

ESTIMAÇÃO DA DENSIDADE ESPECTRAL DE POTENCIA DO SISTEMA FDM-FM
DA EMBRATEL

M.S. ALENCAR

Departamento de Engenharia Elétrica da UFPb
Av. Aprígio Veloso, 882 - Bodocongó
58.100 - Campina Grande - Pb

RESUMO Apresenta-se uma aplicação para duas técnicas utilizadas na estimação espectral de sinais modulados em frequência, devidas a R. Price e P. M. Woodward. Especificamente, estima-se a densidade espectral de potência (DEP) associada ao sistema FDM-FM de 1800 canais da EMBRATEL, apresentando-se inclusive resultados das verificações experimentais. Introduce-se também um novo limite superior para a estimativa do erro na aproximação de Woodward.

INTRODUÇÃO

As técnicas de estimação espectral têm se desenvolvido rapidamente desde os trabalhos iniciais de Norbert Wiener, no tocante à análise de sinais aleatórios. Vez por outra uma técnica é transposta ou reformulada para aplicação em um problema particular. Novos limites são estabelecidos e a demonstração da técnica fica mais rigorosa.

Procura-se nesse trabalho utilizar os teoremas de Woodward /1/ e Price /4/ para aplicação na estimação da densidade espectral de potência da portadora de RF (ou FI) do sistema FDM-FM utilizado pela EMBRATEL, considerando a abordagem com sinais aleatório no processo de modulação /9/.

Vários casos são analisados, para diversos índices de modulação, incluindo casos limites, avaliação de erro e modulação com tom senoidal.

O carregamento do sistema foi realizado com um gerador de ruído branco gaussiano de faixa limitada. Esse gerador simula a banda básica com carregamento nominal, para sistemas com número elevado de canais, quando se torna possível a aplicação do teorema do limite central /3/, considerando a independência dos canais de voz.

Na verificação experimental utilizou-se um sistema rádio Philips como modulador, sem pré-ênfase, com frequência intermediária (FI) em 70 MHz. O gerador de ruído operava na faixa de 316 kHz a 8204 kHz, para simulação do sinal de banda básica, equivalente a um sistema de 1800 canais de voz, Figura 1.

As figuras apresentadas foram desenhadas a partir de fotos do equipamento, obtidas do Spectrum Analyser 8553B da Hewlett Packard.

MODELAGEM MATEMATICA

No modelo considerado, o sinal FDM-FM é obtido a partir das equações abaixo:

$$s(t) = A \cos(\omega_c t + v(t) + Y) \quad (1)$$

$$v(t) = D_{FM} \int_0^t m(t) dt \quad (2)$$

onde A, que representa a amplitude da portadora, ω_c a frequência (rd/s) da mesma e D_{FM} o índice de desvio em frequência, são parâmetros constantes. O sinal $m(t)$ representa a banda básica do Multiplex no processo de modulação, sendo considerado um processo aleatório estacionário, com média nula. A fase da portadora é aleatória, com distribuição uniforme no intervalo $(0, 2\pi)$ e independente de $m(t)$.

Pode-se então dividir o problema do cálculo da densidade espectral de potência (DEP) do sinal (1) acima em três casos, discutidos a seguir /9/:

CASO I - Modulação com baixo índice, $B < 0,1$.

Nesse caso, pode-se obter a função de autocorrelação do sinal $s(t)$ definido em (1) a partir da eq. (3) abaixo, onde $E[.]$ representa o operador valor esperado

$$R_S(u) = E[s(t)s(t+u)] \quad (3)$$

ou seja,

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_c u - v(t) + v(t+u))] \quad (4)$$

ou ainda,

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c u E[\cos(-v(t) + v(t+u))] + \frac{A^2}{2} \sin \omega_c u E[\sin(-v(t) + v(t+u))] \quad (5)$$

como o índice de modulação é pequeno ($B < 0,1$), pode-se expandir o seno e o cosseno da equação (5) em séries de Taylor, desprezando os termos de mais alta ordem para obter:

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c u E[1 - \frac{(-v(t) + v(t+u))^2}{2}] + \frac{A^2}{2} \sin \omega_c u E[-v(t) + v(t+u)] \quad (6)$$

