUÇÃO

O teorema de Woodward estabelece que o espectro de um sinal modulado em frequência com índice elevado, representa aproximadamente a distribuição de probabilidade de sua frequência instantânea /6//16/.

Este capítulo propõe um método para estimar e medir a função densidade de probabilidade (fdp) de sinais aleatórios, que utiliza o referido teorema.

Uma nova formulação para o teorema é apresentada, utilizando-se o estimador linear médio quadrático, e um limite superior para o erro da estimação, baseado na desigualdade de Papoulis e assim, mostra-se sob quais circunstâncias esse limite é confiável /3/.

III.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

No modelo considerado, o sinal modulado $s(t)$ é obtido a partir das equações abaixo:

$$s(t) = A \cos(\omega_c t + v(t) + \theta) \quad (48)$$

$$v(t) = D_{FM} \int_0^t m(t) dt \quad (49)$$

onde A , que representa a amplitude da portadora, ω_c a frequência em (rd/s) da mesma e D_{FM} o índice de desvio em frequência, são parâmetros constantes. O sinal cuja fdp se pretende analisar é representado por $m(t)$, sendo considerado um processo aleatório estacionário, com média nula. A fase da portadora θ é aleatória, com distribuição uniforme no intervalo $(0, 2\pi)$ e independente de $m(t)$.

Pode-se então dividir o problema do cálculo da densidade espectral de potência (DEP) do sinal (48) acima em três casos, discutidos a seguir /1/:

CASO I - Modulação com baixo índice, $B < 0,1$.

Nesse caso, pode-se obter a função de autocorrelação do sinal $s(t)$ definido em (48) a partir da eq. (50) abaixo, onde $E[.]$ representa o operador valor esperado

$$R_S(u) = E[s(t)s(t+u)] \quad (50)$$

ou seja,

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_c u - v(t) + v(t+u))] \quad (51)$$

ou ainda,

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c u E[\cos(-v(t) + v(t+u))] + \\ - \frac{A^2}{2} \sin \omega_c u E[\sin(-v(t) + v(t+u))] \quad (52)$$

Como o índice de modulação é pequeno ($B < 0,1$), pode-se expandir o seno e o cosseno da equação (52) em séries de Taylor, desprezando os termos de mais alta ordem para obter

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c u E\left[1 - \frac{(-v(t) + v(t+u))^2}{2}\right] + \\ - \frac{A^2}{2} \sin \omega_c u E[-v(t) + v(t+u)] \quad (53)$$

Tendo em vista que o processo $m(t)$ é estacionário com média nula, obtém-se,

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos w_c u [1 - R_V(0) + R_V(u)] \quad (54)$$

com

$$R_V(u) = E[v(t)v(t+u)] \quad (55)$$

$$R_V(0) = P_V = \text{potência do sinal } v(t)$$

Para um sinal tipo ruído branco de faixa limitada no intervalo (w_I, w_S) a potência P_V pode ser calculada em função da potência P_M do sinal modulante, obtendo-se (Figura 6) :

$$P_V = 2D_{FM}^2 P_M \frac{(w_S + w_I)^2}{(w_S w_I)^3} - \frac{1}{(w_S w_I)^2} \quad (56)$$

Para valores usuais de P_M , w_I e w_S , P_V é da ordem de $10^{-8} P_M / 2$.

A DEP do sinal $s(t)$ será dada pela transformada de Fourier da equação (7), onde se considera $R_V(0) \ll 1/2$

$$S_S(w) = -\frac{A^2}{2} [\delta(w + w_c) + \delta(w - w_c)] + \frac{D_{FM}^2 A^2}{4} \left[\frac{S_M(w + w_c)}{(w + w_c)^2} + \frac{S_M(w - w_c)}{(w - w_c)^2} \right] \quad (57)$$

$$S_M(w) = \text{DEP do sinal modulante } m(t)$$

Pode-se notar na equação (57) que o espectro do sinal terá o formato da DEP do sinal modulante (e mesma banda passante), multiplicado por uma função hiperbólica quadrática, o que pode ser observado na Figura 7. Deve-se lembrar que

o espectro do sinal $m(t)$ utilizado no experimento é plano dentro da faixa de frequências considerada.

CASO II - índice de modulação mediano, $0,1 \ll B \ll 10$

A expressão em série de Taylor da equação (52) deve considerar agora os termos de ordem superior. Pode-se mostrar /12/, que os termos da expansão do seno, por serem momentos conjuntos de ordem ímpar, se anulam para um sinal gaussiano, logo

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos w_c u E \left[1 - \frac{(-v(t) + v(t+u))^2}{2!} + \frac{(v(t) + v(t+u))^4}{4!} + \dots \right] \quad (58)$$

Considerando o interesse específico em um índice de modulação, onde a banda passante do sinal modulado não excede o quádruplo da banda do sinal modulante $m(t)$, pode-se, sem perda de generalidade, desprezar os termos acima daquele de ordem quatro em (58).

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos w_c u \left[1 - R_V(0) + R_V(u) \right] + \frac{A^2}{48} \cos w_c u \left[2E \{ v^4(t) \} + 6E \{ v^2(t) v^2(t+u) \} - 24P_V R_V(u) \right] \quad (59)$$

Pode-se ver que a contribuição do segundo termo de (58) é menos significativa que a do primeiro em virtude do fatorial no denominador.

A equação acima pode ser simplificada com a utilização do Teorema de Price /9//13/ abaixo,

$$E \{ X^k Y^r \} = k r \int_0^c E \{ X^{k-1} Y^{r-1} \} dc + E \{ X^k \} E \{ Y^r \} \quad (60)$$

$$c = E[XY] - E[X]E[Y] \quad (61)$$

Aplicando (60) e (61) em (59) obtém-se:

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos w_c u (1 - P_V + R_V(u)) + \frac{A^2}{48} \cos w_c u (12P_V^2 + 12R_V^2(u) - 24P_V R_V(u)) \quad (62)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier, obtém-se:

$$S_S(w) = \frac{A^2}{2} (1 - P_V + R_V(u)) (\delta(w + w_c) + \delta(w - w_c)) + \frac{D_{FM}^2 A^2}{4} (1 - P_V) \frac{S_M(w + w_c)}{(w + w_c)^2} + \frac{D_{FM}^4 A^2}{16\pi} \left[\frac{S_M(w + w_c)}{(w + w_c)^2} * \frac{S_M(w + w_c)}{(w + w_c)^2} \right] \quad (63)$$

A convolução dos espectros e sua posterior adição pode ser observada na Figura 8, onde se percebe que a faixa ocupada praticamente dobra, como era de se esperar a partir da observação do terceiro termo da equação (63).

A aplicação reiterada da fórmula (60) e a adição de mais termos à série (58) permitem obter o espectro de densidade de potência para qualquer valor do índice de modulação.

No caso senoidal, $m(t) = V \cos(w_m t + \theta)$, a autocorrelação será dada por /10/:

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} J_0 \left(2B \operatorname{sen} \frac{w_m u}{2} \right) \cos w_c u, \quad B = \frac{D_{FM} V}{w_m} \quad (64)$$

A função de Bessel de primeira espécie e ordem zero $J_0(x)$ pode ser obtida da fórmula abaixo ,

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{1-x}{2}\right)^4}{(1.2)^2} + \dots \quad (65)$$

Para ilustrar o CASO I , basta reter os dois primeiros termos da série (65) , introduzir em (64) e aplicar a transformada de Fourier para obter a densidade espectral de potência ,

$$S_S(\omega) = \frac{A^2}{2} (1-B/2) \delta(\omega + \omega_c) + \frac{B}{4} \delta(\omega + \omega_c + \omega_M) \quad (66)$$

Espectros de ordens superiores poderão ser obtidos , considerando termos adicionais da expansão (65) . A Figura 10 ilustra o caso.

