

Universidade Federal da Paraíba - Campus II
Centro de Ciências e Tecnologia
Coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Área de Projeto Mecânico.

Estimação de Parâmetros de Sistemas Mecânicos no domínio do tempo utilizando-se o Filtro de Kalman em conjunção com o Estimador das Variáveis Instrumentais.

Jônatas Araújo de Lacerda Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba - UFPb - Campus II, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campina Grande

1994



L131e Lacerda Júnior, Jônatas Araújo de.
Estimação de parâmetros de sistemas mecânicos no domínio do tempo utilizando-se o Filtro de Kalman em conjunção com o Estimador das Variáveis Instrumentais / Jônatas Araújo de Lacerda Júnior. - Campina Grande, 1994.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 1994.

Referências.
"Orientação : Prof. Dr. Natanael Victor de Oliveira".

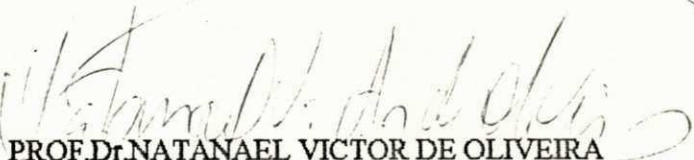
1. Sistemas Mecânicos. 2. Parâmetros e Tempo - Filtro. 3. Dissertação - Engenharia Mecânica. I. Oliveira, Natanael Victor de. II. Universidade Federal da Paraíba - Campina Grande (PB). III. Título

CDU 621.03(043)

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE SISTEMAS MECÂNICOS NO
DOMÍNIO DO TEMPO UTILIZANDO-SE O FILTRO DE KALMAN EM CONJUNÇÃO
COM O ESTIMADOR DAS VARIÁVEIS INSTRUMENTAIS.

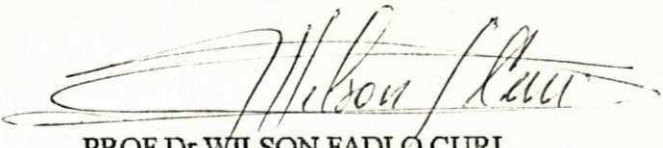
JÔNATAS ARAÚJO DE LACERDA JÚNIOR

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 08 DE JULHO DE 1994



PROF. Dr. NATANAEL VICTOR DE OLIVEIRA

ORIENTADOR



PROF. Dr. WILSON FADLO CURI

MEMBRO



PROF. Dr. ANTONIO MARCOS NOGUEIRA

MEMBRO

CAMPINA GRANDE - PB

JULHO - 1994

À minha mãe Neuza Moreira; ao meu
irmão Romero Moreira; à minha irmã
Sheila Moreira, parentes e amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Natanael Victor de Oliveira, meu orientador, pela dedicação, incentivos e atenção que me foram dados.

Ao Prof. Dr. Antônio Marcus Nogueira, em especial, pela atenção dedicada ao final deste trabalho nas questões teóricas e computacionais.

Ao Prof. Dr. Misael Elias de Moraes pelas discussões oportunas no decorrer do trabalho.

Ao Prof. Dr. Cursino B. Jacobina, e ao Mestre em Ciências Kleber F. da Silva, pelas discussões valiosas no início deste trabalho.

Ao Estudante de Engenharia Elétrica, Natan Pinto de Medeiros, pela sua contribuição na fase de digitação e esboço do texto e figuras.

À Universidade Federal da Paraíba - Centro de Ciências e Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, Campina Grande-PB, por ter me dado oportunidade de realizar este trabalho.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, que possibilitou e viabilizou a execução deste trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram e tornaram possível a realização deste trabalho, a minha gratidão.

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é investigar técnicas de estimação de parâmetros de sistemas mecânicos no domínio do tempo, com ênfase a sistemas mecânicos que eventualmente podem ser modelados por um conjunto massa-mola-amortecedor viscoso de um grau de liberdade, sujeitos a pequenas perturbações em torno da posição de equilíbrio. Para tal são processadas simulações, buscando-se obter o vetor de estado do sistema (dados), e são feitos comentários sobre técnicas numéricas para solução de sistemas lineares, utilizadas no processo de estimação de parâmetros.

São discutidos neste trabalho aspectos relevantes no tocante à escolha adequada do intervalo de tempo de discretização de sinais e seu efeito nos coeficientes estimados. Considerações sobre o efeito do ruído que sobrepõe-se aos sinais de saída, características estatísticas, bem como sua influência nos coeficientes estimados são levantadas e discutidas.

Acrescenta-se ainda, aspectos de natureza teórica relacionados com este estudo como Teoria de Sistemas, Teoria da Estimação Mínima Quadrática, conceitos ligados a estimação de parâmetros (Mínimos Quadrados e Variáveis Instrumentais), aspectos ligados à filtragem de estado utilizando-se o Filtro de Kalman e conceitos introdutórios sobre decomposição espectral para análise de sinais de sistemas.

Finalmente, são mostrados resultados de estimação de parâmetros e confrontados com valores teóricos tomados para a simulação. Procura-se aí levantar comentários e discussões sobre o eficiência de cada estimador e sobre o efeito da conjunção entre o Filtro de Kalman e o Estimador das Variáveis Instrumentais nos resultados obtidos. Destaca-se ainda a influência do sinal de excitação utilizado, apresentando-se vantagens e desvantagens em relação a outros tipos de sinais que normalmente são empregados.

ABSTRACT

The objective of this work is to investigate techniques of parameter estimation of mechanical systems in time domain, with emphasis to mechanical systems that can be eventually modeled by means of mass-spring-viscous damper (dashpot) with a degree of freedom, submitted to small disturbances around the position of equilibrium. With this objective, simulations are processed in time domain to get state vector of the system (data), and numerical methods for the solution of linear systems used herein parameter estimation process are commented.

In this work, important aspects about the search criterion for the signals sampling rate and its effects in the estimated coefficients are commented.

Commentaries about the noise effects on output signal, its statistical properties and its influence on the estimated coefficients are commented.

Theoretical aspects about System Theory, Least Square Estimation, concepts of estimation methods (Least-Square Method, Instrumental Variables Method), concepts of filtering using Kalman Filter and an introduction of spectral analysis of signal and systems can be added in this work.s

Finally, the results of the application of parameters estimation technique are presented and compared with the theoretical values attained from simulation. The efficiency of the Instrumentals Variables Method in conjunction with the Kalman Filter are discussed.

Also emphasis has been given on the influence of excitation source used and its advantage with respect to other kinds of sources normally used.

SIMBOLOGIA

a_1, a_2	Constantes arbitrárias
a_n	Coefficiente de Fourier
A_T	Transformada de Fourier Discreta (TFD)
A_{T^i}	Pseudo-inversa da matriz A
A	Matriz dinâmica do sistema
b_0	Constante arbitrária
b_n	Coefficiente de Fourier
B	Matriz de distribuição
C_n	Coefficiente de Fourier
\bar{C}	Matriz de forma
C	Coefficiente de amortecimento do sistema [N.s / m]
$\det ()$	Determinante
D	Matriz de transmissão
$E []$	Média, esperança matemática ou valor esperado de uma grandeza
E.D.O.	Equação diferencial ordinária
$F []$	Transformada de Fourier
$f(\omega)$	Transformada de Fourier
$F^{-1} []$	Transformada - inversa de Fourier
f	Frequência absoluta
$f()$	Função
F	Constante arbitrária
fdp	Função densidade de probabilidade
FFT	Transformada rápida de Fourier
G.D.L.	Grau de liberdade
$\text{grad} ()$	Gradiente

H_k	Matriz de medição para a k-ésima medição
$\text{Im} [\]$	Parte imaginária de um número complexo
$j\omega_i$	Parte imaginária do i-ésimo pólo dominante
K_0, K_1, K_2, K_3	Coefficientes de Runge
\bar{K}_k	Matriz do k-ésimo ganho do filtro
K	Coefficiente de rigidez do sistema
$L(s)$	Transformada de Laplace
$L[\]$	Transformada de Laplace
M	Massa do sistema
NX_1, NX_r, NX_k	Sequência de números reais
NPI	Constante arbitrária positiva que muda a faixa de frequência de excitação da SPHS
N_p	Número de pontos no tempo da SPHS
\bar{P}_k	Potência relativa da k-ésima harmônica
$PRBS$	Sequência binária Pseudo-randômica
P_k	Matriz de covariância do erro de estado
P'_k	Matriz de covariância do erro de estado estimado
PZ	Matriz de covariância do erro de medição
P_i	i-ésimo pólo dominante do sistema contínuo
plim	Limite de probabilidade
Q	Constante arbitrária
Q_k	Matriz de variâncias do erro de estado na k-ésima observação
R	Matriz de ruídos de estado
R_k	Matriz de ruídos de estado na k-ésima medição
$\text{Re} [\]$	Parte real de um número complexo
RMS	Valor médio eficaz (Root Mean Square)

$S(\omega)$	Densidade espectral de potência média
SISO	Simple entrada simples saída (Single Input Single Output)
SPHS	Sequência Fasada de Schroeder ou Onda de Schroeder
S_k	Matriz de variâncias do erro na k-ésima medição
S_x	Desvio padrão nas medições de deslocamento
\dot{S}_x	Desvio padrão nas medições de velocidade
T	Intervalo de tempo de discretização [s]
T_n	Período de vibrações livres do sistema
$T_r[]$	Traço de uma matriz
T_D	Período
$T_{PI.}$	Período de vibrações livres do sistema
U	Matriz de entradas do sistema
$Var[]$	Variância
ω_i	Frequência angular da i-ésima harmônica
ω_0	Frequência angular fundamental
ω^*	Frequência angular de amostragem
ω_N	Frequência de Nyquist
ω_n	Frequência natural do sistema
W_{vi}	Matriz das variáveis instrumentais
\hat{X}_k	Matriz de estado do sistema no tempo t_k com correção
\hat{X}'_k	Matriz de estado do sistema estimada no tempo t_k
X	Matriz de estado
$y(t)$	Sinal de saída ou resposta
$Y(t)$	Matriz de saída do sistema
Y_n	N-ésimo valor aproximado de $y(t)$
V_k	Ruído de medição
Z'_k	k-ésima medição efetuada

z_i	I-ésimo número complexo
\bar{z}_i	I-ésimo pólo dominante do sistema discreto
α	Constante arbitrária
β	Constante arbitrária
Ω	Constante arbitrária
θ_n	N-ésimo ângulo de fase da n-ésima componente harmônica do sinal sintetizado [rd] s Variância de $f(t)$
α_f^2	Variância de $f(t)$
$\mu(t)$	Sinal de entrada ou força de excitação [N]
φ	Fase instantânea
ρ	Parte real do i-ésimo pólo dominante do sistema contínuo
τ_C	Constante de tempo do sistema
ε	Erro, desvio
ϕ	Vetor de parâmetros do sistema
$\hat{\phi}_{MQ}$	Estimador por mínimos quadrados dos parâmetros de f
$\hat{\phi}_{VI}$	Estimador das variáveis instrumentais
$\hat{\phi}_{aux}$	Matriz de parâmetros do modelo auxiliar
$\phi_{i,j}$	Elementos do vetor ϕ
λ_i	I-ésimo autovalor de uma matriz
$\Phi_{k,k-1}$	Matriz de transição de estado
$()_a$	Aproximação
Δt	Intervalo de tempo
$j = \sqrt{-1}$	Unidade imaginária
$e = 2,7182818...$	Constante de Euler
$()^*$	Grandeza discretizada

\xrightarrow{F}	Transformada de Fourier
\therefore	Donde
$()_E$	Entrada
$()_S$	Saída
$[]$	Matriz quadrada ou retangular
$\{ \}$	Matriz coluna ou vetor
Σ	Somatório
$(\hat{})$	Valor estimado
$()^T$	Transposta de uma matriz
$t_k = kT$	k-ésimo intervalo de discretização
$\varepsilon(\hat{})\%$	Erro percentual de estimação
$(\hat{})_{MO}$	Valor estimado via Mínimos Quadrados Generalizados
$(\hat{})_{VI}$	Valor estimado via Variáveis Instrumentais
$(\hat{})_{FKV}$	Valor estimado via Variáveis Instrumentais / Filtro de Kalman
$(\dot{})$	Derivada temporal de uma função

1. Figura 1.1	Modelo de Kelvin	1.5
2. Figura 2.1.a	Sinal Impulsional.....	2.11
3. Figura 2.1.b	Espectro.....	2.11
4. Figura 2.2	Sinal sintetizado obtido no tempo para 128 harmônicas	2.14
5. Figura 2.3	Espectro do sinal sintetizado	2.15
6. Figura 2.4	Domínio dos pólos dominantes para o sistema discreto.....	2.21
7. Figura 2.5	Processo de estimação via variáveis instrumentais.....	2.35
8. Figura 2.6	Diagrama de fluxo do filtro de Kalman	2.49
9. Figura 3.1	Representação esquemática da equação de estado discretizada.....	3.11
10. Figura 3.2	Processo de estimação de parâmetros via Filtro de Kalman em conjunção com o estimador das variáveis instrumentais	3.17
11. Figura 4.1	Processo esquemático de simulação digital	4.8
12. Figura 4.2.a	Sinal de excitação no tempo (SPHS).....	4.9
13. Figura 4.2.b	Espectro do sinal de excitação(Largura de banda de 56 rd/s).....	4.10
14. Figura 4.3	Resposta em deslocamento no tempo a uma excitação com sinal sintetizado	4.11
15. Figura 4.4	Resposta livre em deslocamento do sistema a uma condição inicial (transitório).....	4.12
16. Figura 4.5	Resposta em deslocamento de regime permanente a uma excitação com sinal sintetizado.....	4.13
17. Figura 4.6	Magnitude do desvio entre as respostas em deslocamento de regime permanente obtidas via compilador Fortran 77 e compilador C (MATLAB).....	4.14
18. Figura 4.7	Ruído Simulado no tempo	4.17

19. Figura 4.8	Densidade espectral de potência da sequência de ruído	4.17
20. Figura 4.9	Resposta em deslocamento de regime permanente com nível de ruído sobreposto em torno de 10 % RMS.....	4.18
21. Figura 4.10	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de N_p , 10 % de ruído e $NPI = 1$	4.29
22. Figura 4.11	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de N_p , 10 % de ruído e $NPI = 1$	4.29
23. Figura 4.12	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de N_p , 10 % de ruído e $NPI = 5$	4.30
24. Figura 4.13	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de N_p , 10 % de ruído e $NPI = 5$	4.30
25. Figura 4.14	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de NPI , 10 % de ruído e $N_p = 260$	4.32
26. Figura 4.15	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de NPI , 10 % de ruído e $N_p = 260$	4.32
27. Figura 4.16	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de NPI , 10 % de ruído e $NPI = 92$	4.33
28. Figura 4.17	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de NPI , 10 % de ruído e $NPI = 92$	4.33
29. Figura 4.18	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de ruído, $NPI = 1$ e $N_p = 260$	4.35
30. Figura 4.19	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de ruído, $NPI = 1$ e $N_p = 260$	4.35
31. Figura 4.20	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de ruído, $NPI = 5$ e $N_p = 92$	4.36
32. Figura 4.21	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de ruído, $NPI = 5$ e $N_p = 92$	4.36

33. Figura 4.22	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de amortecimento, $K = 800\text{N/m}$, $\text{NPI} = 5$, $\text{Np} = 92$ e 10 % de ruído.....	4.38
34. Figura 4.23	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de amortecimento, $K = 800\text{N/m}$, $\text{NPI} = 5$, $\text{Np} = 92$ e 10 % de ruído.....	4.38
35. Figura 4.24	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de Np , 10 % de ruído e $\text{NPI} = 1$	4.40
36. Figura 4.25	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de Np , 10 % de ruído e $\text{NPI} = 1$	4.40
37. Figura 4.26	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de Np , 10 % de ruído e $\text{NPI} = 5$	4.41
38. Figura 4.27	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de Np , 10 % de ruído e $\text{NPI} = 5$	4.42
39. Figura 4.28	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de ruído, $\text{NPI} = 1$ e $\text{Np} = 260$	4.44
40. Figura 4.29	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de ruído, $\text{NPI} = 1$ e $\text{Np} = 260$	4.44
41. Figura 4.30	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de ruído, $\text{NPI} = 5$ e $\text{Np} = 92$	4.45
42. Figura 4.31	Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de ruído, $\text{NPI} = 5$ e $\text{Np} = 92$	4.45
43. Figura 1A	Integrador numérico - Modelo conceitual.....	A.2
44. Figura 2A	Solução passo-a-passo de $y = f(t, y)$	A.7
45. Figura 3A	Quatro avaliações da função antes de avançar um passo.....	A.9
46. Figura 4A	Uma avaliação da função por passo pelo método de Euler.....	A.9
47. Figura 1B	Interpretação geométrica para as frequências angulares negativas.....	B.4
48. Figura 1C	Densidade espectral - Ruído de banda limitada.....	C.2
49. Figura 2C	Densidade espectral - Ruído de banda larga.....	C.3

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO GERAL

1.1 Introdução	1.1
1.2 Descrição do Trabalho.....	1.3
1.3 Modelo Matemático para Verificação do Método de Estimação.....	1.4
1.4 Conclusão.....	1.6

CAPÍTULO 2

2. EMBASAMENTO TEÓRICO

2.1 Introdução	2.1
2.2 Teoria sobre Análise de Sistemas.....	2.2
2.3 Identificação de Sistemas e Estimação de Parâmetros	2.6
2.4 Propriedades dos Diversos Sinais de Excitação	2.9
2.4.1 Excitação Harmônica.....	2.9
2.4.2 Excitação Impulsional.....	2.10
2.4.3 Excitação com Sinal Sintetizado	2.11
2.4.4 Excitação com Sinal Randômico	2.16

2.5 Teorema da Discretização ou Amostragem.....	2.17
2.5.1 Discretização de Sinais	2.17
2.5.2 Escolha do Intervalo de Discretização ou Amostragem.....	2.19
2.6 Propriedades dos Diversos Estimadores	2.23
2.6.1 Estimador por Mínimos Quadrados.....	2.23
2.6.2 Estimador das Variáveis Instrumentais.....	2.31
2.6.3 Estimador Estocástico de KALMAN.....	2.36
2.6.3.1 Histórico.....	2.36
2.6.3.2 Filtro de Kalman - Aspectos Teóricos.....	2.37
2.6.3.3 Desenvolvimento do Algoritmo de Kalman.....	2.39
2.6.3.4 Considerações sobre a Divergência do Filtro de Kalman	2.50
2.6.3.5 Conclusão.....	2.52

CAPÍTULO 3

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROCESSO DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS PARA SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

3.1. Introdução	3.1
3.2. Redução da Equação Diferencial do Sistema à Forma de Estado.....	3.2
3.3. Solução do Sistema de Equações Diferenciais de Primeira-Ordem ou Sistema de Estado.....	3.5
3.4. Discretização da Equação de Estado.....	3.8

3.5. Estimacão de Parâmetros do Sistema em Estudo	3.12
3.6. Conclusão.....	3.18

CAPÍTULO 4

4. SIMULAO DIGITAL E RESULTADOS DO PROBLEMA DE ESTIMACÃO DE PARÂMETROS

4.1. Introduo	4.1
4.2. Escolha do Intervalo de Discretizao	4.2
4.3. Simulao.....	4.5
4.4. Contaminao do Vetor de Estado com Ruído Simulado.....	4.15
4.5. Apresentao dos Resultados.....	4.19
4.5.1 Metodologia de Análise	4.19
4.5.2 Filtro de Kalman - Aspectos Teóricos.....	4.20
4.5.3 Desenvolvimento do Algoritmo de Kalman.....	4.27
4.6 Conclusão.....	4.46

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSÃO GERAL

Sugestões para Trabalhos Futuros	5.3
--	-----

ANEXO I (Programas computacionais para a aplicação dos métodos investigados)

ANEXO II (TABELAS)

ANEXO III (TABELAS)

ANEXO IV (TABELAS)

ANEXO V (TABELAS)

ANEXO I (Programas computacionais para a aplicação dos métodos investigados)

ANEXO II (TABELAS)

ANEXO III (TABELAS)

ANEXO IV (TABELAS)

ANEXO V (TABELAS)

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO GERAL

1.1 Introdução

O estudo do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos tem despertado grande interesse na comunidade científica nas últimas décadas. A importância desse estudo para a Ciência e Tecnologia explica-se pela extensão da sua aplicação nas mais diversas e variadas áreas do conhecimento, e, em particular, pode-se citar em Engenharia Mecânica (sêlos mecânicos, turbo-bombas, grandes indústrias hidroelétricas em geral, estimativa das trajetórias de mísseis e satélites, sistemas eixomancais hidrodinâmicos, sistemas eólicos, sistemas mecânicos em geral onde é praticamente impossível a obtenção de alguns parâmetros de forma direta), em Engenharia Elétrica (estimativa de fluxo magnético em sistemas eletromecânicos, estimativa de fontes de excitação devido a campos magnéticos em rotores), em Engenharia Civil (interação solo-estrutura, estimação de perturbações estocásticas devido a abalos sísmicos) para não citar outras áreas como Economia, Administração de Empresas, Engenharia Química, Engenharia de Inteligência Artificial e Matemática Aplicada.

Atualmente as técnicas de modelagem para o estudo do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos, estão bem conhecidas (método dos elementos finitos, matriz de transferência, sub-estruturação com gráficos de ligação.), onde pressupõe-se o conhecimento prévio de todas as características físicas e geométricas, bem como as características da força de excitação.

Em muitas situações, nem todos os parâmetros do sistema são conhecidos. Neste caso, é necessário um estudo teórico-experimental para identificar estes parâmetros (massa, rigidez e amortecimento).

Em alguns sistemas mecânicos, mesmo com o conhecimento de um modelo matemático que retrate aproximadamente o comportamento dinâmico em dadas condições, é praticamente impossível obter-se parâmetros destes modelos de forma direta (rigidez e amortecimento de um filme de óleo por exemplo). Daí a necessidade de se utilizar métodos de estimação. Estes métodos são aplicáveis a sistemas lineares ou não-lineares, podendo-se fazer uma abordagem no domínio do tempo ou da frequência. No entanto, para se verificar a formulação matemática do processo de estimação de parâmetros, necessita-se de um modelo que determine a relação existente entre as entradas e saídas do sistema, segundo algum critério [01,05,12].

