

ESTUDO DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA DE SISTEMAS DE
POTÊNCIA USANDO O MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

por

ANTONIO DANTAS MANIÇOBA

ORIENTADOR: JOSÉ CALAZANS DE CASTRO

Tese de Mestrado apresentada à Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências e Tecnologia (CCT) da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

Campina Grande, Agosto de 1982



M278e Manicoba, Antonio Dantas
Estudo de estabilidade transitoria de sistemas de potencia usando o metodo direto de Lyapunov / Antonio Dantas Manicoba. - Campina Grande, 1982.
107 f. : il.

Dissertacao (Mestrado em Engenharia Eletrica) - Universidade Federal da Paraiba, Centro de Ciencias e Tecnologia.

1. Potencia (Engenharia Eletrica) 2. Metodo de Lyapunov 3. Estabilidade Transitoria 4. Engenharia Eletrica 5. Dissertacao I. Castro, Jose Calazans de, Dr. II. Universidade Federal da Paraiba - Campina Grande (PB) III. Título

CDU 621.3.016.2(043)



CPqEE/CCT-UEPB

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

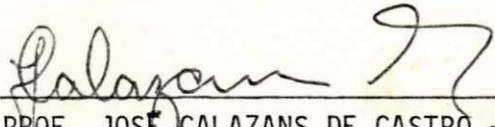
PARECER FINAL DO JULGAMENTO DA DISSERTAÇÃO DO MESTRANDO

ANTONIO DANTAS MANIÇOBA


TÍTULO: "Estudo de Estabilidade Transitória de Sistemas de Potência Usando o Método Direto de Lyapunov"

CONCEITO: _____

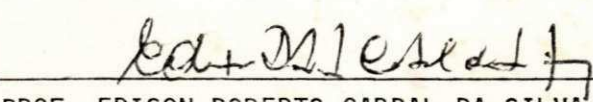
COMISSÃO EXAMINADORA:



PROF. JOSÉ CALAZANS DE CASTRO - Ph.D
- Presidente -



PROF. WELLINGTON SANTOS MOTA - Ph.D
- Examinador -



PROF. EDISON ROBERTO CABRAL DA SILVA - Dr, Ing.
- Examinador -

1. Pq
2. Método de Lyapunov
3. Estabilidade transitória

Campina Grande, 31 de agosto de 1982.

RESUMO

O presente trabalho visa aplicar o Método Direto de Lyapunov na análise de estabilidade transitória de sistemas de potência de múltiplas máquinas.

Com as máquinas representadas pelo modelo clássico e o sistema reduzido às barras internas das máquinas, é desenvolvida a função de Lyapunov (V) e determinados o ponto de equilíbrio estável e os pontos de equilíbrio instáveis para o sistema no período de pós-defeito.

Após ser conhecido o ponto de equilíbrio instável mais próximo do ponto de equilíbrio estável de pós-defeito, é determinada a região de estabilidade limitada por b_{\min} , que é o valor da função de Lyapunov nesse ponto de equilíbrio instável mais próximo.

A seguir, fazendo a integração numérica das equações diferenciais do sistema no período de defeito e avaliando a função de Lyapunov a cada passo de integração, o tempo crítico de eliminação

do defeito \bar{e} determinado quando o valor da função V atinge o valor limite b_{\min} .

São feitas comparações dos resultados obtidos para dois sistemas de três e quatro máquinas, com os obtidos pelo Método de Integração Numérica. Também são pesquisadas onze funções de Lyapunov indicadas na literatura, entre estas são selecionadas as funções que fornecem os melhores tempos críticos.

Na determinação dos pontos de equilíbrio do sistema \bar{e} é utilizado o Método de Brown em substituição ao usualmente empregado Método de Newton-Raphson. A influência das condutâncias de transferência das linhas \bar{e} também observada.

AGRADECIMENTOS

Não me é possível agradecer a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, porém desejo consignar a mais profunda gratidão:

- Ao meu orientador José Calanzans de Castro (Ph.D), pela valiosa orientação.
- Ao colega Epaminondas, pela colaboração na utilização dos terminais RSX.
- À UFMA, pela oportunidade oferecida para a realização do Curso de Mestrado.
- Aos colegas Hipólito, Guia, Bega e Eliane, pelo incentivo à luta.

DEDICATÓRIA

A meus pais Deoclecio e Helena,

A minha esposa Zil e a meu filho Ivson,

A meus irmãos,

dedico este trabalho.

INDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - Estabilidade de Sistemas de Potência	6
2.1 - Introdução	6
2.2 - Estabilidade Transitória e Estabilidade de Regime Perma- nente	8
2.2.1 - Sistemas de múltiplas máquinas	12
2.3 - Estudo da Estabilidade Transitória	13
CAPÍTULO III - Formulação Matemática do Método Direto de Lya- punov	16
3.1 - Introdução	16
3.2 - Conceitos matemáticos necessários à teoria de Lyapunov .	17
3.3 - Revisão teórica do Método Direto de Lyapunov	25
CAPÍTULO IV - O Método Direto de Lyapunov aplicado a Sistemas de Potência	31
4.1 - Introdução	31

4.2 - Um aspecto da Estabilidade Transitória em termos de energia	33
4.3 - Uma interpretação gráfica do Critério de Estabilidade ..	34
4.4 - Interpretação física da Região de Estabilidade	36
4.5 - Funções de Lyapunov para Sistemas de Potência	38
4.6 - Aplicação do Método Direto de Lyapunov a Sistemas de Potência	43
CAPÍTULO V - Exemplos de Aplicação	52
5.1 - Introdução	52
5.2 - Métodos para o programa	53
5.3 - Os resultados	57
5.4 - Análise dos resultados	85
CAPÍTULO VI - Conclusões	98
REFERÊNCIAS	101
APÊNDICE	105

LISTA DE SÍMBOLOS

n = número de geradores do sistema.

M_i = constante de inércia da máquina i .

E_i = módulo da tensão interna atrás da reatância transitória da máquina i , cujo argumento é δ_i .

δ_i = ângulo do rotor entre a tensão interna \bar{E}_i e um eixo girando à velocidade síncrona ω_0 .

ω_i = diferença entre a velocidade da máquina i e a velocidade síncrona; $\omega_i = \frac{d\delta_i}{dt} = \dot{\delta}_i$.

P_{mi} = potência mecânica de entrada da máquina i .

P_{ei} = potência elétrica da máquina i .

G_{ij} = $Y_{ij} \cos \theta_{ij}$, onde Y_{ij} é o módulo do j -ésimo termo da ma-

triz de admitância equivalente $[\bar{Y}_{eq}]$ (matriz reduzida);
 θ_{ij} é o argumento do j-ésimo termo de $[\bar{Y}_{eq}]$.

$$A_{ij} = E_i E_j Y_{ij} = A_{ji}.$$

$$P_i = P_{mi} - E_i^2 G_{ii}.$$

$$C_{ij} = P_i M_j - P_j M_i.$$

$$D_{ij} = C_{ij} / M_i M_j.$$

$$M = \sum_{i=1}^n M_i$$

$$\delta_n = \text{ângulo do rotor de referência; } \delta_n = 0.$$

$$\delta_{iK} = \delta_i - \delta_K.$$

$$\omega_{iK} = \omega_i - \omega_K.$$

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Oscilações de fluxo de potência entre máquinas síncronas é um problema que tem estado presente desde o início da geração e utilização de potência elétrica a.c. Pelo menos no estado permanente, teoricamente, tais oscilações não deveriam ocorrer. Entretanto, nenhum sistema de potência real está verdadeiramente no estado permanente desde que há sempre pequenas ou grandes perturbações, que fazem com que o sistema seja continuamente ajustado para satisfazer às novas condições de equilíbrio.

Com o passar do tempo, os sistemas de potência cresceram em tamanho e complexidade com as grandes distâncias entre os vários geradores e as áreas de carga. Com a transmissão de alta potência por longas distâncias, notou-se que porções do sistema tenderiam a perder sincronismo entre si, devido a ocorrência de diferentes perturbações. Deve ser dito que tais problemas deveriam ser evitados mantendo curtas distâncias de transmissão e isolando

várias áreas de geração, mas estudos econômicos têm mostrado que grandes sistemas interligados são desejáveis. O estudo dessas perturbações, portanto, tornou-se de grande importância para o correto dimensionamento do sistema, da coordenação da proteção e operação.

Essas perturbações podem ocorrer pela variação de alguma grandeza eletromecânica do sistema, assim como pela variação momentânea ou permanente do sistema elétrico devido a ocorrência de certos fatores, tais como: curto-circuitos, abertura ou fechamento de circuitos, desligamento ou introdução de geradores ou cargas, etc.

Como consequência dessas perturbações surgirão oscilações de potência e de tensão que podem, no primeiro caso fazer com que o sistema perca o sincronismo, e no segundo colocar os equipamentos do sistema sob risco de danificação.

No estudo em consideração, pretende-se saber se o sistema continuará em sincronismo, dando então continuidade ao fornecimento de energia.

A necessidade de estudar e analisar a estabilidade transitória de sistemas de potência teve início aproximadamente em 1920. Desde então muitos métodos têm sido desenvolvidos para atacar o problema, tais como o Critério de Áreas-Iguais, o Método de Integração Numérica e o Método Direto de Lyapunov.

Cada um destes procedimentos possui vantagens e desvantagens. Eles podem ser comparados de acordo com a espécie e quantidade de informações que fornecem e a exatidão da predição de estabilidade, além do tempo de computação necessário para obter certos resultados. Até agora, o único método considerado 'completo'

para o estudo de estabilidade de sistemas de potência é o Método de Integração Numérica. Entretanto, muitas vezes se está interessado somente em saber se o sistema é estável ou não face a determinada perturbação. Por esta razão, um método que não faz uso, ou faz uso parcialmente de soluções de sistemas de equações diferenciais para predição da estabilidade ou instabilidade, seria mais rápido para aplicação que o tradicionalmente usado Método de Integração Numérica. Tais métodos são chamados de métodos diretos.

O Método Direto de Lyapunov, objeto de nosso estudo, tem despertado ultimamente muita atenção dos estudiosos de estabilidade, por apresentar essa grande vantagem. Duas principais dificuldades, porém, têm tornado o Método Direto de Lyapunov não atrativo para o estudo de estabilidade transitória de sistemas de potência: a construção de uma conveniente função de Lyapunov (V) para o sistema e a determinação da região de estabilidade $V < b$ (b é uma constante que define a fronteira de estabilidade). A construção de convenientes funções de Lyapunov é um campo que continua completamente aberto e tem sido motivo de muitas pesquisas por parte de alguns autores [8, 22]. A determinação da região de estabilidade tem recebido muita atenção em estudos recentes [1, 2, 23].

Teoricamente, na determinação de b , a função V seria avaliada para todos os possíveis pontos de equilíbrio instáveis em torno do ponto de equilíbrio estável de pós-defeito, e o menor destes valores era tomado como b . Para um sistema de n -máquinas, um total de $(2^{n-1} - 1)$ pontos de equilíbrio instáveis teriam de ser testados. Desta forma, a determinação de b se tornaria inconveniente e computacionalmente custosa, desde que um grande volume de cálculo seria requerido para simular um sistema de tamanho ra-

zoável. Pavella [1] propõe que se examinem somente $2n$ pontos de equilíbrio instáveis na pesquisa de b , usando a analogia de um sistema de uma máquina ligada a uma barra infinita. Assim procedendo, o estudo de estabilidade transitória pelo Método Direto de Lyapunov é grandemente simplificado. O trabalho ora apresentado visa tirar proveito desse procedimento, juntamente com várias informações atualizadas sobre o assunto, no sentido de tornar o estudo de estabilidade transitória pelo Método Direto de Lyapunov o mais simplificado possível. Inicialmente, foram consideradas onze funções de Lyapunov indicadas na literatura. Nossa contribuição consiste na pesquisa e seleção de funções que melhor se adequam ao problema. Foram selecionadas quatro funções de Lyapunov convenientes para o estudo de estabilidade transitória de sistemas de potência e observado o efeito da condutância de transferência das linhas sobre os resultados. Ressalte-se que nos estudos existentes na literatura normalmente se utiliza uma única função de Lyapunov e não é observado o efeito da condutância de transferência das linhas. Um método alternativo (Método de Brown [9, 10]) é também apresentado em substituição ao usualmente empregado Método de Newton-Raphson. O método de Brown tem também convergência quadrática mas não requer o uso de derivadas.

No capítulo II fazemos uma rápida revisão teórica sobre estabilidade de sistemas de potência, onde introduzimos os conceitos de estabilidade transitória e estabilidade de regime permanente, dando ênfase à estabilidade transitória que é utilizada em nosso estudo. No capítulo III abordamos sucintamente a formulação matemática do Método Direto de Lyapunov. Neste capítulo inicialmente introduzimos alguns conceitos matemáticos necessários à teo

ria de Lyapunov e a seguir fazemos a formulação matemática do método. O capítulo IV equivale ao 'corpo' de nosso trabalho. Ele trata da aplicação do Método Direto de Lyapunov a estudos de estabilidade transitória de sistemas de potência. Inicialmente introduzimos um aspecto da estabilidade transitória em termos de energia, onde formulamos o conceito de energia transitória e sua importância na estabilidade transitória do sistema. A seguir fazemos uma interpretação gráfica do critério de estabilidade. Através dessa interpretação gráfica podemos visualizar alguns conceitos, tais como: pontos de equilíbrio estáveis e instáveis, fronteira de estabilidade e região de estabilidade, que são referidos durante todo o desenvolvimento do nosso trabalho. Mais adiante damos uma interpretação física da região de estabilidade e formulamos quatro funções de Lyapunov convenientes para o estudo de estabilidade transitória de sistemas de potência, funções estas que foram selecionadas entre onze funções de Lyapunov indicadas na literatura e por nós pesquisadas. Finalmente mostramos a maneira como o Método Direto de Lyapunov é aplicado a sistemas de potência, através de uma fluxograma e descrevendo cada passo resumidamente.

O capítulo V é destinado a descrever de forma breve os métodos utilizados no programa referente ao fluxograma do cap. IV, e a apresentar os resultados da simulação com a respectiva análise.

Utilizamos o capítulo VI para dar as conclusões resultantes do trabalho ora desenvolvido.

CAPÍTULO II

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE POTÊNCIA

2.1 - Introdução.

Estabilidade de Sistemas de Potência é um problema que está associado com a operação em paralelo de máquinas síncronas. Devido a isso, é possível que o problema tenha surgido quando as primeiras máquinas síncronas operaram em paralelo. Verificou-se, porém, que o maior problema inicial da operação em paralelo não foi estabilidade, mas oscilações. Inicialmente os geradores de C.A eram acionados por máquinas a vapor. O torque pulsante aplicado por tais máquinas ao gerador dava origem a variações periódicas na velocidade. Estas, resultantes na tensão e na frequência, eram transmitidas aos motores ligados ao sistema. As oscilações nos motores, causadas pelas variações de tensão e frequência, às vezes provocavam a perda completa de sincronismo se a frequência de oscilação natural do motor coincidissem com a frequência da os-

cilação causada pelas máquinas que acionavam os geradores [16].

A gravidade das oscilações foram diminuídas pela introdução do enrolamento de amortecimento, inventado por Le Blanc na França e Lamme nos Estados Unidos. A finalidade desse enrolamento é minimizar a oscilação pela ação amortecedora das perdas resultantes das correntes induzidas nesses enrolamentos por qualquer movimento relativo entre o rotor e o campo girante criado pela corrente de armadura. Mais tarde o problema da oscilação desapareceu grandemente devido ao uso geral de turbinas, uma vez que estas dão um torque praticamente constante. A manutenção do sincronismo entre as várias partes de um sistema de potência torna-se, no entanto, cada vez mais difícil com o crescimento dos sistemas e de suas interligações.

Desde 1920 o problema da estabilidade de sistemas de potência tem sido objeto de esmeradas investigações. Muitos métodos de análises foram desenvolvidos e verificados por testes, e medidas para melhorar a estabilidade foram desenvolvidas. Kimbark [12] cita os mais importantes passos nesse sentido como sendo:

1. Diagrama de Circulos;
2. Aperfeiçoamento na Teoria de Máquinas Síncronas;
3. O Método de Componentes Simétricos;
4. O Método Passo-a-Passo de resolver equações diferenciais;
5. O critério de Áreas Iguais;
6. Analisadores de Rede de C.A.

Vale salientar que os métodos acima citados foram desenvolvidos anteriormente ao uso do computador. Os primeiros estudos de estabilidade, utilizando cálculos computacionais, tiveram iní-

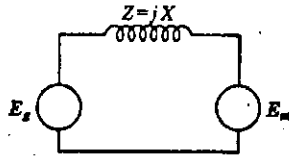
cio aproximadamente em 1957. Com o advento de computadores digitais de grande porte e alta velocidade, o método de resolver equações diferenciais por integração numérica (Método de Integração Numérica) é agora amplamente aplicado ao estudo de estabilidade. Esse método é considerado como sendo suficientemente preciso para determinar se qualquer sistema de potência em uma dada condição de operação será estável quando submetido a uma determinada perturbação. Os cálculos, entretanto, são um tanto laboriosos quando aplicados a um grande número de diferentes condições de operação de um complicado sistema de potência.

Neste trabalho apresentamos um método alternativo para o estudo da estabilidade de sistemas de potência que não requer grande esforço computacional - o Método Direto de Lyapunov ou Segundo Método de Lyapunov.

2.2 - Estabilidade Transitória e Estabilidade de Regime Permanente.

O termo estabilidade, quando usado com referência a sistemas elétricos de potência de corrente alternada, denota uma condição na qual as várias máquinas síncronas do sistema permanecem em sincronismo entre si. Reciprocamente, instabilidade denota uma condição envolvendo perda de sincronismo.

Consideremos, para exemplificar, um sistema de potência muito simples consistindo de um gerador síncrono suprindo potência a um motor síncrono por uma linha com resistência desprezível.



Quando a resistência \bar{r} é desprezada, a potência elétrica transmitida do gerador para o motor \bar{P}_e é dada por

$$P_e = \frac{E_G \cdot E_M}{X} \text{ sen } \delta \quad (2.2.1)$$

onde: E_G - é a tensão interna do gerador;
 E_M - é a tensão interna do motor;
 X - é a reatância equivalente do circuito, incluindo tanto as reatâncias do gerador e do motor, como a reatância da linha de transmissão;
 δ - é a posição angular entre os rotores do gerador e do motor, que para o nosso modelo simplificado é igual à diferença angular entre as tensões internas das duas máquinas. δ é denominado Ângulo de Potência.

Esta equação mostra que a potência elétrica transmitida P_e varia com o seno do ângulo de potência δ entre os dois rotores, como delineado na Fig. 2.2.1. A curva é conhecida como Curva de Potência-Ângulo. A potência máxima que pode ser transmitida em regime permanente com a reatância X dada e as tensões E_G e E_M é

$$P_m = \frac{E_G \cdot E_M}{X} \quad (2.2.2)$$

e ocorre para um ângulo de potência $\delta = 90^\circ$.

O valor máximo da potência pode ser aumentado fazendo-se aumentar as tensões internas ou diminuindo a reatância X .

O sistema é estável somente se o ângulo de potência δ está no intervalo compreendido entre -90° e $+90^\circ$, onde a inclinação $\frac{dP_e}{d\delta}$ é positiva, e consequentemente um aumento no ângulo de potência resulta em um aumento na potência elétrica transmitida.

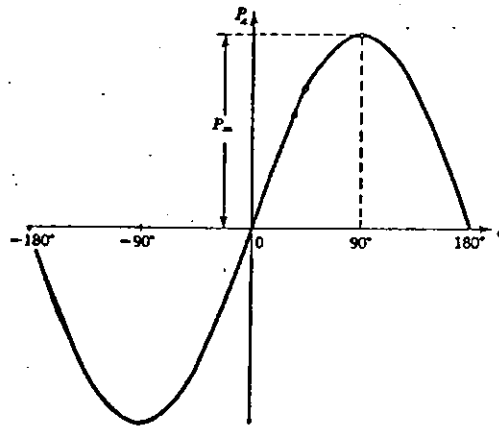


Fig. 2.2.1 - Curva de Potência versus Ângulo.