Tendo em vista que o processo $m(t)$ é estacionário com média nula, obtêm-se,

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c u [1 - R_V(0) + R_V(u)] \quad (7)$$

com

$$R_V(u) = E[v(t)v(t+u)] \quad (8)$$

$$R_V(0) = P_V = \text{potência do sinal } v(t)$$

Para um sinal tipo ruído branco de faixa limitada no intervalo (ω_I, ω_S) a potência P_V pode ser calculada em função da potência P_M do sinal modulante, obtendo-se:

$$P_V = 2D_{FM}^2 P_M \left[\frac{(\omega + \omega_I)^2}{S_I} - \frac{1}{(\omega - \omega_I)^2} \right] \quad (9)$$

Para valores usuais de P_M , ω_I e ω_S , P_V é da ordem de $10^{-8} P_M / 8$.

A DEP do sinal $s(t)$ será dada pela transformada de Fourier da equação (7), onde se considera $R_V(0) \ll 1/6$

$$S_S(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] + \frac{D_{FM}^2 A^2}{4} \left[\frac{S_M(\omega + \omega_c)}{(\omega + \omega_c)} + \frac{S_M(\omega - \omega_c)}{(\omega - \omega_c)} \right] \quad (10)$$

$S_M(\omega)$ = DEP do sinal de banda básica $m(t)$

Pode-se notar na equação (10) que o espectro do sinal FDM-FM terá o formato da DEP do sinal de banda básica (e mesma banda passante), multiplicado por uma função hiperbólica quadrática, o que pode ser observado na Figura 2. Deve-se lembrar que o espectro do sinal $m(t)$ é plano dentro da faixa de frequências considerada.

CASO II - Índice de modulação mediano, $0,1 < B < 10$

Aqui se enquadra normalmente o índice adotado pela EMBRATEL ($B \approx 0,4$) /8/, para o sistema FDM-FM de 1800 canais, com uma faixa ocupada pelo sinal modulado $s(t)$ de aproximadamente três vezes aquela do sinal de banda básica $m(t)$.

A expressão em série de Taylor da equação (5) deve considerar agora os termos de ordem superior. Pode-se mostrar /3/ que os termos da expansão do seno, por serem momentos conjuntos de ordem ímpar, se anulam para um sinal gaussiano, logo

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos w_c u E \left[1 - \frac{(-v(t) + v(t+u))^2}{2!} + \frac{(v(t) + v(t+u))^4}{4!} + \dots \right] \quad (11)$$

Considerando o interesse específico no sistema da EMBRATEL ($B \approx 0,4$), onde a banda passante do sinal modulado não excede o quádruplo da banda do sinal modulante $m(t)$, pode-se, sem perda de generalidade, desprezar os termos acima daquele de ordem quatro em (10).

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos w_c u [1 - R_V(0) + R_V(u)] + \frac{A^2}{48} \cos w_c u [2E\{v^4(t)\} + 6E\{v^2(t)v^2(t+u)\} - 24P_{VV}(u)] \quad (12)$$

Pode-se ver que a contribuição do segundo termo de (12) é menos significativa que o do primeiro em virtude do fatorial no denominador.

A equação acima pode ser simplificada com a utilização do Teorema de Price /4/ /5/ abaixo,

$$E\{X^k Y^r\} = Kr \int_0^c E\{X^{k-1} Y^{r-1}\} dc + E\{X^k\} E\{Y^r\} \quad (13)$$

$$c = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\} \quad (14)$$

Aplicando (13) e (14) em (12) obtém-se:

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} \cos w_c u (1 - P_V + R_V(u)) + \frac{A^2}{48} \cos w_c u [12P_V^2 + 12R_V^2(u) - 24P_V R_V(u)] \quad (15)$$

Transformando a equação, obtém-se:

$$S_S(w) = \frac{A^2}{2} (1 - P_V + P_V^2/2) (\delta(w+w_c) + \delta(w-w_c)) + \frac{D_{FM}^2 A^2}{4} (1 - P_V) \frac{S_M(w+w_c)}{(w+w_c)} + \frac{D_{FM}^2 A^2}{16\pi} \left[\frac{S_M(w+w_c)}{(w+w_c)} * \frac{S_M(w+w_c)}{(w+w_c)} \right] \quad (16)$$

A convolução dos espectros e sua posterior adição pode ser observada na Figura 3, onde se percebe que a faixa ocupada praticamente dobra, como era de se esperar a partir da observação do terceiro termo da equação (16).