A viabilidade de se investigar métodos de estimação de parâmetros de sistemas, em geral, é patente, diante do atual quadro de desenvolvimento científico e tecnológico dos últimos anos. A necessidade de obtenção de melhores critérios de busca desses parâmetros, tem levado Institutos de Pesquisas de vários países a desenvolver estudos nesta área, com o intuito de descrever de forma bastante aproximada o comportamento dinâmico de sistemas. Com isto possibilita-se o controle operacional de sistemas, buscando-se satisfazer às exigências quanto ao seu desempenho.

A teoria sobre o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos em geral, mediante as características exibidas no seu conjunto, sugere métodos híbridos de modelagem e estimação que permitam a obtenção de um modelo satisfatório. Essa área envolve uma parte teórica de formulação do problema de estimação relativamente complexa, a partir de métodos estatísticos baseados em resultados da teoria da estimação ótima [02]. Neste contexto, há que se discutir sobre o domínio em que é feita a análise; se no domínio da frequência ou no domínio do tempo. Vantagens e desvantagens de se trabalhar com um ou outro método são discutidas [03] e chega-se à conclusão que os dois métodos são

mais complementares que antagônicos. Assim, num processo de identificação de sistemas no domínio do tempo, é possível que uma análise prévia em frequência ajude na determinação mais aproximada da ordem do modelo [04].

Diversos são os estimadores de parâmetros encontrados na literatura como Mínimos Quadrados não-recursivo e seus derivados, Mínimos Quadrados recursivos, Máxima Verossimilhança, Variáveis Instrumentais, etc. Este trabalho tem por objetivo investigar o problema de estimação de parâmetros de sistemas mecânicos utilizando o Filtro de Kalman Padrão em conjunção com o Estimador das Variáveis Instrumentais.

1.2 Descrição do Trabalho

As etapas que seguem para a apresentação deste trabalho incluem:

1. No primeiro capítulo, uma introdução geral onde apresenta-se o modelo utilizado para a investigação da eficiência da conjunção do Estimador das Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman.
2. No segundo capítulo, uma breve discussão sobre Teoria da Estimação, seguida do embasamento teórico necessário para a compreensão do método e seus limites de aplicação. Ainda neste capítulo são apresentadas as propriedades dos diversos estimadores utilizados e de fontes de excitação que potencialmente poderão ser utilizadas como entrada para estimação de parâmetros.
3. No terceiro capítulo, apresenta-se a formulação matemática para a verificação do método de estimação, onde enfatiza-se também o critério utilizado para discretização da equação diferencial que governa o comportamento dinâmico do sistema.

4. No quarto capítulo, apresenta-se discussões e resultados de simulação digital, ressaltando-se aspectos sobre solução numérica de equações de estado. Apresenta-se ainda, resultados do problema de estimação de parâmetros para diversos intervalos de tempo de discretização, considerando-se vários níveis de ruído associados ao sinal de saída, para várias faixas de frequência do sinal de excitação.
5. No quinto e último capítulo, a conclusão do trabalho e sugestões para pesquisas futuras.
6. No final deste trabalho, acrescentou-se quatro apêndices e cinco anexos, contendo no anexo I o programa computacional desenvolvido para a aplicação da técnica de estimação em estudo, e nos demais anexos, tabelas contendo resultados do problema de estimação de parâmetros. O conteúdo dos apêndices engloba:

- ⇒ Apêndice A : Noções sobre Solução Numérica, onde procura-se acentuar o caráter didático do trabalho, objetivando-se viabilizar a leitura deste trabalho por pessoas não familiarizadas com a área.
- ⇒ Apêndice B : Aspectos Teóricos relacionados com o desenvolvimento de funções em Séries de Fourier e Análise Espectral de Sinais Contínuos e Discretos.
- ⇒ Apêndice C : Conceito matemático de Ruído Branco.
- ⇒ Apêndice D : Demonstração da fórmula de Kalman que utiliza correção linear, através do ganho ótimo, como forma de aproximação.

1.3 Modelo matemático para verificação do método de estimação

O estudo da dinâmica de um sistema físico, dentre outras etapas, envolve: modelagem, descrição matemática e análise do comportamento dinâmico. Entende-se por sistema físico um objeto do mundo real, cujo comportamento não se conhece completamente.

No primeiro passo, ou seja, modelagem, busca-se determinar uma forma esquemática para o comportamento do sistema físico, considerando-se aspectos relevantes para a análise. Uma vez estabelecido o modelo adequado para o sistema físico em estudo, busca-se a descrição matemática do seu comportamento dinâmico, através de equações lineares, não-lineares, diferenciais, integrais ou outras.

A equação ou o conjunto delas chama-se modelo matemático, cabendo destacar que um dado sistema físico pode apresentar diferentes modelos matemáticos a depender das características de operação e dos objetivos da análise Chen [10].

O modelo adotado neste trabalho, para verificação do processo de estimação, consiste de um conjunto massa-mola-amortecedor viscoso denominado Modelo de Kelvin [11] apresentado na Figura 1.1. Cabe ressaltar que outros modelos podem ser encontrados nesta referência.

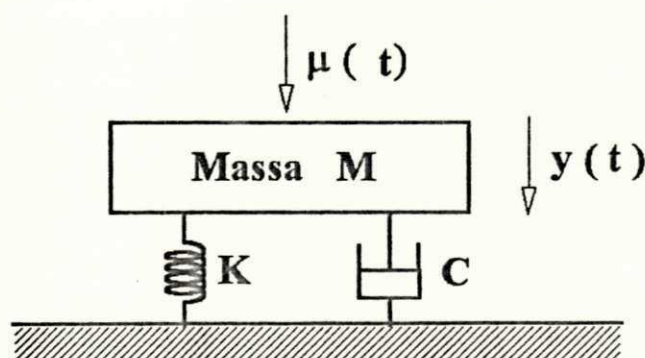


FIG. 1.1 Modelo de Kelvin

O modelo matemático geral que descreve o comportamento dinâmico de sistemas de segunda-ordem com n graus de liberdade pode ser colocado na forma [44] :

$$[M] \{d^2/dt^2 Y(t)\} + [C] \{d/dt Y(t)\} + [K] \{Y(t)\} = \{\mu(t)\} \quad (1.3.1)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são matrizes de ordem $(n \times n)$, de massa, amortecimento e rigidez respectivamente.

No caso de sistemas com um grau de liberdade, de acordo com a configuração da figura 1.1, a expressão (1.3.1) resume-se a :

$$M \frac{d^2}{dt^2} y(t) + C \frac{d}{dt} y(t) + K y(t) = \mu(t) \quad (1.3.2)$$

Entende-se por grau de liberdade de um sistema mecânico, o número mínimo de coordenadas espaciais necessárias para descrever seu movimento e/ou configuração completamente.

A equação (1.3.1) representa, portanto, uma equação diferencial de segunda-ordem sob a ação de uma fonte de excitação externa (força).

1.4 Conclusão

Procurou-se apresentar neste capítulo, aspectos que retratam a importância do estudo sobre caracterização de sistemas utilizando-se técnicas de estimação de parâmetros e sua extensão através das mais variadas áreas do conhecimento científico e tecnológico, com ênfase ao estudo de sistemas mecânicos.

Para este fim, delinearão-se etapas de apresentação deste trabalho, com vistas à verificação da técnica de estimação de parâmetros tomada para estudo.

Mostrou-se também, o modelo do sistema físico e o equacionamento matemático utilizado para aplicação da técnica de estimação. A configuração do modelo adotada para um grau de liberdade, representa a forma mais simples dessa classe de modelos, obtendo-se com isso relativa facilidade de implementação da técnica e interpretação dos resultados. Não obstante guarda-se restrições, uma vez que a maioria das aplicações práticas envolve modelos matemáticos de ordem mais elevada.

No capítulo subsequente é dada a fundamentação teórica necessária à compreensão desta técnica de estimação. Assim, procura-se enfatizar aspectos relacionados à teoria e análise de sinais de sistemas, com vistas ao processo de estimação paramétrica, introduzir conceitos relacionados à teoria da minimização média quadrática e apresentar propriedades dos diversos estimadores utilizados no decorrer deste trabalho.

CAPÍTULO 2

2. EMBASAMENTO TEÓRICO

2.1 Introdução

Neste capítulo são abordados aspectos teóricos inerentes ao processo de estimação de parâmetros de sistemas mecânicos. Cabe ressaltar, a importância do conjunto de conceitos que envolve o processo de caracterização de sistemas, relacionados com a Teoria da Probabilidade e Estatística e com Análise de Sistemas Lineares.

Com o objetivo de tornar mais claro o desenvolvimento deste trabalho, delineou-se de forma cuidadosa, uma sequência de conceitos relacionados com o tema em questão. Em primeiro lugar, apresenta-se uma breve discussão sobre análise de sistemas com ênfase à descrição matemática. São discutidos aspectos gerais relacionados com o problema de Identificação de Sistemas e Estimação de Parâmetros e propriedades dos diversos sinais de excitação normalmente utilizados para este fim. O problema de discretização de sinais sistemas, bem como um critério de escolha de um intervalo de tempo de discretização adequado são apresentados e discutidos.

Finalmente são mostradas as propriedades estatísticas dos estimadores utilizados neste trabalho e aspectos inerentes à sua utilização, destacando-se vantagens e desvantagens.

2.2 Teoria sobre Análise de Sistemas

Quando se investiga um sistema sob algum ponto de vista, pode-se estar interessado na sua análise quantitativa ou qualitativa. Na análise quantitativa busca-se, por exemplo, a resposta do sistema a certas entradas e condições iniciais. Na análise qualitativa, interessa as propriedades gerais dos sistemas como estabilidade, controlabilidade e observabilidade [10].

No contexto da análise de sistemas é necessário impor algumas restrições ao campo de atuação e funcionamento dos sistemas sobre os quais recai algum tipo de análise. Este procedimento permite delimitar uma área dentro da qual pode-se assegurar a validade dos resultados, proporcionada pela melhor compreensão dos resultados obtidos. Neste caso, como consequência, tem-se um distanciamento maior dos fatos de uma situação real.

Tais restrições, impostas aos sistemas em geral, viabilizam formas de abordagem como técnicas de estimação de parâmetros e baseiam-se em conceitos oriundos de diversas áreas como Teoria dos Sistemas Lineares, Teoria da Identificação e Controle de Processos e Estatística.

Neste sentido, este estudo é restringe-se a sistemas lineares e invariantes no tempo. Considera-se ainda sistemas causais e sem memória, isto é, a saída num tempo t depende unicamente de entradas no tempo t ou antes dele, nunca de entradas após o tempo t . Tais sistemas devem pertencer à categoria de sistemas determinísticos, onde a saída é unicamente relatada através da entrada e do estado do sistema, assegurando-se com isso a inexistência de comportamento aleatório.

Um outro aspecto deste estudo, de suma relevância, é quanto às propriedades exibidas pelas equações dinâmicas que descrevem o comportamento de tais sistemas. Para que o sistema pertença a uma categoria de interesse, as equações dinâmicas que descrevem seu comportamento devem ser : controláveis (isto é, todos os modos podem ser excitados a partir da entrada, havendo mudança de um

estado do sistema para outro); observáveis (isto é, todos os modos excitados podem ser observados na saída) e estáveis (ou seja, uma entrada limitada provoca uma saída também limitada). Outros critérios sobre estabilidade de sistemas podem ser encontrados na literatura, como os critérios de Lyapunov e Liénard-Chipart[10,13]. Tais propriedades dos sistemas são ditas qualitativas e os sistemas de ocorrência comum em engenharia, como o sistema em estudo, é assumido pertencer a este conjunto de sistemas, sendo portanto observável, controlável e estável.

Uma vez assentadas as considerações sobre propriedades gerais dos sistemas, bem como estabelecidos os limites de seu enfoque, cumpre descrevê-los matematicamente. As formas usadas para a descrição do comportamento dos sistemas em geral, dividem a área de estudo sobre sistemas em duas formas de abordagem: a descrição externa ou entrada-saída, fundamentada nos preceitos da teórica clássica e a descrição interna ou das variáveis de estado, ensejada pela teoria moderna.

A descrição entrada-saída utiliza o conceito de Função de Transferência do Sistema (F_{cs}) através da aplicação da transformada de Laplace ($L[\cdot]$) à equação do sistema. Assim, é possível obter-se a saída pelo produto direto entre a Função de Transferência do Sistema e a Transformada de Laplace da entrada. No caso de utilizar-se equações na forma paramétrica, a descrição é obtida através do produto generalizado de funções denominado Convolução Integral. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= F(s) && \text{Função de transferência do Sistema} \\ L[\mu(t)] &= \mu(s) && \text{Transformada de Laplace da Entrada} \\ L[y(t)] &= Y(s) && \text{Transformada de Laplace da Saída} \end{aligned}$$

donde :

$$Y(s) = F(s) \mu(s) \tag{2.2.1}$$

Utilizando-se o produto generalizado de funções obtém-se:

$$y(t) = \int_0^{\infty} f(t - \xi) \mu(\xi) d\xi \quad (2.2.2)$$

denominada Integral de Convolução ou Convolução Integral entre o sinal de entrada e a função que descreve o comportamento do sistema.

A descrição matemática que relaciona a saída do sistema com a entrada, pode ser representada por uma equação diferencial ordinária (E.D.O.) do tipo :

$$\sum_{j=0}^m a_j \frac{d^j y(t)}{dt^j} = \sum_{i=0}^1 b_i \frac{d^i \mu(t)}{dt^i} ; \text{ com } 1 \leq m \quad (2.2.3)$$

onde a_j e b_i são coeficientes da equação diferencial.

No caso particular de sistemas de segunda-ordem, como o sistema em estudo, a expressão (2.2.3) torna-se:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 \mu(t) \quad (2.2.4)$$

Segundo a teoria de equações diferenciais, a expressão (2.2.3), denota uma E.D.O de j -ésima ordem, e pode ser reduzida a um sistema de " j " equações diferenciais de primeira-ordem com coeficientes constantes, caracterizado como sistema linear invariante no tempo, do tipo:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B\mu(t) \\ Y(t) = \bar{C}X(t) + D\mu(t) \end{cases} \quad (2.2.5)$$

onde X é de ordem $(j \times 1)$, matriz de estado do sistema

Y é de ordem $(n \times 1)$, matriz de saída do sistema

μ é de ordem $(i \times 1)$, matriz de entradas do sistema

A é de ordem $(j \times j)$, matriz dinâmica do sistema (constante)

B é de ordem $(j \times i)$, matriz de distribuição do sistema (constante)

C é de ordem $(n \times j)$, matriz de forma do sistema (constante)

D é de ordem $(n \times i)$, matriz de transmissão do sistema (constante).

As matrizes X , Y e μ tem a forma:

$$X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^j y(t)}{dt^j} \end{bmatrix} \quad Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \end{bmatrix} \quad \mu(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \\ \vdots \\ \mu_i(t) \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

A solução deste sistema de equações diferenciais, denominado sistema de estado, relaciona a saída do sistema com a entrada, através da matriz de transição de estado, Φ [14], na forma,

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \xi) B \mu(\xi) d\xi \quad (2.2.7)$$

Nos últimos anos, a abordagem no espaço definido pelas variáveis de estado, utilizando o cálculo matricial, vem sendo largamente aplicada na síntese de sistemas. A moderna teoria de sistemas faz apêlo à noção de variáveis de estado. Neste caso diz-se que o comportamento de um sistema pode ser inteiramente descrito com ajuda das variáveis de estado, onde para tal, utiliza-se o tratamento no domínio do tempo a partir do cálculo matricial. Assim, é possível representar cálculos com elevado número de variáveis de maneira concisa.

2.3 Identificação de Sistemas e Estimação de Parâmetros.

Um dos problemas básicos da ciência é a tarefa de explicar observações físicas a partir de equações matemáticas. Desde as épocas mais antigas da civilização, o homem tem se preocupado em interpretar observações de parâmetros físicos e fazer previsões. As áreas relacionadas com "Identificação de Sistemas" estão sendo largamente utilizadas hoje em dia, onde existe uma preocupação patente em estabelecer equações matemáticas que descrevam adequadamente relações entre os dados de entrada e saída para sistemas reais.

As várias técnicas de estimação existentes nos diferentes contextos e suas propriedades, são de fundamental importância para várias áreas das ciências naturais, sociais, e da engenharia. São aplicadas na análise de dados experimentais, no controle de sistemas sujeitos a perturbações aleatórias e na tomada de decisões baseadas em informações incompletas.

Na análise do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos, frequentemente nos defrontamos com o problema de determinar de um modelo matemático adequado para descrever a dinâmica de sistemas. Mesmo conhecendo-se a estrutura do sistema, e portanto, tendo condições de associar a este uma modelagem matemático adequado, frequentemente nos colocamos em face ao problema da determinação dos valores dos parâmetros do sistema. Esses nem sempre podem ser medidos por via direta, exigindo muitas vezes, técnicas sofisticadas de estimação para sua perfeita determinação.

Identificação, segundo Zadeh[13], "...é a determinação de um modelo matemático, à base de dados de entrada e saída de um sistema, considerando-se uma classe especificada de modelos, para a qual o sistema sob teste é equivalente. Entretanto, deve-se especificar a classe de modelos, a classe de sinais de entrada e o conteúdo do termo "equivalente". Equivalência aqui, é frequentemente definida em

termos de um critério, que pode ser um erro ou uma função de perdas, função da saída do processo e do modelo. Dessa forma, dois modelos cujas funções de perdas são iguais, são considerados equivalentes...".

Existe uma grande liberdade na formulação do problema da caracterização de sistemas. A seleção da classe de sistemas, da classe de sinais de entrada e do critério de erro é função do conhecimento a priori que se tem do processo [13]. Tais aspectos da Teoria de Identificação de Sistemas influenciam diretamente a "Identificabilidade" do sistema. Aqui, um processo é dito ser identificável, a partir dos dados observados, se as estimativas obtidas forem estatisticamente consistentes; isto é, assintoticamente não-polarizadas com variância decrescente [15].

Em certos casos o processo pode não ser identificável devido ao sinal de entrada não excitar o processo suficientemente em todos os seus modos próprios. Contudo, constata-se que, se o processo é controlável e o sinal de entrada excita os modos próprios do sistema de forma persistente, então a identificabilidade está assegurada.

Entende-se por modo próprio de vibração de sistemas mecânicos a configuração e/ou forma das vibrações livres, associada a uma dada frequência natural. No próximo item será feita uma explanação sobre os diversos sinais de entrada aplicáveis à identificação de sistemas e estimação de parâmetros.

Em dadas situações em engenharia dispõe-se de um conhecimento a priori sobre o sistema investigado. Este conhecimento "a priori" pode envolver a estrutura do processo em análise e um certo discernimento sobre as características operacionais. Em tais casos, a identificação se reduz à busca de valores numéricos dos parâmetros de uma equação diferencial linear ou não-linear. Daí então, define-se estimação de parâmetros como a determinação experimental dos valores dos parâmetros que governam o comportamento linear ou não-linear do sistema, assumindo-se que a estrutura do processo é conhecida [05].

Num quadro mais geral, a teoria da estimação de parâmetros envolve: estimação de ponto, onde o valor das variáveis a serem estimadas não muda, indiferentemente do número de observações desenvolvidas; o problema de filtragem, que envolve uma função do tempo a ser estimada, podendo haver diferentes relações entre os valores das variáveis e entre as observações em diferentes valores do tempo. Neste caso, a filtragem faz uso de valores observados antes e durante cada observação. Um terceiro e último caso refere-se a um problema semelhante à filtragem, porém, com uso de valores observados em tempo posterior às observações denominado de ajuste.

A informação que se tem sobre o processo e a confiança que se tem nessa informação, conduz, através desta forma de descrição, ao estabelecimento de critérios fundamentados na teoria da probabilidade e estatística, qualificando a natureza da estimação. Como um conjunto de tais conhecimentos pode-se citar:

⇒ Estimação não-polarizada, onde para cada observação

$$E[K] = \hat{K}$$

⇒ Estimação consistente, isto é, quando $k \rightarrow \infty$

$$\text{plim}_{k \rightarrow \infty} [|K - \hat{K}| > \varepsilon] = 0$$

onde ao considerar-se ε um valor muito pequeno, diz-se que K converge no sentido probabilístico.

⇒ Estimação ótima, tratando-se de uma estimação não-biasada de variância mínima.

Neste contexto, busca-se um objetivo único voltado para o controle de sistemas. A partir dessa prerrogativa procura-se identificar processos e otimiza-los à base de técnicas de estimação de

parâmetros, onde busca-se obter controle do seu comportamento e desempenho absolutamente. Isto justifica-se o seguinte postulado : "estimação de parâmetros, uma estratégia para o controle" [05].

2.4 Propriedades dos Diversos Sinais de Excitação

Fundamental para o problema de estimação de parâmetros é o fato de que o sistema deve ser excitado. São inúmeros os tipos de sinais de excitação utilizados no estudo do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos em geral e no problema de estimação de parâmetros em particular. Dessa forma, é importante tecer algumas considerações sobre propriedades dos sinais de excitação, sua influência no processo de estimação de parâmetros de sistemas mecânicos e conseqüentemente nos seus resultados.

No apêndice B deste trabalho apresenta-se uma explanação sobre análise espectral de sinais contínuos e discretos. Através desta análise é possível conhecer o conteúdo frequencial e energético dos sinais, o que permite escolher de forma adequada o sinal de excitação a ser utilizado no processo de estimação.

A utilização da análise espectral de sinais pressupõe a observação criteriosa do espectro de frequências. O espectro de frequências compreende a curva cuja abcissa é formada pelas componentes em frequência do sinal e a ordenada, pelas amplitudes das respectivas componentes harmônicas. Assim, a partir do esboço gráfico obtido, é possível estabelecer faixas de frequência de excitação com os respectivos níveis de energia, em cuja largura estejam contidas as frequências naturais do sistema investigado.

2.4.1 Excitação Harmônica.

A principal característica deste tipo de sinal de excitação é que o conteúdo energético encontra-se concentrado em uma única componente em frequência. Deste modo, a construção da função de resposta em frequência por este método de excitação, quando se utiliza dados experimentais, pode ser longa e tediosa.