P_m é o limite de estabilidade de regime permanente do sistema. É a máxima potência que pode ser transmitida, e o sincronismo será perdido se um esforço é feito para transmitir potência acima desse valor. Geralmente, a estabilidade de regime permanente (ou estabilidade dinâmica, como ela é comumente chamada) é estudada para pequenas perturbações no sistema.

O limite de estabilidade transitória refere-se ao máximo fluxo de potência possível em um ponto do sistema, sem perda de estabilidade, quando ocorre uma perturbação súbita. Ele está sempre abaixo do limite de estabilidade de regime permanente. Usualmente, a estabilidade transitória é estudada no primeiro ciclo de uma variação transitória.

A perturbação em um sistema de potência pode ser um aumen

to repentino de carga, ou um aumento instantâneo na reatância do circuito, causado, por exemplo, pelo desligamento de uma ou mais linhas paralelas numa operação de chaveamento normal. O mais severo tipo de perturbação para o qual um sistema de potência está sujeito, entretanto, é um curto-circuito. Desta forma, o efeito de curto-circuitos deve ser determinado em quase todos os estudos de estabilidade. O mais severo tipo de curto-circuito a que um sistema de potência está sujeito é o curto-circuito trifásico para a terra. Neste tipo de curto-circuito, nenhuma potência ativa é transmitida do gerador para a carga. Se o defeito se mantiver e for suposta uma potência mecânica de entrada constante, δ crescerá indefinidamente porque toda a potência de entrada será utilizada na aceleração da máquina, causando assim, perda de estabilidade. Apesar do curto-circuito trifásico ser o de ocorrência menos freqüente, para uma maior segurança os sistemas de potência devem ser projetados para a estabilidade em regime transitório, com curto-circuito trifásico para a terra nas piores localizações [16].

Em alguns casos o sistema será estável mesmo com um curto-circuito sustentado, enquanto que em outros casos o sistema será estável somente se o curto-circuito é eliminado com suficiente rapidez. Os fatores que determinam se o sistema é estável durante defeitos são, entre outros, a configuração do próprio sistema, o tipo de defeito, localização do defeito, a rapidez com que ele é eliminado, e métodos de eliminação - isto é, se o defeito é eliminado pela abertura sequencial ou simultânea de dois ou mais disjuntores - e ainda se a linha em defeito é ou não religada ao sistema. Para qualquer destas condições, se o sistema é es-

tável ou não, depende do ponto de operação do sistema antes da ocorrência do defeito.

2.2.1 - Sistemas de Múltiplas Máquinas.

Na realidade, poucos ou nenhum sistema de potência atual consiste meramente de um gerador e um motor síncrono. Os sistemas de potência atuais possuem vários geradores, muitas linhas de transmissão e um grande número de cargas, tais como motores síncronos, de indução, lâmpadas, etc. O problema da estabilidade de tais sistemas usualmente dizem respeito à transmissão de potência de um grupo de máquinas síncronas a outro. Como uma regra, ambos os grupos consistem predominantemente de geradores. Durante perturbações as máquinas de cada grupo oscilam mais ou menos juntas; isto é, elas retêm aproximadamente suas posições angulares relativas, embora estas posições variem grandemente com respeito às máquinas de outro grupo. Como uma proposição de análise, as máquinas de cada grupo podem ser substituídas por uma única máquina equivalente. Se isto é feito, há um único gerador equivalente e um único motor síncrono equivalente, mesmo que o último muitas vezes represente máquinas que atualmente são geradores. Devido à incerteza de como tais máquinas oscilarão juntas, é frequentemente desejável representar as máquinas síncronas de um sistema de potência por mais de duas máquinas equivalentes.

2.3 - Estudo da Estabilidade Transitória.

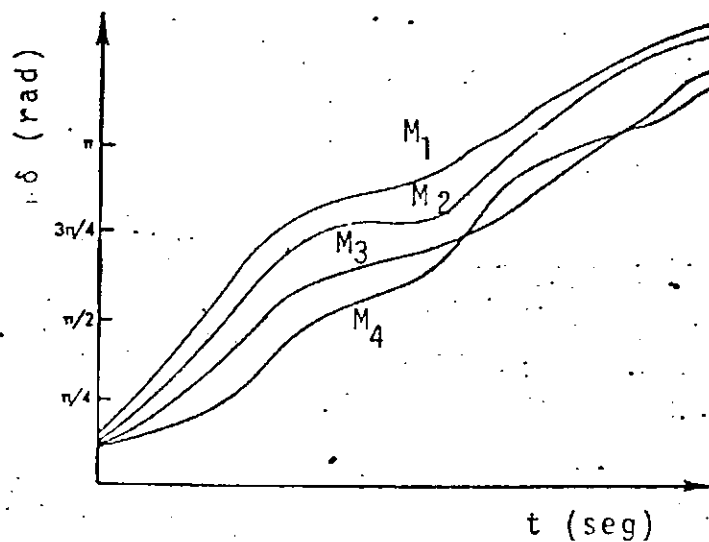
A estabilidade transitória, como já mencionada anteriormente, refere-se ao primeiro ciclo de uma variação transitória. Esse intervalo inclui o começo e a possível remoção da falta inicial.

Usualmente, a estabilidade do sistema, quando ocorre perturbações transitórias, é analisada através das diferenças angulares entre as máquinas, onde o ângulo do rotor é medido com relação a uma referência girando à velocidade síncrona.

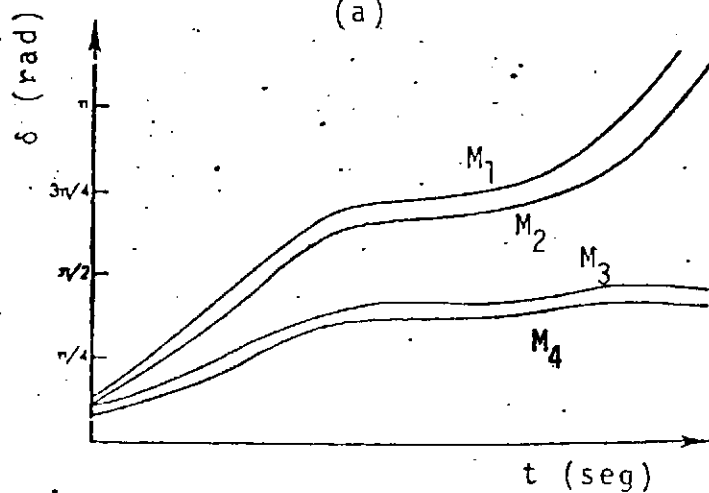
Na Fig. 2.3.1 tem-se uma ilustração gráfica para um sistema composto por quatro máquinas (M_1 , M_2 , M_3 e M_4), durante um transitório. No caso (a) as máquinas conservam pequenas diferenças angulares à medida que o tempo aumenta, e o sistema é dito estável. Para o caso (b) observamos que as máquinas são separadas em dois grupos, onde os ângulos dos rotores continuam a se distanciar com o tempo. Neste caso o sistema é dito instável. [15].

Estudos sobre a estabilidade de sistemas em situações transitórias fornecem informações com respeito à capacidade de um sistema de potência permanecer em sincronismo durante grandes perturbações que resultem tanto de falhas de geração e transmissão quanto da alteração súbita ou permanente nas cargas ligadas ao sistema, assim como de falhas momentâneas. Tais estudos fornecem especificamente mudanças nas tensões, correntes, potências, velocidades e torques das máquinas do sistema de potência, assim como as variações nas tensões do sistema e nos fluxos de potência, seja durante a perturbação ou imediatamente após. O grau de estabilidade de um sistema de potência é um dado de relevante importância

quando do planejamento de suas extensões e modificações. Para se obter a confiabilidade exigida pela dependência a um serviço elétrico contínuo, faz-se necessário que os sistemas de potência sejam planejados de modo a se manterem estáveis face a quaisquer perturbações concebíveis.



(a)



(b)

Fig. 2.3.1 - Resposta de um sistema de quatro máquinas durante um transitório: (a) Sistema Estável, (b) Sistema Instável [15].

Em estudos de estabilidade transitória de sistemas de potência um cálculo de fluxo de cargas é inicialmente feito para se obter as condições do sistema anteriores ao defeito. Para este cálculo a rede é formada pelos barramentos do sistema, linhas de transmissão e transformadores. A representação da rede para estudos de estabilidade transitória inclui, além de tais componentes, circuitos equivalentes para máquinas e impedâncias, e admitâncias estáticas em relação à terra. Depois do cálculo do fluxo de carga, a matriz de impedância ou admitância de um circuito deverá ser, em consequência, modificada de modo a incluir as alterações na representação do circuito.

As características de operação das máquinas síncronas e de indução descrevem-se por meio de sistemas de equações diferenciais. O número de equações diferenciais exigido para uma dada máquina depende da precisão necessária ao cálculo do desempenho da máquina. Duas equações diferenciais de primeira ordem se fazem necessárias para a descrição mais simples de uma máquina síncrona. [17]

CAPÍTULO III

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV

3.1 - Introdução.

Estabilidade é usualmente o fator mais importante a ser determinado em um dado sistema de energia elétrica. Para um sistema linear e invariável no tempo, vários métodos podem ser aplicados para determinar sua estabilidade (Nyquist, Routh, etc.). Porém se o sistema é não-linear ou linear mas variável no tempo, tais critérios não se aplicam.

Para a determinação da estabilidade de sistemas não-lineares e/ou variáveis no tempo, é usado um método mais geral que aqueles citados anteriormente: o Método Direto de Lyapunov ou Segundo Método de Lyapunov. Este método, a ser apresentado neste capítulo, aplica-se a sistemas de qualquer ordem, linear ou não-linear.

Através do Método Direto de Lyapunov pode-se determinar a

estabilidade de um sistema sem solução real das equações de estado desse sistema. Este fato é de relevante importância porque a solução de equações de estado não-lineares e/ou variáveis no tempo é usualmente muito difícil ou impossível. O Método Direto de Lyapunov tem ainda a grande vantagem de responder à questão de estabilidade de sistemas não-lineares quando outros métodos falham. Neste capítulo tratamos somente da formulação matemática do método, e no capítulo IV mostramos a maneira como ele é aplicado na determinação da estabilidade de sistemas elétricos de potência.

3.2 - Conceitos matemáticos necessários à teoria de Lyapunov.

Como na formulação matemática do Método Direto de Lyapunov muitos conceitos são empregados, damos aqui de forma abreviada alguns conceitos, visando um melhor entendimento dos assuntos a serem tratados posteriormente. Para maior clareza ver [11] de onde grande parte dos conceitos aqui formulados foram extraídos.

- SISTEMA: seja o sistema definido por

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (3.2.1)$$

onde: X - vetor de estado de dimensão n .

$f(X, t)$ - vetor de dimensão n , cujos elementos são funções de x_1, x_2, \dots, x_n e t .

Nós consideramos que o sistema da Eq. (3.2.1) tem uma solução única para uma dada condição inicial.

Denotamos a solução da Eq. (3.2.1) como sendo $\phi(t; X_0, t_0)$,

onde $X = X_0$ para $t = t_0$ e t é o tempo observado. Assim,

$$\phi(t_0; X_0, t_0) = X_0$$

- ESTADO DE EQUILÍBRIO. No sistema da Eq. (3.2.1), um estado X_e , onde

$$f(X_e, t) = 0 \quad \text{para todo } t \quad (3.2.2)$$

é chamado de Estado de Equilíbrio do sistema. Para sistemas não-lineares pode haver um ou mais estados de equilíbrio. Estes estados correspondem a soluções constantes do sistema ($X = X_e$ para todo t). A determinação dos estados de equilíbrio não envolvem a solução das equações diferenciais do sistema, Eq. (3.2.1), mas somente a solução da Eq. (3.2.2).

- ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV. Denota-se uma região esférica de raio K ao redor de um estado de equilíbrio X_e como

$$\|X - X_e\| \leq K$$

onde $\|X - X_e\|$ é chamado Norma Euclideana e é definida por

$$\|X - X_e\| = \left[(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2 \right]^{1/2}$$

Seja $S(\delta)$ uma região consistindo de todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta$$

e seja $S(\epsilon)$ uma região consistindo de todos os pontos tais que

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Um estado de equilíbrio x_e do sistema dado pela Eq. (3.2.1), é dito estável segundo Lyapunov se, correspondendo a cada região $S(\epsilon)$, existe uma região $S(\delta)$ tal que trajetórias iniciando em $S(\delta)$ não deixam $S(\epsilon)$ quando o tempo cresce indefinidamente.

O que temos estabelecido aqui é que primeiro escolhemos a região $S(\epsilon)$, e para cada $S(\epsilon)$, deve haver uma região $S(\delta)$ tal que trajetórias iniciando no interior de $S(\delta)$ não deixam $S(\epsilon)$ quando t cresce indefinidamente.

- ESTABILIDADE ASSINTÓTICA. Um estado de equilíbrio x_e do sistema dado pela Eq. (3.2.1) é dito assintoticamente estável se ele é estável segundo Lyapunov e se toda solução iniciando no interior de $S(\delta)$ converge, sem deixar $S(\epsilon)$, para x_e quando t aumenta indefinidamente.

- INSTABILIDADE. Um estado de equilíbrio x_e é dito instável se para qualquer número real $\epsilon > 0$ e qualquer número real $\delta > 0$, por menor que seja, há sempre um estado x_0 em $S(\delta)$ tal que a trajetória iniciando para este estado deixa $S(\epsilon)$.

Estados de Equilíbrio Estável, Assintoticamente Estável e Instável estão representados no diagrama da Fig. 3.2.1.

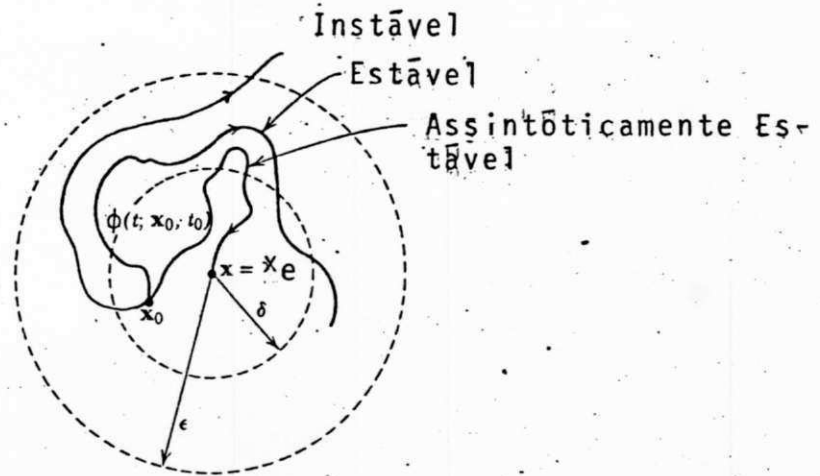


Fig. 3.2.1 - Representação de estados de equilíbrio estável, assintoticamente estável e instável.

- PLANO DE FASE. A solução de uma equação diferencial

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.3}$$

pode ser expressada por:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_1(t) \\
 x_2 &= x_2(t) \\
 &\vdots \\
 x_n &= x_n(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4}$$

A relação entre x_1 e t é usualmente obtida como uma curva $x_1 \cdot t$; da mesma forma teremos $x_2 \cdot t, \dots, x_n \cdot t$. Se a variável independente t for eliminada de (3.2.4), a seguinte equação é obtida

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (3.2.5)$$

Se x_1, x_2, \dots, x_n são interpretadas como coordenadas ortogonais mútuas, a Eq. (3.2.5) define unicamente uma curva ou uma trajetória nas coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Um caso particular encontrado frequentemente é quando $n = 2$, ou

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

cuja solução pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Eliminando t , tem-se $\psi(x_1, x_2) = 0$

O espaço $x_1 \cdot x_2$ (Espaço de Fase) é bidimensional e é chamado Plano de Fase.

- ESPAÇO DE ESTADO. A Eq. (3.2.3) para descrever um sistema é uma forma especial da seguinte forma geral:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 \dot{y}_2 &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 &\vdots \\
 \dot{y}_n &= f_n(y_1, y_2, \dots, y_n)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.8}$$

Comparando as primeiras $(n - 1)$ equações de (3.2.8) e (3.2.3), vemos que enquanto $\dot{x}_i = x_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ na Eq. (3.2.3), $\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$, na Eq. (3.2.8). A solução de (3.2.8) também pode ser escrita por

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_1(t) \\
 y_2 &= y_2(t) \\
 &\vdots \\
 y_n &= y_n(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.9}$$

Eliminando t em (3.2.9), tem-se

$$\psi(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0
 \tag{3.2.10}$$

que também define uma trajetória no espaço.

Para distinguir o espaço \underline{x} do espaço \underline{y} , dá-se ao espaço \underline{y} o nome geral de "Espaço de Estado". Obviamente, o Espaço de Fase é um caso particular do Espaço de Estado. Devido a Eq. (3.2.8) ter uma forma tão geral e ser facilmente compreensível na representação de sistemas, pode-se dizer que todas as soluções de equações diferenciais, e conseqüentemente o comportamento de qualquer sistema dinâmico pode ser resumido por um esboço de trajetórias em um Espaço de Estado apropriado. [13]

- PONTOS SINGULARES. Para melhor visualizar o significado de pontos singulares ou de equilíbrio, fazemos uso do exemplo abaixo.

Exemplo. Considere o Oscilador Linear descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (3.2.11)$$

onde: $\omega > 0$ = frequência de oscilação.

Em termos de variáveis de estado e com alguma manipulação algébrica, qualquer solução para a eq.(3.2.11) está relacionada com a solução da eq.(3.2.12), abaixo

$$x_2^2 + \omega^2 x_1^2 = c^2 \quad (3.2.12)$$

onde: c = constante

Diversas soluções para vários valores de c , correspondendo a vários valores iniciais de x_1 e x_2 , são mostrados na Figura 3.3.2. A solução no plano $x_1 \cdot x_2$ é chamado de Trajetória e o plano $x_1 \cdot x_2$ é chamado Plano de Fase, como foi denominado anteriormente.

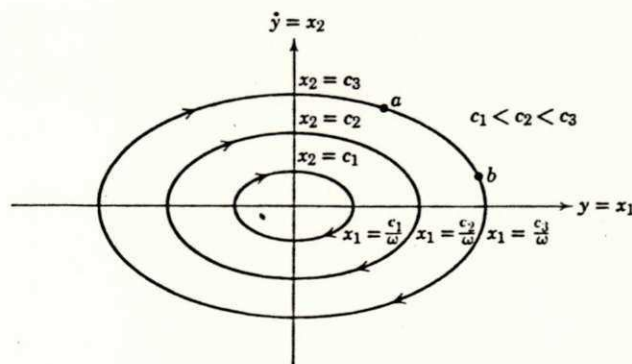


Fig. 3.3.2 - Trajetórias soluções de $x_2^2 + \omega^2 x_1^2 = c^2$.

A trajetória correspondendo a $c = 0$ é a solução trivial para $x_1 = x_2 = 0$. Esta solução é chamada solução singular, e o ponto $(0, 0)$ é chamado ponto singular ou ponto de equilíbrio. Ele é um ponto de equilíbrio ou de repouso para o oscilador linear. No caso em consideração ele é chamado de centro, devido a todas as trajetórias formarem caminhos fechados sobre o mesmo.

O ponto de equilíbrio denominado centro, observado para o Oscilador Linear é somente um dos quatro pontos de equilíbrio possíveis. Os demais são Foco, Nó e Ponto de Sela, que são tratados em quase toda a literatura de controle. [14].

- FUNÇÃO POSITIVA DEFINIDA. Uma função escalar $V(X)$ é dita Positiva Definida em uma região Ω (a qual inclui a origem do Espaço de Estado) se $V(X) > 0$ para todos os estados X não nulos na região Ω e $V(0) = 0$.

- FUNÇÃO NEGATIVA DEFINIDA. Uma função escalar $V(X)$ é dita Negativa Definida se $-V(X)$ é Positiva Definida.

- FORMAS QUADRÁTICAS. Um caso particular de funções de Lyapunov frequentemente encontradas é a forma quadrática. Um exemplo é,

$$V(X) = X'PX$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Note-se que P é real e simétrica.