A aplicação reiterada da fórmula (13) e a adição de mais termos à série (11) permitem obter o espectro de densidade de potência para qualquer valor do índice de modulação.

No caso senoidal, $m(t) = V \cos(w_c t + \phi)$, a autocorrelação será dada por /8/:

$$R_S(u) = \frac{A^2}{2} J_0(2B \text{sen} \frac{w u}{2}) \cos w_c u, \quad B = \frac{D_{FM} V}{w_M} \quad (17)$$

A função de Bessel de primeira espécie e ordem zero $J_0(x)$ pode ser obtida da fórmula abaixo,

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \dots \quad (18)$$

Para ilustrar o CASO 1, basta reter os dois primeiros termos da série (18), introduzir em (17) e aplicar a transformada de Fourier para obter a densidade espectral de potência,

$$S_S(w) = \frac{\pi A^2}{2} (1 - B/4) \delta(w \pm w_c) + \frac{B}{8} \mathcal{L}(w \pm w_c) \quad (19)$$

Espectros de ordens superiores poderão ser obtidos, considerando termos adicionais da expansão (18). A Figura 5 ilustra o caso.

CASO III - Índice de modulação elevado, $B > 10$.

Um grande índice de modulação provoca um alargamento no espectro do sinal modulado, fazendo com que este ocupe uma faixa bem superior aquela do sinal de banda básica. Em adição a DEP da portadora modulada toma o formato da função densidade de probabilidades (fdp) do sinal de banda básica. Esse é o resultado do teorema de Woodward /1/ que será demonstrado a seguir /6/.

Havendo um índice de modulação elevado ($B > 10$), não há sentido em desprezar os termos da expansão da equação (4), portanto pode-se optar pela fórmula exponencial do cosseno

$$R_S(u) = \frac{A^2}{4} \exp(jw_c u) E[\exp j(-v(t) + v(t+u))] + \frac{A^2}{4} \exp(-jw_c u) E[\exp j(v(t) - v(t+u))] \quad (20)$$

A utilização de um estimador linear médio quadrático na expressão (20) permite escrever /6/:

$$R_S(u) = \frac{A^2}{4} \exp(jw_c u) E[\exp(juv'(t))] + \frac{A^2}{4} \exp(-jw_c u) E[\exp(-juv'(t))] \quad (21)$$

Contudo, $v'(t) = dv(t)/dt = z$, onde z é o desvio na frequência instantânea da portadora $s(t)$, logo:

$$R_S(u) = \frac{A^2}{4} \exp(jw_c u) E[\exp(jzu)] + \frac{A^2}{4} \exp(-jw_c u) E[\exp(-jzu)] \quad (22)$$

Tendo em conta que,

$$E[\exp(jzu)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_Z(z) \exp(jzu) dz \quad (23)$$

onde $p_Z(z)$ é a função densidade de probabilidade do processo $z = dv(t)/dt$, aqui considerada simétrica.

Pode-se calcular a transformada de Fourier da equação (22), obtendo-se,

$$S_S(w) = \frac{\pi A^2}{2} [p_Z(w-w_c) + p_Z(w+w_c)] \quad (24)$$

Levando-se a definição de z à equação (2), percebe-se que $z = D_{FM} m(t)$, portanto,

$$p_Z(z) = \frac{1}{D_{FM}} p_M \left(\frac{z}{D_{FM}} \right) \quad (25)$$

onde $p_M(\cdot)$ é a fdp do processo $m(t)$.

A substituição de (25) em (24) leva finalmente à equação da densidade espectral da potência do sinal FDM-FM faixa larga,

$$S_S(w) = \frac{\pi A^2}{2 D_{FM}^2} \left[p_M \left(\frac{w-w_c}{D_{FM}} \right) + p_M \left(\frac{w+w_c}{D_{FM}} \right) \right] \quad (26)$$

Como a fdp do sinal de banda básica é gaussiana, para carregamento nominal, pode-se escrever,

$$p_M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} P_M} \exp \left(-\frac{m^2}{2P_M} \right) \quad (27)$$

com $P_M = R_M(0)$ = potência do sinal de banda básica.