CASO III - índice de modulação elevado, $B > 10$.

Um grande índice de modulação provoca um alargamento no espectro do sinal modulado, fazendo com que este ocupe uma faixa bem superior àquela do sinal de banda básica. Em adição a DEP da portadora modulada toma o formato da função densidade de probabilidades (fdp) do sinal de banda básica. Esse é o resultado do teorema de Woodward que será demonstrado a seguir /16/.

Havendo um índice de modulação elevado ($B > 10$), não há sentido em desprezar os termos da expansão da equação (51). Portanto pode-se optar pela fórmula exponencial do cosseno .

Desta forma, obtém-se

$$R_S(u) = \frac{A^2}{4} \exp(j\omega_c u) E[\exp j(-v(t) + v(t+u))] + \frac{A^2}{4} \exp(-j\omega_c u) E[\exp j(v(t) - v(t+u))] \quad (67)$$

A utilização de um estimador linear médio quadrático na expressão (67) permite escrever /APENDICE I/:

$$\begin{aligned} \hat{R}_S(u) &= \frac{A^2}{4} \exp(jw_c u) E[\exp(juv'(t))] + \\ &+ \frac{A^2}{4} \exp(-jw_c u) E[\exp(-juv'(t))] \end{aligned} \quad (68)$$

Contudo, $v'(t) = dv(t)/dt = z$, onde z é o desvio na frequência instantânea da portadora $s(t)$, logo:

$$\begin{aligned} \hat{R}_S(u) &= \frac{A^2}{4} \exp(jw_c u) E[\exp(jzu)] + \\ &+ \frac{A^2}{4} \exp(-jw_c u) E[\exp(-jzu)] \end{aligned} \quad (69)$$

Tendo em conta que,

$$E[\exp(jzu)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_Z(z) \exp(jzu) dz \quad (70)$$

onde $p_Z(z)$ é a função densidade de probabilidade do processo $z = dv(t)/dt$, aqui considerada simétrica.

Pode-se calcular a transformada de Fourier da equação (69), obtendo-se,

$$\hat{S}_S(w) = \frac{A^2}{2} [p_Z(w-w_c) + p_Z(w+w_c)] \quad (71)$$

A expressão (71) possibilita a estimação da fdp da derivada do processo $m(t)$, que tem aplicação imediata no cálculo do ruído de quantização em quantizadores uniformes e não-uniformes /4/.

Levando-se a definição de z à equação (49), percebe-se que $z = D_{FM} m(t)$, portanto,

$$P_Z(z) = \frac{1}{D_{FM}} p_M\left(\frac{m}{D_{FM}}\right) \quad (72)$$

onde $p_M(\cdot)$ é a fdp do processo $m(t)$.

A substituição de (72) em (71) leva finalmente à equação da densidade espectral da potência do sinal faixa larga,

$$\hat{S}_S(\omega) = \frac{A^2}{2D_{FM}} \left[p_M\left(\frac{\omega - \omega_c}{D_{FM}}\right) + p_M\left(\frac{\omega + \omega_c}{D_{FM}}\right) \right] \quad (73)$$

Considerando a fdp do sinal modulante gaussiana, pode-se escrever,

$$p_M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_M}} \exp\left(-\frac{m^2}{2P_M}\right) \quad (74)$$

com $P_M = R_M(0) =$ potência do sinal $m(t)$

$$\hat{S}_S(\omega) = \frac{A^2}{2D_{FM} \sqrt{2P_M}} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{2D_{FM}^2 P_M}\right] \quad (75)$$

A Figura 9 ilustra esse caso. Nota-se que o desvio eficaz em frequência será dado por $D_{FM} \sqrt{P_M}$ e a banda passante aproximada por $2D_{FM} \sqrt{P_M}$. Compare-se com a Figura 12, que representa a equação exata.

Pode-se notar ainda que o formato da DEP do sinal modulado não depende da DEP do sinal modulante, mas apenas de sua fdp. Este último resultado fornece o fundamento, para a estimação da função densidade de probabilidade através da

análise espectral. Pode-se, a partir desse resultado utilizar a DEP do sinal modulado em frequência, como estimativa da fdp do sinal modulante, com um erro de estimação que será analisado no próximo capítulo.

Um tom senoidal, como o referido anteriormente, tem fdp dada abaixo,

$$P_M(m) = \frac{1}{\sqrt{V^2 - m^2}}, \quad |m| < V \quad (76)$$

Conseqüentemente, a modulação em faixa larga com um tom senoidal leva à DEP seguinte,

$$\hat{S}_S(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{V_{D_{FM}}^2 - (\omega + \omega_c)^2}}, \quad |\omega - \omega_c| < V_{D_{FM}} \quad (77)$$

O sinal modulado ocupa, nesse caso, uma banda passante aproximadamente igual a $2V_{D_{FM}}$. Sua DEP está ilustrada na Figura 10, que deve ser comparada com a Figura 13, que representa a curva exata.

As curvas experimentais foram obtidas a partir de fotos tomadas do analisador de espectros 8553B da Hewlett Packard. Na montagem do experimento utilizou-se um sistema rádio Philips como modulador, com 70MHz de frequência intermediária, um gerador de ruído na faixa de 316kHz a 8.204kHz, além de um gerador de sinais.

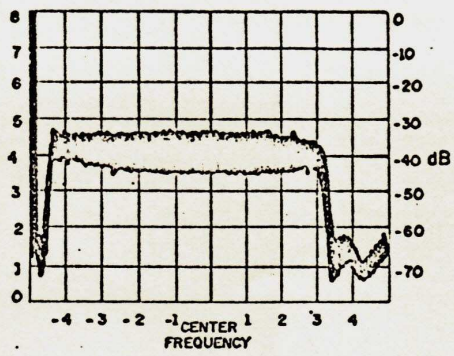


FIG. 6

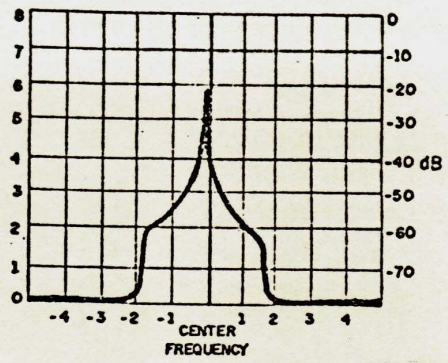


FIG. 7

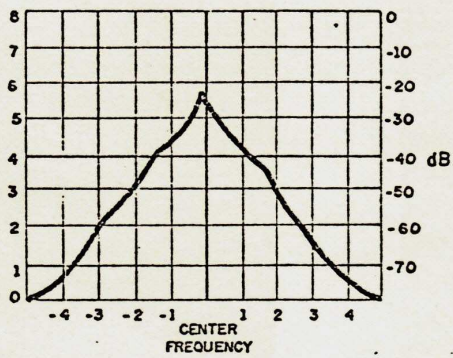


FIG. 8

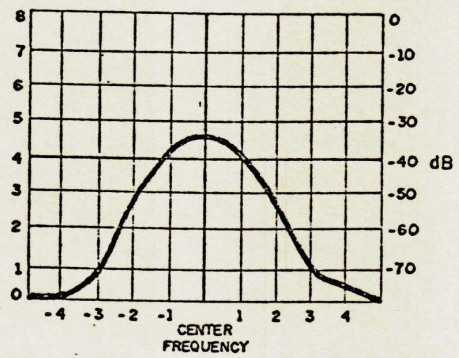


FIG. 9

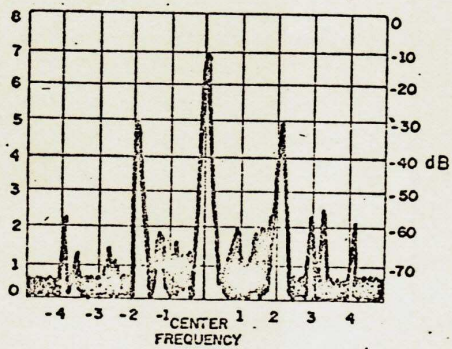


FIG. 10

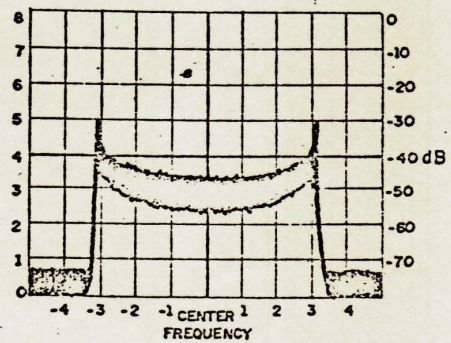


FIG. 11

Figuras 6 a 11 . Densidades espectrais de potência obtidas através da montagem experimental.