A positividade da forma quadrática $V(X)$ pode ser determi

nada pelo Critério de Sylvester, o qual estabelece que a condição necessária e suficiente para que a forma quadrática $V(X)$ seja positiva definida é que todos os determinantes principais formados de P sejam positivos, isto é,

$$p_{11} > 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Exemplo: Seja a forma quadrática

$$V(X) = x_1^2 + x_2^2$$

Podemos escrevê-la na forma

$$V(X) = X'PX = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \text{ e } V(X) \text{ é assim Positiva Definida.}$$

3.3 - Revisão teórica do Método Direto de Lyapunov.

Da teoria clássica de Mecânica, sabe-se que um sistema

vibratório é estável se sua energia total (uma função positiva definida) está continuamente decrescendo (o que significa que a derivada da energia total com relação ao tempo deve ser negativa de definida) até que um estado de equilíbrio é atingido.

O Método Direto de Lyapunov está baseado na generalização deste fato: se o sistema tem um estado de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada do sistema deslocada dentro do domínio de atração decai com o aumento do tempo até que ela finalmente assume seu valor mínimo para o estado de equilíbrio. Para sistemas puramente matemáticos, entretanto, não há uma maneira simples de definir uma "Função de Energia". Para contornar esta dificuldade, Lyapunov introduziu a então chamada Função de Lyapunov, uma função de energia fictícia. Esta idéia é, entretanto, mais geral que aquela de energia e é mais amplamente aplicada. De fato, qualquer função escalar satisfazendo as hipóteses do Teorema da Estabilidade de Lyapunov (ver Teorema 3.1) pode servir como uma Função de Lyapunov. (Para sistemas simples pode-se determinar convenientes funções de Lyapunov; entretanto, para sistemas complexos, esta tarefa pode se tornar bastante difícil).

Funções de Lyapunov podem depender de x_1, x_2, \dots, x_n , e t . Assim sendo são denotadas por $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, ou simplesmente por $V(X, t)$. Se elas não incluem o tempo explicitamente, então são denotadas por $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou $V(X)$.

No Método Direto de Lyapunov, o comportamento do sinal de $V(X, t)$ e aquele de sua derivada com relação ao tempo $\dot{V}(X, t) = \frac{dV(X, t)}{dt}$ dá-nos informação da estabilidade, estabilidade assintótica, ou instabilidade de um estado de equilíbrio sem requerer a solução do sistema.

- PRINCIPAL TEOREMA DA ESTABILIDADE DE LYAPUNOV. Pode ser mostrado que se uma função escalar $V(X)$, onde X é um vetor de dimensão n , é positiva definida, então os estados X que satisfazem

$$V(X) = C$$

onde C é uma constante positiva, encontram-se em uma hipersuperfície fechada no espaço de estado de dimensão n , pelo menos nas vizinhanças da origem. Se $V(X) \rightarrow \infty$ quando $\|X\| \rightarrow \infty$, então tais superfícies estendem-se sobre o espaço de estado completo. A hipersuperfície $V(X) = C_1$ encontra-se inteiramente no interior da hipersuperfície $V(X) = C_2$ se $C_1 < C_2$.

Para um sistema dado, se uma função escalar positiva definida $V(X)$ pode ser encontrada tal que sua derivada no tempo tomada ao longo de uma trajetória é sempre negativa, então se o tempo aumenta, $V(X)$ atinge menores valores de C . Com o tempo aumentando, $V(X)$ finalmente tende a zero, e desta forma X também tende a zero. Isto implica em estabilidade assintótica da origem do espaço de estado. O principal teorema da estabilidade de Lyapunov, o qual é uma generalização do fato precedente, fornece uma condição suficiente para estabilidade assintótica. Este teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 3.1. Suponha que um sistema seja descrito por

$$\dot{X} = f(X, t)$$

onde $f(0, t) = 0$ para todo t .

Se existe uma função escalar $V(X, t)$ tendo derivadas par-

ciais contínuas e satisfazendo às seguintes condições,

- a) $V(X, t)$ é positiva definida
- b) $\dot{V}(X, t)$ é negativa definida.

então o estado de equilíbrio, a origem, é assintoticamente estável.

Exemplo: Consideremos o sistema descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Investiguemos a estabilidade do estado de equilíbrio $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ para este sistema.

Definindo uma função escalar $V(X)$ por

$$V(X) = x_1^2 + x_2^2$$

que é positiva definida, temos que sua derivada ao longo de qualquer trajetória é

$$\dot{V}(X) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \quad (3.3.2)$$

De (3.3.1) e (3.3.2),

$$\dot{V}(X) = -2(x_1^4 + x_2^2), \text{ que é negativa definida.}$$

Isto mostra que $V(X)$ está continuamente decrescendo ao longo de qualquer trajetória; portanto $V(X)$ é uma função de Lyapunov para o sistema. Pelo teorema 3.1 o estado de equilíbrio,

no caso a origem, é assintoticamente estável.

Notemos que se fizermos $V(X)$ assumir valores constantes, $0, C_1, C_2, \dots, (0 < C_1 < C_2 < \dots < C_{n-1} < C_n)$, então $V(X) = 0$ corresponde à origem do plano de fase e $V(X) = C_1, V(X) = C_2, \dots, V(X) = C_n$ descrevem círculos não interceptados ao redor da origem do plano de fase, como mostrado na Fig. 3.3.1. Notemos também que desde que $V(X) \rightarrow \infty$ quando $\|X\| \rightarrow \infty$, os círculos estendem-se sobre todo o plano de fase.

Desde que o círculo $V(X) = C_K$ encontra-se inteiramente no

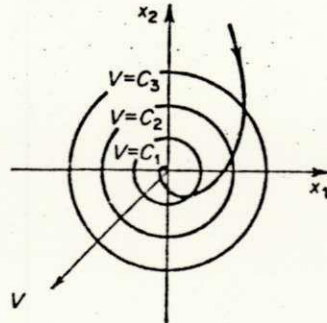


Fig. 3.3.1 - Contornos para valores constantes de V e trajetória representativa.

interior do círculo $V(X) = C_{K+1}$, uma trajetória representativa atravessa as linhas demarcadoras dos contornos de V do exterior para o interior. Com isto, uma interpretação geométrica de uma Função de Lyapunov pode ser estabelecida como segue: $V(X)$ é uma medida da distância do estado X com relação à origem do espaço de estado.

Se a distância entre a origem e o estado instantâneo $X(t)$

é continuamente decrescente quando t aumenta (isto é, $\dot{V}(X(t)) < 0$), então $X(t) \rightarrow 0$. Desde que uma Função de Lyapunov $V(X)$ é considerada como definindo uma distância com relação a origem no espaço de estado, sua derivada pode ser usada para dar uma quantidade estimada de velocidade com que $X(t)$ está se aproximando da origem.

CAPÍTULO IV

O MÉTODO DIRETO DE LYAPUNOV APLICADO A SISTEMAS DE POTÊNCIA

4.1 - Introdução.

O modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico de um sistema de potência sob perturbações transitórias é dado por um conjunto de equações diferenciais e algébricas.

Supondo que as máquinas do sistema sejam representadas pelo modelo clássico, isto é, uma tensão constante atrás de uma reatância transitória e potência mecânica de entrada constante, as equações diferenciais são não-lineares com coeficientes constantes.

Para um sistema linear, a estabilidade pode ser estabelecida pelas raízes de sua equação característica, que implica na estabilidade do sistema no espaço de estado completo. Porém, para um sistema não-linear como o que tratamos aqui, tal conclusão não é válida, uma vez que sua estabilidade depende do distúrbio, das

condições iniciais, como também dos parâmetros do sistema. Sua estabilidade não é analisada em todo o espaço de estado, mas somente numa certa região de interesse. Desta forma se faz necessário encontrar um conjunto de condições iniciais definindo a região de estabilidade. Todas as trajetórias do sistema iniciando no interior dessa região tendem ao ponto de equilíbrio estável quando o tempo cresce indefinidamente, o que indica estabilidade assintótica do sistema.

Quando métodos numéricos são aplicados para determinar a estabilidade do sistema de potência, torna-se necessário a solução de sistemas de equações diferenciais descrevendo o sistema de potência durante a perturbação e após a perturbação. Além disso se faz necessário um engenheiro com bastante experiência para analisar a solução numérica e decidir se o sistema é estável ou instável. O tempo de eliminação de defeito é então mudado e uma nova solução é obtida até que o tempo crítico de eliminação do defeito seja encontrado. [2].

Para sistemas complexos esta simulação torna-se inconveniente e muito dispendiosa, desde que um grande tempo de simulação e enorme volume de cálculo é requerido em sua execução. Assim, o interesse em desenvolver métodos diretos para calcular o tempo crítico de eliminação do defeito tem aumentado muito ultimamente.

Vale lembrar que métodos indiretos são muitas vezes mais precisos que métodos diretos, e nestes casos, os últimos podem ser usados no sentido de dar uma idéia das regiões de instabilidade do sistema.

O Método Direto de Lyapunov, desenvolvido neste capítulo,

capacita-nos a determinar a estabilidade ou instabilidade dos pontos de equilíbrio, sem resolução real do sistema de equações diferenciais. A região de estabilidade assintótica, que compreende a região de todas as condições iniciais ao redor do ponto de equilíbrio para o qual o sistema é assintoticamente estável, pode ser estabelecida e a estabilidade do sistema pode ser determinada com o auxílio de uma conveniente função de Lyapunov para o sistema.

Esse método, que pode ser aplicado a qualquer sistema dinâmico, tem sido usado em estudos relacionados a sistemas de uma máquina-barras infinita como também a sistemas de potência de múltiplas máquinas.

4.2 - Um aspecto da Estabilidade Transitória em termos de energia.

Um sistema de potência sob perturbação, para o instante em que essa perturbação é eliminada, possui um excesso de energia que deve ser absorvida pela rede a fim de que a estabilidade seja mantida. Esta energia é definida como sendo a energia transitória do sistema. Ela é responsável por colocar as máquinas do sistema a oscilar fora do equilíbrio, e para que o sincronismo não seja perdido a rede deve ser capaz de absorver essa energia em um período de tempo suficiente para que as forças sobre as máquinas tendam a conduzi-las para novas posições de equilíbrio.

A capacidade de um sistema de potência absorver excessos de energia depende grandemente de sua capacidade de converter essa energia em outras formas de energia. Isto por sua vez depende principalmente da configuração da rede de pós-defeito. Para uma

dada configuração do sistema, há um total máximo ou crítico de energia transitória que a rede pode absorver e converter para outras formas de energia. Se o sistema iniciou o distúrbio com um total de energia transitória menor que esta energia crítica, os rotores das máquinas oscilarão até que o sistema solicite o excesso de energia a ser absorvido pela rede. Neste caso o sistema será estável. Para uma situação contrária ele será instável. [5].

4.3 - Uma interpretação gráfica do Critério de Estabilidade.

O critério de estabilidade, quando aplicado a sistemas de potência, é analisado em torno das condições de pós-defeito. Se o sistema é estável para pequenas perturbações (estável no estado permanente), é importante avaliar se ele é estável para grandes perturbações e quão "grandes" essas perturbações podem ser.

Como introduzido na seção 3.3, Lyapunov define uma função real escalar $V(X)$ das variáveis do sistema para estabelecer os teoremas da estabilidade, que podem ser resumidos como segue: A origem do sistema $\frac{d}{dt}[X] = [f(X)]$ é assintoticamente estável se em sua vizinhança há uma função $V(X)$ tal que

- a) $V(X)$ tem derivadas parciais contínuas
- b) $V(0) = 0$
- c) $V(X) > 0$, se $[X] \neq 0$
- d) $\frac{d}{dt}V[X] < 0$, se $[X] \neq 0$

O caráter de estabilidade assintótica estende-se a toda região limitada onde as condições acima se aplicam, estas sendo somente condições suficientes de estabilidade. Os conceitos podem

ser visualizados por uma interpretação gráfica aproximada como mostrado na Fig. 4.3.1.

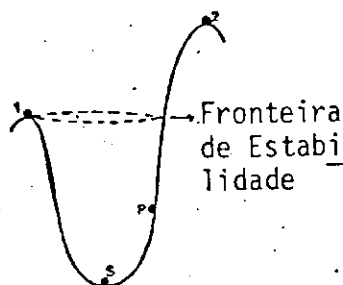


Fig. 4.3.1 - Interpretação gráfica aproximada do critério de estabilidade.

Assumindo que o gráfico da Fig. 4.3.1 representa os pontos de equilíbrio em um sistema onde o ponto \underline{s} é a origem ou o ponto de interesse do sistema no estado permanente de pós-defeito, então pode ser facilmente visto que para pequenas perturbações o ponto \underline{s} é assintoticamente estável.

Se, após o defeito ser eliminado, o sistema é "deixado" no ponto \underline{p} , ele evidentemente retornará ao ponto de equilíbrio estável \underline{s} . Se é permitido ao sistema ir mais adiante que o ponto de equilíbrio instável $\underline{1}$, ele pode não necessariamente retornar a \underline{s} , e se ele vai além do ponto de equilíbrio instável $\underline{2}$, então não retornará a \underline{s} . O ponto de equilíbrio instável $\underline{1}$ está associado com a fronteira de b_{\min} (valor mínimo de V) que cerca a região onde as condições de Lyapunov se aplicam (região de estabilidade assintótica). A fronteira de b_{\min} é chamada de Fronteira de Estabilidade. [4].

4.4 - Interpretação física da Região de Estabilidade.

Funções de Lyapunov são generalizações de função de energia. A função de Lyapunov representa a energia do sistema para diferentes pontos do espaço de estado e a relação $V = b$, onde b é uma constante positiva, representa uma hipersuperfície de energia constante 'b' no espaço de estado. Desta forma, a determinação da região de estabilidade crítica é equivalente a encontrar aquela hipersuperfície no espaço de estado, de onde o ponto de operação não deve escapar. Se o ponto de operação está nesta região, ele se aproximará do ponto de operação estável (ponto de equilíbrio estável de pós-defeito), assintoticamente.

Para os sistemas aqui estudados, todos os pontos possíveis de equilíbrio instáveis estão nas hipersuperfícies de energia constante que circundam o ponto de equilíbrio estável de pós-defeito, onde a função de Lyapunov se anula. A única maneira de garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio de pós-defeito será conter o ponto de operação no interior da menor hipersuperfície em torno deste ponto de equilíbrio, de onde ele não deverá escapar. [3].

A região de estabilidade crítica, que corresponde à menor hipersuperfície de energia em torno do ponto de equilíbrio estável de pós-defeito, ocorre para b_{\min} , isto é, o mínimo valor que a função de Lyapunov V assume para todos os possíveis pontos de equilíbrio instáveis do sistema de pós-defeito. b_{\min} , como já referido antes, define o que se chama fronteira de estabilidade.

Fisicamente, a presença de um defeito aumenta a energia transitória do sistema. Se o defeito é eliminado antes de o ponto

de operação sair da região de estabilidade crítica ($V \leq b_{\min}$), então o amortecimento do sistema trará o ponto de operação para o ponto de equilíbrio estável de pós-defeito. Se a energia do sistema exceder aquele valor crítico (i. é, $V > b_{\min}$) antes do defeito ser eliminado, então será impossível atingir o equilíbrio sem algum controle externo.

O ponto de equilíbrio que fornece a menor das hipersuperfícies representando as energias dos pontos de equilíbrio instáveis é denominado de Ponto de Equilíbrio Instável mais Próximo, ou, de forma abreviada, PEIMP.

Após o início do defeito a tendência do sistema será mover-se na direção do PEIMP. Na primeira oscilação transitória, o PEIMP, para a trajetória do sistema perturbado, é quem decide a estabilidade transitória do sistema. Assim, a energia transitória crítica do sistema é aquela que corresponde à energia do PEIMP.

Para completar esta descrição, podemos mencionar que para um sistema sob perturbação, se a perturbação é eliminada antes do tempo crítico de eliminação do defeito (t_{cr}), a trajetória do sistema "amortece" antes de atingir a hipersuperfície de energia do PEIMP. Se por outro lado a perturbação é eliminada para um tempo maior que t_{cr} , a hipersuperfície de energia do PEIMP é atravessada e a trajetória do sistema move-se na direção de um outro ponto de equilíbrio instável, fazendo com que a estabilidade seja perdida.

Uma dificuldade encontrada no Método Direto de Lyapunov é que a região de estabilidade assintótica obtida das condições estabelecidas anteriormente, claramente depende da função particular de Lyapunov escolhida. Geralmente, ela é somente um subdomínio do domínio total de interesse. O maior domínio representado

pela função, o mais exato, permite que a margem de estabilidade seja avaliada. Se com a função de Lyapunov selecionada não for possível obter o domínio total, como geralmente ocorre, o sistema pode ser estável além do b_{\min} calculado. Desta forma, para obter razoável exatidão e resultados confiáveis, é importante selecionar uma função de Lyapunov conveniente para o sistema de modo a ter-se a maior região de estabilidade.

4.5 - Funções de Lyapunov para Sistemas de Potência.

Seja um conjunto de equações diferenciais descrevendo o sistema (sistema reduzido às barras internas), dado por:

$$M_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} + P_{ei}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = P_{mi} \quad (4.5.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

onde: M_i = constante de inércia da i -ésima máquina em p.u de potência . seg²;

δ_i = ângulo interno da i -ésima máquina em radianos;

$$P_{ei}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = E^2 G_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_i E_j Y_{ij} \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

= potência elétrica da i -ésima máquina em p.u;

E_i = tensão interna da i -ésima máquina, em p.u;

Y_{ij} = admitância de transferência entre a i -ésima máquina

quina e a j -ésima máquina, em p.u.

G_{ij} = condutância própria do nó i , conforme definida na lista de símbolos;

P_{mi} = potência mecânica de entrada da i -ésima máquina em p.u;

t = tempo em segundos.

Quando os efeitos de amortecimento são desprezados, o movimento da i -ésima máquina de um sistema perturbado relativo à n -ésima máquina ($\delta_n \triangleq 0$) é expressado por (veja lista de símbolos):

$$\frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = D_{in} - A_{in}(M_i^{-1} + M_n^{-1}) \text{sen} \delta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} [M_i^{-1} A_{ji} \text{sen} \delta_{ji} - M_n^{-1} A_{jn} \text{sen} \delta_j] \\ \triangleq f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4.5.2)$$

ou

$$\frac{d \delta_i}{dt} = \omega_i \\ \frac{d \omega_i}{dt} = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (4.5.3)$$

Portanto, o movimento do sistema é descrito num espaço de estado de dimensão $2(n-1)$, com as variáveis de estado (δ_i, ω_i) [1].

Os pontos de equilíbrio para o sistema de equações anterior (4.5.3) são dados por:

$$\begin{aligned} f_i &= 0 \\ \omega_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1) \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Estamos interessados em dois pontos de equilíbrio, um correspondendo ao ponto de equilíbrio estável de pós-defeito e o outro correspondendo ao ponto de equilíbrio instável mais próximo deste.

Denotamos os pontos de equilíbrio estáveis por $(\delta_i^S, i = 1, 2, \dots, n - 1$ e $\omega_i^S = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$) e os pontos de equilíbrio instáveis por $(\delta_i^U, i = 1, 2, \dots, n - 1$ e $\omega_i^U = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$).

O segundo método de Lyapunov para determinar estabilidade é ilustrado como segue. Seja $\delta(t)$ a solução geral de um conjunto de equações diferenciais $\frac{d^2\delta}{dt^2} = f(\delta)$; $f(\delta_e) = 0$, onde δ_e é o ponto de equilíbrio. Suponhamos que nessa região existe uma função $V(\delta)$ satisfazendo as condições abaixo (como referidas anteriormente) nas vizinhanças de δ_e :

1) A função de Lyapunov V deve ser uma função escalar contínua das variáveis de estado (posição, velocidade, etc.)

2) Sua derivada primeira, com relação ao tempo, deve existir e ser contínua em uma região Ω definida por $V < b$, onde b é uma constante positiva.

3) Seu valor para o ponto de equilíbrio, cuja estabilidade está sob investigação, deve ser zero e $V > 0$ no interior de Ω .

4) Sua derivada deve ser negativa para todos os valores das variáveis de estado em Ω , exceto para o ponto de equilíbrio, onde ela é zero.