Portanto, a DEP do sinal FDM-FM com índice de modulação elevado será dada por:

$$S_S(w) = \frac{\pi A^2}{2D_{FM}^2 \sqrt{2\pi P_M}} \exp\left[-\frac{(w+w_c)^2}{2D_{FM}^2 P_M}\right] \quad (28)$$

A Figura 4 ilustra esse caso extremo. Nota-se que o desvio eficaz em frequência será dado por $D_{FM} \sqrt{P_M}$ e a banda passante aproximada por $2D_{FM} \sqrt{P_M}$.

Pode-se notar que o formato da DEP do sinal modulado não depende da DEP do sinal modulante, mas apenas de sua fdp.

Um tom senoidal, como o referido anteriormente, tem fdp dada abaixo,

$$p_M(m) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{m^2}}} \quad , \quad |m| < V \quad (29)$$

Consequentemente, a modulação em faixa larga com um tom senoidal leva à DEP seguinte,

$$S_S(w) = \frac{1}{2\sqrt{V D_{FM}^2 - (w+w_c)^2}} \quad , \quad |w - w_c| < V D_{FM} \quad (30)$$

O sinal modulado ocupa, nesse caso, uma banda passante aproximadamente igual a $2V D_{FM}$. Sua DEP está ilustrada na Figura 6.

ESTIMAÇÃO DO ERRO

A utilização do estimador médio quadrático na expressão (20) leva a um erro de aproximação dado pela expressão seguinte:

$$E_S(u) = R_S(u) - R_S(u) \quad (31)$$

Substituindo-se as expressões para $R_S(u)$ e $R_S(u)$, utilizando-se a expansão das exponenciais em série de Laurent com resto, avaliando-se os valores esperados e tomando-se o módulo do erro tem-se,

$$|E_S(u)| < \frac{A^2}{4} |u^2 E[(v'(t))^2] - E[(v(t+u) - v(t))^2]| \quad (32)$$

Levando em conta a desigualdade abaixo /3/ ,

$$u^2 E[(v'(t))^2] > E[(v(t+u) - v(t))^2] > \frac{4u^2}{2} E[(v'(t))^2] \quad (33)$$

Chega-se finalmente a

$$|E_S(u)| < \frac{A^2 u^2}{4} \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) E[(v'(t))^2] \quad (34)$$

Considerando que a multiplicação de $v(t)$ na expressão (1) por um índice B leva à expansão do espectro do sinal modulado $s(t)$, sendo equivalente à divisão do argumento do sinal modulante em (2) pelo mesmo índice e supondo a utilização de um filtro gaussiano com banda passante $W = D_{FM} \sqrt{P_M}$ chega-se ao erro normalizado em frequência abaixo:

$$E_S(w) < \left(\pi - \frac{4}{\pi}\right) \frac{1}{B^2} \cong \frac{1,868}{B^2} \quad (35)$$

A expressão acima mostra que o erro decresce com o quadrado do índice de modulação (pelo menos), tornando-se menor que 1,9% para $B = 10$. A estimativa de Bachman dá um valor em torno de 0,13% enquanto a estimativa de McAlpine fornece um erro em torno de 2,1% /2/. A curva (35) situa-se entre as curvas obtidas por Blachman e McAlpine e, aparentemente, apresenta melhores resultados.