As equações necessárias ao processo de identificação podem ser estabelecidas para diferentes valores de frequência do sinal de entrada. Um exemplo de sinal de excitação harmônica é dado por :

$$\mu_p(t) = \alpha \text{ sen } \omega_p t, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.1.1)$$

As informações sobre determinadas características dos sistemas, quando abordados no domínio da frequência, são mais facilmente obtidas quando se utiliza sinais de excitação periódicos [05]. Duas vantagens dos sinais de excitação periódicos são : a possibilidade de limitar-se as medições para as frequências de interesse e a duração do tempo de excitação que pode ser escolhida arbitrariamente. Como desvantagem cita-se o fato de se excitar o sistema em regiões próximas à frequência de ressonância, obtendo-se amplitudes de deslocamento elevadas e dificuldades adicionais de obter-se medidas exatas para os ângulos de fase [01].

2.4.2 Excitação Impulsional.

A medida de transitórios é mais usual na caracterização de sistemas no domínio do tempo [05]. A categoria de sistemas cujas propriedades qualitativas estão em consonância com as propriedades mencionadas no item 2.2, pode ser caracterizada pela sua resposta impulsiva a uma excitação, com características aproximadas de um impulso de Dirac, definido por:

$$\mu(t) = c \delta(t) \quad , \quad \delta(t) = 0 \text{ para } t \neq 0 \quad (2.4.2.1)$$

$$, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Aplicando-se o conceito de convolução integral, obtém-se :

$$y(t) = c h(t) \quad (2.4.2.2)$$

Conceitualmente, este sinal é superior ao teste com sinal harmônico a frequências discretas. Sua faixa de frequência vai de $(0 \text{ a } \omega_{\text{máx}})$ e é inversamente proporcional ao intervalo de tempo de duração da aplicação da força.

Deste modo, para se garantir que a potência devido ao impulso excite com energia suficiente os modos de vibração do sistema, pode ser necessário utilizar-se valores elevados para a amplitude da força, podendo-se, deste modo, violar as hipóteses de linearidade do sistema. A Figura (2.1) ilustra o sinal impulsional e seu espectro.

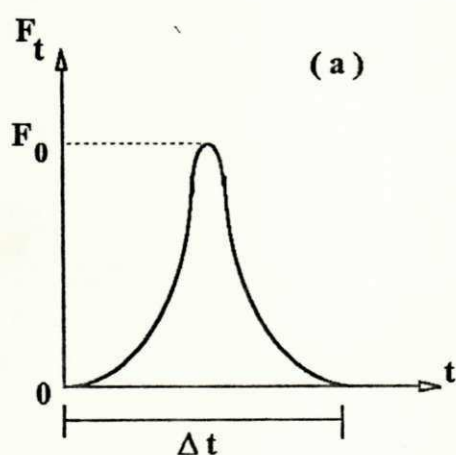


FIG. 2.1.a Sinal impulsional

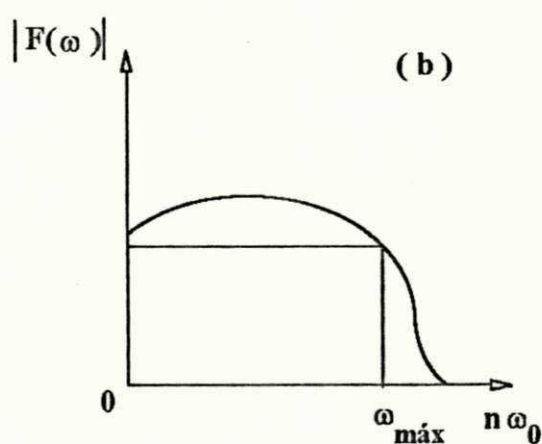


FIG. 2.1.b Espectro

2.4.3 Excitação com Sinal Sintetizado.

Um requisito mínimo exigido de um sinal de excitação é que a dinâmica do processo seja persistentemente excitada durante todo o período de medição. Noutras palavras, significa que o sinal de excitação deve ser suficientemente rico em componentes de frequência, de forma a excitar todos os modos de interesse do sistema [17]. As exigências necessárias para assegurar-se a condição de excitação persistente dos sinais de entrada podem ser vistas nas referências [5,19].

É possível, através dos ângulos de fase das harmônicas que compõem um sinal, gerar um sinal com baixo fator de pico. Schroeder define "fator de pico" como o quociente entre a máxima diferença a picos de amplitude e o seu valor médio quadrático ou eficaz (RMS) [19].

Essencialmente, este sinal pode ser estabelecido como segue: considera-se um sinal periódico $f(t)$, de período T e largura de banda finita [20]

$$f(t) = \sum_{n=1}^n \left(\frac{\bar{P}_k}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos[\theta(t) + \theta_n] \quad (2.4.3.1)$$

onde

$$\theta(t) = n\omega_0 t = \frac{2\pi n}{T_p} t \quad (2.4.3.2)$$

Com relação às expressões (2.4.3.1) e (2.4.3.2), as seguintes grandezas são definidas:

- \bar{P}_k : potência relativa da k -ésima harmônica que compõe o sinal sintetizado, observando-se que $\sum \bar{P}_k = 1$.
- θ_n : ângulo de fase das harmônicas.
- T_p : $T_p = nT$, onde T é o intervalo de tempo de discretização.
- n : número de harmônicas utilizadas na síntese do sinal.

Em meados de 60's, Schroeder [20] contornou o problema de como minimizar a diferença entre o máximo e mínimo picos de amplitude do sinal, uma vez pré-estabelecida a potência relativa contida no sinal. Considerando-se o sinal periódico e modulado em fase como segue,

$$f_p(t) = \cos \theta(t) \quad (2.4.3.3)$$

chega-se à fase instantânea no n -ésimo intervalo de tempo de $f(t)$ dada por

$$\psi(t) = \phi_n + \frac{2\pi n}{T_p} t, \quad t_{n-1} < t < t_n \quad (2.4.3.4)$$

onde

$$t_n = T_p \sum_{i=1}^n \bar{P}_i, n = 1 \dots N \quad (2.4.3.5)$$

Dessa forma, $(t_n - t_{n-1})$ é o intervalo de tempo durante o qual a frequência instantânea é

$$\frac{n}{T_p} = \bar{P}_i$$

onde n é o número de harmônicas que compõem o sinal, e para o caso limite, θ_n , o ângulo da fase entre as harmônicas, assume valor constante.

A partir de algumas manipulações utilizando-se (2.4.3.4) e (2.4.3.5), para o caso limite quando $(n \rightarrow \infty)$ [20], chega-se à expressão (2.4.3.6) com o espectro de potência relativo coincidindo com \bar{P}_i :

$$\phi_n = \phi_1 - 2\pi \sum_{i=1}^n (n-1) \bar{P}_i \quad (2.4.3.6)$$

A expressão (2.4.3.6) permite selecionar os ângulos de fase das harmônicas que compõem o sinal, para um dado espectro de potência, de modo a minimizar o fator de pico, onde ϕ_1 é arbitrado.

Um sinal gerado desta forma com um grande número de componentes harmônicas ($n \rightarrow \infty$), constitui um sinal de banda larga e espectro plano. Em decorrência, este sinal pode ser aplicado na geração de séries temporais de baixa autocorrelação, denominadas sequências binárias de baixa autocorrelação; isto lhes confere características de um ruído branco.

Algumas vantagens de se utilizar este tipo de sinal como fonte de excitação podem ser resumidas como segue:

1. É um sinal com características de ruído branco, cuja faixa de frequência pode ser pré-estabelecida.

2. Possui a vantagem de ser periódico.
3. Pode-se garantir excitação persistente no sistema com distribuição de energia uniforme sobre os modos próprios.
4. Pode ser facilmente gerado em computador digital. Através de conversor digital analógico pode ser implementado em sistemas físicos reais.

As Figuras (2.2) e (2.3) a seguir, ilustram este tipo de sinal obtido no tempo e seu espectro, respectivamente.

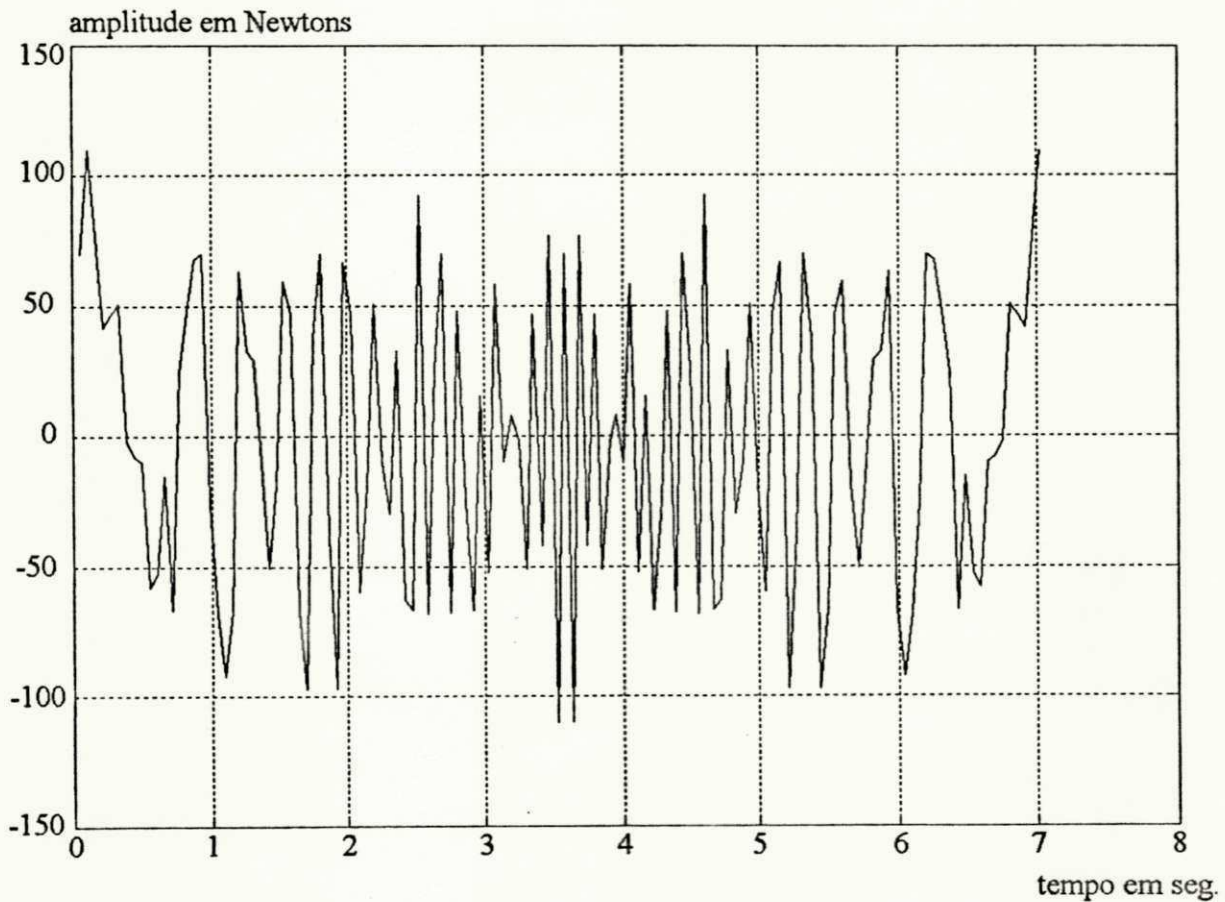


FIG. 2.2 Sinal sintetizado obtido no tempo para 128 harmônicas.

Um caso particular a ser mencionado refere-se a um sinal de espectro plano com ângulos de fase restritos entre 0 e π , onde a expressão (2.4.3.6) se resume, com algumas aproximações, a:

$$\phi_n = \phi_1 - \frac{\pi n^2}{N} \therefore \bar{P}_n = \frac{1}{N}, \text{ com } n = 1, \dots, N \quad (2.4.3.7)$$

Restringindo-se os ângulos de fase entre 0 e π resulta:

$$t_n = \frac{1}{2} T_p \sum_{i=1}^N \bar{P}_i \quad (2.4.3.8)$$

$$\phi_n = \pi \left[\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \bar{P}_i \right] \quad (2.4.3.9)$$

Outros intervalos entre os ângulos de fase das harmônicas podem ser encontrados no trabalho de Schroeder[20].

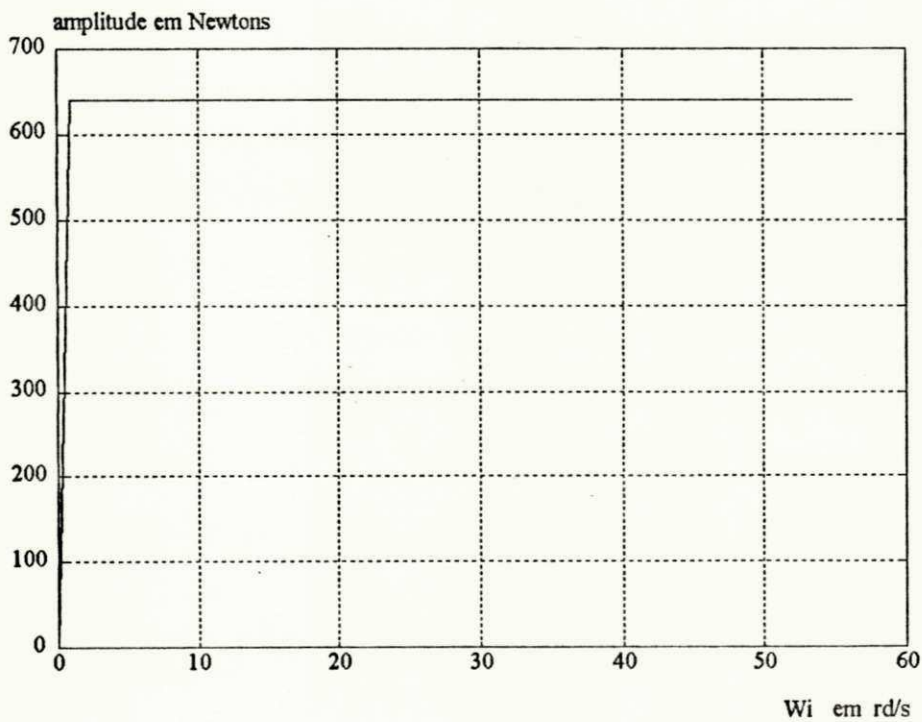


FIG. 2.3 Espectro do sinal sintetizado.

Ao final desta explanação sobre excitação com sinal sintetizado é importante ressaltar que existem outros sinais de excitação disponíveis na literatura. Tais sinais podem ser de natureza determinística (Sequência Binária Pseudo-Randômica (PRBS)) [05,21], e de natureza aleatória. Burrows[19] confrontou resultados de estimação de parâmetros de um mancal hidrodinâmico obtidos para excitações do tipo (SPHS) e do tipo (PRBS).

2.4.4 Excitação com Sinal Randômico.

Sinais deste tipo podem ser obtidos por geradores de ruído. Para os vários algoritmos geradores de ruído existentes na literatura, deve-se verificar a energia contida no sinal pelo cálculo da sua densidade espectral ; isto porque corre-se o risco de se trabalhar com um sinal randômico pobre em energia. Com isso, dependendo das propriedades dinâmicas do sistema, pode não ser possível excitar de forma conveniente todos os seus modos próprios.

São exemplos de fontes de excitação randômica : ruídos brancos gaussianos, ruídos coloridos, sinais harmônicos cujo ângulo de fase é uma variável aleatória, etc..

Ruídos Brancos Gaussianos são processos de média nula, cuja densidade espectral de potência é uma constante positiva (Vide Apêndice C). No domínio dos sinais amostrados, o processo de ruído branco equivalente é denotado por ruído pseudo-branco [09], sendo que, tanto um como outro constitui processos de banda larga em frequência. Os processos de ruído branco contínuos no tempo não constituem exatamente um fenômeno físico e frequentemente são questionados. O mesmo não ocorre com as sequências de ruído branco.

Uma definição de sequência de ruído branco é dada na referência [14]. Neste caso, o intervalo de tempo entre eventos consecutivos, que constituem a sequência, em geral restringe-se a valores finitos.

Entende-se por ruído colorido, processos correlacionados obtidos na saída de um filtro linear, cuja variável exógena é um ruído branco. As características deste processo estão associadas às características intrínsecas do filtro linear, sendo sua densidade espectral de potência uma dada função da frequência.

Em 1981, Treiquer [18], dentre outros aspectos, investigou o uso da Função Decremento Aleatório (FDA) para estimar parâmetros de sistemas mecânicos. Na ocasião foram utilizados ruídos brancos e ruídos coloridos como fontes de perturbação do sistema.

2.5 Teorema da Discretização ou Amostragem

2.5.1 Discretização de Sinais.

O Teorema da Amostragem é melhor descrito no domínio da frequência. Postulado por Shannon [23], pode ser bem posto e bem entendido da seguinte maneira : se a Transformada de Fourier de um sinal contínuo no tempo é zero para valores de ω maiores que um certo ω_0 , isto é :

$$F(\omega) = 0 \quad \text{para } \omega > \omega_0,$$

este sinal pode ser unicamente determinado, a partir de seus valores discretizados ($f(kT)$), se o intervalo de discretização T satisfaz à condição

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2\pi f_0} = \frac{1}{2f_0}$$

Isto significa que a taxa de amostragem deve ser mais rápida, pelo menos duas vezes, que a maior componente em frequência do conteúdo frequencial deste sinal. Dessa forma, garante-se a manutenção da configuração original do sinal. Isto quer dizer, a versão contínua do sinal pode ser recuperada, a partir da versão discretizada, assegurando-se níveis negligíveis de perdas de informação contidas no sinal [22].

Os sinais de uso corrente na prática da investigação científica, caracterizam-se por não apresentarem valores finitos de ω para os quais a Transformada de Fourier se anula. Em face a este problema, surge a necessidade de escolher-se um intervalo de tempo de discretização próximo de zero, proposição esta, na melhor das hipóteses, pouco realística. Neste caso, uma solução adequada para o problema de discretização de sinais no tempo é determinar a banda em frequência do sinal de modo que se possa garantir que 99,00% a 99,99% da energia máxima contida no sinal esteja representada na resolução $(0, \omega_N)$ [23], onde ω_N é a frequência de Nyquist.

Define-se frequência de Nyquist como a componente em frequência de maior magnitude do sinal, estabelecida de modo a obter-se máxima quantidade de energia $(0, \omega_N)$. O valor da frequência de Nyquist influencia diretamente a taxa de amostragem (ω^*) do sinal que pode ser selecionada a partir de frações de um meio a um décimo de π/ω_N , cuja prática tem proporcionado resultados satisfatórios [12,22].

O efeito da perda de informação, devido às taxas de amostragem inadequadas para um dado sinal, é bem ilustrado por Radix[09]. A consequência desse efeito é mostrada utilizando-se uma função discreta obtida a partir de harmônicas contínuas diferentes.

Um fenômeno que surge quando se calcula o espectro de sinais discretos, neste caso, é conhecido por "aliasing". Este fenômeno surge como uma distorção no espectro do sinal discretizado devido à superposição de diferentes partes do espectro original. A leitura do apêndice B deste trabalho proporciona melhor entendimento do que realmente ocorre. Neste sentido mostra-se que o espectro de um

sinal discretizado é periódico e repete-se com a cadência de amostragem. A expressão para a função espectral discretizada toma a seguinte forma [12,23] :

$$F^*(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega^*) \quad (2.5.1.1)$$

onde ω^* é a frequência angular de amostragem.

Cabe destacar que o termo "aliasing" também é conhecido como "folding de frequências", onde a frequência de "folding" é a frequência de Nyquist. Uma maneira de contornar este problema é promover a filtragem do sinal através de filtros passa baixa, antes do processo de discretização. Com isso obtém-se a remoção de componentes em frequência de baixa energia, existentes acima da frequência de Nyquist. Uma explanação sobre uso desses filtros, usualmente denominados " Filtros Pré-Sampling Anti-Aliasing" é dada por Ljung[12]. Vale ressaltar que o uso do termo acima, cuja conotação tem assumido um significado técnico nesta área, quer dizer, "Filtros utilizados antes do processo de discretização para prevenir distorções no espectro de frequências.

2.5.2 Escolha do Intervalo de Discretização ou Amostragem.

Em geral, pode-se mostrar que a qualidade do controle sobre um determinado sistema diminui com a sua discretização [23]. O problema de estimação de parâmetros de sistemas em geral assume um aspecto semelhante, uma vez que são partes interrelacionadas dentro de um mesmo contexto.

Um sistema contínuo proporciona melhores estimativas de seus parâmetros que um sistema discreto. Via de regra, deve-se escolher um intervalo de discretização tão pequeno quanto possível, para que o comportamento do sistema, no espaço entre dois instantes discretos, seja bem representado.

Um aspecto apontado como dos mais importantes no processo de discretização de sistemas é o comportamento dinâmico do sistema a ser discretizado e a influência da discretização sobre este. Entretanto, é possível analisar-se o comportamento dinâmico de sistemas segundo seus parâmetros modais, dentre os quais cita-se os autovalores, cuja abordagem clássica na teoria de sistemas aponta-os como pólos da Função de Transferência do sistema.

As relações existentes entre os pólos da Função de Transferência do sistema contínuo e os pólos da Função de Transferência do sistema discretizado são profundamente estudadas [23]. Com base nesse estudo é possível se estabelecer um limite superior para a cadência de amostragem, acima do qual a dinâmica do sistema pode ser desconfigurada.

A escolha do intervalo de tempo de discretização ou período de amostragem deve ser baseada no comportamento dinâmico do sistema, sendo mais facilmente interpretada através dos pólos da Função de Transferência do Sistema. Chamando-se $p_i = -\rho_i \pm j\omega_i$, o i -ésimo pólo dominante da Função de Transferência do sistema contínuo, com $\rho_i > 0$, temos que, os pólos dominantes da Função de Transferência do sistema discreto relacionam-se com os pólos dominantes do sistema contínuo por [22,23]:

$$\bar{z}_i = e^{p_i T} \quad (2.5.2.1)$$

Demonstra-se [23], que a resposta impulsional é representada de maneira conveniente nos instantes de amostragem, quando a parte imaginária dos pólos complexos conjugados (ω_i) é igual ou inferior a $\pi/4T$. Esta relação corresponde a uma região limite de localização do pólo \bar{z}_i no plano complexo, definida por um setor de aproximadamente 45° .