5) Ω é uma região limitada designada por $V < b$ ($b > 0$), on

de todas as trajetórias do sistema iniciando no interior dessa região tendem ao ponto de equilíbrio estável quando o tempo cresce indefinidamente, sendo assim assintoticamente estável.

Então $V(\delta) = C$, onde $C > 0$ é um parâmetro constante que define, para pequenos valores de C , uma família de superfícies fechadas nas vizinhanças de δ_e , desde que $V(\delta)$ é positiva definida. O ponto de equilíbrio está por si próprio localizado no interior de cada superfície fechada e corresponde ao valor $C = 0$. Lembrando que V representa uma função de energia, então pela condição 2 todas as trajetórias originadas de pontos nas vizinhanças do ponto de equilíbrio atravessam a superfície $V(\delta) = C$ do exterior para o interior quando o tempo aumenta e $\frac{dV}{dt} < 0$.

É intuitivamente claro que próximo a um ponto de equilíbrio de um sistema físico, se a energia transitória do sistema é sempre decrescente, então o ponto de equilíbrio é estável. Assim, a teoria de Lyapunov é uma extensão generalizada do conceito de energia. [2].

O principal passo no Método Direto de Lyapunov é a construção da função de Lyapunov para satisfazer às condições dadas acima. A construção da função de Lyapunov deve ser ajustada às peculiaridades de cada sistema específico. O teorema de Lyapunov não contém qualquer alusão a respeito de como encontrar uma função de Lyapunov. Assim, não há um método sistemático de construir esta função. De fato, a questão geral da existência de tais funções permanece completamente aberta. Por outro lado, funções convenientes podem ser determinadas por tentativas para numerosos casos específicos e também para certos tipos gerais de equações. Devido à complexidade do assunto, não nos deteremos nele. Alguns

autores desenvolveram algumas técnicas para construção dessas funções, tais como J. L. Willems [8].

Com isto em mente, as funções de Lyapunov abaixo (entre outras) são indicadas como convenientes para o sistema dado por (4.5.3):

$$1) V(\delta, \omega) = \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{K=i+1}^n M_i M_K \omega_{iK}^2 \right] / 2M + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{K=i+1}^n A_{iK} \left[- \cos \delta_{iK} + \cos \delta_{iK}^S - (\delta_{iK} + \delta_{Ki}^S) \text{sen} \delta_{iK}^S \right] = V_1$$

[3]

$$2) V(\delta, \omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{K=i+1}^n \left[\frac{1}{2M} M_i M_K \omega_{iK}^2 - \frac{1}{M} C_{iK} (\delta_{iK} - \delta_{iK}^S) - A_{iK} (\cos \delta_{iK} - \cos \delta_{iK}^S) \right] = V_2$$

[7]

$$3) V(\delta, \omega) = \sum_{K=1}^{n-1} \sum_{K=i+1}^n \left[1/2 M_i M_K \omega_{iK}^2 - M A_{iK} \cos \delta_{iK} - S_{iK} \delta_{iK} \right] + V_K = V_3$$

onde:

$$S_{iK} = M A_{iK} \text{sen} \delta_{iK}^S$$

$$V_K = \sum_{i=1}^n \sum_{K=i+1}^n \left[M A_{iK} \cos \delta_{iK}^S + S_{iK} \delta_{iK}^S \right] \quad [4]$$

$$4) V(\delta, \omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{K=i+1}^n \left[\frac{1}{2} M_i M_K \omega_{iK}^2 - M A_{iK} \cos \delta_{iK} - F_{iK} \delta_{iK} \right] + V_K = V_4$$

onde:

$$F_{iK} = P'_i M_K - P'_K M_i$$

$$P'_i = P_{ei}^S - E_i^2 G_{ii} \quad [4]$$

$$V_K = \sum_{i=1}^n \sum_{K=i+1}^{n-1} \left[M A_{iK} \cos \delta_{iK}^S + \delta_{iK}^S F_{iK} \right]$$

A forma geral da função de Lyapunov para problemas de estabilidade de sistemas de potência é a mesma para todos os sistemas, mas os valores de b dependem dos parâmetros do sistema e da natureza dos transitórios. As funções acima foram escolhidas como convenientes para o estudo de estabilidade transitória, entre onze funções de Lyapunov indicadas na literatura e por nós pesquisadas. As demais funções são mostradas no Apêndice.

4.6 - Aplicação do Método Direto de Lyapunov a Sistemas de Potência.

As seguintes suposições serão feitas em nosso estudo:

a) A máquina síncrona é representada por uma tensão constante atrás de sua reatância transitória; em outras palavras é assumido que os fluxos concatenados são constantes durante o período transitório que é de interesse na análise da estabilidade transitória.

b) A potência mecânica de entrada é constante. As constantes de tempo do regulador de velocidade são na realidade usualmente maiores que os períodos transitórios.

c) Torques de amortecimento são desprezíveis.

d) Cargas são representadas por impedâncias constantes.

As suposições acima formam o chamado modelo clássico para o estudo de estabilidade transitória de sistemas de potência. Essas suposições simplificam o estudo de estabilidade transitória, fazendo com que o modelo clássico seja conveniente para este estudo quando o tempo de resposta do regulador de velocidade é grande, comparado com o tempo de simulação.

Um sistema de potência de múltiplas máquinas, quando submetido a uma perturbação transitória (em nosso caso um defeito do tipo curto-circuito trifásico para a terra), passa através dos seguintes estágios:

1) Sistema antes da perturbação ou defeito: Sistema de Prê-Defeito.

2) Sistema durante a perturbação ou defeito: Sistema Em-Defeito.

3) Sistema após a remoção da perturbação ou defeito: Sistema de Pós-Defeito.

A forma do conjunto de equações diferenciais descrevendo o sistema durante os três estágios anteriores será a mesma como dada por (4.5.1), exceto pela diferença nos parâmetros de um estágio para outro.

Para realizar um estudo de estabilidade transitória pelo Método Direto de Lyapunov, o seguinte procedimento prático é adotado:

a) Determinação de uma conveniente função de Lyapunov para o sistema: a função de Lyapunov $V(\delta, \omega)$, como já referenciada e discutida no item (4.5), é uma função escalar, positiva definida, das variáveis de estado do modelo matemático do sistema.

b) Determinação do ponto de equilíbrio estável do sistema $(\delta^S, 0)$ em sua configuração final (pós-defeito) e determinação dos pontos de equilíbrio instáveis relativos a este ponto de equilíbrio estável.

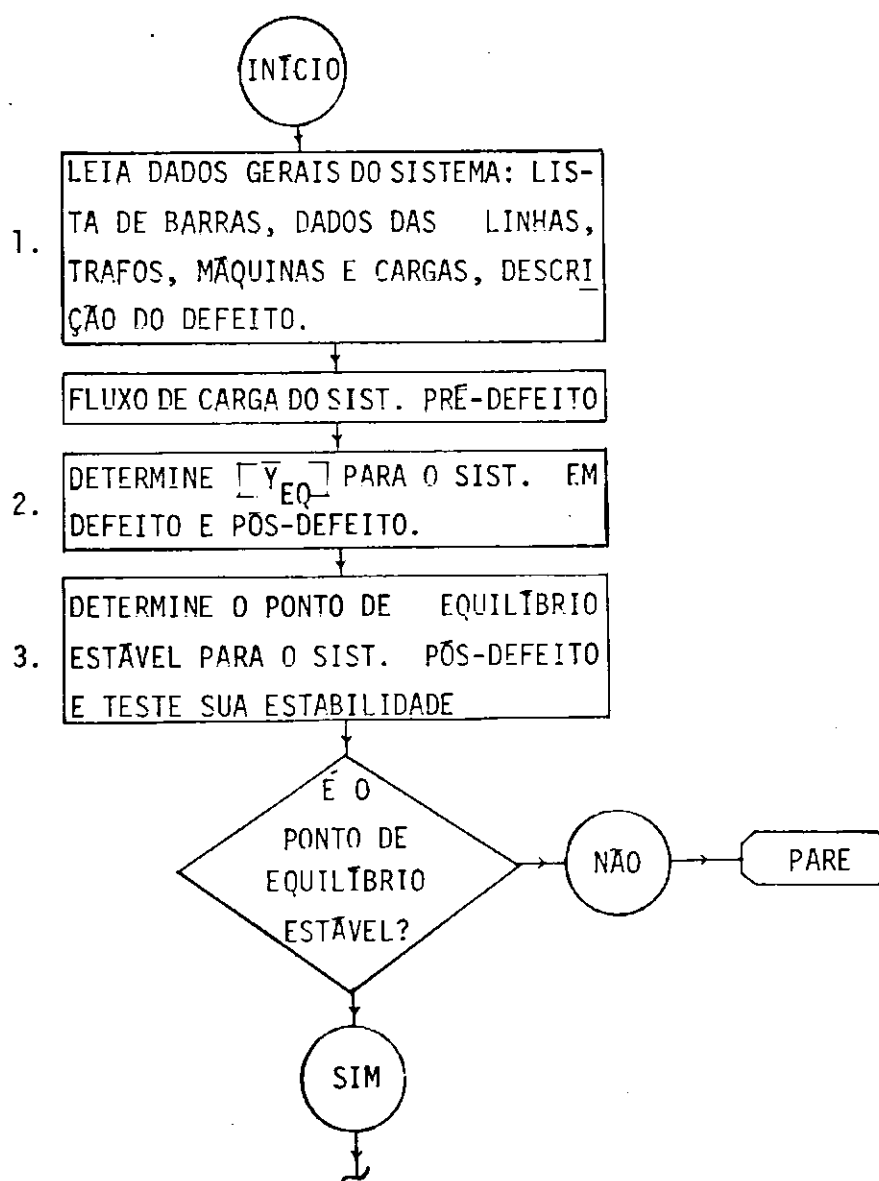
c) Determinação da Região de Estabilidade: a região de estabilidade é definida por $V < b_{\min}$ (b_{\min} é uma constante que define a fronteira de estabilidade). Portanto, b_{\min} é o mínimo valor que a função V assume sobre o conjunto de pontos de equilíbrio instáveis em torno do ponto de equilíbrio estável de pós-defeito, como definido antes.

d) Integração numérica das equações diferenciais do sistema durante o defeito e avaliação da função V a cada passo da integração; o tempo crítico de eliminação do defeito (t_{cr}) é aquele para o qual o valor da função V atinge o valor limite b_{\min} . Para uma avaliação sobre a estabilidade do sistema, pode-se calcular a função V para o tempo final de defeito. Se este valor é menor que b_{\min} , o sistema será estável; de outra forma, ele será instável. Vale salientar que a integração numérica aqui é feita uma só vez, enquanto nos métodos de integração numérica são feitas inúmeras integrações; isto é, para cada t_c (tempo de eliminação de defeito) escolhido, uma integração é realizada, até que seja encontrado o tempo crítico de eliminação do defeito (t_{cr}).

As duas maiores dificuldades na aplicação do Método Direto de Lyapunov a sistemas de potência são a determinação de uma

conveniente função de Lyapunov para o sistema e o estabelecimento da região de estabilidade. A determinação de funções de Lyapunov convenientes para sistemas de potência já foi discutida no item (4.5). Para o estabelecimento da região de estabilidade adotamos o simplificado procedimento prático tratado por PAVELLA na referência [1]. Mais adiante nos referimos a este procedimento, de forma resumida.

O fluxograma da Fig. 4.6.1 mostra o procedimento para se estabelecer a região de estabilidade e determinar o tempo crítico de eliminação do defeito (t_{cr}). Os principais passos (os quais estão numerados no fluxograma), serão descritos a seguir para um melhor entendimento do procedimento adotado.



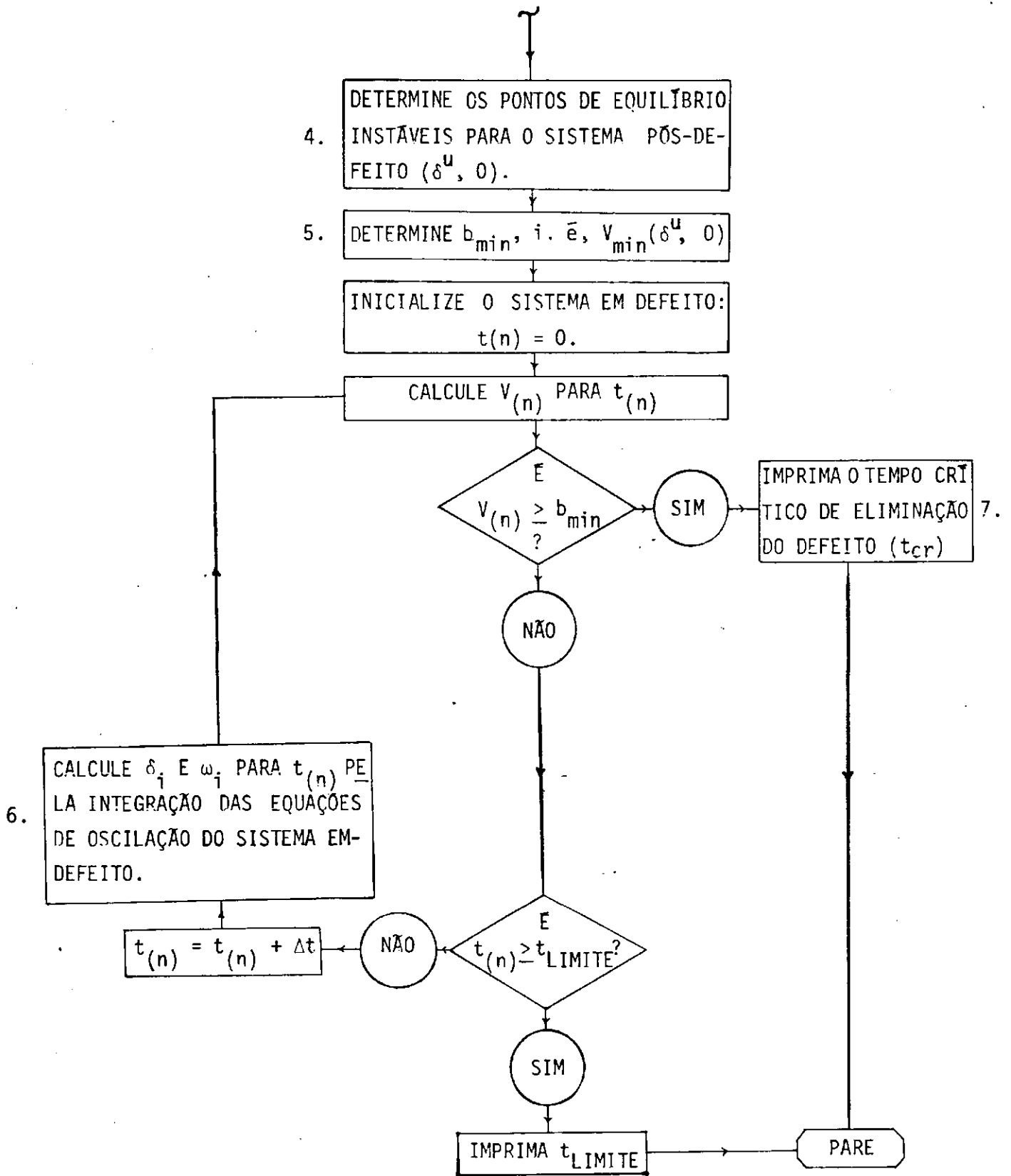


Fig. 4.6.1 - Fluxograma para análise de estabilidade transitória pelo Método Direto de Lyapunov. [2]

São os seguintes os principais passos no fluxograma:

1. Dados gerais do sistema:

Aqui todos os dados necessários ao estudo do Fluxo de Cargas são fornecidos ao programa. O tipo e localização do defeito e subsequentes modificações da rede devido ao defeito são também especificados.

2. Determinação de $[\bar{Y}_{eq}]$ para o sistema em defeito e pós-defeito.

Neste passo a matriz normal de admitâncias é modificada de acordo com a informação do defeito, todas as cargas são representadas por admitâncias constantes, e a matriz de admitâncias é reduzida a $[\bar{Y}_{eq}]$ pela eliminação de todas as barras que não contêm geração.

3. Determinação do Ponto de Equilíbrio Estável para o sistema de pós-defeito e teste de sua estabilidade.

Mantendo as gerações e módulos das tensões constantes em seus valores de pré-defeito, o ponto de equilíbrio estável de pós-defeito é obtido utilizando-se um método conveniente para solução de sistemas de equações não-lineares, usando a matriz de admitância equivalente $[\bar{Y}_{eq}]$ para a condição de pós-defeito. Consiste em resolver o sistema de equações não-lineares (4.5.4) para a condição de pós-defeito. A solução assim obtida é então testada para sua estabilidade de estado permanente. Para este ponto de equilíbrio, se todas as derivadas parciais $\frac{\partial P_{ei}}{\partial \delta_i} \geq 0$, para todo i , então o sistema é estável para o estado permanente de pós-defeito. (Esta é obviamente somente uma condição suficiente de estabilidade).

4. Determinação dos Pontos de Equilíbrio Instáveis para o sistema de pós-defeito.

Aqui usaremos a consideração de um sistema de uma máquina conectada a uma barra infinita, segundo o procedimento de PAVELLA (Para maiores detalhes, ver [1]).

Para o sistema referido acima, tomemos a curva de potências versus ângulo, como mostrado na Fig. 4.6.1.

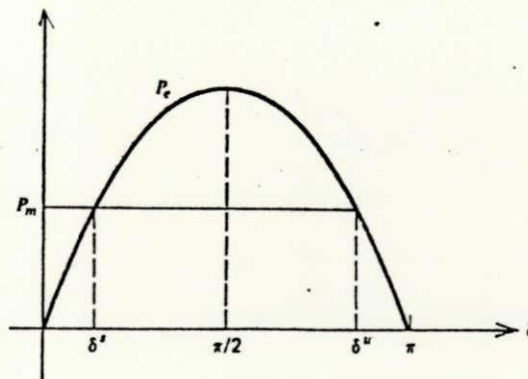


Fig. 4.6.1 - Curva de P_m e P_e versus ângulo.

Se δ^S representa o ponto de equilíbrio estável do sistema, então $\delta^U = (\pi - \delta^S)$ representa seu ponto de equilíbrio instável. A idéia pode ser generalizada, aproximadamente, para um sistema de múltiplas máquinas.

Os pontos de equilíbrio instáveis aproximados a serem considerados, segundo o procedimento de PAVELLA, serão combinações do tipo $\{\pm \pi - \delta_i^S, \delta_j^S\}$, com uma ou $n - 1$ máquinas perdendo o sincronismo. δ_i^S representa o ponto de equilíbrio estável da máquina i na condição de pós-defeito.

Para maior clareza, consideremos como exemplo um sistema de 3 máquinas. Tomando a máquina 3 como referência ($\delta_3^S = 0$), os pontos de equilíbrio instáveis aproximados a serem considerados para o sistema de pós-defeito, seriam:

- a) $(\pi - \delta_1^S, \delta_2^S); (\delta_1^S, \pi - \delta_2^S)$
- b) $(\pi - \delta_1^S, \pi - \delta_2^S)$
- c) $(-\pi - \delta_1^S, \delta_2^S); (\delta_1^S, -\pi - \delta_2^S)$
- d) $(-\pi - \delta_1^S, -\pi - \delta_2^S)$

5. Determinação de b_{\min} .

Podemos resumir uma determinação prática para b_{\min} , nas três etapas seguintes:

i) Avalie a função de Lyapunov V para os pontos de equilíbrio instáveis aproximados do passo 4, e escolha entre estes aquele ponto que fornece o menor valor de V . Vamos chamá-lo de ponto mínimo inicial.

ii) Encontre o ponto de equilíbrio instável exato correspondendo a este ponto mínimo inicial, usando este ponto mínimo como valor inicial para a solução do sistema de equações não-lineares descrito no passo 3. Vamos chamá-lo de ponto mínimo exato.

iii) Calcule b_{\min} , avaliando V para este ponto mínimo exato.

6. Integração das equações de oscilação do sistema em defeito.

Como estabelecido antes, a região Ω (região de estabilidade assintótica) define todas as condições iniciais do sistema de pós-defeito para a qual ele é assintoticamente estável. Em estudos de estabilidade transitória de sistemas de potência, os pos

síveis condições iniciais para o sistema de pós-defeito estão ao longo da trajetória (solução) do sistema em defeito. Desta forma, durante a integração direta do sistema em defeito (curvas de oscilação), o estado do sistema é testado a cada passo para determinar se está ou não no interior da região Ω , pela comparação do correspondente valor de V com b_{\min} .