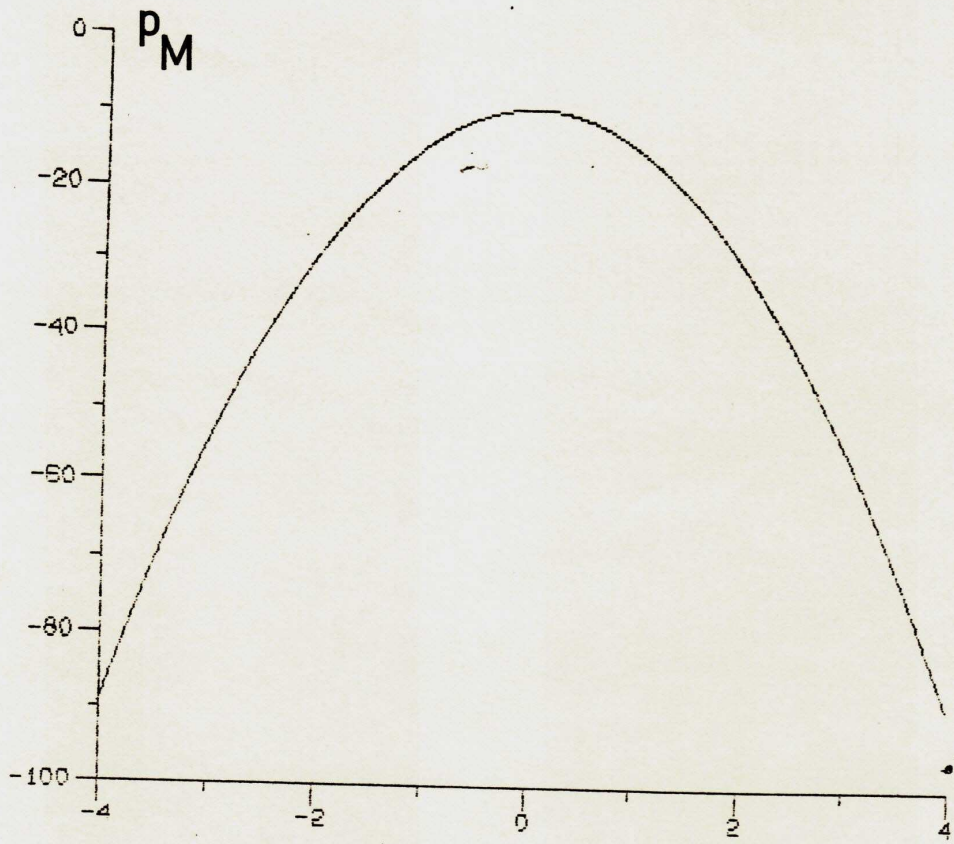


FIG. 12 fdp GAUSSIANA em dB

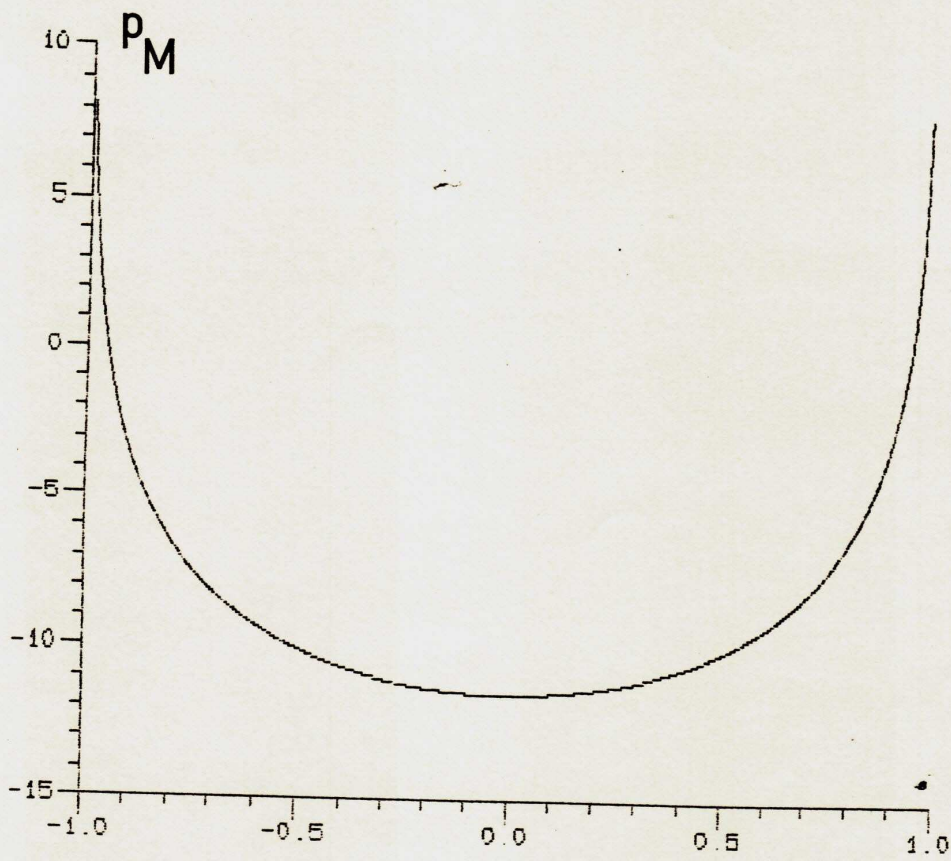


FIG.13 fdp da SENO em dB

IV ANÁLISE DO ERRO DE ESTIMAÇÃO

IV.1 INTRODUÇÃO

No capítulo precedente obteve-se uma expressão para a densidade espectral de potência (DEP) do sinal $s(t)$ modulado em frequência com o sinal $m(t)$.

Notou-se que para um índice de modulação elevado ($B \gg 10$) a DEP aproxima a função densidade de probabilidade do sinal $m(t)$.

Este capítulo é dedicado a estimar em que medida esta aproximação é válida, ou seja, qual o erro cometido na aproximação.

IV.2 ERRO DO ESTIMADOR LINEAR MEDIO QUADRÁTICO

Pode-se demonstrar que o estimador linear médio quadrático utilizado na equação (67) do Capítulo antecedente é não polarizado, eficiente e consistente. Para tanto, basta mostrar que /APÊNDICE I/

$$E \left[v(t+u) - \frac{R_V(u)}{R_V(0)} v(t) - \frac{R'_V(u)}{R''_V(0)} v'(t) \right] = 0 \quad (78)$$

e

$$E \left[\left(v(t+u) - \frac{R_V(u)}{R_V(0)} v(t) - \frac{R'_V(u)}{R''_V(0)} v'(t) \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad (79)$$

A primeira expressão garante que o valor esperado do estimador é idêntico ao valor esperado do sinal original e a segunda garante um erro médio quadrático mínimo.

Dado que o sinal $m(t)$ tem média nula, a verificação de (78) é imediata.