Com relação à parte real do pólo ($-\rho_i$), deseja-se que a resposta impulsional represente de maneira conveniente um comportamento exponencial, condicionando-se o produto $\rho_i T$ ao limite

máximo de 0,5. Esta condição, associada à condição de estabilidade ou convergência da Transformada Z da Função de Transferência Discreta do sistema, restringem o valor da parte real dos pólos dominantes à região compreendida entre as circunferências de raio igual à exponencial de (-0,5) e 1, ou seja 0,6 e 1 respectivamente, observadas no plano complexo.

Resumindo-se as duas restrições acima em um só critério de busca, obtém-se para o limite superior do intervalo de discretização [23] :

$$T \leq \frac{\pi}{4\omega_i} \quad \text{e} \quad T \leq \frac{1}{2\rho_i} = \frac{\tau_c}{2} \quad (2.5.2.2)$$

onde introduziu-se $\tau_c = 1/\rho_i$, definido como "constante de tempo" do sistema, que está associada ao tempo de decaimento da resposta livre do sistema. Um esboço gráfico do plano complexo e do setor considerado é mostrado na Figura (2.4).

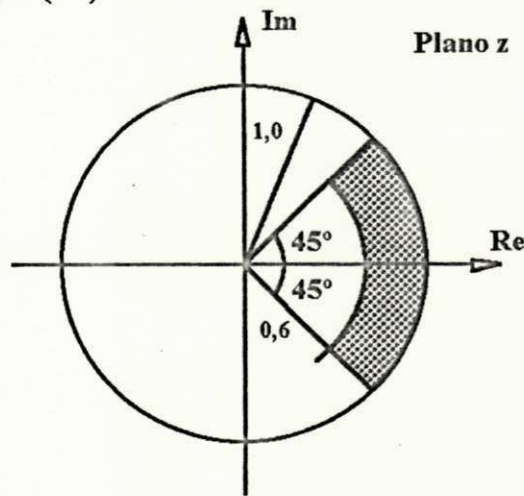


Fig. 2.4 - Domínio dos pólos dominantes para o sistema discreto.

Verifica-se no esboço gráfico acima, Figura (2.4), uma região destacada, onde devem estar compreendidos os pólos dominantes do sistema discreto, de forma a serem obedecidas as duas condições limites para intervalo de tempo de discretização.

Até agora nos reportamos à determinação de um limite superior para o intervalo de tempo de discretização, acima do qual a dinâmica do sistema seria descaracterizada, ou seja, geraríamos dados na condição de subsistema de um sistema maior e portanto mais rico em informações. Por outro lado, construir um modelo discretizado a intervalos de tempo de discretização demasiadamente menores que o limite superior, estabelecido desta forma, seria um procedimento numericamente sensível. Esta sensibilidade está relacionada com a introdução de ruído que promove-se quando sistemas são discretizados a altas taxas de discretização. Neste caso, uma boa escolha para o intervalo de tempo de discretização seria um meio termo entre a introdução de ruído e a preservação da informação em torno da dinâmica do sistema. Assim ficam estabelecidos os limites inferior e superior do intervalo de tempo para o problema de discretização.

Se o modelo é usado para aplicações de controle, outros aspectos eventualmente seriam envolvidos, contudo, a grosso modo, tanto na obtenção de modelos como nas aplicações de controle, os critérios basicamente podem ser considerados os mesmos [12].

Considerações sobre variância podem ser levantadas, visto que a variância de um parâmetro estimado, baseada num conjunto de dados, dependerá da informação média por intervalo discreto de tempo. É possível mostrar que a variância dos parâmetros cresce quando o intervalo de discretização aumenta consideravelmente [12]; este é o efeito da perda de informação. Esta perda de informação também cresce com a redução excessiva do intervalo de tempo de discretização, como um efeito da introdução de ruído, observadas nestes casos [12]. De maneira quantitativa é possível observar este fenômeno fazendo-se $T = 10 \tau_c$; cálculos revelaram que a variância, neste caso, pode aumentar até 10^5 vezes, enquanto que para $T = 0,1 \tau_c$ a variância pode cair para a décima parte [12]. Portanto, é mais prejudicial o uso de grandes valores de T [12].

Sumarizando-se estes conceitos, assegura-se que a escolha ótima do intervalo de tempo de discretização está em regiões próximas da constante de tempo do sistema, e no entanto, estes aspectos

apontam para uma frequência de amostragem de cerca de dez vezes a banda passante do sistema, constituindo, a priori, uma boa escolha na maioria dos casos [12].

2.6 Propriedades dos Diversos Estimadores

2.6.1 Estimador por Mínimos Quadrados.

O método dos mínimos quadrados, na estimação de parâmetros de sistemas lineares, é sempre o resultado da formulação matricial do problema de mínimos quadrados na forma:

$$A\phi = X \quad (2.6.1.1)$$

onde, em geral

X = vetor ou matriz dos valores medidos

A = matriz retangular

ϕ = vetor ou matriz dos parâmetros a estimar

O valor medido do vetor ou matriz X , pode ser dado por

$$X = A\phi + \epsilon \quad (2.6.1.2)$$

O princípio dos mínimos quadrados estabelece que os parâmetros a serem estimados podem ser obtidos pela minimização de uma função de erro ou perdas, que é a soma dos quadrados dos erros em cada medição, em relação aos valores calculados a partir dos parâmetros usados na equação (2.6.1.1).

A soma dos quadrados dos erros pode ser escrita por:

$$E = \varepsilon^T \varepsilon = (X - A\phi)^T (X - A\phi) \quad (2.6.1.3)$$

Fazendo-se o produto em (2.6.1.3) e considerando-se a igualdade escalar $X^T A \phi = A^T \phi^T X$ obtém-se:

$$E = X^T X - 2\phi^T A^T X + \phi^T A^T A \phi \quad (2.6.1.4)$$

onde $()^T$ denota a transposta de uma matriz.

A solução que minimiza o erro médio quadrático é:

$$\frac{\partial E}{\partial \phi} = 0 \therefore A^T A \hat{\phi} = A^T X \quad (2.6.1.5)$$

Como $A^T A$ é uma matriz quadrada, pode-se pré-multiplicar (2.6.1.5) por $(A^T A)^{-1}$, resultando:

$$\hat{\phi}_{MQ} = (A^T A)^{-1} A^T X \quad (2.6.1.6)$$

Assim, $\hat{\phi}_{MQ}$ constitui o estimador por mínimos quadrados dos parâmetros desconhecidos de ϕ , considerando o produto matricial $A^T A$ não-singular, ou seja, linhas ou colunas linearmente independentes (rank igual à ordem da matriz).

Os parâmetros desconhecidos de ϕ podem ser encontrados através das expressões vistas anteriormente, por transformações matriciais, como por exemplo a expressão (2.6.1.1) que pode ser

resolvida de forma direta usando-se o método de Householder [24,31], ou a expressão (2.6.1.5) pelo método Gauss pivotado.

No entanto, a equação (2.6.1.6) pode ser resolvida diretamente pelo produto matricial usando a definição de pseudo-inversa, caso o produto $A^T A$ resulte numa matriz bem condicionada. No caso em que o produto matricial $A^T A$ resulta numa matriz mal condicionada, testes comprovaram que o método de Householder, neste caso, é bem superior à definição de pseudo-inversa [01].

No caso particular do produto $A^T A$ resultar numa matriz singular, possivelmente por problemas de ordem numérica, é possível solucionar o sistema (2.6.1.1) pela decomposição em valores singulares de $(A^T A)^{-1} A^T$, obtendo-se :

$$\hat{\phi} = V[\text{diag}(\sigma_i)]U^T X \quad (2.6.1.7)$$

constituindo, portanto, o estimador por mínimos quadrados dos parâmetros de ϕ .

Os termos que integram a expressão (2.6.1.7) são:

V = matriz dos autovetores de $A^T A$

U = matriz dos autovalores associados aos autovetores de $A^T A$ [$\text{diag}(\sigma_i)$] = matriz dos valores singulares de $A^T A$ onde os σ_i são obtidos através da raiz quadrada dos seus autovalores, dado que,

$$\sigma_i = \frac{1}{\lambda_i}, \lambda_i > 0$$

$$\sigma_i = 0, \lambda_i = 0$$

X = matriz dos valores de entrada

onde, $(A^T A)^{-1} A^T = V[\text{diag}(\sigma_i)] U^T = A^{-1}$

Da equação (2.6.1.1) pode-se deduzir as equações para a estimativa da variância dos parâmetros, bem como a covariância entre os parâmetros. Neste trabalho considerou-se que o modelo apresentado retrata exatamente o sistema físico real, muito embora, esta suposição não represente uma situação realística. Neste caso, pressupõe-se a existência de erros nas medidas por falta de ajuste dos dados, cujas origens podem ser classificadas como "erros aleatórios" e "erros sistemáticos" (BIAS) [43].

Os erros aleatórios são essencialmente devidos a ruídos em transdutores de deslocamento e velocidade, falta de precisão numérica, ruídos que não são detectados na entrada, mas que passam pelo sistema e contribuem na saída e não-linearidade do sistema. Os erros de "BIAS" tem como origens primárias principais, ruídos nas saídas não correlativos com a entrada, ruídos na entrada que não passam pelo sistema, ruídos correlativos com as entradas, mas que não são detectados na entrada e não-linearidade paramétrica. O conhecimento prévio, se possível, da origem destes e de outros erros que eventualmente possam surgir, pode assegurar, dentro de certos limites, uma estimativa razoável para os parâmetros do sistema.

Nestas condições, a equação (2.6.1.1) pode ser colocada na forma

$$A\phi = X + \text{erros repetida} \quad (2.6.1.2)$$

onde os erros no vetor de entrada são considerados de média nula e variância constante. A variância do vetor de entrada pode ser colocada na forma

$$\text{Var}[X] = \alpha^2 I \quad (2.6.1.8)$$

onde : α = medida escalar
 I = matriz identidade

Como não é possível obter-se o valor real de α , estabelece-se um valor estimado levando em consideração todas as grandezas medidas para o sistema.

Se as saídas e/ou entradas estiverem livres de ruído, o valor estimado para os parâmetros do sistema, por mínimos quadrados, da equação (2.6.1.2) é:

$$\hat{\phi} = (A^T A)^{-1} A^T X$$

cujo valor esperado destes parâmetros é:

$$E[\hat{\phi}] = E\left[(A^T A)^{-1} A^T A\right]$$

Admitindo-se que os termos da matriz que contém as informações de saída e entrada são constantes, pode-se chegar facilmente a

$$E[\hat{\phi}] = \phi \quad (2.6.1.9)$$

o que dá a indicação de estimação exata para os parâmetros do sistema.

Os resultados da equação (2.6.1.9) dependerão essencialmente da história de como as grandezas medidas são adquiridas. Se as grandezas medidas retratam exatamente os dados do modelo físico, então, certamente, ter-se-á uma estimação exata dos parâmetros do sistema.

A situação mais realística, no cálculo da matriz de covariância dos parâmetros desconhecidos de ϕ , é considerar-se o erro que se comete em cada medição que é processada.

Considerando-se novamente a equação (2.6.1.6) e admitindo-se que o erro presente em cada medição possa ser expresso por (2.6.1.2), tem-se:

$$\hat{\phi}_{MQ} = (A^T A)^{-1} A^T (\phi A + \varepsilon) \quad (2.6.1.10)$$

onde :

$$E[\hat{\phi}_{MQ}] = \phi + A_{pi} \varepsilon \quad (2.6.1.11)$$

com

$$A_{pi} = (A^T A)^{-1} A^T$$

A covariância do estimador $\hat{\phi}$ pode ser dada por:

$$COV[\hat{\phi}_{MQ}] = E\left[\left(\hat{\phi}_{MQ} - E[\hat{\phi}]\right)\left(\hat{\phi}_{MQ} - E[\hat{\phi}]\right)^T\right] \quad (2.6.1.12)$$

Substituindo-se a equação (2.6.1.11) em (2.6.1.12) obtém-se :

$$COV[\hat{\phi}_{MQ}] = E\left[\left(A_{pi} \varepsilon \varepsilon^T\right) A_{pi}^T\right]$$

donde, para a matriz A_{pi} , formada por termos constantes, pode-se escrever:

$$COV[\hat{\phi}_{MQ}] = A_{pi} E[\varepsilon \varepsilon^T] A_{pi}^T \quad (2.6.1.13)$$

Definindo-se o valor esperado do quadrado do erro no vetor de entrada por $\sigma^2 I$, que é uma grandeza escalar, e substituindo-se o valor de A_{pi} em (2.6.1.13) obtém-se:

$$\text{COV}[\hat{\phi}_{MQ}] = [A^T A]^{-1} A^T \sigma^2 A [A^T A] \quad (2.6.1.14)$$

e a partir desta expressão σ^2 pode ser estimado.

Para estimar-se σ^2 pode-se partir do pressuposto de que o valor médio do erro seja um vetor nulo. Logo, a variância do erro pode ser calculada a partir do número total de medições, subtraído do número de parâmetros estimados [01,11,41]. Portanto a soma quadrática do erro pode ser dada pela equação

$$\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^T = (X - A\hat{\phi})(X - A\hat{\phi}) \quad (2.6.1.15)$$

que, levando em consideração o fato do produto $X^T A\phi = \phi^T A^T X = \text{CONSTANTE}$, através da expressão (2.6.1.6) pode-se chegar a

$$\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^T = X^T X - \hat{\phi}_{MQ} A^T X \quad (2.6.1.16)$$

resultando, através da aplicação do princípio do valor esperado, em

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{E[X^T X - \hat{\phi}_{MQ} A^T X]}{(N_i - N_p)} \quad (2.6.1.17)$$

onde : N_i = n° de medições
 N_p = n° de parâmetros em ϕ

Através da expressão (2.6.1.14), a covariância dos parâmetros estimados pode ser obtida:

$$\text{COV}[\hat{\phi}_{\text{MQ}}] = [A^T A]^{-1} \hat{\sigma}^2 \quad (2.6.1.18)$$

A observação cuidadosa da expressão (2.6.1.10) permite concluir que a variância de cada parâmetro estimado é o simples resultado dos elementos da diagonal principal de $[A^T A]^{-1}$, multiplicado pela grandeza estimada σ^2 . O desvio padrão de cada parâmetro é obtido a partir da raiz quadrada da sua respectiva variância.

A variância dos parâmetros estimados fornece uma indicação de como os dados experimentais se ajustam ao modelo matemático idealizado. Um modelo exato de um sistema físico, com dados livres de ruído, indicam variância e covariância zero na estimativa dos parâmetros.

Na explanação anterior, mostrou-se que o estimador por mínimos quadrados dos parâmetros desconhecidos do sistema livre de ruídos era não-polarizado. O problema realmente surge quando aparecem alguns tipos de erros como os já mencionados anteriormente.

Do ponto de vista estatístico, os erros de "bias" são erros sistemáticos cuja magnitude se mantém aproximadamente constante, e independem do número de medições efetuadas. Ao contrário, os erros aleatórios apresentam uma certa dispersão em torno do valor real do parâmetro a ser estimado, por variar com o número de medições efetuadas. Os erros de bias podem ser definidos da seguinte maneira [43]:

$$\Delta\phi = E[\hat{\phi}_{\text{MQ}}] - \phi \quad (2.6.1.19)$$

sendo a estimação não-biasada quando $\Delta\phi = 0$.

E possível mostrar [25] que quando ruídos estão presentes em pontos de entrada e/ou saída do sistema, os erros de "bias" nunca desaparecem, sendo o estimador por mínimos quadrados, nestas circunstâncias, sempre polarizado. Como os coeficientes a serem estimados dependem da história de como os sinais são obtidos, não se pode esperar uma estimação consistente.

2.6.2. Estimador das Variáveis Instrumentais

Mostrou-se no tópico anterior que o estimador por mínimos quadrados (MQ),

$$\hat{\phi}_{MQ} = (A^T A)^{-1} A^T X \quad (2.5.1.6)$$

repetida

era "biasado" e não consistente, quando as variáveis dependentes, entradas e/ou saídas, contidas na matriz A estavam poluídas com ruído. Aqui procura-se utilizar o método das variáveis instrumentais (VI) como forma alternativa de se eliminar ou reduzir o "bias" quando ruídos estão presentes nos pontos de entrada e/ou saída do sistema.

O método foi inicialmente aplicado nos problemas clássicos de estimação de parâmetros por Joseph, Lewis e Tou [26]. São usadas para a aplicação do método, a caracterização de sistemas no domínio do tempo, através de equações a diferenças, estendendo-as ao problema de estimação recursiva, bem como a caracterização de sistemas no domínio da frequência, ressaltando que a idéia básica deste algoritmo é a mesma, tanto para a abordagem no domínio do tempo, como para a abordagem no domínio da frequência.

Proposto nos anos 60's, o Método das Variáveis Instrumentais para estimação de parâmetros tinha sido formulado apenas no domínio da frequência por Fritzen [25]. A discussão sobre os fundamentos do método pode ser encontrada na referência [01]. Portanto, neste trabalho

apresentar-se-á apenas um resumo das propriedades estatísticas deste estimador e montar-se-á o procedimento seqüencial para a aplicação do método na estimação de parâmetros, sem contudo nos preocupar em apresentar todo o formalismo matemático que existe por traz do método.

O objetivo deste método é construir uma seqüência de medições descorrelacionadas do ruído, através da construção de uma matriz denotada por "MATRIZ DAS VARIÁVEIS INSTRUMENTAIS - W_{VI} " obtidas a partir de um modelo auxiliar. No caso particular de resposta forçada, diferentes matrizes das variáveis instrumentais podem ser utilizadas [27]. Cita-se por exemplo, matrizes geradas através de filtros de parâmetros constantes, matrizes geradas por filtros adaptativos, a partir da solução recursiva do problema obtida em tempo real (ON-LINE) ou não.

Uma outra maneira de gerar-se a matriz das variáveis instrumentais, e que utilizou-se neste trabalho, utiliza uma rotina iterativa em atraso (OFF-LINE) para gerar os parâmetros do modelo auxiliar. Estes parâmetros são selecionados considerando-se alguma base de informação a priori sobre a dinâmica do sistema. Não obstante, podem ser utilizadas estimativas polarizadas que posteriormente são atualizadas pelo processo iterativo [15]

A matriz das variáveis instrumentais, obtida dessa forma, reúne as seguintes propriedades estatísticas:

$$I - p \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{L} W_{VI}^T \varepsilon \right) = 0$$

$$II - p \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{L} W_{VI}^T A \right) \text{ é não singular}$$

onde "plim" denota o limite de probabilidade, "L" denota o número de observações e "A" é a matriz das variáveis dependentes, saídas e/ou entradas do sistema a ser considerado. Estas duas propriedades asseguram a consistência da estimação, o que significa

$$\text{plim}(\hat{\phi}_{VI}) = \phi$$

e, portanto, a consistência do estimador é essencialmente garantida. Deste modo, quando o número de observações é suficientemente grande, tem-se que:

$$\lim E(\hat{\phi}_{VI}) = \phi$$

Na abordagem sobre o estimador por mínimos quadrados dos parâmetros desconhecidos de ϕ , vimos que a correlação das variáveis dependentes na matriz "A" com o erro " ε ", era responsável pelos erros de "bias" definidos pela equação (2.6.1.19). Este efeito agora é evitado devido a propriedade (I), onde a escolha da matriz das variáveis instrumentais " W_{VI} " é feita de forma a não se ter nenhuma correlação com o erro " ε ".

Colocando-se a equação (2.6.1.2) na forma

$$\varepsilon = X - A\phi$$

e pré-multiplicando-se por " W_{VI} ", fica

$$W_{VI}^T \varepsilon = W_{VI}^T X - W_{VI}^T A\phi \quad (2.6.2.1)$$

onde, fazendo-se uso da propriedade (I), quando o número de observações tende ao infinito, a equação (2.6.2.1) fica:

$$\hat{\phi}_{VI} = [W_{VI}^T A]^{-1} W_{VI}^T X \quad (2.6.2.3)$$

permitindo-se estimar os parâmetros desconhecidos de ϕ_{VI} .

Neste ponto, pode-se notar que a equação (2.6.2.2) possui a mesma estrutura da equação (2.6.1.6). A diferença reside na colocação da matriz " W_{VI} ", ao invés da matriz " A ", e ao fato do produto matricial $[W_{VI}^T A]$ não ser mais simétrico.

De acordo com o procedimento proposto por Young[15] para a escolha da matriz das variáveis instrumentais " W_{VI} ", considera-se que as medições das variáveis dependentes estejam livres de ruído, o que constitui um procedimento aproximado. Por conseguinte, um modelo auxiliar adicional é criado para gerar variáveis auxiliares como saídas. Estas variáveis auxiliares compõem a matriz " W_{VI} " através do modelo auxiliar e dos dados contidos na matriz " A ". Deste modelo auxiliar se produzirá instrumentos livres de ruído, o que do ponto de vista estatístico, significa máxima correlação das variáveis instrumentais, através do modelo auxiliar, com os sinais livres de ruído.

Na prática, o seguinte procedimento iterativo é adotado (Ver Figura (2.5)):

1. Faz-se uma estimação por mínimos quadrados generalizados para a obtenção dos parâmetros que vão constituir o modelo auxiliar.
2. Calcula-se as variáveis instrumentais a partir do modelo auxiliar.
3. Gera-se as matrizes $(W_{VI}^T A)$ e $(W_{VI}^T X)$ para se estimar ϕ_{VI} .
4. Atualiza-se o modelo auxiliar, através do modelo estimado, fazendo-se: $\hat{\phi}_{aux} = \hat{\phi}_{VI}$
5. Compara-se os parâmetros estimados $\hat{\phi}_{VI}$ com aqueles do último passo. Caso haja convergência para valores estáveis, pára-se o processo; caso contrário, volta-se para o item (2).

2.6.3 Estimador Estocástico de KALMAN

2.6.3.1 Histórico

O filtro de Kalman! Deste termo surgem muitas e variadas respostas entre engenheiros, cientistas e administradores que o escutam. Neste particular, verdadeiramente, ele representa um sistema prático de procedimentos que se pode usar para se processar dados numéricos e se obter estimativas de parâmetros e variáveis cujos valores são incertos.