Sob certas circunstâncias, o valor de V não atinge o valor de b_{\min} dentro de um razoável período transitório (usualmente um segundo). Por esta razão, o limite de tempo do estudo é especificado no programa.

7. Cálculo do tempo crítico de eliminação do defeito.

O tempo crítico de eliminação do defeito (t_{cr}) é aquele para o qual $V_{(n)} \geq b_{\min}$, isto é, o valor de $t_{(n)}$ quando $V_{(n)} \geq b_{\min}$.

síveis condições iniciais para o sistema de pós-defeito estão ao longo da trajetória (solução) do sistema em defeito. Desta forma, durante a integração direta do sistema em defeito (curvas de oscilação), o estado do sistema é testado a cada passo para determinar se está ou não no interior da região Ω , pela comparação do correspondente valor de V com b_{\min} .

Sob certas circunstâncias, o valor de V não atinge o valor de b_{\min} dentro de um razoável período transitório (usualmente um segundo). Por esta razão, o limite de tempo do estudo é especificado no programa.

7. Cálculo do tempo crítico de eliminação do defeito.

O tempo crítico de eliminação do defeito (t_{cr}) é aquele para o qual $V_{(n)} \geq b_{\min}$, isto é, o valor de $t_{(n)}$ quando $V_{(n)} \geq b_{\min}$.

CAPÍTULO V

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

5.1 - Introdução.

No capítulo anterior descrevemos como executar os principais passos do fluxograma da Fig. 4.6.1, sem nos preocuparmos com os métodos empregados para realizar tais passos. Neste capítulo descreveremos os métodos utilizados com breves comentários, como também apresentaremos os resultados da aplicação do Método Direto de Lyapunov a dois diferentes sistemas de potência. O primeiro é o sistema de 4 geradores, 6 barras e 7 linhas de artigo de El-Abiad e K. Nagappan [2]; o segundo é o sistema de 3 geradores, 9 barras e 9 linhas do livro de Anderson e Fouad [15]. Não nos foi possível simular sistemas maiores, ou sistemas reais, devido a grande dificuldade na obtenção de dados para realização de estudos desse porte. Contudo, os sistemas utilizados mostraram-se bastante úteis para o estudo a que nos propuzemos fazer.

5.2 - Métodos para o programa.

O programa foi elaborado de acordo com o fluxograma apresentado na Fig. 4.6.1. Utilizamos em nosso estudo o modelo mais simplificado para a equação de oscilação da máquina, ou seja,

$$M_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = P_{mi} - E_i^2 G_{ii} - \sum_{j=1}^n E_i E_j B_{ij} \text{sen}(\delta_i - \delta_j) \quad (5.2.1)$$

$$B_{ij} = Y_{ij} \text{sen} \theta_{ij}$$

onde se vê que a condutância de transferência foi desprezada. Os parâmetros para a expressão (5.2.1) foram definidos no ítem (4.5) do Cap. IV. A seguir descreveremos os métodos utilizados para as principais etapas do programa, com os respectivos comentários.

Para o Fluxo de Carga do Sistema de Prê-Defeito, utilizamos um programa de fluxo de carga Gauss-Seidel [18]. A razão que nos levou a utilizá-lo foi devido a sua fácil implementação e melhor conhecimento do método, de nossa parte. Outro programa poderia ter sido usado sem problemas para o estudo. Ao programa de fluxo de carga Gauss-Seidel normal, foram adicionadas duas subrotinas:

- Subrotina CONTIN, simula contingência de perda de linha, perda de transformador, perda de geração e perda de carga [18].

- Subrotina EINT, identifica as barras que contêm geração e calcula as tensões internas das máquinas. Este cálculo está de acordo com a seguinte formulação matemática:

Sejam as tensões terminais obtidas do cálculo do fluxo de

cargas para o sistema de prē-defeito. Entāo as tensōes internas das māquinas ($E_i \angle \delta_{0i}$) podem ser obtidas conforme ilustrado na Fig. 5.2.1 abaixo.

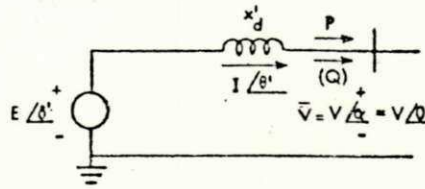


Fig. 5.2.1 - Representaçaō de um gerador para cālculo da tensōo interna $E \angle \delta_0$. [15].

Usando a tensōo terminal temporariamente como uma referēncia, se definirmos $\bar{I} = I_1 + jI_2$, entāo da relaçaō $P + jQ = \bar{V}\bar{I}^*$ temos que $I_1 + jI_2 = (P - jQ)/V$. Mas, desde que $E \angle \delta' = \bar{V} + jX'_d \cdot \bar{I}$, nōs calculamos

$$E \angle \delta' = ((V + Qx'_d/V) + j(Px'_d/V)) \quad (5.2.2)$$

O ângulo da tensōo interna do gerador ē entāo obtido adicionando-se o ângulo da tensōo terminal de prē-defeito α ao ângulo δ' , ou

$$\delta_0 = \delta' + \alpha \quad (5.2.3)$$

A tensōo interna ē portanto igual a $E \angle \delta_0$.

A determinação de $[\bar{Y}_{eq}]$ consiste em eliminar todos os nós que têm injeção de corrente zero (nós onde não existe geração). O seguinte procedimento matemático é adotado:

A equação nodal normalizada para a malha, em notação matricial, pode ser expressa por, [16].

$$I = YV \quad (5.2.4)$$

onde I e V são matrizes coluna e Y é uma matriz quadrada simétrica. As matrizes colunas devem ser dispostas de tal maneira que os elementos associados aos nós a serem eliminados estejam nas linhas inferiores das matrizes. Os elementos da matriz quadrada das admitâncias são situados de maneira correspondente. As matrizes coluna são particionadas de modo que os elementos associados aos nós a serem eliminados estejam separados dos outros elementos. A matriz admitância é particionada de maneira que apenas os elementos identificados com os nós a serem eliminados fiquem separados dos demais por linhas horizontais e verticais. Efetuando-se a partição de acordo com essas regras, a equação (5.2.4) torna-se

$$\begin{bmatrix} I_A \\ \dots \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & \vdots & L \\ \dots & \vdots & \dots \\ L^T & \vdots & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ \dots \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (5.2.5)$$

onde I_0 é a submatriz nula representando as injeções de corrente zero nos nós a serem eliminados e V_0 é a submatriz composta pelas tensões nesses nós. As admitâncias próprias e mútuas que formam K são as identificadas com os nós que permanecem. A matriz M é com-

posta pelas admitâncias próprias e mútuas correspondentes aos nós a serem eliminados. L e sua transposta L^T são constituídas apenas pelas admitâncias mútuas comuns a um nó a ser mantido e a um nó a ser eliminado.

Expandindo (5.2.5),

$$\begin{aligned} I_A &= KV_A + LV_0 \\ I_0 &= L^T V_A + MV_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

e eliminando V_0 , encontramos

$$I_A = (K - LM^{-1}L^T)V_A \tag{5.2.7}$$

que é uma equação nodal cuja matriz de admitância é

$$[\bar{Y}_{eq}] = K - LM^{-1}L^T \tag{5.2.8}$$

A matriz $[\bar{Y}_{eq}]$ é a matriz reduzida desejada. Ela tem as dimensões $(n \cdot n)$, onde n é o número de geradores. A redução de malha ilustrada por (5.2.4)-(5.2.8) é geralmente empregada quando as cargas são representadas por impedâncias constantes; caso contrário, a identidade das barras de carga deve ser mantida.

Para a inversão da matriz M em (5.2.8) testamos dois métodos: o Método de Inversão de Shipley [20] e o Método de Eliminação de Gauss [19], ambos com resultados satisfatórios. Implementamos o último por ser um método tradicionalmente usado em inversão de matrizes.

Na determinação do estado de equilíbrio estável do sistema de pós-defeito, que consiste em resolver um sistema de equações não-lineares, foram experimentados dois diferentes métodos: o Método de Newton-Raphson e o Método de Brown [9, 10]. O último apresenta a grande vantagem de não requerer o uso de derivadas, além de ter tempo de computação equivalente ao primeiro. Desta forma foi o método escolhido para determinação dos pontos de equilíbrio do sistema.

Para a integração das equações de Oscilação do sistema em defeito, utilizamos o Método de Runge-Kutta. Não obstante já existirem métodos mais rápidos, este método tem sido usado sempre em estudos de estabilidade transitória de sistemas de potência por muitos autores [21]. Assim, resolvemos também utilizá-lo em nosso estudo.

5.3 - Os resultados.

O primeiro sistema [2] possui a seguinte configuração:

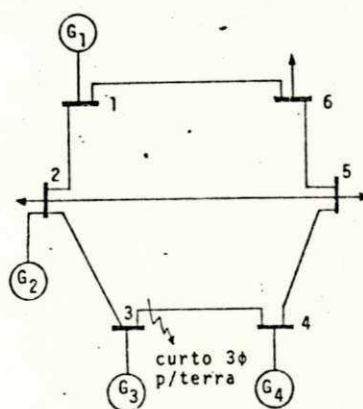


Fig. 5.3.1 - Diagrama Unifilar do primeiro sistema para cálculo do fluxo de cargas (sem inclusão das reatâncias das máquinas).

Conforme representado na Fig. 5.3.1, a perturbação transitória consiste num curto trifásico para a terra ocorrendo próximo à barra 3 e no início da linha 3-4. O defeito é eliminado pela remoção da linha 3-4. Determinemos t_{cr} .

Os dados e os resultados obtidos para este sistema serão fornecidos em forma de tabelas.

TABELA I
CONSTANTES DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

LINHA		IMPEDÂNCIAS EM p.u.	
BARRA SAÍDA	BARRA CHEGADA	R	X
1	2	0.05	0.20
2	3	0.10	0.50
3	4	0.20	0.80
4	5	0.10	0.30
5	6	0.20	0.40
6	1	0.10	0.15
2	5	0.20	0.50

TABELA II
CONSTANTES DAS MÁQUINAS SÍNCRONAS

NÚMERO DO GERADOR	LIGADO À BARRA	CONSTANTE DE INÉRCIA M(p.u)	$X'd$ (pu)
1	1	0.53015	0.004
2	2	0.00795	1.000
3	3	0.01590	0.500
4	4	0.01061	0.400

TABELA III

CARGAS DO SISTEMA

BARRA	CARGAS	
	P em MW	Q em MVAr
2	20	10
5	40	15
6	30	10

base: 100 MVA.

TABELA IV

FLUXO DE CARGA P/CONDIÇÃO DE PRÉ-DEFEITO
(EXCLUINDO AS REATÂNCIAS DAS MÁQUINAS)

BARRA	E(MOD)	ANG(GRAU)	PG (MW)	QG (MVAr)	PL (MW)	QL (MVAr)
1	1.0000	0.0000	33.215	7.642	0.000	0.000
2	1.0037	-0.1524	10.000	5.000	20.000	10.000
3	1.0860	4.5482	30.000	20.000	0.000	0.000
4	1.0280	1.3446	20.000	10.000	0.000	0.000
5	0.9579	-2.8454	0.000	0.000	40.000	15.000
6	0.9536	-2.3260	0.000	0.000	30.000	10.000

PERDAS ATIVAS = 3.210 (MW)

BALANÇO DE REATIVOS = -9.045 (MVAr)

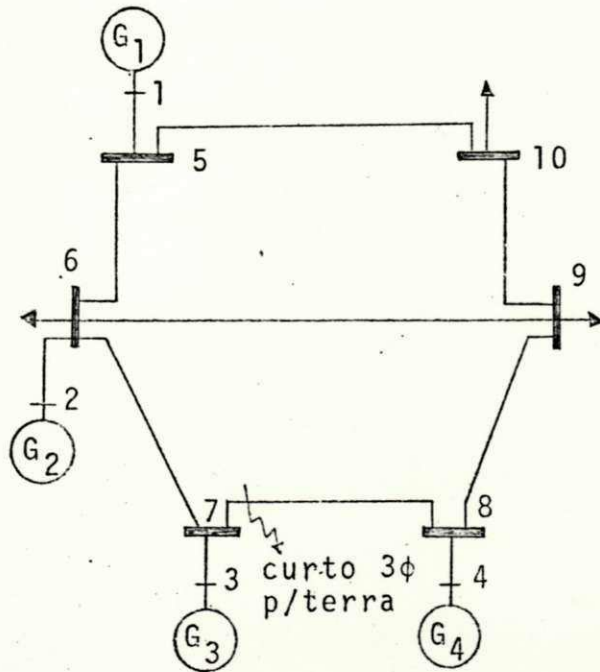


Fig. 5.3.2 - Diagrama Unifilar do primeiro sistema (incluindo as reatâncias das máquinas) para obtenção das tensões internas das máquinas e matrizes normais de admitâncias.

No diagrama da Fig. 5.3.2 foi feita uma renumeração das barras com a finalidade de obter as tensões internas das máquinas e as matrizes normais de admitâncias. Os dados das barras 5, 6, 7, 8, 9 e 10 neste diagrama são equivalentes àqueles das barras 1, 2, 3, 4, 5 e 6 da Fig. 5.3.1. As barras 1, 2, 3 e 4 são as barras internas das máquinas e as impedâncias série entre as barras 1-5, 2-6, 3-7 e 4-8 são iguais às reatâncias internas das máquinas, em cada caso.

TABELA V
TENSÕES INTERNAS DAS MÁQUINAS PARA O
SISTEMA DE PRÉ-DEFEITO

Nº GERADOR	E (pu)	δ (rad)	P_m (entrada) p.u
1	1.0004	0.0013	0.332
2	1.0569	0.0924	0.100
3	1.1840	0.1977	0.300
4	1.0672	0.0978	0.200

Nas tabelas VI e XI, das páginas seguintes, fornecemos as matrizes normais de admitâncias para o primeiro sistema nas condições de pré-defeito, em-defeito e pós-defeito. Dividimos cada matriz em duas outras: matriz G e matriz B. A matriz G e a matriz B referem-se às partes real e imaginária da matriz normal de admitâncias, respectivamente. A matriz G é chamada matriz de condutâncias; a matriz B de matriz de susceptâncias.

Para a determinação do ponto de equilíbrio estável do sistema de pós-defeito, conforme o desenvolvimento matemático da seção (4.5) do Cap. IV, é conveniente tornar a n-ésima máquina ($\delta_n = 0$) como aquela possuindo a maior constante de inércia. A justificativa consiste em que, num sistema de potência sob perturbação, a máquina com maior constante de inércia é aquela que sofre o menor processo de aceleração e, por conseguinte, é a máquina menos provável de perder o sincronismo com relação às demais máquinas do sistema.

TABELA VI

MATRIZ G (PRÉ-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5					4.2534	-1.1765				-3.0769
6					-1.1765	2.4498	-0.3846		-0.6897	
7						-0.3846	0.6787	-0.2941		
8							-0.2941	1.2941	-1.0	
9							-0.6897	-1.0	3.1276	-1.0
10					-3.0769				-1.0	4.4075

TABELA VII

MATRIZ B (PRÉ-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-250.0				250.0					
2		-1.0				1.0				
3			-2.0				2.0			
4				-2.5				2.5		
5	250.0				-259.3182	4.7059				4.6154
6		1.0			4.7059	-9.4486	1.9231		1.7241	
7			2.0			1.9231	-5.0965	1.1765		
8				2.5			1.1765	-6.6735	3.0	
9						1.7241		3.0	-6.8854	2.0
10					4.6154				2.0	-6.7236

TABELA VIII

MATRIZ G (EM-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5					4.2534	-1.1765				-3.0769
6					-1.1765	2.4498			-0.6897	
7										
8								1.2941	-1.0	
9						-0.6897		-1.0	3.1276	-1.0
10					-3.0769				-1.0	4.4075

TABELA IX

MATRIZ B (EM-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-250.0				250.0					
2		-1.0				1.0				
3			-2.0							
4				-2.5				2.5		
5	250.0				-259.3182	4.7059				4.6154
6		1.0			4.7059	-9.4486			1.7241	
7										
8				2.5				-6.6735	3.0	
9						1.7241		3.0	-6.8854	2.0
10					4.6154				2.0	-6.7236

TABELA X

MATRIZ G (PÓS-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5					4.2534	-1.1765				-3.0769
6					-1.1765	2.4498	-0.3846		-0.6897	
7						-0.3846	0.3846			
8								1.0	-1.0	
9								-0.6897	-1.0	3.1276
10										-1.0
										4.4075

TABELA XI

MATRIZ B (PÓS-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-250.0				250.0					
2		-1.0				1.0				
3			-2.0				2.0			
4				-2.5				2.5		
5	250.0				-259.3182	4.7059				4.6154
6		1.0			4.7059	-9.4486	1.9231		1.7241	
7			2.0			1.9231	-3.9201			
8				2.5				-5.4970	3.0	
9						1.7241		3.0	-6.8854	2.0
10					4.6154				2.0	-6.7236

Levando em conta a consideração anterior, permutamos as numerações das máquinas 1 e 4 no diagrama da Fig. 5.3.2, ou seja, a máquina 1 passa a ser a máquina 4 e a máquina 4 passa a ser a máquina 1, respectivamente. Os resultados que se seguem estão de acordo com esta notação.

TABELA XII

MATRIZ $[\bar{Y}_{eq}]$ PARA O SISTEMA EM-DEFEITO

MATRIZ G				MATRIZ B					
1	2	3	4	1	2	3	4		
1	0.217	0.007	0.000	-0.076	1	-1.336	0.044	0.000	0.547
2	0.007	0.027	0.000	-0.006	2	0.044	-0.893	0.000	0.581
3	0.000	0.000	0.000	0.000	3	0.000	0.000	-2.000	0.000
4	-0.076	-0.006	0.000	1.009	4	0.547	0.581	0.000	-2.718

TABELA XIII

MATRIZ $[\bar{Y}_{eq}]$ PARA O SISTEMA DE PÓS-DEFEITO

MATRIZ G				MATRIZ B					
1	2	3	4	1	2	3	4		
1	0.254	0.008	0.002	-0.118	1	-0.982	0.064	0.064	0.745
2	0.008	0.029	0.017	-0.013	2	0.064	-0.879	0.123	0.658
3	0.002	0.017	0.104	-0.078	3	0.064	0.123	-0.867	0.650
4	-0.118	-0.013	-0.078	0.848	4	0.745	0.658	0.650	-2.296

TABELA XIV

PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL P/O SISTEMA DE PÓS-DEFEITO

Nº GERADOR	δ_i (Rad)	ω (Rad/s)	$\partial P_{ei} / \partial \delta_i$	OBS.
1	-0.063924	0.0	0.943479	ESTÁVEL
2	0.103762	0.0	0.916665	ESTÁVEL
3	0.175893	0.0	0.990106	ESTÁVEL
4	0.000000	0.0	2.243765	ESTÁVEL

TABELA XV

PONTOS DE EQUILÍBRIO INSTÁVEIS APROXIMADOS (P.E.I.A) DO PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL DE PÓS-DEFEITO DE ACORDO COM O PROCEDIMENTO DO ITEM (4.6), CAP. IV.