O cálculo da segunda expressão (79) é mais elaborado. Inicialmente deve-se considerar o sinal $m(t)$ limitado em faixa à frequência máxima w_M .

Os passos são dados a seguir:

$$e^2 = E \left[v(t+u) \cdot v(t+u) - \frac{2R_V(u)}{R(\theta)} v(t)v(t+u) + \frac{2R'(u)}{R''_V(\theta)} v(t)v'(t+u) + \left(-\frac{R_V(u)}{R_V(\theta)} \right)^2 v^2(t) + \frac{2 \cdot R_V(u)R'_V(u)}{R_V(\theta)R'_V(\theta)} v(t)v'(t) + \left(-\frac{R'_V(u)}{R''_V(\theta)} \right)^2 (v'(t))^2 \right] \quad (80)$$

Avaliando os valores esperados chega-se a,

$$e^2 = R_V(\theta) - \frac{2 \cdot R^2_V(u)}{R_V(\theta)} + \frac{2 \cdot R'_V(u) \cdot R'_V(u)}{R''_V(\theta)} + \frac{R^2_V(u)}{R_V(\theta)} - \left(\frac{R'_V(u)}{R''_V(\theta)} \right)^2 \quad (81)$$

logo,

$$e^2 = R_V(\theta) - \frac{R^2_V(u)}{R_V(\theta)} + \frac{(R'_V(u))^2}{R''_V(\theta)} \quad (82)$$

ou

$$e^2 = \frac{1}{R(\theta)} (R^2_V(\theta) - R^2_V(u)) + \frac{(R'_V(u))^2}{R''_V(\theta)} \quad (83)$$

Calculando a diferença entre parênteses no primeiro termo da expressão à direita, vem

$$R^2_V(\theta) - R^2_V(u) = \left[\frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} S_V(w) dw \right]^2 - \left[\frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} S_V(w) \cdot \cos w dw \right]^2 \quad (84)$$

Utilizando a expressão para a expansão do binômio,

$$\begin{aligned}
 R_{V(\theta)}^2 - R_{V(u)}^2 &= \\
 &= \left[\frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} S_V(w) dw + \frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} S_V(w) \cdot \cos w dw \right] \\
 &+ \left[-\frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} S_V(w) dw - \frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} S_V(w) \cdot \cos w dw \right] \quad (85)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{V(\theta)}^2 - R_{V(u)}^2 &= \\
 &= \left[\frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} S(w) (1 + \cos w) dw \right] \\
 &\left[\frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} S(w) (1 - \cos w) dw \right] \quad (86)
 \end{aligned}$$

Entretanto /APENDICE II/,

$$1 - \cos u = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{wu}{2} < \frac{(wu)^2}{2} \quad (87)$$

$$\cos w < \frac{\operatorname{sen} w}{w} < 1 \quad (88)$$

logo

$$\begin{aligned}
 R_{V(\theta)}^2 - R_{V(u)}^2 &< \\
 &< \left[\frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} 2 \cdot S(w) dw \right] \left[\frac{1}{2} \int_{-w_M}^{w_M} S_V(w) \cdot \frac{(wu)^2}{2} dw \right] \quad (89)
 \end{aligned}$$

$$R_{V(u)}^2 - R_{V(u)}^2 < \frac{1}{4\pi^2} \cdot (w_M)^2 \left[\int_{-w_M}^{w_M} S(w) dw \right] \left[\int_{-w_M}^{w_M} S(w) dw \right] \quad (90)$$

$$= (w_M u)^2 R_{V(\theta)}^2 \quad (91)$$

ou seja

$$R^2(\theta) - R^2(u) \leq (w_M u)^2 R^2(\theta) \quad (92)$$

Portanto o erro médio quadrático do estimador será dado por,

$$e^2(u) \leq (w_M u)^2 R_V(\theta) + \frac{(R'_V(u))^2}{R_V(\theta)} \quad (93)$$

A segunda expressão no termo à direita pode ser avaliada também, utilizando-se a expansão do numerador em série de Taylor,

$$\frac{(R'_V(u))^2}{R_V(\theta)} \approx \frac{(R'_V(\theta) + u R''_V(\theta))^2}{R''_V(\theta)} \quad (94)$$

$$= u^2 R''_V(\theta), \text{ visto que } R'_V(\theta) = 0 \quad (95)$$

$$= -u^2 \left[\int_{-w_M}^{w_M} w^2 S_V(w) dw \right] \quad (96)$$

$$\leq -(u w_M)^2 R_V(\theta) \quad (97)$$

Por conseguinte, o erro do estimador linear médio quadrático é proporcional ao quadrado de w_M (aumenta com o aumento da banda passante do sinal, mas converge para zero quando $u \rightarrow 0$).

IV.3 ERRO NA ESTIMAÇÃO DA fdp

A utilização do estimador médio quadrático na expressão (67) leva a um erro de aproximação dado pela expressão seguinte :

$$E_S(u) = R_S(u) - \hat{R}_S(u) \quad (98)$$

Substituindo-se as expressões para $R_S(u)$ (67) e $\hat{R}_S(u)$ (68), utilizando-se a expansão das exponenciais em série de Laurent com resto, avaliando-se os valores esperados e tomando-se o módulo do erro tem-se,

$$E_S(u) \leq \left[\frac{A^2}{4} u^2 EC(v'(t))^2 \right] - EC(v(t+u) - v(t))^2 \quad (99)$$

Levando-se em conta a desigualdade abaixo em conjunto com a desigualdade triangular /APENDICE II/,

$$u^2 EC(v'(t))^2 \geq EC(v(t+u) - v(t))^2 \geq \frac{4u^2}{2\pi^2} EC(v'(t))^2 \quad (100)$$

Chega-se finalmente a

$$E_S(u) \leq \left[\frac{A^2 u^2}{4} \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) EC(v'(t))^2 \right] \quad (101)$$

$$E_S(u) \leq \left[\frac{A^2 u^2}{4} \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) \cdot P_M \right] \quad (102)$$

onde P_M é a potência do sinal $m(t)$.

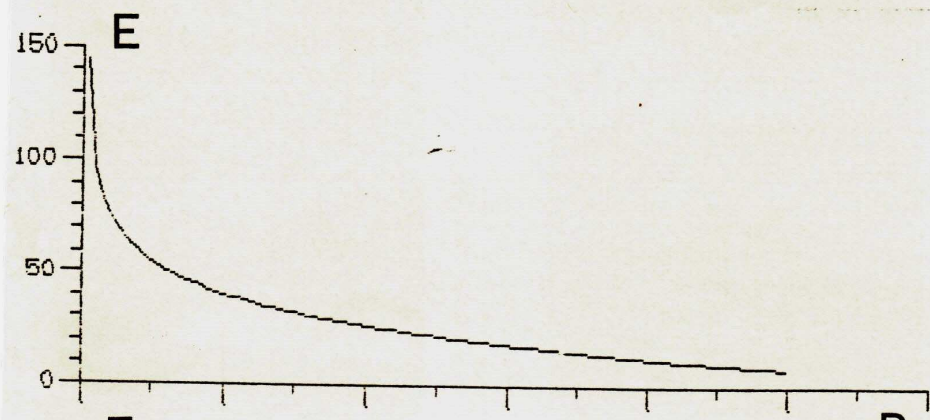
Considerando que a multiplicação de $v(t)$ na expressão (48) por um índice B leva à expansão do espectro do sinal modulado $m(t)$, sendo equivalente à divisão do argumento do sinal modulante em (49) pelo mesmo índice, e supondo ainda o pior caso ($u = \pi/w_M = 1/f_M$), obtém-se o erro normalizado em frequência abaixo:

$$E_S(B) \leq \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2\pi^2} \right) \frac{1}{2} = \frac{0,074}{B^2} \quad (103)$$