Não é provavelmente um exagero afirmar que o filtro de Kalman representa o mais amplamente aplicado e demonstrável resultado usual, que surge do conceito de variáveis de estado, na moderna teoria do controle. A aplicação e evolução do corpo do algoritmo básico, que corretamente pode ser dito representar o "FILTRO DE KALMAN", começou, notoriamente, logo após a publicação original do procedimento computacional recursivo proposto por Kalman[02] e outros. As primeiras aplicações foram estimuladas pelo salto para o espaço no começo dos anos sessenta. A primeira aplicação proposta desta aproximação revolucionária foi, para muitos, feita pela NASA e publicada em 1962 [46]. Em poucos anos após o surgimento dessa publicação, houve uma agitação substancial desta atividade, primeiramente na indústria aeroespacial, que propiciou a base para o Filtro de Kalman, agora amplamente aplicado.

Examinando-se a referência IEEE[28], encontra-se um vasto quadro de aplicações desta técnica avançada de estimação para variáveis de estado de sistemas dinâmicos.

2.6.3.2 Filtro de Kalman - Aspectos Teóricos.

O método de Kalman, versão moderna e probabilística do critério da minimização média quadrática do erro de estimação, aplica-se essencialmente aos sistemas lineares, proporcionando, de forma adequada, a um tratamento dentro do conceito de estado de um sistema. O estado de um sistema é a quantidade mínima de informação requerida de um sistema num tempo inicial t_0 , de forma que o seu comportamento futuro possa ser determinado, sem referência à história do sistema no tempo $t < t_0$. A "informação requerida", mencionada antes, é obtida por meio das variáveis do sistema, denotadas por "variáveis de estado do sistema".

Algumas vezes é conveniente considerar o comportamento dinâmico do sistema como o movimento da ponta do vetor de estado no espaço n-dimensional. Este espaço é gerado utilizando-se as variáveis de estado do sistema como coordenadas do movimento, e este movimento denomina-se trajetória do sistema no espaço de estados [14].

Na tentativa de estimar o valor mais provável das variáveis de estado, baseado nas medições contaminadas com ruído e portanto, de valor teórico incerto, torna-se necessário, dentre outros aspectos, formular um critério adequado de minimização dos desvios dos valores destas medições com relação aos valores teóricos.

Uma forma bastante razoável é a da média quadrática que consiste em minimizar uma forma quadrática, representante do desvio entre a solução obtida e a solução ideal. A escolha desta forma de minimização como índice de qualidade pode parecer, a priori, bastante arbitrária. Não obstante, pode-se decidir por minimizar a soma dos módulos dos desvios, ou a terceira ou quarta potência desses módulos. Entretanto, a minimização de uma forma quadrática conduz, frequentemente, a um sistema de equações lineares de natureza relativamente simples, pelo menos num plano teórico.

A soma dos quadrados são frequentemente objeto de certas interpretações em diferentes domínios. Citam-se por exemplo: em física, as energias são expressas por somas quadráticas; da mesma forma, os momentos de inércia em mecânica e as variâncias nos cálculos de probabilidades [09].

Diante deste quadro, a aplicação do método da média quadrática aos problemas de filtragem, pode ser colocada em diferentes contextos. Admitindo-se que o sinal e o ruído tenham formas analíticas bem definidas, prevalece a aplicação clássica deste método. No caso de se admitir certas propriedades estatísticas relativas ao sinal e ao ruído, recai-se no domínio do "Método Probabilístico de Wiener" [5,9,14], ao passo que, admitindo-se, por sua vez, certas propriedades analíticas do sinal e certas propriedades estatísticas do ruído, adentra-se nos domínios do método de Kalman, versão moderna e probabilística do critério da minimização média quadrática.

O método da média quadrática ou minimização quadrática foi inventado pelo jovem revolucionário da época Karl Friedrich Gauss que, aos seus dezoito anos, fez o primeiro uso do método em 1795. Fato este que, por não ter sido publicado, gerou uma polémica em 1806 com a publicação de Legendre que reivindicava a autoria do método através do seu livro "NOUVELLES MÉTHODES POUR LA DETERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES" (Novos Métodos para a Determinação das Órbitas dos Comêtas).

Alguns aspectos da teoria de Gauss, cujo desenvolvimento eficiente propiciou o surgimento da teoria de Kalman [29], referem-se por exemplo, ao número mínimo de observações requeridas para a determinação das quantidades desconhecidas. Assim percebe-se que, um número maior que este número mínimo é uma necessidade redundante devido à presença de erro nas medições.

Outros aspectos virtualmente inerentes à aplicação do filtro de Kalman dizem respeito ao conhecimento aproximado que deve-se ter sobre a relação que envolve os dados medidos e seus valores

reais, bem como a configuração exata da equação que descreve o movimento, chamada modelo matemático do sistema.

2.6.3.3 Desenvolvimento do Algoritmo de Kalman

A utilização do filtro de Kalman na investigação de sistemas físicos, sugere a descrição matemática dos sistemas por meio de equações diferenciais lineares. Salienta-se, neste caso, o fato do próprio filtro ser um conjunto de equações lineares. A descrição matemática de sistemas pode apresentar-se na versão contínua no tempo ou na versão a intervalos discretos de tempo (discretizada ou digitalizada). Nesta última, a descrição é dita por equações lineares a diferenças. A escolha de uma ou outra versão é função das circunstâncias em que encontra-se envolvida a análise, sendo que, com o avanço dos computadores digitais, a prática em utilizar-se a versão digitalizada tornou-se imprescindível.

Diante da complexidade de determinados sistemas, nas mais variadas áreas do conhecimento científico, bem como do grande número de operações desencadeadas durante a análise do seu comportamento dinâmico, a exploração do filtro implica na utilização de um computador digital, principalmente pela rapidez e precisão nos cálculos. Acrescenta-se ainda que a teoria do filtro é mais facilmente estabelecida na forma digital. Contudo, é importante reconhecer que a versão contínua do filtro de Kalman, sob determinados aspectos, simplifica a análise no plano teórico.

Neste trabalho será utilizada a configuração discreta do Filtro de Kalman, natural para implementação em computador digital, além do que, esta descreve mais apropriadamente numa situação real, onde as medições são efetuadas a intervalos discretos de tempo. Com este propósito, considera-se um sistema dinâmico cujo estado seja descrito por um vetor de equações lineares a diferenças na forma [30] :

$$X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + B_{k,k-1} \mu_{k-1} + R_{k-1} \quad (2.6.3.3.1)$$

onde B é a matriz de distribuição ($1 \times p$) dimensional, para sistemas com uma única entrada; p é igual à dimensão do estado do sistema e $X_k = X(t=kT) = X^*(t_k)$, o vetor de estado do sistema que obedece ao intervalo $t_0 < t_1 < t < \dots < t_N$, com os t_i não necessariamente equidistantes e $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$.

A versão contínua deste modelo pode ser dada por [09]:

$$X(t) = \Phi_{t,t-1}X(t-1) + \int_{t-1}^t \Phi_{t,\xi}F(\xi) d\xi + \int_{t-1}^t \Phi_{t,\xi}r(\xi) d\xi \quad (2.6.3.3.2)$$

que constitui a solução de um sistema de estado ou de uma E.D.O de primeira-ordem do tipo:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B\mu(t) + R(t) \quad (2.6.3.3.3)$$

- onde:
- $X(t)$: matriz de estados do sistema em t
 - A : matriz que traduz a dinâmica do sistema
 - $\mu(t)$: excitação conhecida
 - B : matriz de distribuição
 - $R(t)$: matriz de ruídos do sistema

Em (2.6.3.3.1), R_{k-1} é uma sequência randômica com propriedades estatísticas conhecidas, descritas por:

$$E[R_k] = 0 \quad , \text{ para todo } k$$

$$E[R_k R_k^T] = Q_k$$

A matriz Q_k assume-se ser definida não-negativa, entretanto, é possível se ter $R_k \equiv 0$ [30].

A matriz $\Phi_{t, t-1}$ é a matriz de transição de estado, cujas propriedades são dadas por Elbert[14].

O estado inicial X_0 é considerado ser um vetor de variáveis aleatórias com estatísticas conhecidas,

$$E[X_0] = 0 \quad E[X_0 X_0^T] = M_0$$

$$e E[R_k X_0^T] = 0 \text{ para todo } k.$$

Supõe-se que, a cada intervalo discreto de tempo t_k , existem m medidas disponíveis Z'_k , linearmente relacionadas com o estado e encontram-se poluídas com ruído aditivo na forma:

$$Z'_k = H_k X_k + V_k \quad (2.6.3.3.4)$$

H_k é a matriz de observação ($2 \times p$) dimensional onde o numeral "2" indica o número de pontos de medição ou saída do sistema e "p" a dimensão do vetor de estado do sistema. O vetor V_k é uma sequência randômica aditiva com estatísticas conhecidas, assumindo-se serem:

$$E[V_k] = 0 \text{ para todo } k$$

$$E[V_k V_k^T] = S_k$$

A matriz S_k é assumido ser definida não-negativa, isto é para $S_k \neq 0$ sua forma quadrática é sempre maior ou igual a zero.

Assume-se também, que não há correlação entre o processo randômico V_k e o ruído de estado (R_k), nem entre V_k e o estado inicial. Considera-se ainda R_k e V_k seqüências de ruído branco. Então:

$$E[V_k R_k^T] = 0 \text{ para todo } k$$

$$E[V_k X_0^T] = 0 \text{ para todo } k.$$

Estas restrições constituem uma base para o estabelecimento da teoria de Gauss-Kalman [29] que pressupõe, dado o modelo (2.6.3.3.1), a determinação de uma estimativa $\hat{X}_k(t_k)$ como combinação linear de uma estimativa $\hat{X}_{k-1}(t_{k-1})$ e uma medição $Z'_k(t_k)$. Esta estimativa deve ser a melhor no sentido de que o valor esperado do desvio médio quadrático seja mínimo. Assim \hat{X}_k é escolhido de forma que

$$E\left[\left(\hat{X}_k - X_k\right)\left(\hat{X}_k - X_k\right)^T\right] \quad (2.6.3.3.5)$$

seja mínimo, isto é, tenda para zero.

Considerando-se o modelo (2.6.3.3.1), onde o termo μ_{k-1} é uma fonte de perturbação conhecida que age no intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, pode-se estabelecer uma estimativa aproximada:

$$\hat{X}'_k = \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} + \mu_{k-1} \quad (2.6.3.3.6)$$

O problema específico que surge é encontrar a melhor estimativa de X_k , dadas as medições $Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{k-1}$ de forma que a condição em (2.6.3.3.5) seja obedecida.

Uma solução para este problema é colocada sob a forma de "lemma" e estabelece a seguinte [09]:

$$\hat{X} = E[X/Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_q] \quad (2.6.3.3.7)$$

Esta estimativa pode ser obtida através da minimização da integral

$$\int (\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T P(X/Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_q) dx$$

para assegurar que o desvio médio quadrático seja mínimo [30], expresso por (2.6.3.3.5).

Desenvolvendo-se (2.6.3.3.7) obtém-se:

$$\hat{X}' = E[X/Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_q] \quad \text{onde } q = k - 1$$

$$\hat{X}'_k = E\left[\left(\Phi_{k,k-1} X_{k-1} + \mu_{k-1} + R_{k-1}\right)/Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{k-1}\right] \quad (2.6.3.3.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}'_k &= \Phi_{k,k-1} E[X_{k-1}/Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{k-1}] + E[\mu_{k-1}/Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{k-1}] + \\ &+ E[R_{k-1}/Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{k-1}] \end{aligned}$$

A primeira expressão em (2.6.3.3.8) é uma estimativa para o valor esperado de X_{k-1} da qual obtém-se:

$$E[X_{k-1}/Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{k-1}] = \hat{X}'_{k-1} E[X_{k-1}/Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{k-1}] = \hat{X}'_{k-1}$$

Da mesma forma, para o segundo e terceiro valores esperados na mesma expressão, ter-se-á respectivamente:

$$E\left[\mu_{k-1} / Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{k-1}\right] = \mu_{k-1}$$

e

$$E\left[R_{k-1} / Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{k-1}\right] = E[R_{k-1}] = 0$$

visto que, por hipótese, o ruído (R_{k-1}) é independente do estado e das medições, e como consequência seu valor esperado, neste caso, é zero. Desta forma, a estimação aproximada expressa por (2.6.3.3.6) demonstra ser razoável.

Assumindo-se agora que existe uma medição Z'_k disponível em t_k , esta medição pode ser usada para modificar a estimativa \hat{X}_k em (2.6.3.3.6). Tomando-se por base (2.6.3.3.4), espera-se que o valor de Z'_k seja $H_k \hat{X}'_k$. Um eventual erro na estimativa \hat{X}'_k , produz um desvio no valor esperado desta medição de :

$$\varepsilon'_k = Z'_k - H_k \hat{X}'_k \quad (2.6.3.3.9)$$

De acordo com a definição do problema, a estimativa é uma função linear das medições a posteriori [09]. Define-se assim, uma matriz \bar{K}_k , de tal forma, que a estimativa de X seja dada por:

$$\hat{X}_k = \hat{X}'_k + \bar{K}_k (Z_k - H_k \hat{X}'_k) \quad (2.6.3.3.10)$$

onde denota-se \bar{K}_k como sendo a "matriz ganho de Kalman".

Definindo-se ε_k como o desvio na estimativa do estado no tempo $t = t_k$, obtem-se:

$$\varepsilon_k = \hat{X}_k - X_k$$

onde substituindo-se as respectivas expressões para \hat{X}_k e X_k resulta:

$$\varepsilon_k = \left[\Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} + \mu_{k-1} + \bar{K}_k (Z'_k - H_k \hat{X}'_k) \right] - \Phi_{k,k-1} X_{k-1} - \mu_{k-1} - R_{k-1}$$

$$\varepsilon_k = \Phi_{k,k-1} \varepsilon_{k-1} - \bar{K}_k H_k \Phi_{k,k-1} \varepsilon_{k-1} + \bar{K}_k H_k R_{k-1} - R_{k-1} + \bar{K}_k V_k$$

$$\varepsilon_k = (I - \bar{K}_k H_k) (\Phi_{k,k-1} \varepsilon_{k-1} - R_{k-1}) + \bar{K}_k V_k$$

A matriz P_k denota-se por "matriz de covariâncias do erro de estimação", que pode ser obtida fazendo-se:

$$P_k = E \left[\varepsilon_k \varepsilon_k^T \right]$$

onde, desenvolvendo-se o produto dos desvios ε_k , chega-se a [30]:

$$E \left[(\Phi_{k,k-1} \varepsilon_{k-1} - R_{k-1}) (\Phi_{k,k-1} \varepsilon_{k-1} - R_{k-1})^T \right] = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1}$$

com

$$Q_{k-1} = E \left[R_{k-1} R_{k-1}^T \right]$$

devido às propriedades estatísticas de R_{k-1} .

Definindo-se [30]:

$$P'_k = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \quad (2.6.3.3.11)$$

pode-se escrever

$$P_k = (I - \bar{K}_k H_k) P'_k (I - \bar{K}_k H_k)^T + \bar{K}_k S_k \bar{K}_k^T \quad (2.6.3.3.12)$$

com $S_k = E[V_k V_k^T]$

Observando-se a expressão (2.6.3.3.1), o ruído randômico R_{k-1} encontra-se somado à expressão, cujo efeito sobre o sistema dinâmico é no sentido de aumentar a incerteza nas estimativas.

Expandindo-se a expressão (2.6.3.3.12) deve-se observar o termo $(H_k P'_k H_k^T + S_k)$ que é uma matriz simétrica e definida não-negativa; portanto, pode ser escrita como o produto de uma matriz pela sua transposta. De posse deste resultado, a partir de algumas manipulações chega-se à matriz ganho de Kalman de estado permanente [9,14,30], obtida como solução da expressão resultante que tem a forma da equação matricial de Ricatti. Igualando-se a derivada com relação ao tempo de P_k a zero, chega-se a:

$$\bar{K}_k = P'_k H_k^T [H_k P'_k H_k^T + S_k]^{-1} \quad (2.6.3.3.13)$$

O desenvolvimento da expressão (2.6.3.3.12) permite obter-se uma estimativa da matriz de covariâncias do erro de estimação de estado em t_k expressa por :

$$P_k = P'_k - \bar{K}_k H_k P'_k \quad (2.6.3.3.14)$$

É importante salientar que o critério da minimização do erro médio quadrático é equivalente à minimização do traço da matriz de covariâncias do erro de estimação de estado [09,30], uma vez que :

$$T_R [P_k] = E[\varepsilon_k \varepsilon_k^T]$$

O conjunto de expressões que constitui o Filtro Estocástico Recursivo de Kalman, pode ser resumido sob a forma de algoritmo. Para uma melhor compreensão e visualização do filtro, segue relacionado o conjunto de expressões:

$$P_k = P'_k - \bar{K}_k H_k P'_k \quad \text{repetida} \quad (2.6.3.3.14)$$

$$P'_k = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \quad \text{repetida} \quad (2.6.3.3.11)$$

$$\bar{K}_k = P'_k H_k^T [H_k P'_k H_k^T + S_k]^{-1} \quad \text{repetida} \quad (2.6.3.3.13)$$

$$\hat{X}'_k = \Phi_{k,k-1} \hat{X}_{k-1} + \mu_{k-1} \quad \text{repetida} \quad (2.6.3.3.6)$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}'_k + \bar{K}_k (Z'_k - H_k \hat{X}'_k) \quad \text{repetida} \quad (2.6.3.3.10)$$

onde, colocando-se em forma de algoritmo para o intervalo $[t_0, t_1]$, obtém-se,

$$T = t_0$$

$$P_0 \text{ e } \hat{X}_0 \text{ arbitrados}$$

$$T = t_{0+1} = t_1$$

$$P'_1 = \Phi_{1,0} P_0 \Phi_{1,0}^T + Q_0$$

$$\bar{K}_1 = P'_1 H_1^T [H_1 P'_1 H_1^T + S_1]^{-1}$$

$$Z'_1 = H_1 X_1 + V_1$$

$$\hat{X}'_1 = \Phi_{1,0} \hat{X}_0 + \mu_0$$

$$\hat{X}_1 = \hat{X}'_1 + \bar{K}_1(Z'_1 - H_1\hat{X}'_1)$$

$$P_1 = P'_1 - \bar{K}_1 H_1 P'_1$$

$$T = t_{1+1} = t_2, \text{ e prossegue.} \quad (2.6.3.3.15)$$

Resumindo-se o que foi exposto, observa-se que o método de Kalman, bem como todo formalismo matemático a ele associado apresenta diversas vantagens:

1. A forma recursiva das equações que constituem o filtro facilita sua utilização em computadores digitais.
2. A forma das equações (2.6.3.3.1) e (2.6.3.3.4) se prestam de maneira satisfatória às informações requeridas do processo. Cita-se dentre as quais, informações sobre a dinâmica do sistema, através da sua resposta a determinadas fontes de excitação (entrada) e sobre a natureza das medições, através das propriedades estatísticas do ruído.
3. Os critérios de otimização são de grande significância estatística, ou seja, variância mínima e probabilidade máxima. Este último resulta na correção linear da estimativa de estado através da matriz de ganhos (Apêndice D), que, baseando-se na suposição do ruído de estado ser de natureza gaussiana, maximiza a probabilidade condicional $P(X_k / Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_k)$ através da função densidade de probabilidade gaussiana. A maximização da função densidade de probabilidade, obtida através da aplicação do axioma da probabilidade total, resulta numa correção linear do estado através do produto entre a matriz de ganhos e o erro cometido em cada medição. Esta suposição resume uma importante característica do Filtro de Kalman que é a de possibilitar o ajuste dos valores dos ganhos, em função dos níveis de ruído presentes no processo (estado e medição), no sentido de manter o critério de estimação ótima [16].

Algumas desvantagens deste método podem ser apontadas como carga computacional elevada que cresce com o número de variáveis de estado [32,33], uma vez que a operação do filtro envolve um certo número de multiplicações matriciais, e o desvio que pode existir entre o modelo matemático utilizado e a estrutura do sistema real. Estes fatores, associados ao tempo de processamento, em determinados casos, podem provocar o fenômeno de divergência do filtro.

A Figura (2.6) mostra um diagrama de fluxo do Filtro. de Kalman. Deve-se observar o algoritmo do filtro, item 2.6.3.3, para melhor acompanhamento.

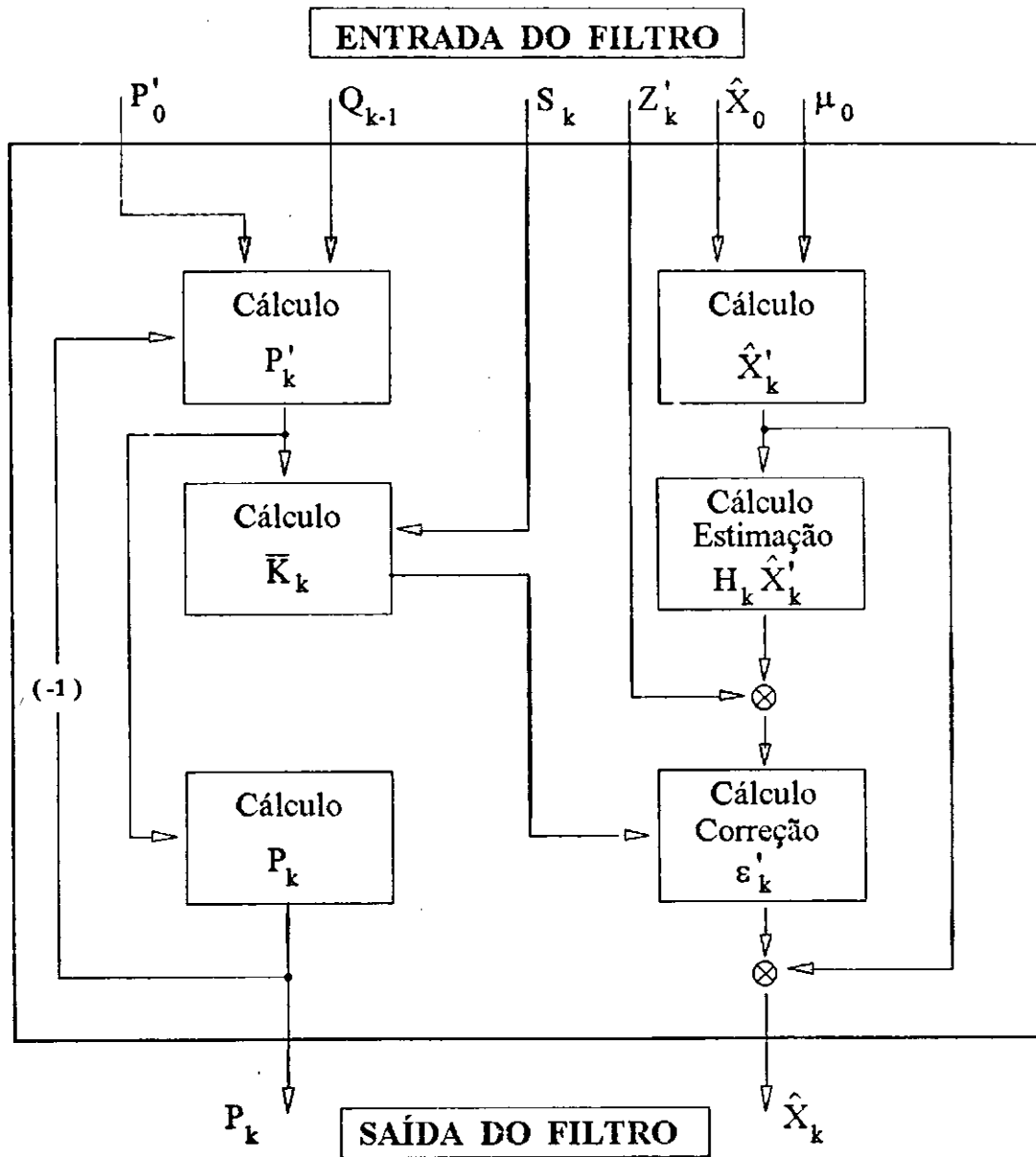


FIG. 2.6 Diagrama de fluxo do filtro de Kalman.