GRUPO	P.E.I.A
a)	(3.20552, 0.10376, 0.17589); (-0.06392, 3.03783, 0.17589); (-0.06392, 0.10376, 2.9657)
b)	(3.20552, 3.03783, 2.9657)
c)	(-3.07767, 0.10376, 0.17589); (-0.06392, -3.24535, 0.17589); (-0.06392, 0.10376, -3.31749)
d)	(-3.07767, -3.24535, -3.31749)

TABELA XVI

VALORES ASSUMIDOS PELAS 4 FUNÇÕES DE LYAPUNOV PARA OS PONTOS DE EQUILÍBRIO INSTÁVEIS APROXIMADOS DA TABELA XV

FUNÇÃO	GRUPO	VALORES ASSUMIDOS
V_1	a)	2.158044; 1.614483; 1.516042
	b)	4.081024
	c)	1.642410; 2.073251; 2.552925
	d)	5.061232
V_2	a)	2.158044; 1.614484; 1.516042
	b)	4.081025
	c)	1.642410; 2.073251; 2.552925
	d)	5.061231
V_3	a)	1.218453; 0.911553; 0.855972
	b)	2.304187
	c)	0.927321; 1.170578; 1.441407
	d)	2.857622
V_4	a)	1.218469; 0.911568; 0.855969
	b)	2.304215
	c)	0.927306, 1.170561; 1.441411
	d)	2.857594

Da tabela XVI acima, notamos que o ponto de equilíbrio instável aproximado que forneceu os menores valores para as 4 funções de Lyapunov consideradas foi o terceiro ponto do grupo a)

(-0.06392, 0.10376, 2.9657). Portanto, usando este ponto como valor inicial para o sistema de equações na condição de pós-defeito, obtemos o ponto de equilíbrio instável mais próximo do ponto de equilíbrio estável da tabela XIV. O valor obtido está dado na tabela XVII.

TABELA XVII

PONTO DE EQUILÍBRIO INSTÁVEL MAIS PRÓXIMO DO PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL DA TABELA XIV.

Nº GERADOR	δ_i (Rad)	ω (Rad/s)	$\delta P_{ei}/\partial \delta_i$	OBS.
1	-0.07576	0.0	0.78284	ESTÁVEL
2	0.14708	0.0	0.611377	ESTÁVEL
3	2.99269	0.0	-0.989271	INSTÁVEL
4	0.00000	0.0	0.719916	ESTÁVEL

Avaliando as funções de Luapunov para o ponto de equilíbrio instável mais próximo dado na tabela XVII, obtemos o valor de b_{min} para cada função, e com estes valores determinamos os respectivos tempos críticos de eliminação do defeito. Os resultados estão dados na tabela XVIII.

TABELA XVIII

VALORES DE b_{min} E t_{cr} OBTIDOS PARA AS
4 FUNÇÕES DE LYAPUNOV CONSIDERADAS.

FUNÇÃO DE LYAPUNOV	b_{min}	t_{cr} (segundo)
V_1	1.515538	0.41
V_2	1.515532	0.41
V_3	0.855688	0.41
V_4	0.855681	0.41

Para efeito de comparação, o sistema também foi simulado pelo tradicional Método de Integração Numérica, utilizando-se o mesmo modelo clássico anterior. Duas considerações foram feitas com este método. Na primeira o efeito da condutância de transferência foi desprezado, e na segunda foi incluído. A tabela XIX mostra os tempos críticos obtidos para as duas considerações feitas. As curvas de oscilação são mostradas nas Figs. 5.3.4 a 5.3.7.

TABELA XIX

TEMPO CRÍTICO DE ELIMINAÇÃO DO DEFEITO OBTIDO PELO
MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

EFEITO DA CONDUTÂNCIA DE TRANSFERÊNCIA INCLUIDO?	t_{cr} (segundos)
NÃO	0.41
SIM	0.42

O segundo sistema [15] tem a seguinte configuração:

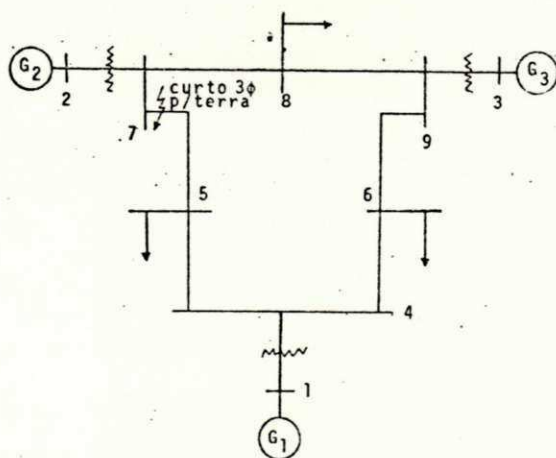


Fig. 5.3.3 - Diagrama Unifilar do segundo sistema para o cálculo do fluxo de cargas (sem inclusão das reatâncias das máquinas).

Para este sistema a perturbação transitória consiste num curto trifásico para a terra ocorrendo próximo à barra 7 e no final da linha 5-7. O defeito é eliminado pela remoção da linha 5-7. Determinemos t_{cr} .

TABELA XX
CONSTANTES DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

LINHA		IMPEDANCIAS EM p.u		ADMITÂNCIAS EM PARALELO (p.u)
BARRA SAÍDA	BARRA CHEGADA	R		Y/2
1	4	0.0000	0.0576	0.0000
2	7	0.0000	0.0625	0.0000
3	9	0.0000	0.0586	0.0000
4	5	0.0100	0.0850	0.0880
4	6	0.0170	0.0920	0.0790
5	7	0.0320	0.1610	0.1530
6	9	0.0390	0.1700	0.1790
7	8	0.0085	0.0720	0.0745
8	9	0.0119	0.1008	0.1045

TABELA XXI
CONSTANTES DAS MÁQUINAS SÍNCRONAS

NÚMERO DO GERADOR	LIGADO À BARRA	CONSTANTES DE INÉRCIA (p.u)	X'_d (p.u)
1	1	0.12541	0.0608
2	2	0.03395	0.1198
3	3	0.01597	0.1813

TABELA XXII
CARGAS DO SISTEMA

BARRA	CARGAS	
	P em MW	Q em MVar
5	125	50
6	90	30
8	100	35

base: 100 MVA

TABELA XXIII
FLUXO DE CARGA PARA CONDIÇÃO DE PRÉ-DEFEITO
(EXCLUINDO AS REATÂNCIAS DAS MÁQUINAS)

BARRA	E (MOD)	ANG (GRAU)	PG (MV)	QG (MVar)	PL (MW)	QL (MVar)
1	1.0400	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.0239	9.3138	163.000	6.700	0.000	0.000
3	1.0239	4.6878	85.000	-10.900	0.000	0.000
4	1.0254	-2.2174	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.9949	-3.9887	0.000	0.000	125.000	50.000
6	1.0120	-3.6864	0.000	0.000	90.000	30.000
7	1.0247	3.7403	0.000	0.000	0.000	0.000
8	1.0148	0.7419	0.000	0.000	100.000	35.000
9	1.0313	1.9833	0.000	0.000	0.000	0.000

PERDAS ATIVAS = 4.654 (MW)

BALANÇO DE REATIVOS = 91.775 (MVar)

Para a determinação das tensões internas das máquinas e matrizes normais de admitâncias utilizamos o mesmo diagrama da Fig. 5.3.3, só que agora incluímos as reatâncias das máquinas. Após o cálculo das tensões internas, as reatâncias das máquinas são somadas em série com as reatâncias dos transformadores para obtermos as matrizes normais de admitâncias. Desta forma, as barras 1, 2 e 3 da Fig. 5.3.3 são as barras internas das máquinas. Os resultados apresentados nas tabelas XXIV a XXX levam em conta esta consideração.

TABELA XXIV
TENSÕES INTERNAS DAS MÁQUINAS P/O SISTEMA DE PRÉ-DEFEITO

Nº GERADOR	E (p.u)	δ (rad)	P_m (entrada) (p.u)
1	1.0571	0.0396	0.716
2	1.0492	0.3453	1.630
3	1.0158	0.2305	0.850

Para determinarmos o ponto de equilíbrio estável do sistema de pós-defeito, permutamos as numerações das máquinas 1 e 3 no diagrama da Fig. 5.3.3, de acordo com a justificativa das folhas 61 . Esta consideração é válida para os resultados apresentados a partir da tabela XXXI.

TABELA XXV

MATRIZ G (PRÉ-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4				3.3074	-1.3652	-1.9422			
5				-1.3652	3.8156		-1.1876		
6				-1.9422		4.1030			-1.2820
7					-1.1876		2.8047	-1.6171	
8							-1.6171	3.7433	-1.1551
9						-1.2820		-1.1551	2.4371

TABELA XXVI

MATRIZ B (PRÉ-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-8.4459			8.4459					
2		-5.4855					5.4855		
3			-4.1684						4.1684
4	8.4459			-30.3937	11.6041	10.5107			
5				11.6041	-17.8434		5.9751		
6				10.5107		-16.1339			5.5882
7		5.4855			5.9751		-24.9311	13.6980	
8							13.6980	-23.6431	9.7843
9			4.1684			5.5882		9.7843	-19.2574

TABELA XXVII

MATRIZ B (EM-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4				3.3074	-1.3652	-1.9422			
5				-1.3652	3.8156				
6				-1.9422		4.1030			-1.2820
7									
8								3.7433	-1.1551
9						-1.2820		-1.1551	2.4371

TABELA XXVIII

MATRIZ B (EM-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-8.4459			8.4459					
2		-5.4855							
3			-4.1684						4.1684
4	8.4459			-30.3937	11.6041	10.5107			
5				11.6041	-17.8434				
6				10.5107		-16.1339			5.5882
7									
8								-23.6431	9.7843
9			4.1684			5.5882		9.7843	-19.2574

TABELA XXIX

MATRIZ G (PÓS-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4				3.3074	-1.3652	-1.9422			
5				-1.3652	2.6280				
6				-1.9422		4.1030			-1.2820
7							1.6171	-1.6171	
8							-1.6171	3.7433	-1.1551
9						-1.2820		-1.1551	2.4371

TABELA XXX

MATRIZ G (PÓS-DEFEITO)

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-8.4459			8.4459					
2		-5.4855					5.4855		
3			-4.1684						4.1684
4	8.4459			-30.3937	11.6041	10.5107			
5				11.6041	-12.0212				
6				10.5107		-16.1339			5.5882
7		5.4855					-19.1089	13.6980	
8							13.6980	-23.6431	9.7843
9			4.1684			5.5882		9.7843	-19.2574

TABELA XXXI

MATRIZ $[\bar{Y}_{eq}]$ PARA O SISTEMA EM-DEFEITO

MATRIZ G			MATRIZ B				
	1	2	3		1	2	3
1	0.174	0.000	0.070	1	-2.796	0.000	0.630
2	0.000	0.000	0.000	2	0.000	-5.485	0.000
3	0.070	0.000	0.657	3	0.630	0.000	-3.816

TABELA XXXII

MATRIZ $[\bar{Y}_{eq}]$ PARA O SISTEMA PÓS-DEFEITO

MATRIZ G			MATRIZ B				
	1	2	3		1	2	3
1	0.269	0.192	0.183	1	-2.352	1.206	1.063
2	0.192	0.375	0.129	2	1.206	-2.015	0.706
3	0.183	0.129	1.139	3	1.063	0.706	-2.298

TABELA XXXIII

PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL P/O SISTEMA DE PÓS-DEFEITO

Nº GERADOR	δ_i (Rad)	ω (Rad/s)	$\partial P_{ei} / \partial \delta_i$	OBS.
1	0.751091	0.0	2.079496	ESTÁVEL
2	1.001761	0.0	1.667071	ESTÁVEL
3	0.000000	0.0	1.256249	ESTÁVEL

TABELA XXXIV

PONTOS DE EQUILÍBRIO INSTÁVEIS APROXIMADOS (P.E.I.A) DO
PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL DE PÓS-DEFEITO

GRUPO	P.E.I.A
a)	(2.390502, 1.001761); (0.751091, 2.139832)
b)	(2.390502, 2.139832)
c)	(-3.89268, 1.001761); (0.751091, -4.143354)
d)	(-3.89268), -4.143354)

TABELA XXXV

VALORES ASSUMIDOS PELAS 4 FUNÇÕES DE LYAPUNOV PARA OS PONTOS
DE EQUILÍBRIO INSTÁVEIS APROXIMADOS DA TABELA XXXIV

FUNÇÃO	GRUPO	VALORES ASSUMIDOS
V_1	a)	1.926766; 0.742702
	b)	0.644575
	c)	4.817910; 6.890618
	d)	9.683634
V_2	a)	1.926766; 0.742701
	b)	0.644575
	c)	4.817910; 6.890621
	d)	9.683636
V_3	a)	0.337820; 0.130218
	b)	0.113013
	c)	0.844724; 1.208132
	d)	1.697832
V_4	a)	0.337821; 0.130217
	b)	0.113014
	c)	0.844720; 1.208135
	d)	1.697830

Vê-se, da tabela XXXV acima, que o ponto (2.390502, 2.139832) equivalente ao grupo (b) foi quem forneceu os menores valores para as quatro funções de Lyapunov consideradas. Este ponto, usado como valor inicial para o sistema de pós-defeito, fornece o ponto de equilíbrio instável mais próximo do ponto de equilíbrio estável da tabela XXXIII. O valor encontrado é dado na tabela XXXVI.

TABELA XXXVI

PONTO DE EQUILÍBRIO INSTÁVEL MAIS PRÓXIMO DO PONTO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL DA TABELA XXXIII

Nº GERADOR	δ_i (Rad)	ω (Rad/s)	$\partial P_{ei} / \partial \delta_i$	OBS.
1	2.102336	0.0	0.595190	ESTÁVEL
2	2.522096	0.0	0.536226	ESTÁVEL
3	0.000000	0.0	-1.216077	INSTÁVEL

Com o mesmo procedimento do primeiro exemplo, obtemos os valores de b_{min} e os tempos críticos de eliminação do defeito (t_{cr}), cujos resultados estão dados na tabela XXXVII.

TABELA XXXVII

VALORES DE b_{min} E t_{cr} OBTIDOS PARA AS 4 FUNÇÕES DE LYAPUNOV CONSIDERADAS

FUNÇÃO DE LYAPUNOV	b_{min}	t_{cr} (segundos)
V_1	0.434377	0.10
V_2	0.434377	0.10
V_3	0.076159	0.10
V_4	0.076160	0.10

Simulando o sistema também pelo Método de Integração Numérica determinamos os tempos críticos (t_{cr}), que são dados na tabela XXXVIII. As Figs. 5.3.8 a 5.3.11 mostram as curvas de oscilação das máquinas para este caso.

TABELA XXXVIII
TEMPO CRÍTICO DE ELIMINAÇÃO DO DEFEITO OBTIDO
PELO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

EFEITO DA CONDUTÂNCIA DE TRANSFERÊNCIA INCLUIDO?	t_{cr} (segundos)
NÃO	0.10
SIM	0.16

3.4 - Análise dos resultados.

Os resultados obtidos em nosso estudo mostraram-se coerentes quando comparados com aqueles obtidos por outro método, no caso o tradicional Método de Integração Numérica.

Através desse processo de comparação dos dois métodos, gostaríamos de ressaltar dois pontos: a determinação do ponto de equilíbrio instável mais próximo do ponto de equilíbrio estável de pós-defeito, e a determinação do tempo crítico de eliminação do defeito (t_{cr}).

Para o primeiro exemplo considerado na aplicação do Método Direto de Lyapunov, notamos das Tabelas XV e XVI, que o ponto

de equilíbrio instável que forneceu o ponto de equilíbrio instável mais próximo do ponto de equilíbrio estável de pós-defeito, foi o terceiro ponto do grupo (a). Para este grupo, cada ponto representa uma situação onde uma máquina perde o sincronismo enquanto as outras permanecem estáveis. No caso, o terceiro ponto representa uma situação onde a máquina 3 perde o sincronismo enquanto as demais máquinas do sistema permanecem estáveis. Desta forma, era de se esperar que, quando da simulação do sistema pelo método de integração numérica, a máquina que perderia o sincronismo fosse a máquina 3. Isto foi plenamente confirmado pelas curvas de oscilação das máquinas obtidas por este método, como mostradas nas Figs. 5.3.5 e 5.3.7. Para o segundo exemplo considerado, uma situação equivalente é analisada para o único ponto do grupo (b), de acordo com as tabelas XXXIV e XXXV. Este ponto representa uma situação onde as máquinas 1 e 2 perdem o sincronismo, enquanto a máquina 4 (referência) permanece estável. Era de se esperar, portanto, que as máquinas 1 e 2 perderiam o sincronismo quando da simulação do sistema pelo método de integração numérica. As Figs. 5.3.9 e 5.3.11 mostram o resultado que confirmou esta previsão. Como podemos ver, para uma mesma representação do sistema (modelo clássico), a análise de estabilidade transitória pelo Método Direto de Lyapunov encontra grande coerência com a análise feita por um método não-direto - o Método de Integração Numérica, que é usualmente o método mais utilizado em estudos de estabilidade transitória de sistemas de potência.

Na determinação do tempo crítico de eliminação do defeito (t_{cr}) pelo Método Direto de Lyapunov, não levamos em conta o efeito da condutância de transferência, enquanto pelo Método de Inte-

gração Numérica são analisadas duas situações: uma incluindo esse efeito e a outra desprezando-o. Para o primeiro exemplo considerado, comparando os resultados obtidos pelos dois métodos, conforme mostrados nas tabelas XVIII e XIX, vemos que o efeito da condutância de transferência não exerceu muita influência nos resultados. Desta forma, desprezar seu efeito neste caso seria vantajoso, pois além de simplificar os cálculos, os resultados obtidos seriam suficientemente precisos. No segundo exemplo considerado, comparando os resultados obtidos pelos dois métodos, como mostrado nas tabelas XXXVII e XXXVIII, notamos que a condutância de transferência exerce grande influência nos resultados. Desprezando seu efeito, obtivemos um t_{cr} de 0.10s; incluindo esse efeito, o t_{cr} obtido foi de 0.16s. Isto mostra que desprezar o efeito da condutância de transferência às vezes leva à obtenção de resultado demasiados pessimistas, ou seja, o sistema pode ser estável muito além do t_{cr} obtido.

Podemos notar porque a condutância de transferência exerce grande influência sobre o segundo exemplo e pouca influência sobre o primeiro, observando a ordem de grandeza das condutâncias de transferência das matrizes $[\bar{Y}_{eq}]$ para estes dois exemplos. Para uma melhor visualização, tomemos, por exemplo, a relação $\frac{|B_{ij}|}{|G_{ij}|}$ para os dois exemplos, na condição de pós-efeito:

1º SISTEMA

$$\frac{|B_{12}|}{|G_{12}|} = 8 ; \quad \frac{|B_{13}|}{|G_{13}|} = 32$$

$$\frac{|B_{14}|}{|G_{14}|} = 6.31 ; \quad \frac{|B_{23}|}{|G_{23}|} = 7.24$$

2º SISTEMA

$$\frac{|B_{12}|}{|G_{12}|} = 6.28$$

$$\frac{|B_{13}|}{|G_{13}|} = 5.8$$

$$\frac{|B_{24}|}{|G_{24}|} = 50.62$$

$$\frac{|B_{23}|}{|G_{23}|} = 5.47$$

Podemos observar que para o 1º sistema existe relações até da ordem de 50.62 vezes, enquanto para o 2º sistema todas as relações são consideráveis.

Desta forma, torna-se conveniente que, para decidir pela não inclusão do efeito da condutância de transferência em estudos de estabilidade transitória, seja observado a ordem de grandeza dos elementos de transferência da matriz G, correspondente à parte real de $[\bar{Y}_{eq}]$, no sentido de se obter resultados suficientemente precisos.

Observando os tempos críticos de eliminação do defeito (t_{cr}) das tabelas XVIII e XXXVII, obtidos para as quatro diferentes funções de Lyapunov da seção 4.5, notamos que as mesmas fornecem tempos críticos equivalentes para cada caso considerado, cujos valores concordam com aqueles obtidos pelo Método de Integração Numérica. Portanto as 4 funções consideradas são convenientes para o estudo proposto, usando-se o modelo clássico. As funções acima referidas foram selecionadas entre um número aproximado de onze funções de Lyapunov indicadas na literatura e por nós pesquisadas.

Uma vez que a tendência de um curto trifásico é fazer com que a máquina que esteja eletricamente mais próxima a ele perca o sincronismo, e levando em conta que a função V define uma distância de um ponto de equilíbrio instável do sistema com relação ao seu ponto de equilíbrio estável de pós-defeito, observamos, na avaliação das funções de Lyapunov para os pontos de equilíbrio

instáveis aproximados das tabelas XV e XXXIV, que as funções assumiam os maiores valores para os pontos de equilíbrio instáveis aproximados representando situações onde as máquinas com maior constante de inércia, eletricamente distantes do defeito, perdiam o sincronismo. Desta forma, baseado no critério para determinação do b_{\min} (seção 4.6), também se justifica a conveniência da escolha da máquina de referência como aquela possuindo a maior constante de inércia, desde que ela não esteja eletricamente próxima ao defeito.