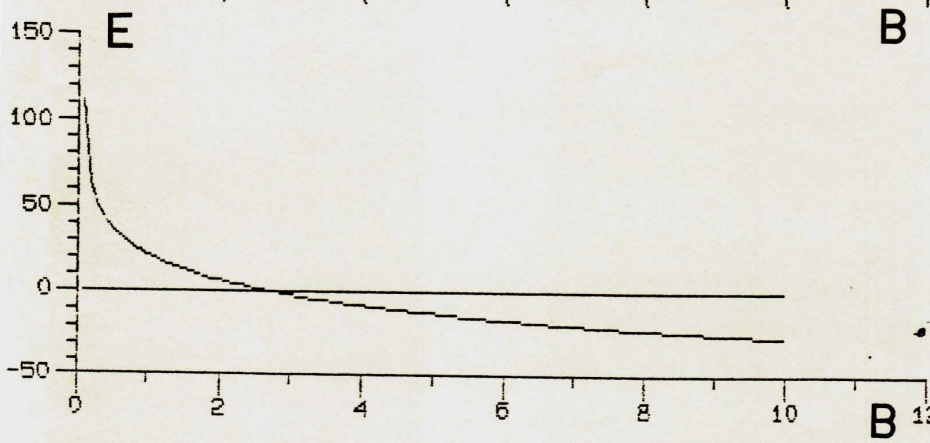
A expressão acima mostra que o erro decresce com o quadrado do índice de modulação (pelo menos), tornando-se menor que 0,074% para $B = 10$.

A estimativa de McAlpine fornece um erro em torno de 2,1%, para o mesmo índice de modulação /6/. A curva da figura (92) situa-se sempre abaixo da curva obtida por McAlpine e, aparentemente apresenta melhores resultados .

A Figura 14 esboça uma comparação entre as duas curvas discutidas.



a)



b)

FIG.14 Erro de Estimacao a) McALPINE b) ALENCAR em dB

CONCLUSOES

As técnicas de Estimaco Espectral têm-se desenvolvido rapidamente desde os trabalhos iniciais de Norbert Wiener na década de 40 , no tocante à análise de sinais aleatricos.

A medida que se desenvolvem , as técnicas tornam-se mais rigorosas, com o estabelecimento de novos limites , e adquirem particular interesse em aplicaes especiais , antes não cogitadas.

P. M. Woodward publicou na década de 50 um trabalho prospectivo e intuitivo acerca do cálculo do espectro de sinais modulados em frequência com sinais aleatricos /16/.

Mais tarde G.A. McAlpine desenvolveu uma tese de doutorado na Universidade de Virginia, onde foi introduzida a técnica da autocorrelao para o estabelecimento mais rigoroso do teorema de Woodward . O trabalho foi publicado no ano de 1969 /6/.

O trabalho de MacAlpine continha certas dificuldades em relao ao cálculo aproximado da integral estocástica do sinal modulante , e à complicada funo encontrada pelo mesmo para o limite superior do erro de aproximao de seu estimador. O erro foi calculado supondo o caso particular de um sinal modulante com distribuio gaussiana de probabilidades, com um espectro modelado por um filtro gaussiano.

O trabalho desenvolvido por M. S. Alencar em 1988 contornou a dificuldade com a integrao estocástica, através da utilizao do estimador linear médio quadrático , ao mesmo tempo em que estabeleceu um novo limite superior para o erro de estimaco da densidade espectral de potência , independente da fdp do sinal modulante /2/.

Os resultados obtidos sugeriam a utilizao da DEP do sinal modulado em frequência como estimador da fdp do sinal modulante , tendo em vista que a normalizao da DEP em relao à potência da portadora , seguida de um escalonamento da mesma em relao ao índice de desvio em frequência (D_{FM}) e

uma translação em frequência ($\omega_c = 0$), garantem a este estimador a condição de não polarizado.

Deve-se levar em conta que os estimadores usuais para a fdp são geralmente polarizados, inconsistentes, pouco eficientes em relação à variância, além de terem um erro médio quadrático dependente da própria fdp do processo em análise /8/.

Por outro lado, para se estimar um parâmetro probabilístico a partir de uma única observação, deve-se supor o processo ergódico e utilizar um intervalo de medição muitas vezes superior ao tempo de correlação do mesmo. Naturalmente, o tempo requerido para o cálculo deste parâmetro é proporcional a este intervalo e à faixa de tensões estipulada, e inversamente proporcional à dimensão da janela utilizada /5//11/.

A variância do estimador linear médio quadrático utilizado neste trabalho, e a própria variância da DEP como estimação da fdp tendem a zero, para um sinal limitado em faixa à medida em que o índice de modulação cresce. Isto garante a eficiência do estimador e conseqüentemente a consistência do mesmo (a aproximação sempre melhora para $B \rightarrow \infty$). Além disso, o estimador contém todas as informações relevantes para a estimação, o que lhe confere um caráter de suficiência.

O erro de estimação da fdp através da análise espectral - estimação da DEP - tem como limite superior uma curva inversamente proporcional ao quadrado do índice de modulação (B) atingindo 1% para $B = 3$ e um valor inferior a 0,07% para $B = 10$.

A partir dos resultados citados no Capítulo II, depreende-se que o erro acima pode ser bem inferior ao erro obtido através da estimação da fdp por análise temporal, que é da ordem de 1% para uma janela ótima, tendo em vista o compromisso já discutido entre a variância do erro de estimação temporal e a dimensão da janela de amplitudes.

A utilização deste método de estimação para o desenvolvimento de um instrumento de medição da fdp é recomendada pela sua simplicidade. Por outro lado, as facilidades computacionais atuais, permitindo a utilização de computadores pessoais acoplados a conversores A/D, possibilitam a implementação de um analisador de fdp digital a partir dos resultados deste trabalho.

Além da aplicação na estimação de funções densidade de probabilidade e no cálculo da densidade espectral de potência, a técnica desenvolvida no presente trabalho possibilita o ataque a outros problemas, quais sejam:

1. Estimação do ruído de quantização para quantizadores uniformes e não-uniformes.

Esta aplicação foi discutida exaustivamente na referência /4/.

2. Análise do espectro óptico de linhas em Lasers.

O espectro óptico (espectro de linhas) em Lasers é determinado através do "batimento" de dois feixes de luz que seguem caminhos diversos em dois enlaces de fibras ópticas, com extensão tal, que possibilita a descorrelação dos feixes. O resultado do batimento (obtido com um detetor óptico elétrico quadrático) pode ser atacado pela teoria de estimação desenvolvida, para obtenção da distribuição de intensidades no Laser.

3. Análise da distribuição de velocidades do fluxo Doppler em Angiologia

Muito utilizada em Angiologia, como auxílio ao diagnóstico de enfermidades, a análise do fluxo Doppler pode ser ampliada com a utilização da estimação desenvolvida aqui, visto que o efeito Doppler provocado principalmente pelo deslocamento das hemácias nos períodos de sístole e diástole é análogo ao processo de modulação em frequência, o que permite estimar a distribuição de velocidades do fluxo sanguíneo.

APÊNDICE I

ESTIMAÇÃO LINEAR MEDIA QUADRÁTICA

A estimação de sinais aleatórios a partir de dados disponíveis é uma das principais aplicações da teoria de probabilidades e processos estocásticos. Uma solução ótima para o problema é, em geral, difícil de ser obtida analiticamente. Entretanto, pode-se simplificar bastante a solução considerando-se lineares as operações envolvidas e interpretando o conceito de ótimo no sentido médio quadrático /12/.

Deseja-se, no caso, estimar o processo $v(t + u)$ em termos de $v(t)$ e sua derivada $v'(t)$. Portanto deve-se achar dois parâmetros a e b tais que

$$v(t + u) = a v(t) + b v'(t) \quad (I.1)$$

com um erro médio quadrático mínimo

$$E[(v(t+u) - a v(t) - b v'(t))^2] \quad (I.2)$$

O problema mais geral foi solucionado independentemente por Wiener e Kolmogoroff fazendo-se uso do princípio da ortogonalidade, que pode ser aplicado aqui.