2.6.3.4 Considerações sobre a Divergência do Filtro de Kalman

A eficiência do Filtro de Kalman, sob determinadas condições, pode ser seriamente comprometida em detrimento do cálculo teórico apontado pelo traço do kernel ou da matriz de covariâncias. Como foi explanado na teoria, através dos itens anteriores, o Filtro de Kalman teoricamente produz uma exatidão crescente das estimativas, à medida em que dados adicionais são processados. Assim, segundo este raciocínio, a magnitude do erro de estimação, medido a partir do traço do kernel de covariâncias, comporta-se como uma função monotonicamente decrescente do número de observações [34], muito embora haja divergência nas estimativas. Diz-se, neste caso, que a eficiência do filtro está comprometida e este fenômeno é conhecido como "divergência".

As causas da divergência por outro lado, não são fáceis de se identificar podendo variar de uma aplicação para outra. Algumas causas identificadas podem ser citadas, como modelagem incorreta do sistema, valores incorretos da variância do ruído de estado, "biases" não identificados no sistema ("biases dinâmicos") ou no processo de medição e dificuldades numéricas devido aos arredondamentos [06] inerentes ao problema de aritmética finita dos computadores digitais.

Como consequência, após um extenso período de operação do filtro, a matriz de covariância do erro de estimação pode perder o caráter de semi-definição positiva. Assegura-se [33] que o número de multiplicações da matriz de covariância é proporcional à terceira potência do número de variáveis de estado por intervalo de tempo de discretização, e propõe-se um método de desacoplamento de estado com vistas a minimizar esse efeito, quando se está diante de um grande número de variáveis de estado.

A constatação da divergência na operação do filtro, em geral, pode ser obtida examinando-se as estatísticas do termo $(Z' - HX)$, denotado por "processo de inovação". Neste caso, a partir da fundamentação teórica do problema, o processo é considerado gaussiano branco de média nula.

Entretanto, os métodos para se policiar a divergência não constituem, via de regra, métodos gerais, e sim, procedimentos heurísticos a partir de experiências e observações particulares.

Problemas de divergência devido a fatores computacionais podem ser contornados através da utilização dos chamados "filtros de raiz quadrada" [14,16]. Esta técnica requer o uso de computação sequencial em termos da matriz raiz quadrada da matriz de covariâncias, usualmente na forma triangular. Obtém-se com isso a vantagem da matriz resultante do produto de uma matriz raiz quadrada pela sua transposta ser sempre semi-definida positiva, sendo esta matriz menos sensível a erros computacionais que a matriz de covariância. [35]

Schlee, Standish e Toda [34] investigaram o problema da estimação de órbitas para navegação espacial e concluíram que modificações feitas no Filtro de Kalman para compensar erros de arredondamento são mais simples. Neste caso, passa-se a considerar nas equações do filtro, um termo adicional de ruído de estado, representante dos erros de arredondamento. Esta modificação fornece resultados tão satisfatórios quanto aquelas voltadas para as imperfeições do modelo.

Diante deste quadro, entende-se que a divergência não é uma manifestação de instabilidade do Filtro, posto que, instabilidade traz como consequência, erros ilimitados nas estimativas e no kernel de covariâncias, direcionando o enfoque para as condições de controlabilidade e observabilidade do sistema.

A partir do que foi discutido sobre o problema da divergência, associado ao que se encontra na literatura, percebe-se que este fenômeno, em geral, está ligado a problemas de não-linearidade do modelo e problemas de resolução numérica. Acrescenta-se, porém, que em outros casos o problema pode estar relacionado com o completo desconhecimento de certas variáveis de estado de sistemas complexos. Os casos que envolvem modelos não-lineares, em geral, sugere a utilização do Filtro de Kalman Extendido [09,14,30]. A forma estendida do filtro requer o uso de técnicas de perturbação, onde estima-se simultaneamente estado e parâmetros do sistema.

Fitzgerald [35] trata o problema da divergência em termos da "verdadeira divergência", onde é suposta a ocorrência de erros limitados de origem numérica. Apresenta-se também nesta obra, o conceito de "divergência aparente", cuja terminologia é utilizada para referir-se a erros limitados que surgem pelo caráter sub-ótimo assumido pelo filtro.

Em linhas gerais, mostrou-se as circunstâncias que podem provocar a divergência do Filtro de Kalman. Algumas formas de se atacar este problema estendem-se desde procedimentos numéricos e técnicas de filtragem adaptativa ou não, até formulações que envolvem alterações na estrutura do filtro a partir do Filtro de Kalman padrão [16]. Em alguns casos, especialmente envolvendo computadores com comprimento de palavra reduzido e modelos com baixo nível de ruído de processo, é conveniente utilizar um algoritmo de filtragem por raiz quadrada, onde a matriz de covariância P é substituída pela sua forma "raiz quadrada". Este procedimento apresenta condicionamento numérico superior, se comparado a P , além do fato da forma quadrática da raiz de P ser inerentemente positiva-semi-definida. Uma descrição completa destes procedimentos pode ser encontrada na obra de Maybeck[42].

2.6.3.5 Conclusão

Neste capítulo, buscou-se mostrar de forma razoavelmente abrangente o conteúdo teórico existente por trás deste estudo. Adicionalmente, no conjunto de apêndices deste trabalho, outros aspectos relevantes são focalizados.

Mostrou-se, dentre outros aspectos, a necessidade de se impor restrições de ordem conceitual ao comportamento de sistemas sob investigação, com o objetivo de simplificar a análise e o tratamento matemático.

Com relação ao problema do uso de técnicas de Identificação de Sistemas e Estimação de parâmetros, procurou-se dar ênfase a pontos cruciais que influenciam diretamente os resultados obtidos. Neste sentido, abordou-se o problema da escolha de fontes capazes de excitar os modos próprios do sistema convenientemente.

Aspectos relacionados à discretização de sinais e sistemas, com vistas ao processamento adequado de sinais contínuos no âmbito digital, foram apresentados.

Finalmente, foram destacados diversos métodos de estimação utilizados para caracterização de sistemas, apontando-se problemas relacionados à sua utilização, mecanismos de convergência estatística das estimativas, bem como restrições impostas ou não pelos estimadores aos processos aleatórios (ruídos). Normalmente tais processos encontram-se associados à saída e/ou entrada dos sistemas, sobrepostos ao conjunto de dados utilizados nos processos de estimação e/ou identificação.

CAPÍTULO 3

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROCESSO DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS PARA SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

3.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo, o desenvolvimento matemático necessário à aplicação da técnica de estimação de parâmetros em estudo.

A equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico do sistema é reduzido à forma de estado. Assim, obtém-se um sistema de equações diferenciais de primeira-ordem, cuja solução remete-se à forma discreta adequada para uso em computação digital.

A aproximação utilizada para obtenção da solução do sistema de estado na forma discretizada, obtém-se através da expansão em Série de Taylor dos termos exponenciais contidos na solução contínua, truncada para infinitésimos de ordem superior a dois.

Finalmente, são mostrados aspectos inerentes à técnica de estimação em estudo, com ênfase à aplicação do Estimador das Variáveis Instrumentais em conjunção com o Filtro de Kalman. O que se busca com a utilização do Filtro de Kalman é a obtenção de instrumentos portadores de níveis de ruído abaixo daqueles obtidos com a utilização do modelo auxiliar.

3.2. Redução da Equação Diferencial do Sistema à Forma de Estado

Um modelo matemático geral, que descreve o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos de segunda-ordem com "n graus" de liberdade, pode ser dado por [44] :

$$[M] \{\ddot{y}(t)\} + [C] \{\dot{y}(t)\} + [K] \{y(t)\} = \{\mu(t)\} \text{ repetida} \quad (1.3.1)$$

onde [M], [C] e [K] são matrizes quadradas de ordem (n x n), e $\{\ddot{y}(t)\}$, $\{\dot{y}(t)\}$, $\{y(t)\}$ e $\{\mu(t)\}$ são vetores (nx1)

No caso de sistemas com 1 G.D.L, ou seja, (n = 1), a expressão (1.3.1) torna-se :

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = \mu(t) \text{ repetida} \quad (1.3.2)$$

onde M, C e K, representam respectivamente, coeficientes de massa, amortecimento e rigidez, e $\mu(t)$ o vetor de excitação (força) e/ou perturbação.

É possível reduzir a ordem do sistema (1.3.2). Neste caso recai-se numa outra forma de descrição matemática denominada Descrição no Espaço Vetorial de Estados [10,14].

Entende-se por estado de um sistema, a informação requerida no tempo t_0 , que juntamente com uma entrada $\mu(t_0)$, determina com unicidade o comportamento do sistema para $t \geq t_0$. O conjunto de equações que relaciona entrada, saída e estado de um dado sistema é chamado de sistema de equações dinâmicas.

A partir da expressão (1.3.2) obtém-se :

$$\ddot{y}(t) + \frac{C}{M}\dot{y}(t) + \frac{K}{M}y(t) = \frac{\mu(t)}{M} \quad (3.2.1)$$

Chamando-se $Y = \bar{C}X + DU$ de equação de saída e colocando-se na forma matricial [10,14], obtém-se :

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad (3.2.2)$$

onde a matriz D, para este caso, é a matriz nula. Vale ressaltar que os valores dos elementos das matrizes \bar{C} e D dependem da configuração de saída do sistema.

Considerando-se (3.2.2), pode-se proceder da seguinte maneira, com vistas à redução de (1.3.2) à forma de estado:

$$y(t) = x_1(t) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{y}(t) = x_2(t) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t)$$

donde na forma matricial fica,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \dot{X}(t) \quad (3.2.3)$$

Isolando-se o termo $\ddot{y}(t)$ na expressão (3.2.1) fica,

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{M}\mu(t) - \frac{C}{M}\dot{y}(t) - \frac{K}{M}y(t)$$

e fazendo-se as substituições para $y(t)$, $\dot{y}(t)$ e $\ddot{y}(t)$, a partir de (3.2.3), tem-se o seguinte sistema de primeira-ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}\mu(t) - \frac{C}{M}x_2(t) - \frac{K}{M}x_1(t) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -C/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t)/M \quad (3.2.5)$$

A expressão (3.2.5) pode ser escrita na forma compacta, que, juntamente com a expressão (3.2.2), constituem as equações dinâmicas citadas anteriormente. Escrevendo-se as matrizes com suas respectivas dimensões, fica:

$$\{\dot{X}\}_{(2n \times 1)} = [\Phi]_{(2n \times 2n)} [X]_{(2n \times 1)} + [B]_{(2n \times 1)} [U]_{(n \times 1)} \quad (3.2.6)$$

$$\{Y\}_{(2n \times 1)} = [\bar{C}]_{(2n \times 2n)} [X]_{(2n \times 1)} + [D]_{(2n \times 1)} [U]_{(n \times 1)} \quad (3.2.7)$$

Denota-se (3.2.6) e (3.2.7) por equação de estado e equação de saída respectivamente, para o sistema linear e invariante no tempo. Neste caso, os termos B e \bar{C} são matrizes constantes, X é a matriz de estado e U a matriz que contém os valores de entrada do sistema.

Por simples comparação das expressões (3.2.6) e (3.2.7), com as expressões (3.2.5) e (3.2.2), respectivamente, e considerando-se $n = 1$, obtém-se:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad U = \mu(t), \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -C/M \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3. Solução do Sistema de Equações Diferenciais de Primeira-Ordem ou Sistema de Estado

Existe uma equivalência geral entre a forma canônica de uma equação diferencial linear de n -ésima ordem, representada em (2.2.3), e um sistema de n equações diferenciais de primeira-ordem, acopladas na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \phi_{11} x_1(t) + \phi_{12} x_2(t) + \dots + \phi_{1n} x_n(t) + b_1 \mu_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \phi_{21} x_1(t) + \phi_{22} x_2(t) + \dots + \phi_{2n} x_n(t) + b_2 \mu_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= \phi_{n1} x_1(t) + \phi_{n2} x_2(t) + \dots + \phi_{nn} x_n(t) + b_n \mu_n(t) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

A expressão (3.2.6) é um caso particular de (3.3.1) quando n é igual a um.

Pode-se mostrar que este sistema tem uma solução em termos da matriz associada, chamada matriz de transição de estado ou operador linear de transição [09,10,14]. Trata-se de um operador de grande importância para a solução generalizada de equações diferenciais lineares.

Antes de se considerar a solução do problema não-homogêneo, convém mencionar algumas propriedades da matriz de transição de estado. Seja um operador linear que leva o sistema de um estado x_0 a um estado x_1 , denotado por $\Phi(t_1, t_0)$. Então:

1. $\Phi(t, t) = I$
2. $x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0(t)$
3. $x(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)x_0(t)$
4. $\Phi(t_1, t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_1)$
5. $\Phi(t_1, t_0)\Phi^{-1}(t_0, t_1) = I$
6. $\frac{d}{dt} [\Phi(t_1, t_0)\Phi^{-1}(t_0, t_1)] = 0$ (3.3.2)

A matriz de transição deve obedecer à seguinte expressão, provida da relação $\dot{\Phi}(t) = \Phi A(t)$ = "constante", para sistemas invariantes no tempo [14]:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \Phi(t)A(t) \quad (3.3.3)$$

Utilizando-se a expressão (3.3.3) e a propriedade de número seis, em (3.3.2), chega-se à solução do problema não-homogêneo na forma generalizada,

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \xi)B\mu(\xi)d\xi \quad (3.3.4)$$

onde o primeiro termo representa a solução transitória, dependente apenas das condições iniciais, e o segundo termo, a solução de estado permanente, função da excitação imposta ao sistema.

Uma forma bastante simples de obter-se (3.3.4) [05] é fazer-se:

$$\dot{x}(t) - \Phi x(t) = B\mu(t)$$

onde, ao multiplicar-se ambos os lados desta expressão por $\Phi^{-1}(t, t_0)$ e em seguida efetuar-se a integração do resultado, chega-se a (3.3.4).

Considerando-se o fato do sistema ser linear e invariante no tempo, é possível mostrar [14] que:

$$\Phi(t_1, t_0) = e^{\Phi(t_1 - t_0)}$$

e portanto, pode-se escrever (3.3.4) na seguinte forma

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\Phi(t_1 - t_0)} \mathbf{x}(0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{\Phi(t_1 - \xi)} \mathbf{B}\mu(\xi) d\xi \quad (3.3.5)$$

onde, assumindo-se que $t_0 = 0$, obtém-se

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\Phi(t_1)} \mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\Phi(t_1 - \xi)} \mathbf{B}\mu(\xi) d\xi \quad (3.3.6)$$

Deste modo, fica determinada a solução para o sistema de estado expresso por (3.2.6).

Cabe ressaltar que em muitas instâncias da análise teórica, a existência da matriz de transição constitui um fator de muita importância, uma vez que esta matriz propicia uma forma resumida para a solução do sistema de equações de estado.

Não obstante, podem existir restrições quanto a obtenção da matriz de transição de estado equivalentes às restrições exigidas para a solução do sistema de equações. Cita-se por exemplo o fato de não se dispor de métodos generalizados de obtenção da matriz de transição para toda classe de sistemas lineares, dentre as quais, cita-se a classe dos sistemas varilinares, ou seja, sistemas cuja a matriz dos parâmetros " ϕ " varia com o tempo, muito embora mantem-se a combinação linear dos parâmetros do sistema com as variáveis de estado. Esta classe de sistemas limita a existência de métodos generalizados para obtenção da matriz de transição de estado aos sistemas lineares e invariantes no tempo [14].

3.4 Discretização da Equação de Estado

Considera-se o sistema governado pela equação de estado (3.2.6), escrita na forma

$$\dot{x}(t) = \phi x(t) + B\mu(t) \quad (3.4.1)$$

cuja solução pode ser dada por [14]:

$$x(t_1) = e^{\Phi(t_1)} x(0) + \int_0^{t_1} e^{\Phi(t_1-\xi)} B\mu(\xi) d\xi \quad \text{repetida} \quad (3.3.6)$$

Assim, considera-se $e^{\phi t}$ uma série infinita e convergente, quaisquer que sejam ϕ e t , definida para todas as matrizes quadradas. Neste caso, pode-se trabalhar com esta formulação, uma vez que a matriz do sistema é quadrada e permite expandir-se $e^{\phi t}$ na forma:

$$e^{\phi t} = I + \phi t + \frac{\phi^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\phi^n t^n}{n!} \quad (3.4.2)$$

Portanto, determina-se o estado $x(t)$ nos instantes discretos $0, T, \dots, kT$, estabelecendo-se uma equação a diferenças para $x(kT)$.

Tomando-se $t = (k+1)T$ na expressão (3.3.6), fixando-se $t = 0$ como valor inicial e considerando-se que $\mu(t)$ é constante entre os instantes discretos de amostragem, obtém-se:

$$x[(k+1)T] = e^{\phi T(k+1)} x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{\phi[(k+1)T-\xi]} B\mu(\xi) d\xi \quad (3.4.3)$$

Esta expressão pode ser rearranjada de forma a obter-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT + T) = e^{\phi T} \left[e^{\phi kT} \mathbf{x}(0) + \int_0^{kT+T} e^{\phi(kT+T-\xi)} \mathbf{B}\mu(\xi) d\xi \right] + \\ + \int_{kT}^{kT+T} e^{\phi(kT+T-\xi)} \mathbf{B}\mu(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

No entanto, pode-se observar que a expressão entre colchetes é idêntica à expressão para $\mathbf{x}(kT)$, e isto permite escrever-se :

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\phi T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\phi(kT+T-\xi)} \mathbf{B}\mu(\xi) d\xi \quad (3.4.5)$$

Assumiu-se anteriormente que $\mu(t)$ era constante entre os instantes de discretização ou amostragem, ou seja,

$$\mu(t) = \mu(kT) \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$

e isto leva (3.4.5) a assumir a forma:

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\phi T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\phi(kT+T-\xi)} \mathbf{B}\mu(kT) d\xi \quad (3.4.6)$$

Fazendo-se uma mudança de variável $\theta = (kT + T - \xi)$ e procedendo-se com a inversão dos limites de integração, o sinal da integral passa novamente a ser positivo, resultando:

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\phi T} \mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\phi\theta} \mathbf{B} d\theta \mu(kT) \quad (3.4.7)$$

Considera-se agora a mudança de terminologia $x(kT) = x_k$ e $\mu(kT) = \mu_k$:

$$x_{k+1} = e^{\phi T} x_k + \int_0^T e^{\phi\theta} B d\theta \mu_k \quad (3.4.8)$$

A expressão (3.4.8) pode ser colocada de outra forma, bastando-se fazer no primeiro termo,

$$e^{\phi T} = \phi^*(T) = \phi^* \quad (3.4.9)$$

para a matriz fundamental na forma discreta, responsável pela dinâmica do sistema, e

$$\int_0^T e^{\phi\theta} B d\theta = B \int_0^T e^{\phi\theta} d\theta = B^*(T) = B^* \quad (3.4.10)$$

para a matriz de distribuição, também na forma discreta.

A partir da representação definida por (3.4.9) e (3.4.10), a expressão (3.4.8) passa a ser escrita na forma

$$x_{k+1} = \phi^* x_k + B^* \mu_k \quad (3.4.11)$$

Os termos ϕ^* e B^* podem ser obtidos de forma aproximada, truncando-se a Série de Taylor (3.4.2) a partir do segundo termo.

$$\phi^* = e^{\phi T} = I + \phi T + \frac{\phi^2 T^2}{2!} + \dots + \frac{\phi^n T^n}{n!} \approx I + \phi T \quad (3.4.12)$$

$$\begin{aligned}
 B^* &= B \int_0^T e^{\phi T} d\theta \approx B \int_0^T (I + \phi\theta) d\theta = B \int_0^T I d\theta + B \int_0^T \phi d\theta = \\
 &= BT + B\phi \frac{T^2}{2} \approx BT
 \end{aligned}
 \tag{3.4.13}$$

A aproximação obtida anteriormente é válida quando considera-se T suficientemente pequeno, tomando-se possível desprezar os infinitésimos de segunda-ordem da série, obtendo-se como resultado aproximações dadas por (3.4.12) e (3.4.13). Assim a equação (3.4.11) assume a forma:

$$x_{k+1} = (I + \phi T)x_k + TB\mu_k
 \tag{3.4.14}$$

que é a equação necessária ao processo de estimação de parâmetros de sistemas mecânicos no domínio do tempo usando-se a formulação via discretização da equação de estado. Uma representação esquemática da expressão (3.4.14) pode ser vista na figura 3.1 .