1º SISTEMA

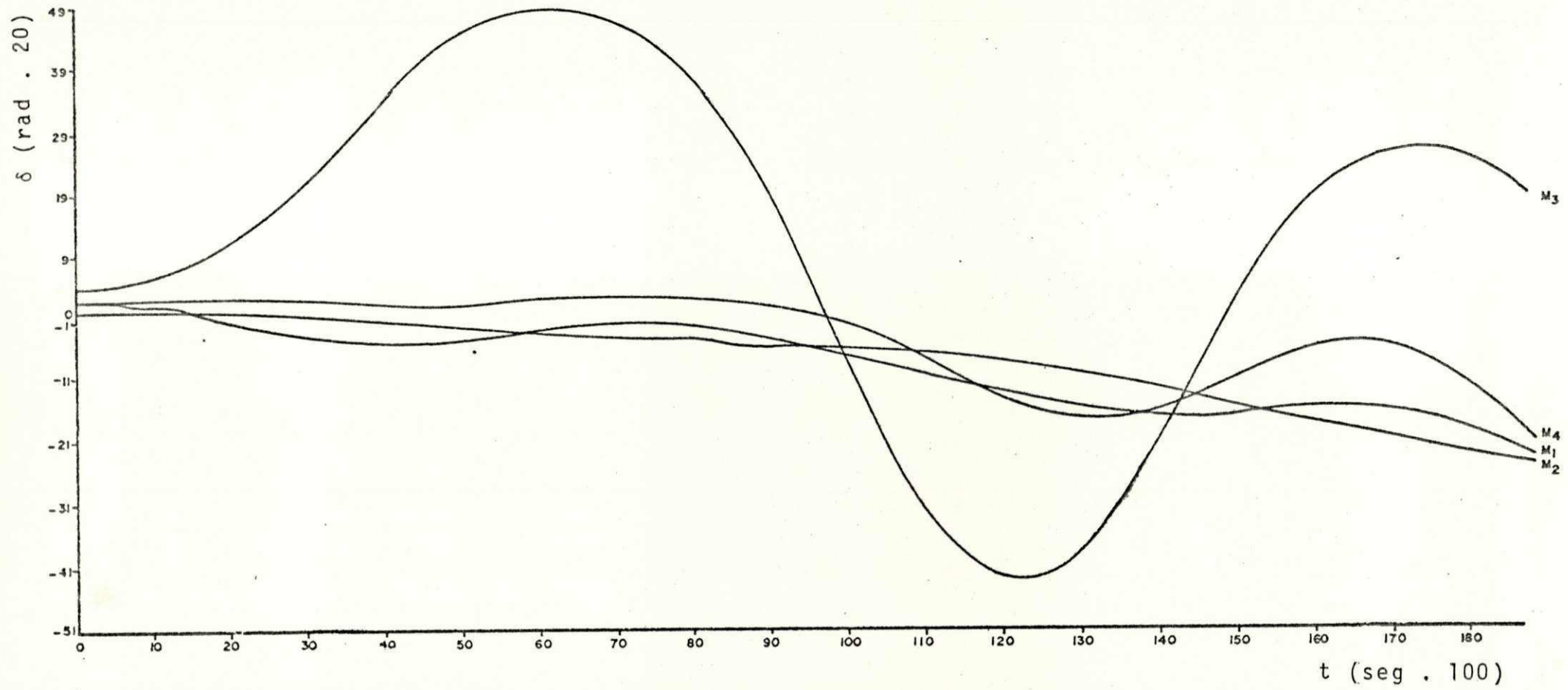


Fig. 5.3.4 - Curvas de Oscilação: Efeito da condutância de transferência desprezado. Defeito eliminado para 0.41 segundos.

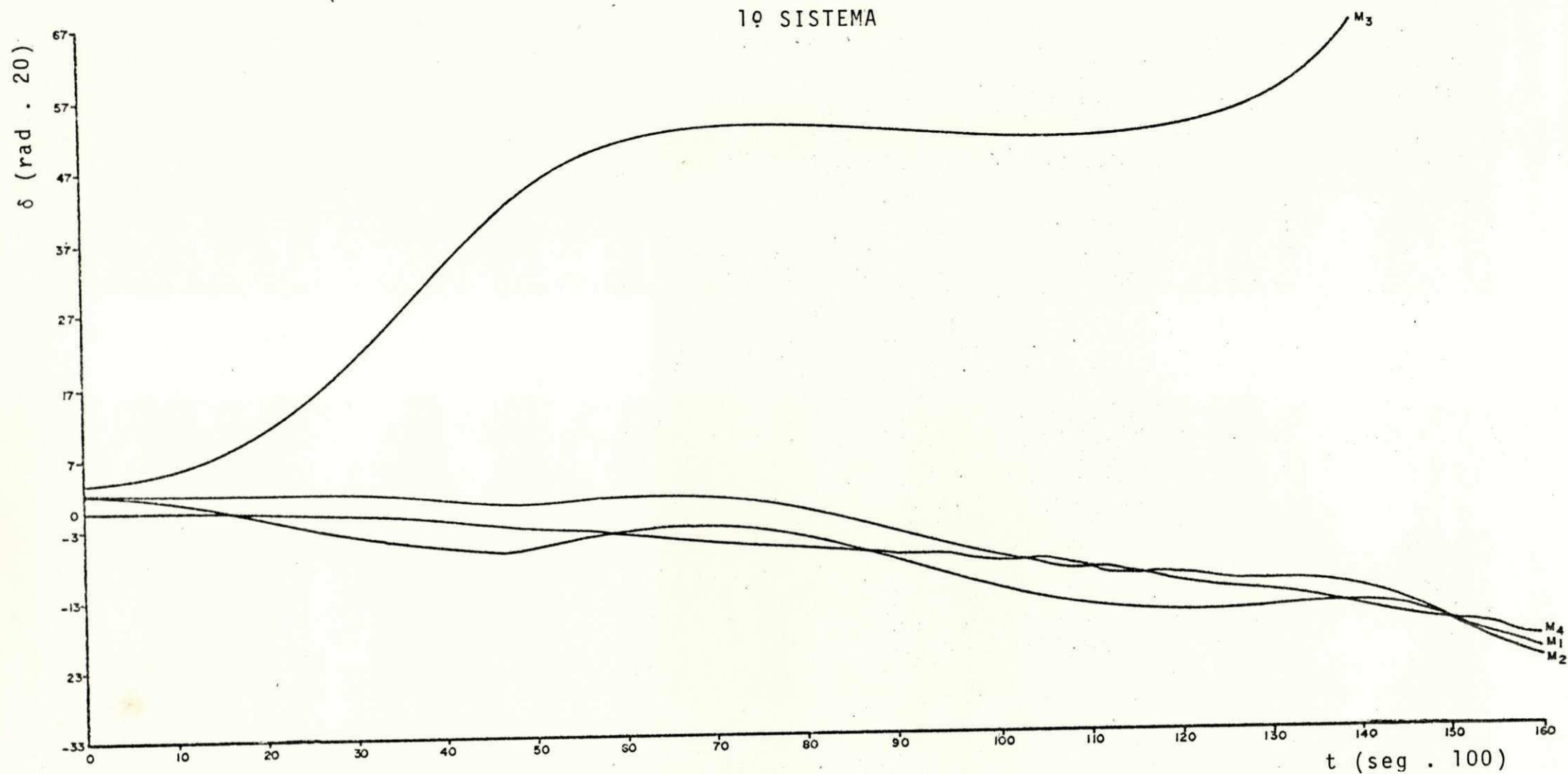


Fig. 5.3.5 - Curvas de Oscilação: Efeito da condutância de transferência desprezado. Defeito eliminado para 0.42 segundos.

1º SISTEMA

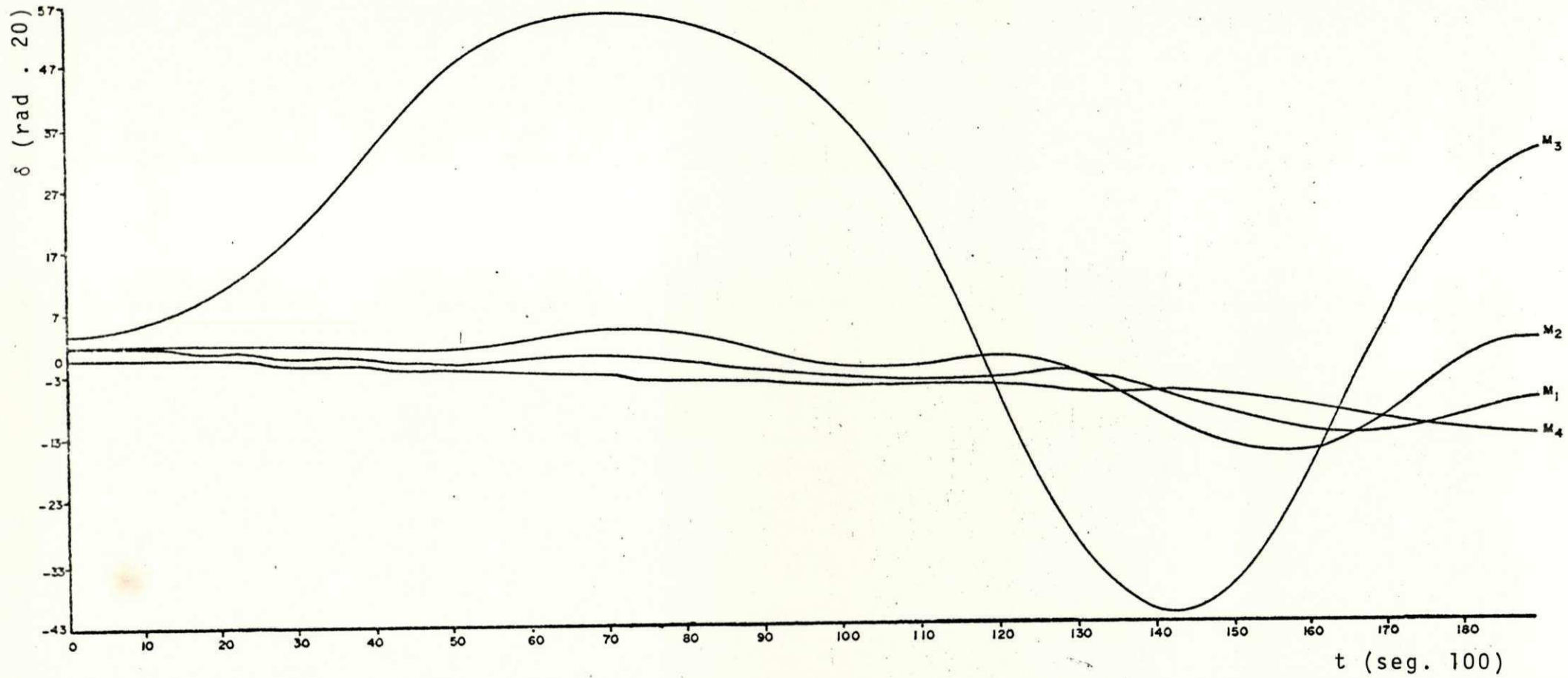


Fig. 5.3.6 - Curvas de Oscilação: Efeito da condutância de transferência incluído. Defeito eliminado para 0.42 segundos.

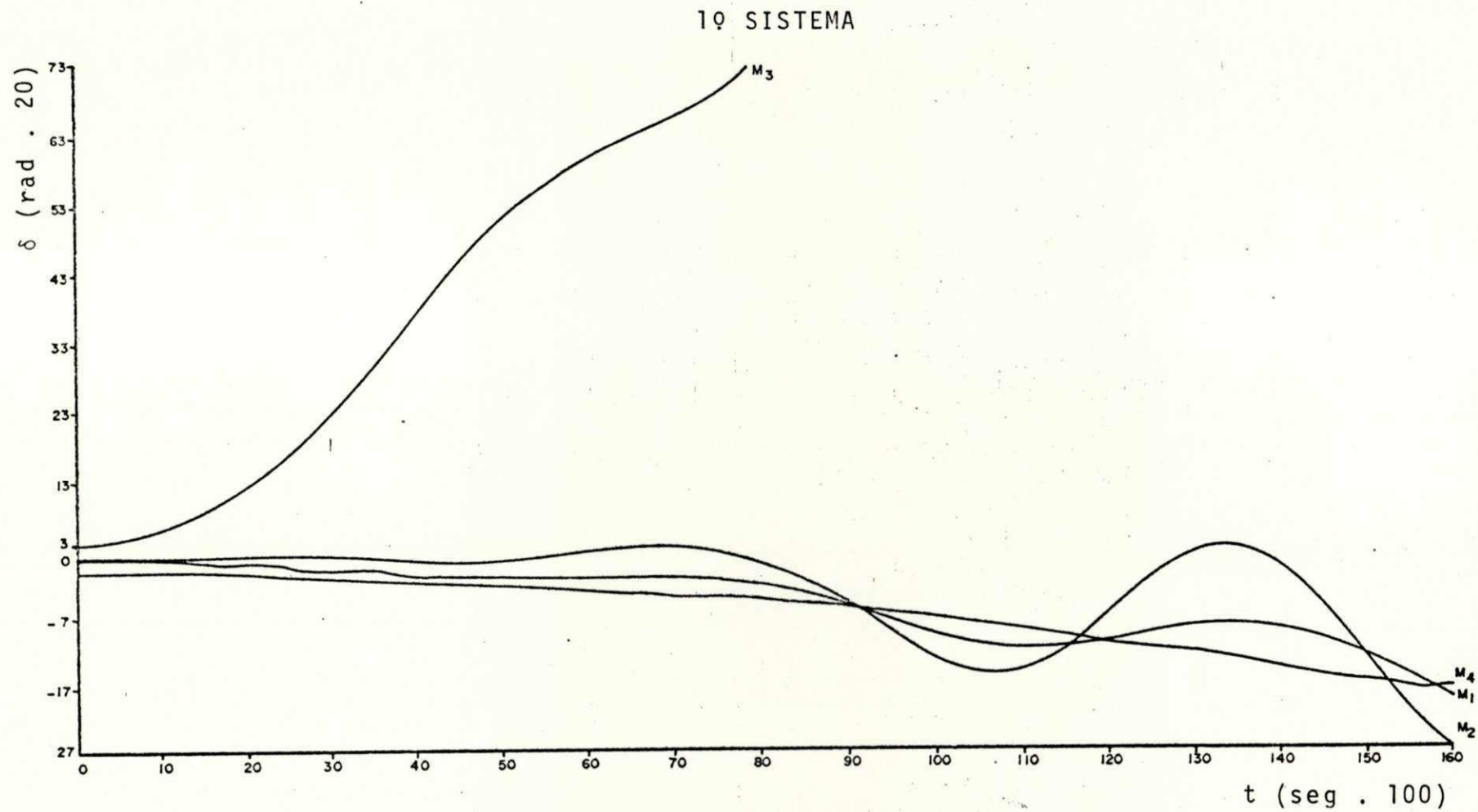


Fig. 5.3.7 - Curvas de Oscilação: Efeito da Condutância de Transferência incluído. Defeito eliminado para 0.43 segundos.

29 SISTEMA

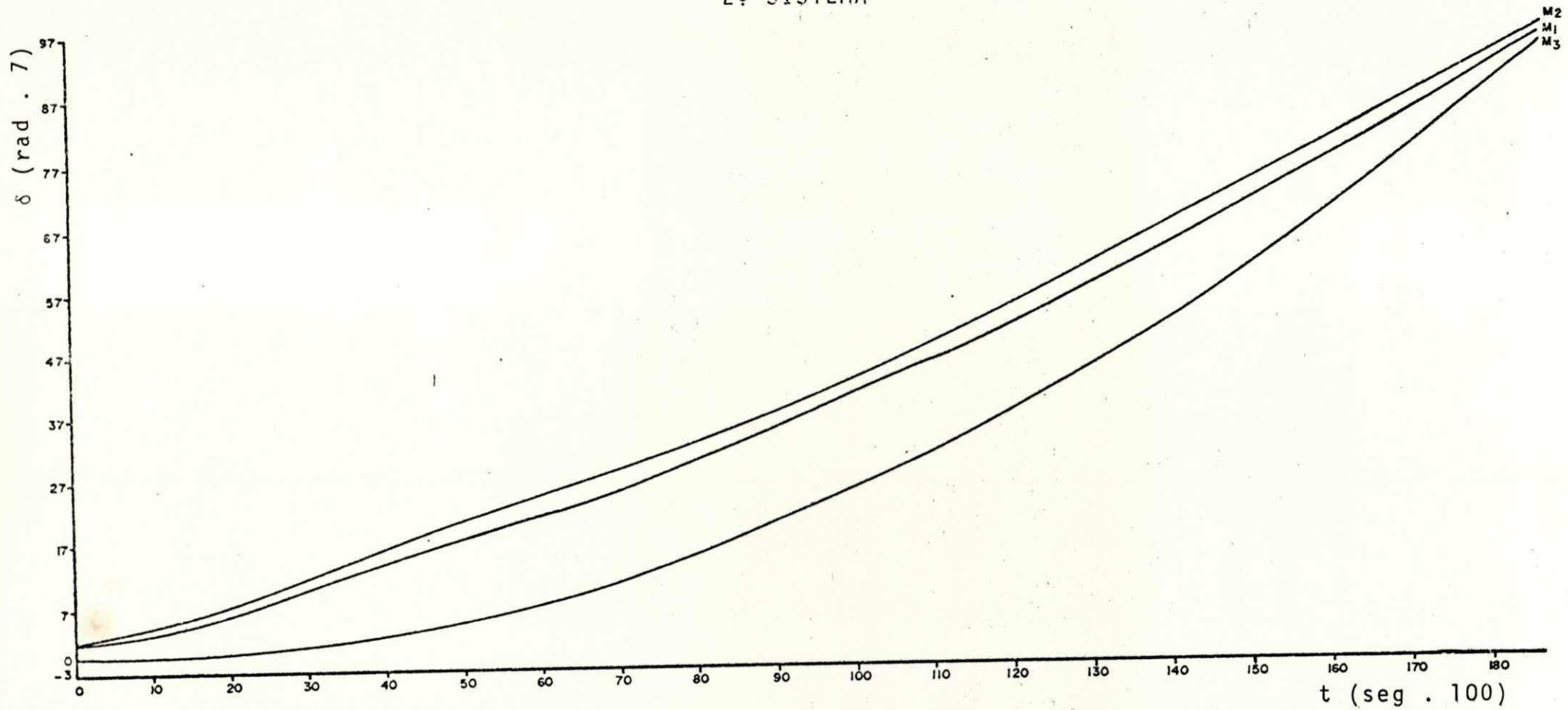


Fig. 5.3.8 - Curvas de Oscilação: Efeito da condutância de transferência desprezado. Defeito eliminado para 0.10 segundos.