Tendo em vista que o erro deve ser ortogonal a $v(t)$ e v' , obtêm-se as equações:

$$E[(v(t+u) - a v(t) - b v'(t)) v(t)] = 0 \quad (I.3)$$

$$E[(v(t+u) - a v(t) - b v'(t)) v'(t)] = 0 \quad (I.4)$$

ou seja,

$$R_{VV}(u) - a R_{VV}(0) - b R_{V',V}(0) = 0 \quad (I.5)$$

$$R_{V',V'}(u) - a R_{V',V}(0) - b R_{V',V'}(0) = 0 \quad (I.6)$$

Onde R_{VV} é a autocorrelação de $v(t)$.

Entretanto pode-se demonstrar que:

$$R'_{VV}(0) = 0, \text{ condição para } v'(t) \text{ existir} \quad (I.7)$$

$$R_{v,v}(u) = - R'_{v,v}(u) \quad (I.8)$$

$$R_{v,v'}(u) = - R''_{v,v}(u) \quad (I.9)$$

logo,

$$R_{v,v}(u) = aR_{v,v}(0) \quad (I.10)$$

$$R'_{v,v}(u) = bR''_{v,v}(0) \quad (I.11)$$

Aplicando-se (I.9) e (I.10) em (I.1) chega-se ao resultado geral,

$$v(t + u) = \frac{R_{v,v}(u)}{R_{v,v}(0)} v(t) + \frac{R'_{v,v}(u)}{R''_{v,v}(0)} v'(t) \quad (I.12)$$

Para sinais com variação lenta, para os quais a função de autocorrelação tem um comportamento monótonico, tem-se

$$R_{v,v}(u) = R_{v,v}(0) \quad (I.13)$$

$$R'_{v,v}(u) = R'_{v,v}(0) + uR''_{v,v}(0) \quad (I.14)$$

Isso permite simplificar a expressão (I.12) para,

$$v(t + u) = v(t) + uv'(t) \quad (I.15)$$

que é a equação utilizada no texto.

Deve ser observado que para sinais com transições abruptas (sinais digitais) não é possível determinar $R'_{v,v}(0)$ e portanto a solução (I.12) fica prejudicada.

APÊNDICE II

ESTIMATIVA PARA A VARIACÃO DE UM PROCESSO LIMITADO EM FREQUÊNCIA

Considerando um processo aleatório e estacionário limitado à frequência máxima w_M com autocorrelação $R_V(u)$ e densidade espectral de potência $S_V(w)$, demonstra-se para a condição $u \ll \frac{1}{w_M}$ que /12/,

$$\frac{4u^2}{2} - E[(v'(t))^2] \ll E[(v(t+u) - v(t))^2] \ll u^2 E[(v'(t))^2] \quad (II.1)$$

Inicialmente, para análise do limite superior, observa-se que a variação média quadrática do processo $v(t)$ pode ser escrita como:

$$E[(v(t+u) - v(t))^2] = 2[R_V(0) - R_V(u)] \quad (II.2)$$

Entretanto,

$$2[R_V(0) - R_V(u)] = \frac{1}{\pi} \int_{-w_M}^{w_M} S_M(w) (1 - \cos wu) dw \quad (II.3)$$

mas,

$$1 - \cos wu = 2 \operatorname{Sen}^2 \frac{wu}{2} \ll \frac{(wu)^2}{2} \quad (II.4)$$

logo,

$$E[(v(t+u) - v(t))^2] \ll \frac{1}{\pi} \int_{-w_M}^{w_M} S_V(w) \frac{(wu)^2}{2} dw \quad (II.5)$$

Como a transformada de $-R''_V(0)$ é dada por $w^2 S_V(w)$, tem-se o limite superior para a variação

$$E[(v(t+u) - v(t))^2] \ll -u^2 R''_V(0) = u^2 E[(v'(t))^2] \quad (II.6)$$

Tendo em conta novamente a expressão (II.3) e a desigualdade abaixo

$$1 - \cos wu = 2 \frac{\text{Sen}^2 \frac{wu}{2}}{2} \geq \frac{2(wu)^2}{2}, \quad u \leq \frac{\pi}{w_M} \quad (\text{II.7})$$

obtem-se

$$E[(v(t+u)-v(t))^2] \geq \frac{1}{\pi} \int_{-w_M}^{w_M} S_V(w) \frac{2(wu)^2}{2} dw \quad (\text{II.8})$$

ou seja

$$E[(v(t+u)-v(t))^2] \geq \frac{-4u^2}{2} R''_V(0) = \frac{4u^2}{2} E[(v'(t))^2] \quad (\text{II.9})$$

A última desigualdade (II.9) estabelece o limite inferior para a variação média quadrática do processo $v(t)$ e completa a demonstração da expressão (II.1).

APENDICE III

RESULTADOS DA SIMULACAO

A simulação das equações (48) e (49) em computador, permitiu a obtenção dos gráficos para as equações (57) e (73), para um índice de modulação respectivamente baixo e elevado. Os resultados estão esboçados graficamente nas figuras 15 e 16.

A biblioteca de programas 87FFT foi utilizada para o cálculo das transformadas, o programa GKSPC foi usado para a conversão dos dados e o programa PLOT possibilitou a geração das curvas ilustradas nas figuras 15 e 16 seguintes.

O APENDICE IV apresenta as listagens dos programas preparados para a simulação.