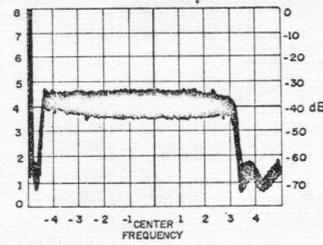


Fig.1

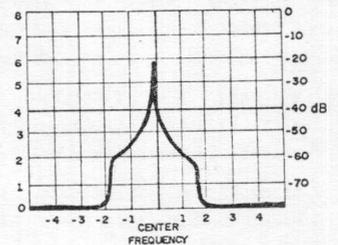


Fig.2

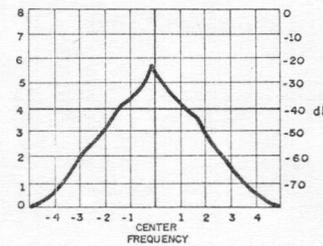


Fig.3

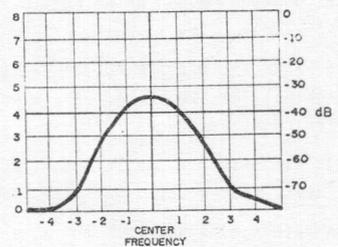


Fig.4

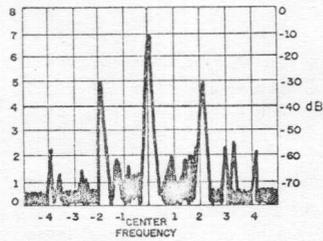


Fig.5

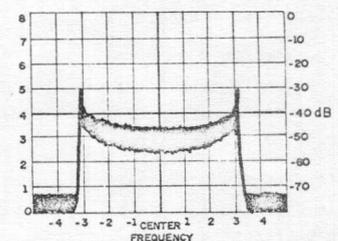


Fig.6

Densidades espectrais de potência para os casos analisados.

CONCLUSÃO

Foi desenvolvida uma aplicação dos teoremas de Price e Woodward na estimação espectral, incluindo o estabelecimento de um novo limite para o erro de aproximação cometido na aproximação de Woodward.

Apresentou-se um modelo para análise do sistema FDM-FM, considerando um sinal de banda básica aleatório e estacionário. Foram estudados e simulados os vários casos possíveis para o índice de modulação e sua influência na banda passante e na densidade espectral de potência do sinal FDM-FM. O Caso I se verifica com baixo nível de carregamento do sistema. O Caso II apresenta as curvas esperadas para carregamento nominal padronizado pelo CCIR. O Caso III ocorre apenas em testes, mas pode aproximar o Caso II com um erro que é função do índice de modulação. O caso III se verifica normalmente em sistemas de rádio-difusão, mas a fórmula (26) também é útil para se estimar o ruído de quantização de codificadores de fonte /10/ /11/.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece à EMBRATEL, por ter gentilmente cedido os equipamentos para a simulação do trabalho.

REFERENCIAS

- /1/ WOODWARD, P.M. "The Spectrum of Random Frequency Modulation", Telecommunications Research Establishment, Great Malvern, Worcs., England, Memo. 666, December 1952.
- /2/ BLACHMAM, N.M. & MCALPINE, G.A. "The Spectrum of a High-index FM Waveform: Woodward's Theorem Revisited", IEEE Trans. Communications Technology, Vol.COM-17, No. 2, April 1969.
- /3/ PAPOULIS, A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, Tokyo, Japan, 1981.
- /4/ PRICE, R. "A Useful Theorem for Non-linear Devices Having Gaussian Inputs", IRE, PGIT, Vol. IT-4, 1958.
- /5/ MCMAHOM, E.L. "An Extension of Price's Theorem", IEEE, PGIT, Vol. IT-10, 1964.
- /6/ ALENCAR, M.S. "Modulação em Ângulo Generalizada", I Encontro Regional de Comunicações e Microondas, 30.07.85 a 02.08.85, UFPb, Campina Grande - Pb.
- /7/ MIDDLETON, D. An Introduction to Statistical Communication Theory. McGraw-Hill, New York, 1963.
- /8/ SILVA, G. & BARRADAS, O. Sistemas Radiovisibilidade. LTC, Rio de Janeiro, 1978.
- /9/ ALENCAR, M.S. "Análise Estocástica do Sistema FDM-FM da EM-BRATEL", III Simpósio Brasileiro de Microondas, 27.07.88 a 29.07.88, UFRN, Natal - RN.
- /10/ ALENCAR, M.S. "Modelo para o Cálculo da Densidade Espectral de Potência do Ruído à Saída de um Codificador de Voz ADPCM, III Ciclo de Conferências em Comunicações e Microondas, 06.08.87 a 08.08.87, UFRN, Natal - RN.
- /11/ ALENCAR, M.S. "Determinação da Densidade Espectral de Potência do Ruído à Saída de um Quantizador Não-Uniforme", III Ciclo de Conferências em Comunicações e Microondas, 06.08.87 a 08.08.87, UFRN Natal - RN.