2 ϕ SISTEMA

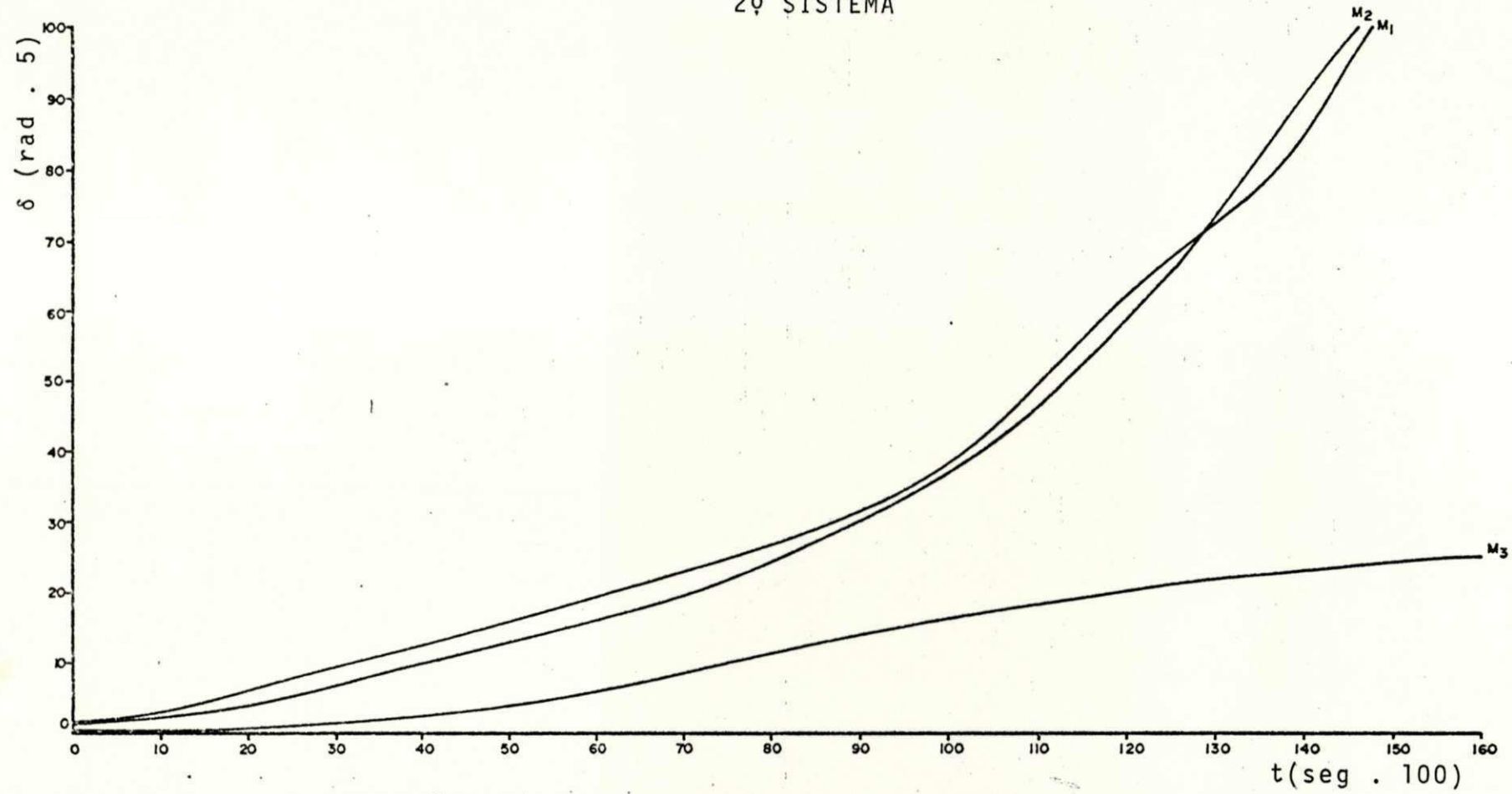


Fig. 5.3.9 - Curvas de Oscilação: Efeito de condutância de transferência desprezado. Defeito eliminado para 0.11 segundos.

29 SISTEMA

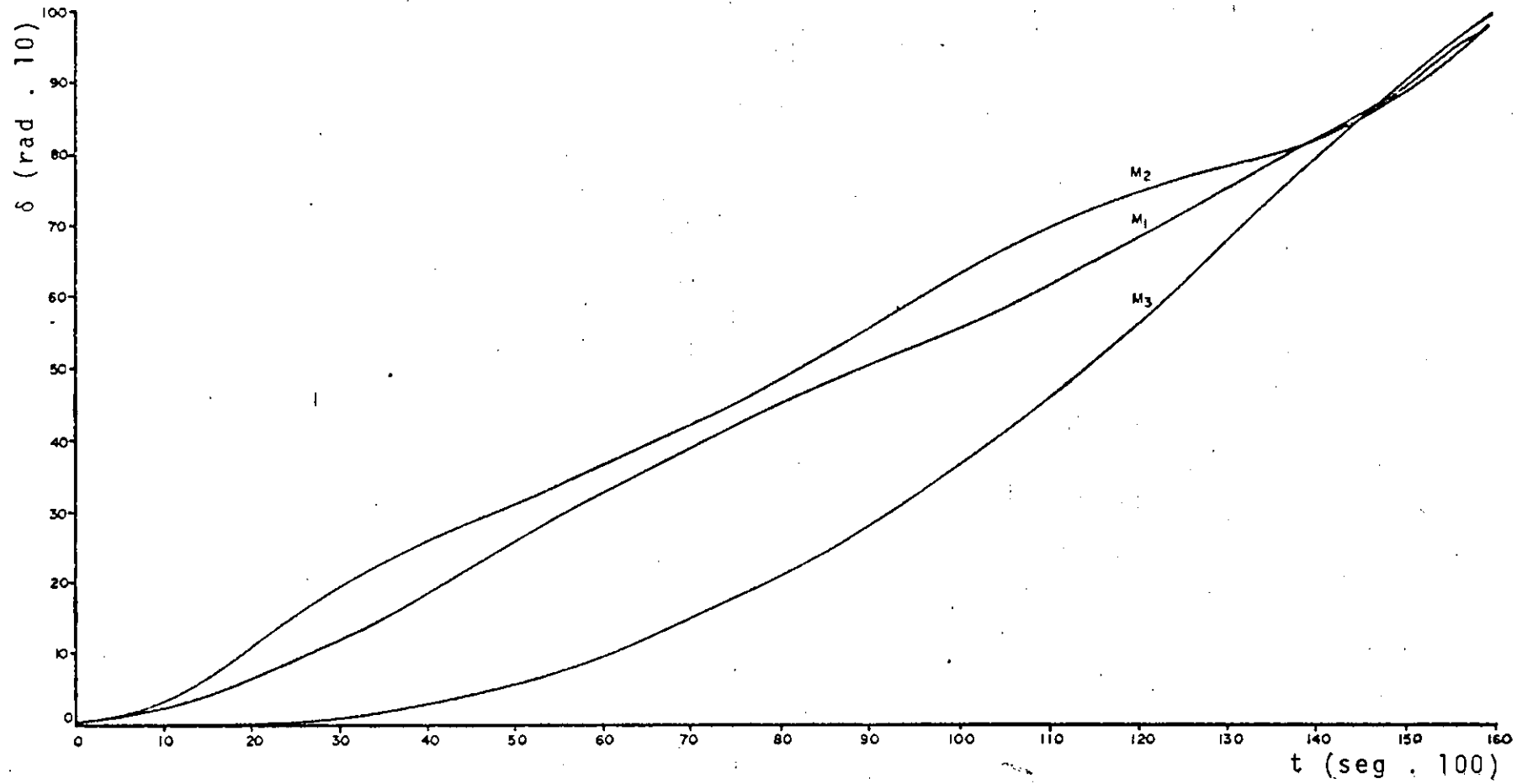


Fig. 5.3.10 - Curvas de Oscilação: Efeito da condutância de transferência
incuido. Defeito eliminado para 0.16 segundos.

2º SISTEMA

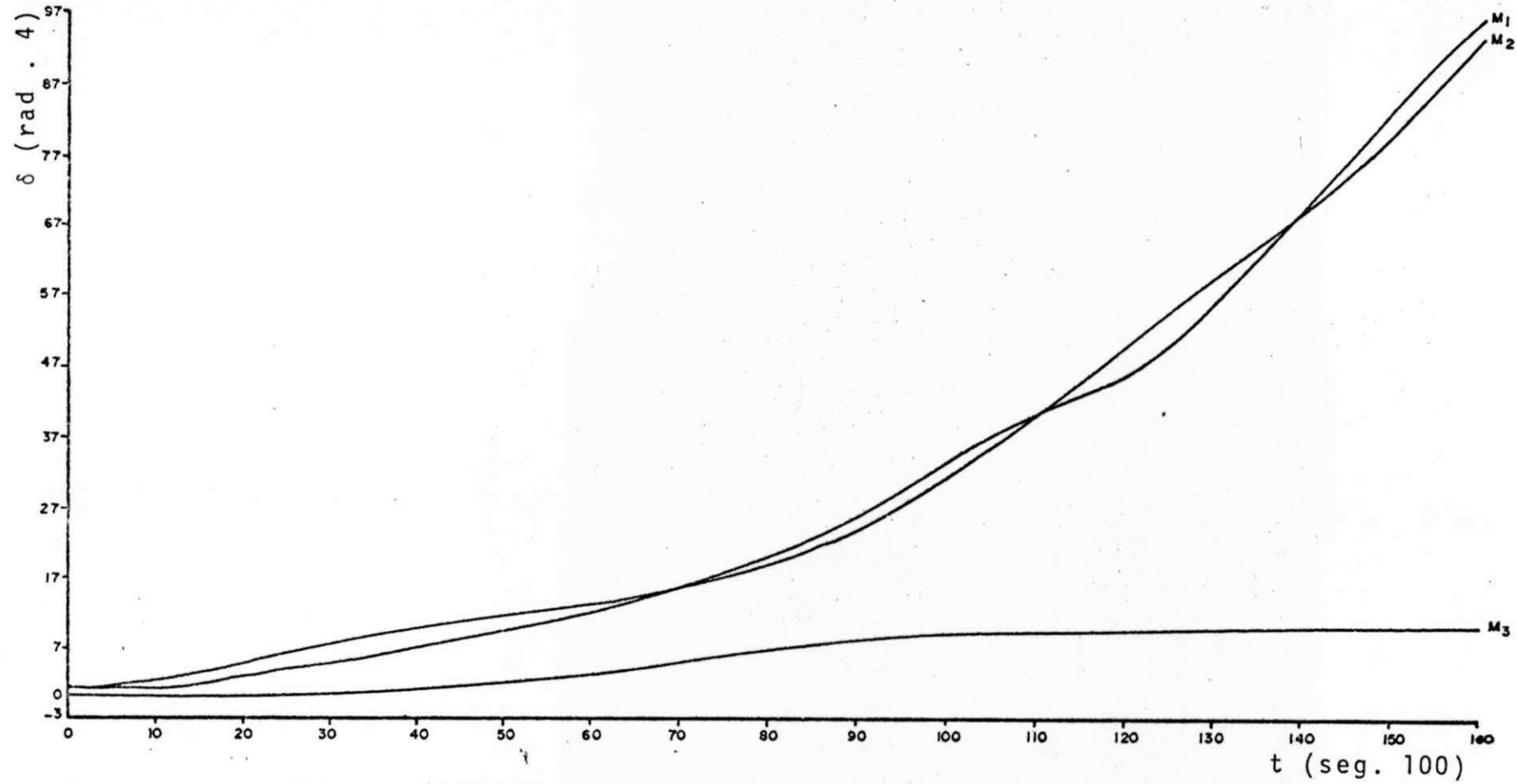


Fig. 5.3.11 - Curvas de Oscilação: Efeito da condutância de transferência incluído. Defeito eliminado para 0.17 segundos.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Não foi nosso objetivo tirar conclusões indiscutíveis sobre um método que começamos a investigar, mas mostrar as potencialidades que o mesmo oferece como um método alternativo para o estudo de estabilidade transitória de sistemas de potência.

Os resultados demonstram que as quatro funções de Lyapunov selecionadas fornecem resultados confiáveis e, portanto, são funções convenientes para o estudo de estabilidade transitória de sistemas de potência, usando o modelo clássico. Também foi demonstrado que, desprezar o efeito das condutâncias de transferência das linhas, pode levar à obtenção de resultados demasiadamente pessimistas.

A determinação dos pontos de equilíbrio do sistema pelo Método de Brown mostrou-se vantajosa, pois, além de não requerer o uso de derivadas, este método fornece resultados bastante precisos.

Pelo exposto e analisado anteriormente, podemos verificar que o Método Direto de Lyapunov oferece grandes vantagens quando comparado com o tradicional Método de Integração Numérica. Podemos enumerar algumas dessas vantagens, como sendo:

- O método é computacionalmente mais rápido;
- Determinação automática da estabilidade ou instabilidade do sistema;
- Determinação automática do tempo crítico de eliminação do defeito (t_{cr}).

Esse método direto, porém, possui certas limitações tais como:

- O método não fornece maiores informações sobre o comportamento do sistema quando submetido a perturbações transitórias;
- O estudo de estabilidade por esse método ainda está limitado ao uso de simplificações, devido ainda não haver funções de Lyapunov adequadas para estudos incluindo modelos mais realísticos de sistemas de potência.
- Os resultados obtidos por esse método nem sempre são exatos, embora sejam conservativos. O valor exato pode ser posteriormente obtido pelo Método de Integração Numérica.

O procedimento desenvolvido em nosso trabalho demonstra que o Método Direto de Lyapunov pode ser confiavelmente usado na determinação das regiões de instabilidade associadas com a primeira oscilação transitória. Este método apresenta-se como um instrumento que pode ser empregado no planejamento e operação de sistemas de potência.

Como os resultados são promissores usando o modelo clássico, é nossa proposição dar continuidade ao estudo em trabalhos fu

turos, incluindo fatores como: modelos mais realísticos de máquinas (a variação no fluxo do campo das máquinas já é objeto de estudos usando o Método Direto de Lyapunov [24]), amortecimento e condutâncias de transferência.

Outros aspectos que requerem pesquisas futuras são, entre outros, o modelamento dinâmico de cargas, saliência (que introduz termos de amortecimento não-linear) e máquinas assíncronas.

REFERÊNCIAS

- [1] M.R. Pavella, "Fast determination of stability regions for online transient power-system studies", Proc. IEE, Vol. 123, No. 7, pp. 689-696, July 1976.
- [2] A.H. El-Abiad and K. Nagappan, "Transient stability regions of multimachine power systems", IEEE Trans. Power Apparatus and System, Vol. PAS-85, pp. 169-179, February 1966.
- [3] C.L. Gupta and A.H. El-Abiad, "Determination of the closest unstable equilibrium state for Lyapunov methods in transient stability studies", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-95, No. 5, pp. 1699-1712, September/October 1976.
- [4] H. Rudnick, "Transient security assesment methods", Proc. IEE, Vol. 125, No. 2, pp. 135-140, February 1978.
- [5] A.A. Fouad and S.E. Stanton, "Transient stability of a multi

- machine power system - Part I: Investigation of system trajectories", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 7, pp. 3408-3416, July 1981.
- [6] A.A. Fouad and S.E. Stanton, "Transient stability of a multi machine power system - Part II: Critical Transient Energy", IEEE Trans. Power Apparatus and System, Vol. PAS-100, No. 7, pp. 3417-3424, July 1981.
- [7] T. Athay, R. Podmore and S. Virmani, "A practical method for the direct analysis of transient stability", IEEE. Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-98, No. 2, pp. 573-584, March/April 1979.
- [8] J.L. Willéms, "Optimum Lyapunov functions and stability regions for multimachine power systems", Proc. IEE, Vol. 117, No. 3, pp. 573-577, March 1970.
- [9] K.M. Brown, "Solution of simultaneous nonlinear equations", Comm. ACM, 10(1967), pp. 728-729.
- [10] K.M. Brown, "A quadratically convergent Newton-like method based upon Gaussian elimination", SIAM J. Numer. Anal., 6 (1969), pp. 560-569.
- [11] K. Ogata, "Modern Control Engineering", Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, N.J, 1970.
- [12] E.W. Kimbark, "Power System Stability", John Wiley & Sons, Inc., New York 1948.
- [13] C-F Chen and I.J. Haas, "Elements of Control Systems Ana-

- lysis", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1968.
- [14] De Russo, Ray and Close, "State Variables for Engineers", John Wiley & Sons, Inc., New York 1965.
- [15] P.M. Anderson and A.A. Fouad, "Power Systems Control and Stability", The Iowa State University Press, Ames, Iowa, USA, 1977.
- [16] W.D. Stevenson Jr., "Elements of Power System Analysis", Mc Graw Hill Book Company, 1962.
- [17] Stagg Glenn W., and A.H. El-Abiad: "Computer Methods in Power Systems Analysis", Mc Graw Hill Book Company, New York, 1968.
- [18] Drumond Xavier e Manoel Firmino, "Apostila de Fluxo de Cargas", UFPE, Recife 1981.
- [19] Lawrence P. Huelsman, "Basic Circuit Theory with Digital Computations", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1972.
- [20] H.E. Brown, "Grandes Sistemas Elétricos: Métodos Matriciais", LTC/EFEI, 1977.
- [21] W.F. Tinney, "Evaluation of Concepts for Studying Transient Stability", IEEE Tutorial Course: Modern Concepts of Power Systems Dynamics, IEEE, New York 1970.
- [22] N. Dharma Rao, "Generating of Lyapunov function for the transient stability problem", Trans. of the Engineering Institute of Canada, EIC-68-Elec. 3, Vol. 11, No. C-3, May 1968,

pp. 1-8.

- [23] F.S. Prabhakara, and A.H. El-Abiad: "A Simplified Determination of Stability Regions for Lyapunov Methods", IEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-94, March/April 1975, pp. 672-689.
- [24] H. Sasaki, "An Aproximate Incorporation of Field Flux Decay Into Transient Stability Analyses of Multimachine Power Systems by The Second Method of Lyapunov.", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-98, No. 2, March/April 1979.
- [25] Gerd A. Luders, "Transient Stability of Multimachine Power Systems via the Direct Method of Lyapunov", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-90, No. 1, January/February 1971.
- [26] J.L. Willems and J.C. Willems, "The Application of Lyapunov Methods to the Computation of Transient Stability Regions for Multimachine Power Systems", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, No. 5/6, May/June 1970.
- [27] H.F. Williams, S.A. Louie and G.W. Bills, "On-Line Stability Analysis Study", EEI, RP90-1, October 12, 1970.
- [28] Fouad and Lygtu, IEEE Paper C72 145-6.

APÊNDICE

FUNÇÕES DE LYAPUNOV PARA SISTEMAS DE POTÊNCIA

As seguintes funções de Lyapunov foram também pesquisadas no estudo de estabilidade transitória de sistemas de potência usando o Método Direto de Lyapunov:

1) De H. Sasaki [24]

$$V(\delta, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n M_i M_j \omega_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (M_j P_{mi} - M_i P_{mj} - M_j E_i G_{ii} + M_i E_j G_{jj}) (\delta_{ij} - \delta_{ij}^S) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E_i E_j B_{ij} (\cos \delta_{ij} - \cos \delta_{ij}^S)$$

2) De A. H. El-Abiad e outro [2]

$$V(\delta, \omega) = \sum_{K=1}^n \left[\frac{1}{2} M_K \omega_K^2 + (E_K^2 G_{KK} - P_{mK}) (\delta_K - \delta_K^S) \right] + \sum_{K=1}^{n-1}$$

$$\sum_{j=k+1}^n E_k E_j B_{kj} [\cos \delta_{kj}^s - \cos \delta_{kj}]$$

3) De Gerd A. Luders [25]

$$V(\delta, \omega) = 1/2 \sum_{i=1}^n M_i (\omega_i^0)^2 - \frac{1}{2M} \left(\sum_{i=1}^n M_i \omega_i^0 \right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n B_{ij} \cdot E_i E_j [\sin \delta_{ij} (\delta_{ij}^0 - \delta_{ij}^s) + \cos \delta_{ij}^0 - \delta_{ij}^s]$$

4) De J. L. Willems e outro [26]

$$V(\delta, \omega) = \sum_{i=1}^n \frac{M_i \omega_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E_i E_j B_{ij} [\cos \delta_{ij}^s - \cos \delta_{ij} - (\delta_{ij} - \delta_{ij}^s) \sin \delta_{ij}^s]$$

5) De H. F. Williams e outros [27]

$$V(\delta, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \omega_i^2 - 1/2 \overline{M\omega}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{j=i+1}^n E_i E_j B_{ij} \cdot \sin \delta_{ij}^s \right] \delta_{ij} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E_i E_j B_{ij} \cos \delta_{ij}$$

6) De Fouad and Lugtu [28]

$$V(\delta, \omega) = \sum_{i=1}^n 1/2 M_i \omega_i^2 - 1/2 \overline{M\omega}^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n E_i E_j B_{ij} [\sin \delta_{ij}^s (\delta_{ij} - \delta_{ji}^s) + \cos \delta_{ij} - \cos \delta_{ij}^s]$$

7) De H. F. Williams e outros [27]

$$V(\delta, \omega) = \sum_{i=1}^n 1/2 M_i \omega_i^2 - 1/2 \bar{M} \bar{\omega}^2 - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n E_i E_j B_{ij} \right. \\ \left. \sin \delta_{ij}^s \right] \delta_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n B_{ij} \cos \delta_{ij}$$