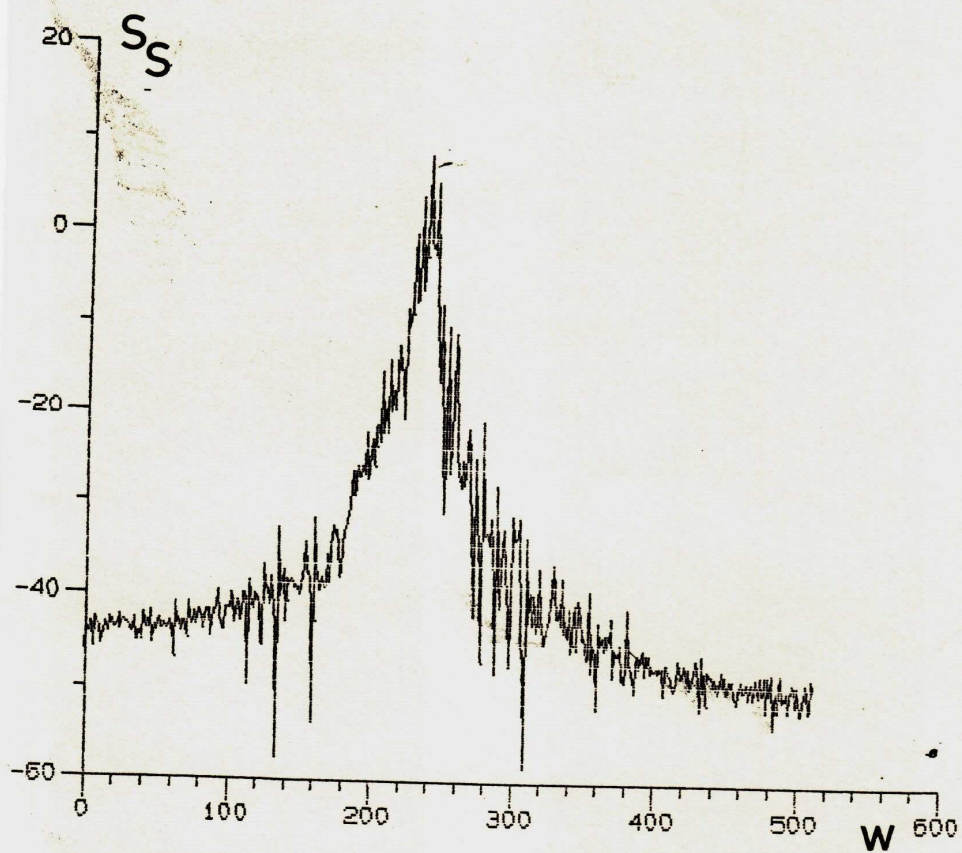


FIG. 15 DEP da PORTADORA MODULADA COM BAIXO INDICE

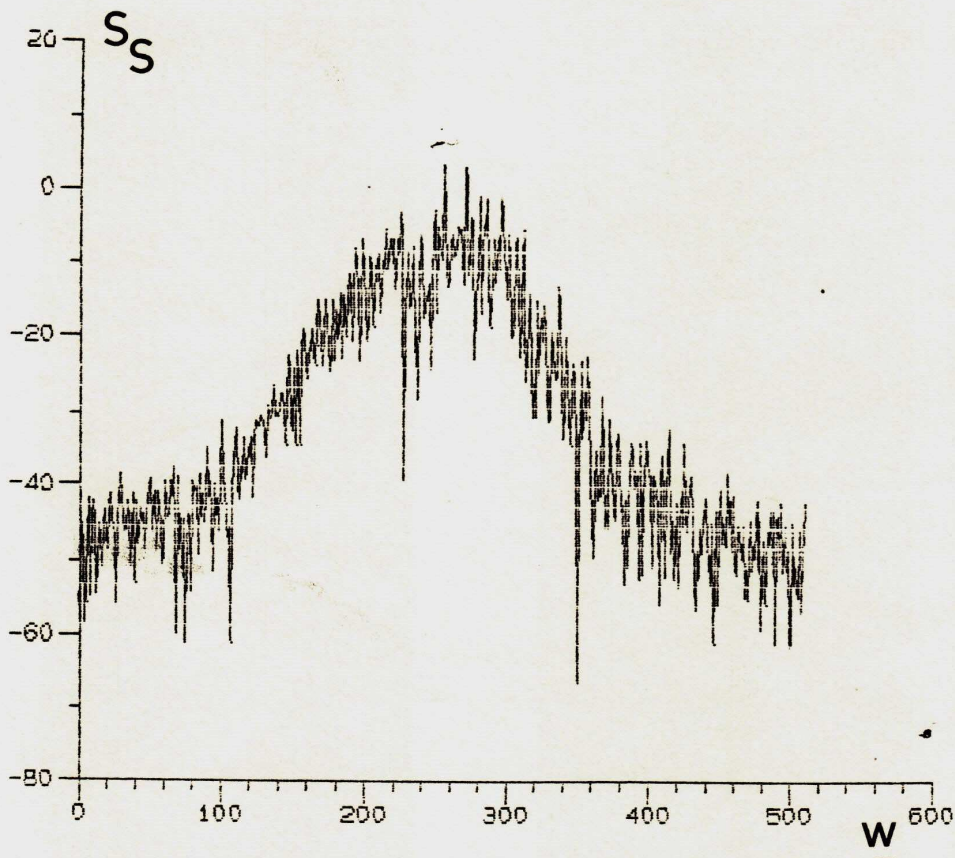


FIG. 16 fdp ESTIMADA DO SINAL GAUSSIANO

APÊNDICE IV

LISTAGENS DOS PROGRAMAS DESENVOLVIDOS

As listagens seguintes apresentam os programas, preparados em FORTRAN 77, para a simulação das diversas etapas do cálculo da função densidade de probabilidade de um sinal aleatório, a partir da análise espectral.

As rotinas codificam algoritmos de geração de números pseudo-aleatórios, através de técnicas de análise numérica /7//8/. Foram geradas seqüências com distribuição uniforme e com distribuição gaussiana.

O processamento dessas seqüências por um filtro recursivo, produz as seqüências de faixa limitada que são utilizadas como sinais moduladores /7//8/.

O programa principal interage com o usuário, solicitando o nível do sinal modulante, além da frequência e nível da portadora. De posse desses dados, a rotina simula as equações (48) e (49), armazenando os resultados em formato coluna dupla. O programa 87FFT processa esses resultados para obter estimativas da densidade espectral de potência da portadora modulada. O programa GKSPC converte os resultados do processamento anterior para um formato utilizável pelo programa gerador de curvas PLOT.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIENCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRICA
COORDENACAO DE POS-GRADUACAO

```
REAL GRAPH(2000,10)  
INTEGER*2 NCOU,NPT,NTOT,NCLE,NDEL  
REAL*8 XA(4),DY(4)  
OPEN(10,FILE='Z3.DES',STATUS='NEW',ACCESS='DIRECT',RECL=10)  
OPEN(4,FILE='Z3.SAI',STATUS='NEW')
```

LEITURA DOS DADOS

```
T=-1.  
TMAX=1.  
HOR=0.01  
NP=0.  
IG=0.  
YF=0.  
20 IF(T.GT.TMAX) GOTO 30  
IF(T.LE.-0.5) THEN  
FS=0  
ELSE IF(T.GE.0.5) THEN  
FS=0  
ELSE  
FS=1  
END IF  
Y=YF  
T1=T  
DO 105 J=1,4  
DY(J)=FS  
XA(J)=HOR*DY(J)  
GOTO(200,200,201,105),J  
200 T1=T1+HOR/2.  
GOTO 105  
201 T1=T1+HOR  
105 CONTINUE  
YF=Y+XA(1)/6.+XA(2)/3.+XA(3)/3.+XA(4)/6.  
WRITE(4,100)T,FS,YF  
100 FORMAT(10X,3(F8.3,4X))
```

```
C NP=NP+1  
IG=IG+1  
GRAPH(IG,1)=T  
GRAPH(IG,2)=FS  
GRAPH(IG,3)=YF  
GRAPH(IG,4)=US(2)  
GRAPH(IG,5)=US(3)  
WRITE(*,202)T  
202 FORMAT(10X,(F8.3,4X))
```

```
C T=T+HOR  
C GOTO 20  
C  
C 30 CONTINUE
```

GERACAO DO ARQUIVO DE CURVAS

```
NCOU=2  
NPT=NP  
NCLE=0  
NDEL=1  
NTOT=NPT  
WRITE(10,REC=1)NCLE,NCOU,NPT,NDEL,NTOT  
CLOSE(10)  
NACE=NPT*4  
OPEN(10,FILE='Z3.DES',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',RECL=NACE)  
WRITE(10,REC=2)(GRAPH(I,1),I=1,NPT)  
WRITE(10,REC=3)(GRAPH(I,2),I=1,NPT)  
WRITE(10,REC=4)(GRAPH(I,3),I=1,NPT)  
WRITE(10,REC=5)(GRAPH(I,4),I=1,NPT)  
WRITE(10,REC=6)(GRAPH(I,5),I=1,NPT)  
CLOSE(10)  
STOP  
END
```