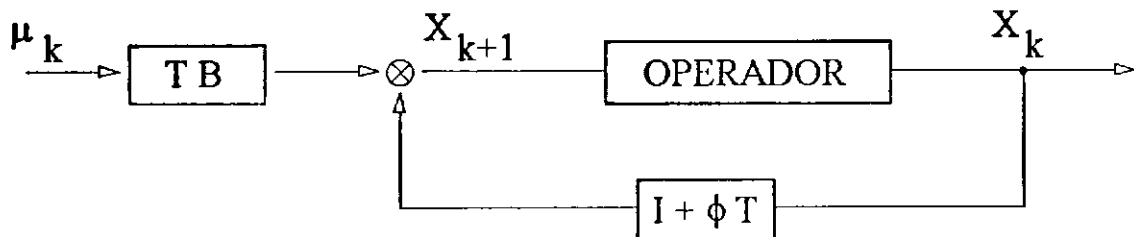


FIG. 3.1 Representação esquemática da equação de estado discretizada.

3.5. Estimação de Parâmetros do Sistema

Mostrou-se no item anterior a forma discretizada da solução da equação de estado, para uso em computador digital, através da expansão em série infinita da matriz de transição de estado, onde considerou-se o truncamento da série em seus infinitésimos de ordem superior a dois.

Considerando-se este resultado e a formulação matricial na forma (2.6.1.1), pode-se aplicar o processo de estimação de parâmetros de sistemas mecânicos no domínio do tempo, utilizando as aproximações ϕ^* e B^* ,

$$\phi^* = \begin{bmatrix} 1 & T \\ -(K/M)T & 1 - (C/M)T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^* = \frac{T}{M} \quad (3.5.1)$$

cujos elementos de ϕ^* e B^* , obtidos como resultado das operações matriciais a partir de (3.2.8), (3.4.12) e (3.4.13), retratam a relação existente entre os parâmetros do sistema e o intervalo de tempo de discretização.

Repetindo-se a expressão (3.4.14) do item anterior na forma matricial, e inserindo-se os valores de ϕ^* e B^* mostrados em (3.5.1), obtém-se a equação de estado na forma discretizada.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ -(K/M)T & 1 - (C/M)T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} + \frac{T}{M} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_k \end{Bmatrix} \quad (3.5.2)$$

Esta expressão pode ser escrita para k observações, incluindo-se os ruídos presentes nas medições dos sinais de saída:

$$\begin{bmatrix} x_2 \dots x_{k+1} \\ \dot{x}_2 \dots \dot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{T} \\ -(K/M)\mathbf{T} & \mathbf{1} - (C/M)\mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \dots x_k \\ \dot{x}_1 \dots \dot{x}_k \end{bmatrix} + \frac{\mathbf{T}}{M} \begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ \mu_1 \dots \mu_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{1x} \dots r_{kx} \\ r_{1\dot{x}} \dots r_{k\dot{x}} \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

O termo adicional representante dos ruídos contidos nas medições em (3.5.3), é formado pelos elementos r_{kx} representante dos ruídos contidos nas medições de deslocamento e $r_{k\dot{x}}$ representante dos ruídos contidos nas medições de velocidade.

A expressão (3.5.3) pode ser rearranjada de forma a obter-se:

$$\begin{bmatrix} x_2 & \dot{x}_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{k+1} & \dot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \dot{x}_1 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k & \dot{x}_k & \mu_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -(K/M)\mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{1} - (C/M)\mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}/M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{1x} \dots r_{1\dot{x}} \\ r_{kx} \dots r_{k\dot{x}} \end{bmatrix}^T \quad (3.5.4)$$

Esta expressão pode ser escrita na forma matricial compacta, de acordo com (2.6.1.1), de forma a obter-se:

$$\mathbf{X}_{(k \times 2)} = \mathbf{A}_{(k \times 3)} \boldsymbol{\phi}_{(3 \times 2)} + \mathbf{R}_{(k \times 2)} \quad (3.5.5)$$

com,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_2 & \dot{x}_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{k+1} & \dot{x}_{k+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & \dot{x}_1 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k & \dot{x}_k & \mu_k \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -(K/M)\mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{1} - (C/M)\mathbf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}/M \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{1x} \dots r_{1\dot{x}} \\ r_{kx} \dots r_{k\dot{x}} \end{bmatrix}$$

denotando-se "A", a matriz de observações que contém termos de entrada e saída, "φ" a matriz de parâmetros do sistema, "R" a matriz de ruídos de medição e "X" a matriz de estados do sistema.

A presença da matriz de ruídos "R" em (3.5.3), dá uma conotação mais realística ao processo, e portanto, sugere técnicas de estimação de parâmetros para a obtenção da matriz φ.

Mediante a técnica de estimação de parâmetros proposta neste trabalho, é possível obter-se os parâmetros do modelo auxiliar, através da aplicação do estimador por mínimos quadrados (2.6.1.6) à expressão (3.5.5), para a obtenção da matriz φ, que então passa a ser denotada por " $\hat{\phi}_{AUX}$ ", permitindo escrever-se :

$$\hat{\phi}_{AUX} = [A^t A]^{-1} A^t X \quad (3.5.6)$$

Uma vez de posse dos parâmetros do modelo auxiliar, obtidos via Mínimos Quadrados, a matriz das variáveis instrumentais W_{VI} pode ser construída, a partir da resposta do modelo auxiliar à mesma entrada. O modelo auxiliar obtido dessa forma pode ser escrito considerando-se a expressão (3.5.5) :

$$X_{(k \times 2)} = A_{(k \times 3)} \hat{\phi}_{AUX_{(3 \times 2)}} + R_{(k \times 2)} \quad \text{ou} \quad (3.5.7)$$

$$X = A \hat{\phi}_{AUX} + R$$

A Matriz das Variáveis Instrumentais (3.5.8) é composta dos estados filtrados a partir de (3.5.7), que constitui a resposta do modelo auxiliar às entradas μ_k , e das entradas μ_k , cuja forma é

$$W_{VI} = \begin{bmatrix} x_2 & \hat{x}_2 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k+1} & \hat{x}_{k+1} & \mu_k \end{bmatrix} \quad (3.5.8)$$

com os parâmetros de ϕ obtidos por :

$$\hat{\phi}_{VI} = \left[W_{VI} W_{VI}^T \right]^{-1} W_{VI} X \quad (3.5.9)$$

Os parâmetros estimados na forma (3.5.9) sintetizam um modelo que retrata, de forma aproximada e sob determinadas circunstâncias, o sistema real, viabilizando a utilização desta forma de estimação.

Neste caso, o modelo obtido é da forma:

$$X = A \hat{\phi}_{VI} + R \quad (3.5.10)$$

cujo estado é processado através do algoritmo de Kalman para a obtenção de novos instrumentos (3.5.8), agora, supostamente com níveis de ruído bem mais atenuados. Com isso busca-se melhorar a estimativa anterior obtida unicamente via variáveis instrumentais.

Os parâmetros obtidos por este processo são comparados com os parâmetros teóricos através da relação:

$$\varepsilon = \frac{|\hat{\phi} - \phi_{teórico}|}{\phi_{teórico}} * 100 \quad (3.5.11)$$

Aspectos relacionados com estimação de estado, através da aplicação do algoritmo de Kalman, foram extensivamente abordados no Capítulo 2, que trata do embasamento teórico. No entanto, é oportuno apresentar-se alguns aspectos gerais relacionados com o desenvolvimento e aplicação do Método de Kalman:

1. Em geral, o estado inicial do sistema é desconhecido. Assume-se ser uma variável aleatória gaussiana, cujos elementos possuem independência estatística.
2. Os elementos que compõem a matriz de medição são obtidos a partir do último conjunto de instrumentos gerados pelo modelo auxiliar, uma vez que os parâmetros tenham assumido valores estáveis.
3. A matriz de medição é mostrada em (2.6.3.3.4), cuja matriz de observação, para este caso particular, é

$$H_k = H = \text{matriz identidade } (2 \times 2).$$
4. A matriz de transição de estado, para sistemas com um número maior de graus de liberdade, pode ser calculada usando métodos de diagonalização Elbert [14], bastando pré-multiplicar e pós-multiplicar a matriz de autovalores do sistema, pelo autovetor na sua forma normal e na sua forma transposta, respectivamente.
5. Para o caso do sistema em estudo, classificado como linear e invariante no tempo, o ganho ótimo de Kalman (vetor matriz \bar{K}) é calculado para o estado permanente, livre de transitórios que se sobrepõem à resposta do sistema, a partir da matriz de covariância do erro de estimação de estado, da matriz de observação e da matriz de covariância do erro de medição. Nestas circunstâncias, implementa-se o "Filtro de Kalman Padrão de Estado Permanente".

A Figura (3.2) a seguir, ilustra o processo de forma esquemática.

SIMULAÇÃO DO SISTEMA

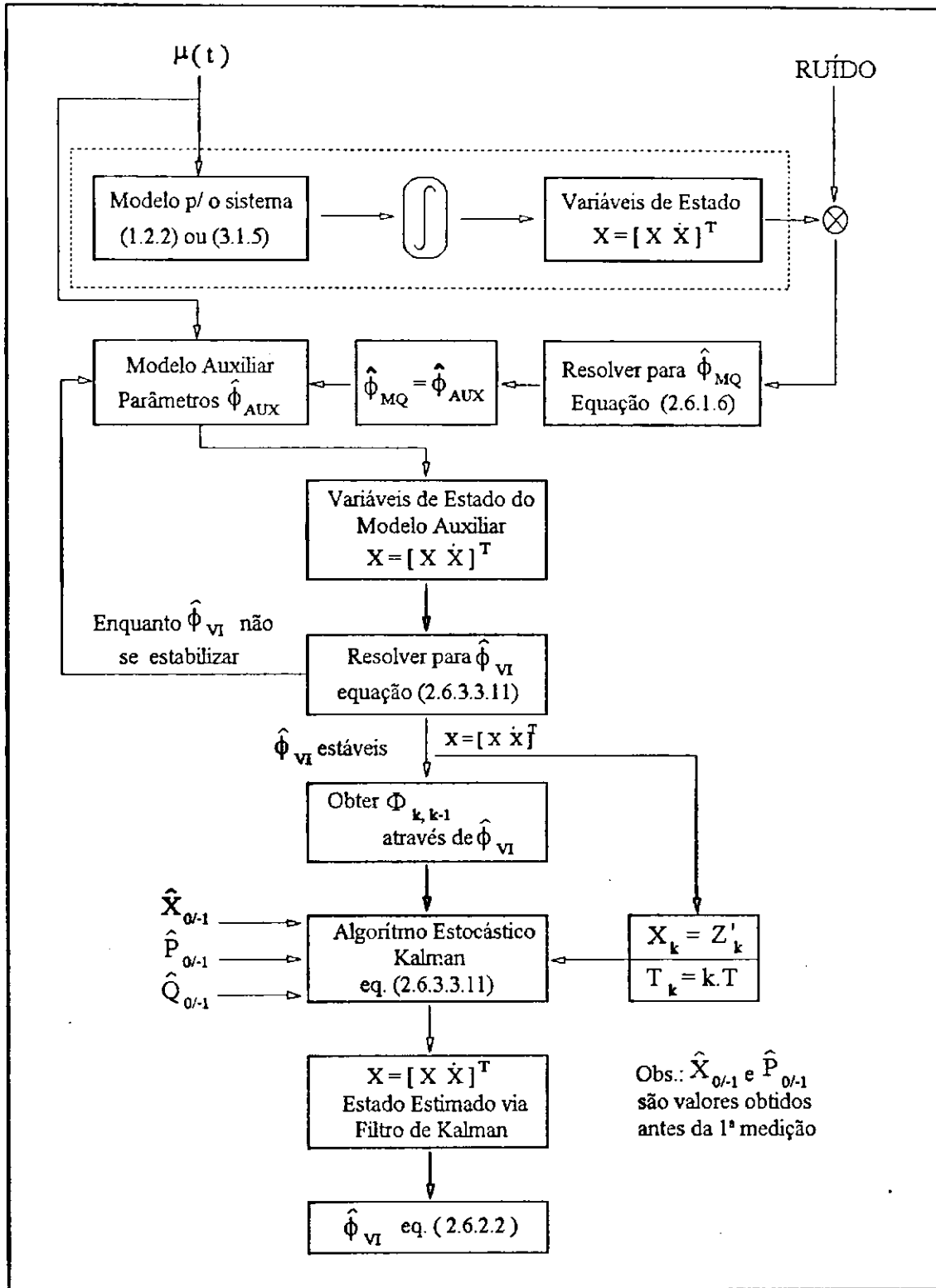


FIG. 3.2. Processo de estimação de parâmetros via Filtro de Kalman
em conjunção com o Estimador das Variáveis Instrumentais.

3.6 Conclusão

Mostrou-se neste capítulo, instâncias do desenvolvimento matemático inerentes à aplicação e verificação da técnica de estimação estudada. A partir do que foi exposto procurou-se, através da descrição matemática na forma de estado, compor o conjunto de expressões matemáticas necessárias à simulação digital do sistema e processamento da técnica de estimação.

Dois aspectos relacionados com a expressão (3.2.5) e (3.4.14) merecem destaque. A expressão (3.2.5) representa o modelo matemático contínuo do sistema na forma de estado. Através da aplicação do integrador Runge-Kutta de quarta-ordem (Apêndice "A") nesta expressão, obtém-se o vetor de estado do sistema em termos de deslocamento e velocidade. Aspectos relacionados com resolução numérica de sistemas de equações são abordados no capítulo quatro, onde procura-se deixar patente, a importância da escolha de um integrador numérico capaz de mapear de forma exata, sinais de deslocamento e velocidade.

O outro aspecto relevante, diz respeito à expressão (3.4.14). Trata-se da solução do sistema de estado na forma discretizada. Esta expressão viabiliza a utilização de computação digital para processamento de técnicas de estimação. Cabe destacar, a importância da aproximação utilizada e sua influência nos resultados obtidos, uma vez que busca-se representar um sistema contínuo a partir de valores discretos. Neste caso, procura-se ressaltar a importância da ordem de truncamento da expansão em Série de Taylor, e sua relação com o tamanho do intervalo de tempo de discretização a ser adotado [23].

CAPÍTULO 4

4. SIMULAÇÃO E RESULTADOS DO PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

4.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados resultados de simulação digital do sistema massa-mola-amortecedor viscoso de um grau de liberdade, submetido a uma fonte de excitação obtida a partir da síntese de sinais periódicos [20]. Assim, procura-se simular o sistema na forma de estado, com o vetor de estado obtido através do método Runge-Kutta de quarta-ordem (Apêndice A).

Para verificação da técnica de estimação de parâmetros, contaminou-se o vetor de estado com uma sequência de ruído simulado com características próximas de um ruído branco, obtida através de um gerador de números aleatórios entre zero e um.

Finalmente, processaram-se os dados obtidos da simulação do sistema para obtenção dos parâmetros, utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados não-recursivo, Variáveis Instrumentais e a conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman. Acrescentou-se ainda a esta análise, a conjunção de Mínimos Quadrados com o Filtro de Kalman, com vistas a observar o efeito das características estatísticas do ruído sob os coeficientes estimados.

Cabe ressaltar, que procurou-se investigar o comportamento de cada método fazendo-se uma varredura sobre diversas faixas de frequência do sinal de excitação, sobre diversos intervalos de tempo de discretização e diversos níveis de ruído sobreposto ao vetor de estado.

4.2 Escolha do Intervalo de Discretização

O critério utilizado para escolha do intervalo de tempo de discretização do sinal de excitação, baseado no período de vibrações livres do sistema, é obtido da seguinte maneira [01]:

$$T_{PL} = \frac{2\pi}{\omega_n}, \quad (4.2.1)$$

é o período de vibrações livres do sistema.

Define-se o período do sinal de excitação por $T_p = T_{PL} NPI$, com $NPI > 0$ assumindo valores arbitrários, obtendo-se com isso,

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n} NPI \quad (4.2.2)$$

Fazendo-se $T_p = N_p T$, onde T é o intervalo de discretização, a depender dos valores assumidos por NPI , obtém-se :

$$T = \frac{2\pi}{N_p \omega_n} NPI \quad (4.2.3)$$

As harmônicas que compõem o sinal de excitação possuem frequências angulares múltiplas da frequência fundamental do sinal, dada por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N_p T} \quad (4.2.4)$$

onde, a partir de (4.2.2), obtém-se a expressão para a frequência fundamental do sinal de excitação :

$$\omega_0 = \frac{\omega_n}{NPI} \quad (4.2.5)$$

A expressão (4.2.5) é utilizada para a obtenção de frequência das harmônicas que compõem o sinal de excitação, cujo valor da i -ésima harmônica, pode ser dado por :

$$\omega_i = \omega_n \frac{i+1}{NPI} \quad (4.2.6)$$

com $i = 0, 1, 2, 3, \dots, [(NP/2)-1]$

Assim, associa-se a escolha do intervalo de tempo de discretização e das frequências do sinal de excitação, ao período de vibrações livres do sistema.

Com o intuito de tornar mais claro o critério de escolha do intervalo de tempo de discretização, a partir do desenvolvimento mostrado anteriormente, pode-se utilizar dados relacionados com a obtenção do sinal gerado no tempo, mostrado na figura 4.2a, e com a parte do seu espectro mostrado na figura 4.2b.

Neste sentido, tem-se que a frequência natural do sistema é $\omega_n = 8.9443 \text{ rd/s}$. Quando se está diante do problema de caracterização de sistemas, este valor é desconhecido. Neste caso busca-se, através

de uma análise espectral da resposta, uma dada faixa de frequência, de modo que a frequência natural do sistema esteja contida nesta faixa.

Arbitrando-se um valor para $NPI = 10$, por exemplo, e utilizando-se a expressão (4.2.5), obtém-se :

$$\omega_0 = \frac{\omega_n}{NPI} = \frac{8,9443}{10} = 0,8944 \text{ rd / s}$$

Entende-se com isso, que a menor componente em frequência do sinal de excitação é igual a um décimo da frequência considerada como frequência natural.

Tomando-se 128 componentes para o vetor de excitação, obtém-se para o intervalo de discretização (expressão (4.2.3)), o seguinte resultado :

$$T = \frac{2\pi}{N_P \omega_n} NPI = \frac{2\pi}{N_P \omega_0} = \frac{2\pi}{128 * 0,8944} = 0,05488 \text{ s}$$

Com estes resultados pode-se calcular :

⇒ A banda em frequência do sinal de excitação (FIG. 4.2b)

$$\text{Largura de Banda} = \left(\frac{N_P}{2} - 1 \right) \omega_0 = \left(\frac{128}{2} - 1 \right) 0,8944 = 56,35 \text{ rd / s}$$

onde considerou-se a metade do número de componentes do vetor de excitação menos um, para prevenir o problema de altas frequências (Aliasing)

⇒ O período do sinal de excitação (FIG. 4.2a) dado pela expressão (4.2.3)

$$T = \frac{2\pi}{N_p \omega_n} NPI = \frac{2\pi}{N_p \omega_0} \quad \therefore \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = N_p T = 128 * 0,05488 = 7,0246 \text{ s}$$

⇒ As frequências das harmônicas que compõem o sinal de excitação (expressão (4.2.6)), considerando-se $\omega_0 = 0,8944 \text{ rd / s}$.

4.3. Simulação

Simular numericamente o sistema, a partir das características dinâmicas adotadas, é obter o vetor de estado do sistema, utilizando-se métodos numéricos.

Diversas questões são ressaltadas no processo de simulação. Uma questão por exemplo, está relacionada com o tipo de fonte de excitação adotada; outra questão relaciona-se com o método numérico empregado. Cita-se, entretanto, o problema de resolução numérica do aparato computacional utilizado, uma vez que, em determinados casos, números elevados e operações aritméticas durante o processamento pode ser necessário. Isto traz como consequência a propagação de erros de truncamento e arredondamento [06].

Com relação ao tipo de fonte a ser utilizada, cuja escolha está condicionada à persistência da excitação [03,14], o processo de obtenção do vetor de estado do sistema pode não ser uma tarefa simples. O uso de determinadas fontes de excitação pode imprimir uma dinâmica ao sistema cuja evolução numérica da resposta justifique o uso de métodos numéricos de elevada estabilidade. Cita-se, por exemplo, a utilização do Sinal de Schroeder, cuja configuração da resposta apresenta variações bruscas em deslocamento e velocidade.

A escolha do método de integração numérica, com vistas à obtenção de vetor de estado de forma suficientemente exata, é de importância fundamental na análise dos resultados do problema de estimação, principalmente quando investiga-se a eficiência de técnicas de estimação.

O fator que orienta a seleção do método de integração numérica relaciona-se com o problema de estabilidade. A questão da estabilidade origina-se em sistemas que apresentam valores próprios de ordem elevada [37]. Neste caso a presença de componentes de alta frequência no sinal de excitação torna-se indispensável aos processos de caracterização de sistemas. Isto sugere a utilização de intervalos de discretização reduzidos para perfeita representação do sinal, direcionando o critério de escolha às condições de estabilidade do método. Assim pode-se dizer que as características intrínsecas do sistema influenciam a escolha do método de integração numérica. A instabilidade numérica pode ter origem inerente ao próprio método. Não obstante, tais métodos são ditos condicionalmente estáveis [31].

Dispõe-se em vasta literatura de um grande número de métodos de integração numérica. Tais métodos, de uma forma geral, dividem-se quanto ao passo de integração em métodos a passos constantes e métodos a passos variáveis. Dentre os métodos a passos constantes citam-se o Método de Newmark, Diferença Central, Houbolt, Wilson θ , bastante discutidos por Bathe[31], e os Métodos Explícitos Runge-Kutta-Gills [07], para não citar outros. Os métodos a passos variáveis constituem uma classe distinta e sofisticada destes métodos. Dotados de controlador automático do tamanho do passo, com base na estimativa de erro local, estes métodos têm sido aplicados com certa restrição em sistemas homogêneos, lineares ou não-lineares.