C
C
C
C

PROGRAMA PARA COMPOR O ARQUIVO DE ACESSO DIRETO NAO FORMATADO
QUE SERA UTILIZADO PELO PROGRAMA GRAFICO DESS.EXE OU PLOT0.EXE
A) VERSAO PARA UTILIZACAO NO MICROCOMPUTADOR.

```
-----  
REAL Y(10,2500)  
INTEGER*2 NPT,NC,NCLE  
CHARACTER*80 ARQDAT,ARQA,ARQB  
WRITE(*,*)  
-----  
WRITE(*,*) ' DIGITE O NOME DO ARQUIVO DE DADOS '  
10 READ(*,10)ARQDAT  
FORMAT(A80)  
WRITE(*,*)  
WRITE(*,*) ' NOME DO ARQUIVO DE SAIDA DO TIPO DES (TEMPO) '  
-----  
READ(*,10)ARQA  
WRITE(*,*)  
-----  
WRITE(*,*) ' DIGITE O NUMERO DE PONTOS, CURVAS RAZAO '  
155 READ(*,155)NPT,NC  
WRITE(*,155)NPT,NC  
FORMAT(215)  
OPEN(1, FILE=ARQDAT, STATUS='OLD')  
NCC=NC+1  
NPP=NPT  
WRITE(*,*) ' LENDO O ARQDAT '  
DO 160 I=1,NPT  
160 Y(I,I)=I-1  
DO 170 I=1,NPT  
170 READ(1,101,END=177,ERR=176)(Y(J,I),J=2,NCC)  
101 FORMAT(11X,F8.5,11X,F8.5)  
GO TO 177  
176 WRITE(*,*) ' ERRO DE LEITURA I = ',I  
NPP=I-1  
NPT=NPP  
177 CONTINUE  
WRITE(*,*) ' VALOR DE I = ',I  
WRITE(*,*) ' NUMERO DE PONTOS = ',NPT  
NCLE=0  
OPEN(10, FILE=ARQA, STATUS='NEW', ACCESS='DIRECT',  
*RECL=10)  
WRITE(*,*) ' OPEN1 '  
WRITE(10,REC=1)NCLE,NC,NPT  
WRITE(*,*) ' NC = ',NC  
C-----ESCREVE AS CURVAS EM ARQUIVOS DE ACESSO DIRETO-----  
CLOSE(10)  
LR=NPT*4  
WRITE(*,*) ' LR = ',LR  
OPEN(10, FILE=ARQA, STATUS='OLD', ACCESS='DIRECT',  
*RECL=LR)  
WRITE(*,*) ' OPEN2 '  
WRITE(*,*) ' FORMANDO O ARQUIVO DE ACESSO DIRETO 1 '  
DO 200 I=2,NCC+1  
IREC=I  
WRITE(10,REC=IREC)(Y(I-1,J),J=1,NPP)  
200 CONTINUE  
CLOSE(10)  
STOP  
END
```



```

C   PROGRAMA GERADOR DE FUNCAO PARA FOURIER
C   DIMENSION F(50)
C   OPEN(4,FILE='FREE.DAT',STATUS='NEW')
C   PI=3.1415927
C   NP=32
C   RNP=NP
C   ARG=0.
C   FASE=PI/2
C   VM=1.
C   DO 100 I=1,NP
C   RI=I-1
C   ARG=(RI/RNP)*(2.*PI)+FASE
C   F(I)=VM*SIN(ARG)
C   CONTINUE
C   WRITE(4,1000) (F(I),I=1,NP)
C   WRITE(*,*) (F(I),I=1,NP)
C   1000 FORMAT(11X,F8.5,11X,F8.5)
C   STOP
C   END

```

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIENCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRICA
POS-GRADUACAO

```
REAL GRAPH(2000,10)  
INTEGER*2 NCOU,NPT,NTOT,NCLE,NDEL  
REAL*8 XA(4),DY(4)  
OPEN(10,FILE='Z4.DES',STATUS='NEW',ACCESS='DIRECT',RECL=10)  
OPEN(4,FILE='Z4.SAI',STATUS='NEW')
```

LEITURA DOS DADOS

```
T=-0.99  
TMAX=0.99  
HOR=0.01  
NP=0.  
IG=0.  
YF=0.  
20 IF(T.GT.TMAX) GOTO 30  
FS=0.318309886/(SQRT(1-T**2))  
Y=YF  
T1=T  
DO 105 J=1,4  
DY(J)=0.318309886/(SQRT(1-T**2))  
XA(J)=HOR*DY(J)  
GOTO(200,200,201,105),J  
200 T1=T1+HOR/2.  
GOTO 105  
201 T1=T1+HOR  
105 CONTINUE  
YF=Y+XA(1)/6.+XA(2)/3.+XA(3)/3.+XA(4)/6.  
WRITE(4,100)T,FS,YF  
100 FORMAT(10X,3(F8.3,4X))
```

```
C NP=NP+1  
IG=IG+1  
GRAPH(IG,1)=T  
GRAPH(IG,2)=FS  
GRAPH(IG,3)=YF  
C GRAPH(IG,4)=US(2)  
C GRAPH(IG,5)=US(3)  
202 WRITE(*,302)T  
FORMAT(10X,(F8.3,4X))
```

```
C T=T+HOR  
C GOTO 20  
C 30 CONTINUE
```

GERACAO DO ARQUIVO DE CURVAS

```
NCOU=2  
NPT=NP  
NCLE=0  
NDEL=1  
NTOT=NPT  
WRITE(10,REC=1)NCLE,NCOU,NPT,NDEL,NTOT  
CLOSE(10)  
NACE=NPT*4  
OPEN(10,FILE='Z4.DES',STATUS='OLD',ACCESS='DIRECT',RECL=NACE)  
WRITE(10,REC=2)(GRAPH(1,1),I=1,NPT)  
WRITE(10,REC=3)(GRAPH(1,2),I=1,NPT)  
WRITE(10,REC=4)(GRAPH(1,3),I=1,NPT)  
WRITE(10,REC=5)(GRAPH(1,4),I=1,NPT)  
WRITE(10,REC=6)(GRAPH(1,5),I=1,NPT)  
CLOSE(10)  
STOP  
END
```


BIBLIOGRAFIA

- /1/ ALENCAR, M.S. "Análise Estocástica do Sistema FDM-FM da EMBRATEL", III Simpósio Brasileiro de Microondas, 27.07.88 a 29.07.88, UFRN, Natal, RN.
- /2/ ALENCAR, M.S., "Estimação da Densidade Espectral de Potência do Sistema FDM-FM da EMBRATEL", 6º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 12.09.88 a 14.09.88, sede da FIEP, Campina Grande, PB.
- /3/ ALENCAR, M.S., "Measurement of the Probability Density Function of Communication Signals", Instrumentation/Measurement Technology Conference - IMTC'89, 25.04.89 a 27.04.89, Washington, D.C.
- /4/ ALENCAR, M.S. "Estimação do Ruído de Quantização em Quantizadores Lineares". Seminário da disciplina Processamento e Transmissão Digital de Voz - Prof. Benedito G. Aguiar Neto.
- /5/ BENDAT, J.S., PIERSOL, A.G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, New York, 1971.
- /6/ BLACHMAN, N.M., McALPINE, G.A. "The Spectrum of a High-Index FM Waveform: Woodward's Theorem Revisited". IEEE Trans. Communications Technology, Vol. COM-17, April 1969.
- /7/ HILDEBRAND, F.B. Introduction to Numerical Analysis. TATA McGraw-Hill, New Delhi, 1979
- /8/ KHUTH, D.E. The Art of Computer Programming. Vol. 2, Addison-Wesley Pub. Co., Reading Mass. 1969.
- /9/ McMAHON, E.L., "An Extension of Price's Theorem". IEEE, PGIT Vol. IT-10, 1964.
- /10/ MIDDLETON, D., "An Introduction to Statistical Communication Theory. McGraw-Hill, New York, 1963.

- /11/ MIRSKY, G., Radioelectronic Measurements. Mir Publishers, Moscow, 1978.
- /12/ PAPOULIS, A. Probability, Random Variables and Stochastic Process. McGraw-Hill, Tokyo, 1981.
- /13/ PRICE, R. "A Useful Theorem for Non-Linear Devices Having Gaussian Inputs". IRE, PGIT, Vol. IT-4, 1958.
- /14/ PRIESTLEY, M.B., Spectral Analysis and Time Series. Academic Press, London, England, 1981.
- /15/ SCHWARTZ, M. SHAW L. Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection, and Estimation. McGraw-Hill, Tokyo, 1975.
- /16/ WOODWARD, P.M., "The Spectrum of Random Frequency Modulation". Telecommunications Research Establishment, Great Malvern, Worcs. England Memo. 666, December 1952.