Os métodos de integração numérica a passos variáveis constituem verdadeiros software's matemáticos fundamentados nos métodos a passos constantes e às vezes, na conjugação deles. Cita-se, dentre um vasto número de métodos automáticos, o software EPSODE que implementa o Método Adams-Bashfort-Moulton, discutido por Shampine[06]; o software DVERK56 que implementa o Método

Runge-Kutta de quinta e sexta-ordem, discutido por Addison, Sharp e Gustafsson[37,38,39], dentre outros. Vantagens e desvantagens de tais métodos são extensivamente discutidas por estes autores.

Muito embora, o Método Runge-Kutta de quarta-ordem a passos constantes ou não, tenha mostrado eficiência, Shampine[06] e Addison[37] apontam restrições à sua aplicação. Cita-se por exemplo, funções que variam bruscamente no tempo, associadas à existência de diversas raízes entre os limites de integração. Em tais circunstâncias, surge a necessidade de redução do passo, nas vizinhanças das raízes, a cerca da metade do seu valor para manter a estabilidade numérica.

Em situações como esta, o desempenho de métodos que desenvolvem um certo número de avaliações da função por passo, pode ser seriamente afetado. Se uma razoável precisão for exigida, o tamanho do passo pode assumir valores reduzidos nas vizinhanças das raízes da função, obtendo-se como consequência, a propagação de erros de truncamento [37].

Contraposto a este efeito, surgem, com certa vantagem, os métodos de passos múltiplos como o Adams. Estes métodos utilizam um número menor de avaliações da função por passo, mantendo estabilidade numérica a passos maiores. Entretanto, diante de fontes de excitação descontínuas, métodos de passos múltiplos podem ter sua eficiência comprometida pelas constantes inicializações. A perda de eficiência decorre da obtenção de valores iniciais nas vizinhanças dos valores exatos, obtendo-se em consequência a propagação de erros sobre todo o intervalo de integração [37]. Isto torna os métodos explícitos Runge-Kutta preferíveis nestes casos.

Por outro lado, métodos como o das Acelerações Generalizadas de Newmark, Método de Houbolt e Wilson θ , apesar de incondicionalmente estáveis, apresentam o inconveniente de introduzir amortecimento fictício no vetor solução do sistema, proporcionando uma simulação não-consistente ou biasada. Este inconveniente é causado pela baixa precisão do método, uma vez que obtém-se o operador de aproximação através da expansão em Série de Taylor, até termos de terceira ordem, ao final de cada

passo de integração. Desta forma, o erro local que obtém-se é proporcional a uma potência de cinco do passo de integração [31].

O Método de Newmark, propriamente, não introduz amortecimento fictício no vetor solução do sistema. Observa-se que sua resposta é proporcional em amplitude, porém, a falta de precisão mediante respostas oscilantes, produz um alongamento no período das oscilações desviando a resposta dos valores verdadeiros.

O método Wilson θ , através do parâmetro θ , elimina componentes de alta frequência semelhante a um filtro passa-baixa. Estas componentes deixam de contribuir com energia para a resposta, provocando um decaimento na forma de amortecimento dos picos de amplitude da resposta. Isto produz resultados ainda mais biasados que o Método de Newmark.

Com isto, o que pretende-se mostrar é que a escolha de um método de integração adequado para o sistema não é uma tarefa simples. Ela depende tanto da fonte de excitação como das características dinâmicas do sistema. A Figura (4.1) ilustra o processo de simulação de uma forma esquemática:

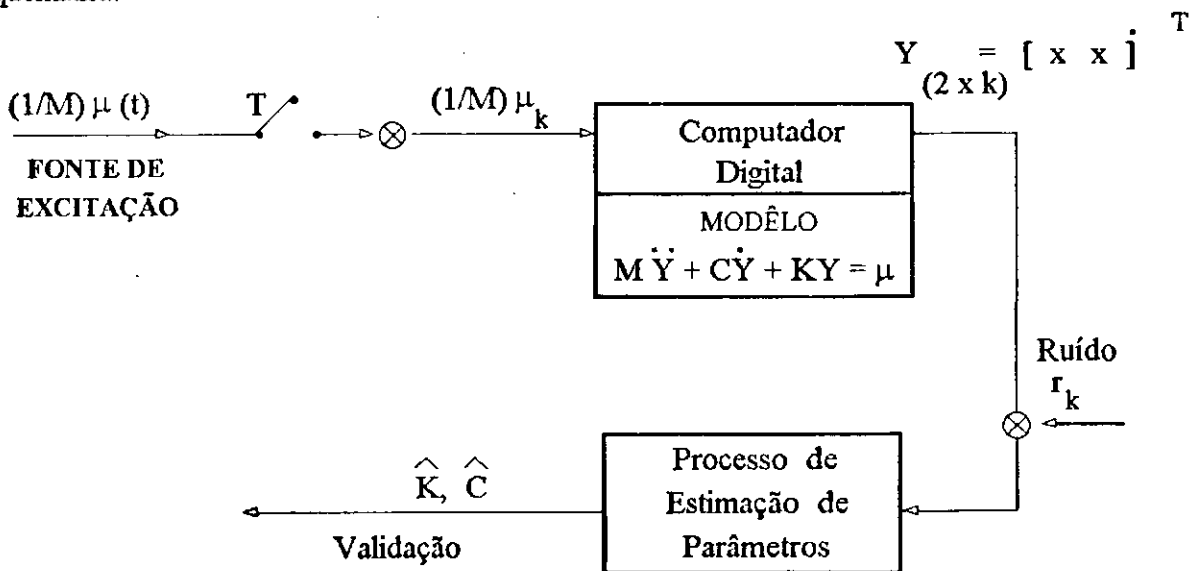


FIG. 4.1 Processo esquemático de simulação digital

Mostra-se nas Figuras (4.2a) e (4.2b) o sinal de excitação obtido no tempo para 128 pontos e seu espectro, respectivamente. Cada ponto é sintetizado a partir de harmônicas de amplitude igual a 10 Newtons, a intervalos de discretização de aproximadamente 0.05488 segundos.

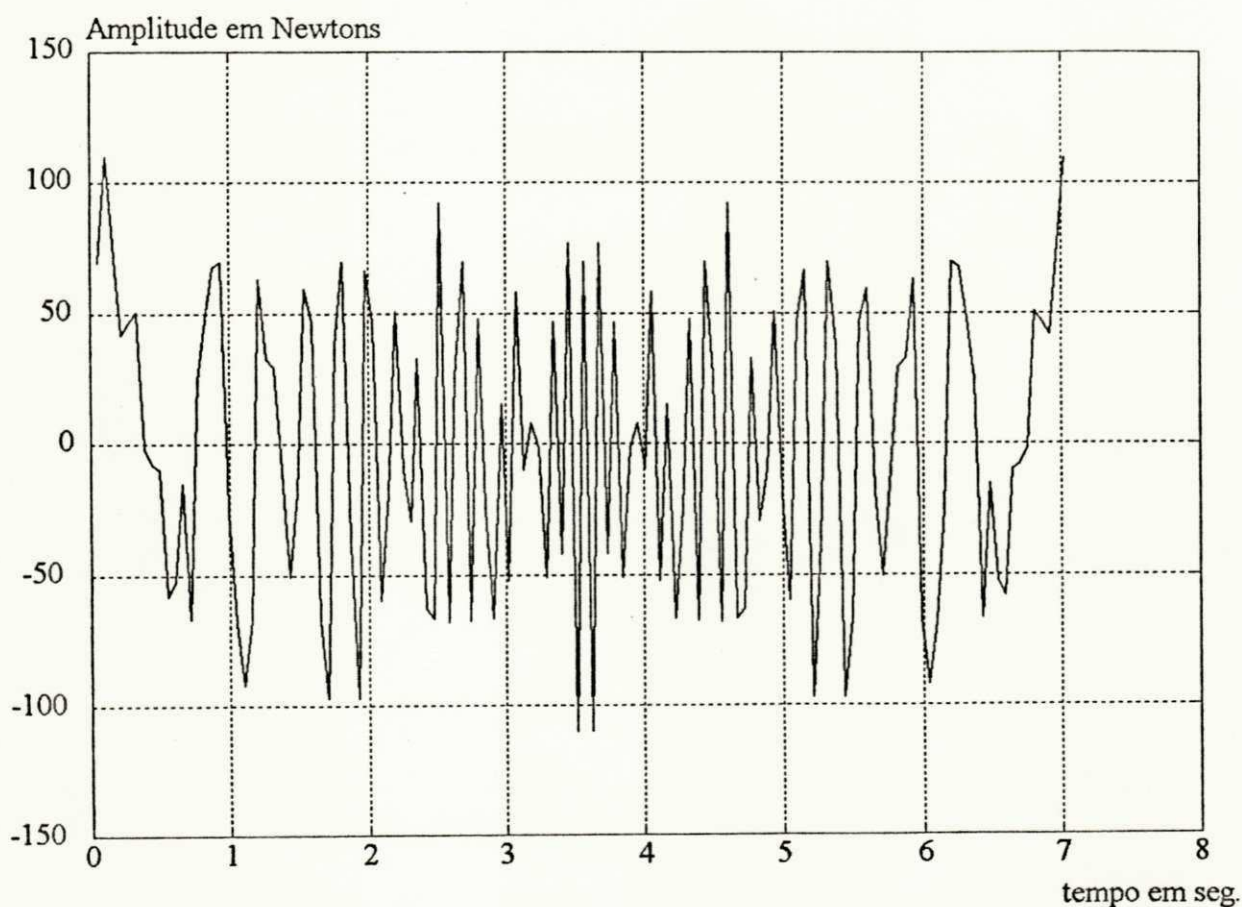


FIG. 4.2a Sinal de excitação no tempo (SPHS)

As características do sistema adotadas para simulação foram :

$$M = 10 \text{ Kg} \quad C = 30 \text{ N.s/m} \quad K = 800 \text{ N/m}$$

a partir das quais obtém-se a frequência natural do sistema

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = 8,944 \text{ rd/s}$$

Para ilustração da resposta do sistema adotou-se o período do sinal de excitação equivalente a dez vezes o período de vibrações livres do sistema. Isto equivale adotar o fator NPI = 10 (Vide item 4.2).

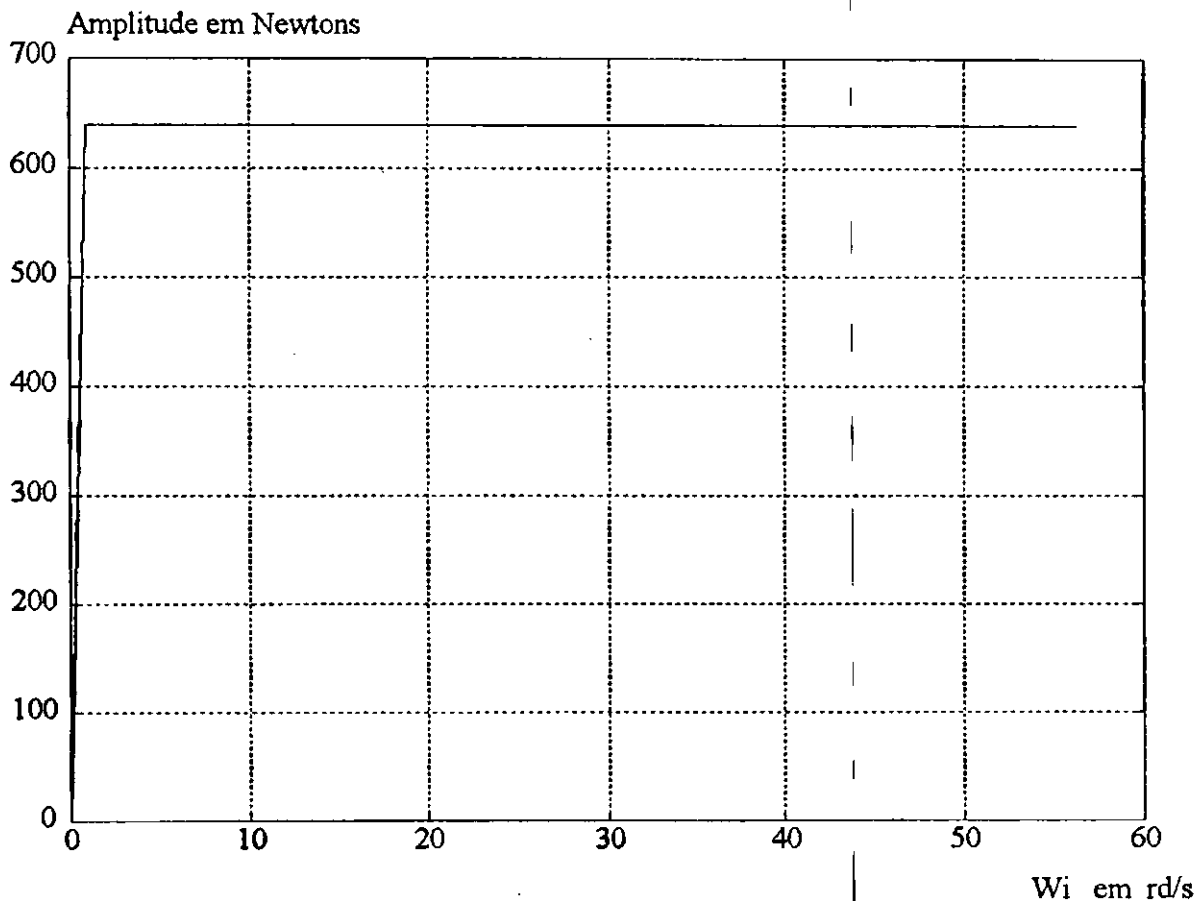


FIG. 4.2b Espectro do sinal de excitação (Largura de Banda de 56 rd/s)

A Figura 4.3 mostra a resposta em deslocamento do sistema a uma excitação com sinal sintetizado. Pode-se observar, através desta figura, o intervalo de tempo em que a fonte de excitação permaneceu atuando até prevalecer a resposta de estado permanente.

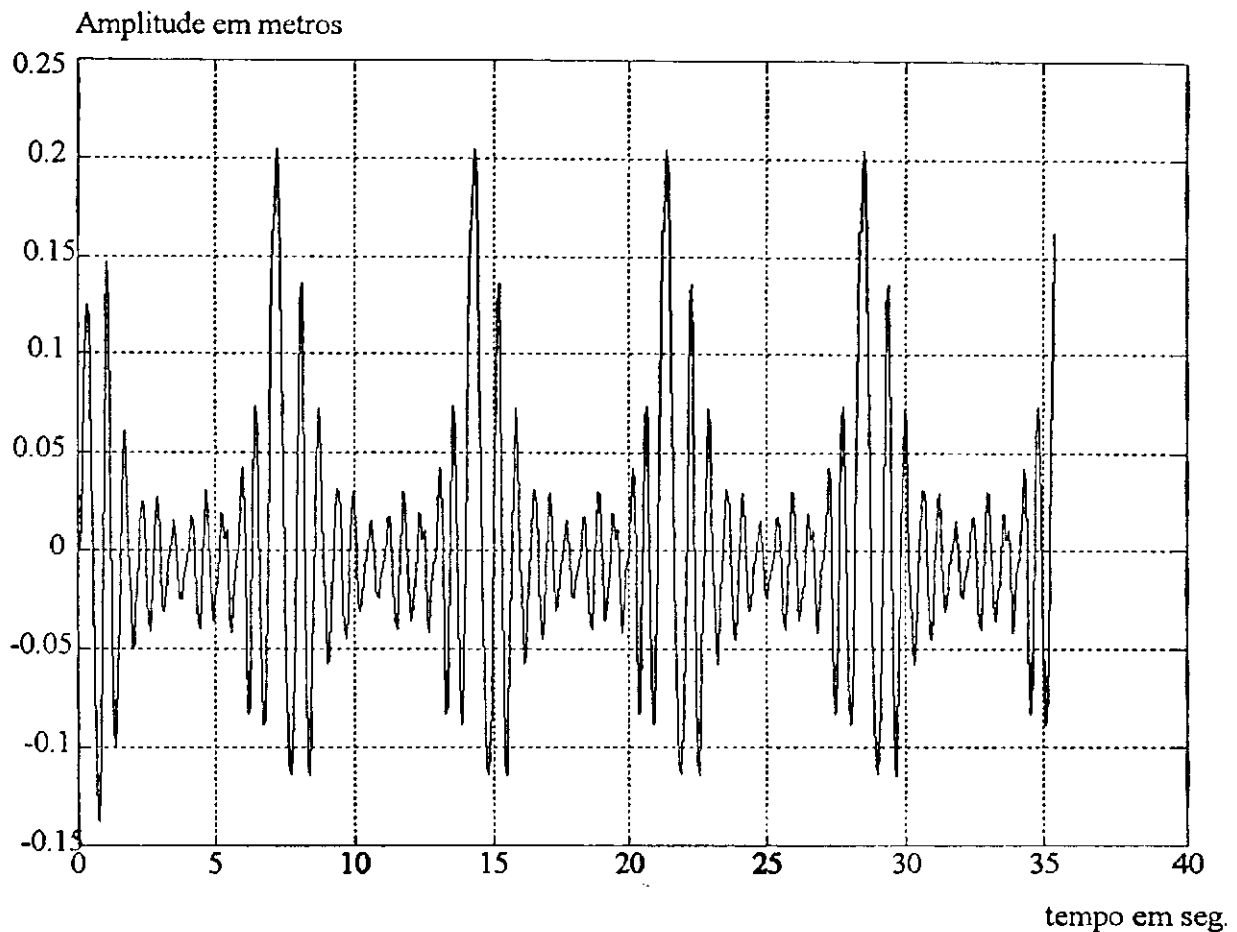


FIG. 4.3 Resposta em deslocamento no tempo a uma excitação com sinal sintetizado.

Entende-se por regime de estado permanente, a resposta obtida de forma proporcional à excitação. Uma vez atingida esta condição, pode-se afirmar que não existe transitórios superpostos à resposta do sistema, devido à condição inicial. Este efeito pode ser observado no primeiro período de oscilação da resposta (Figura 4.3) de zero a aproximadamente 7 segundos , cuja configuração difere da configuração dos períodos seguintes.

A resposta de regime permanente pode ser obtida estabelecendo-se uma tolerância para o desvio entre os valores da resposta, calculados entre os pontos de início de cada período.

A resposta natural do sistema em deslocamento (transitório), quando submetido a uma condição inicial de 0.001 metros com velocidade inicial nula, a partir da posição de equilíbrio, pode ser observada na Figura 4.4. O período de vibrações livres do sistema é dado por :

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}; \quad \text{onde } \xi = \frac{C}{2.M.\omega_n}$$

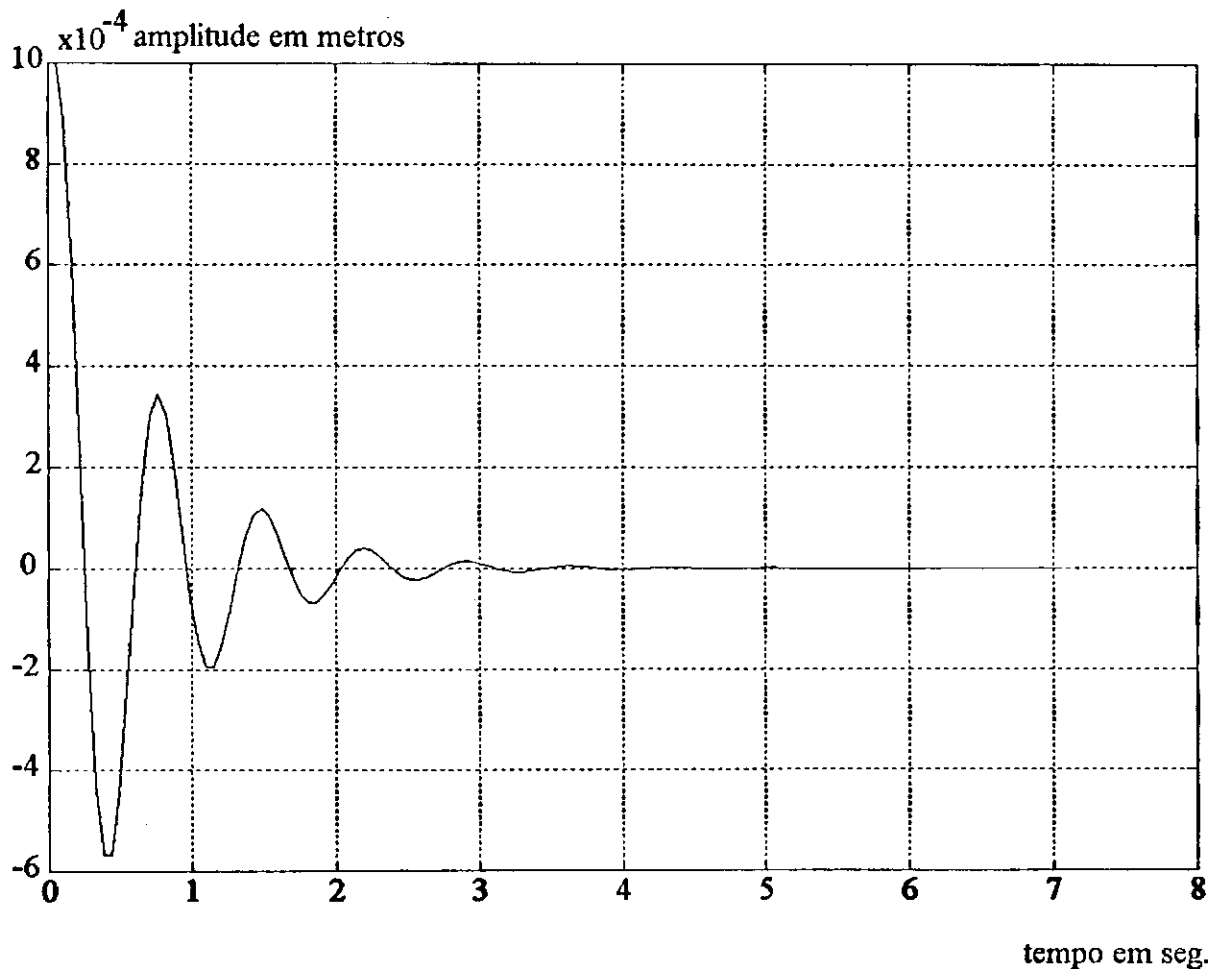


FIG. 4.4 Resposta livre em deslocamento do sistema a uma condição inicial (transitório).

Como pode-se observar, trata-se da vibração livre de um sistema não-conservativo, onde a amplitude de vibração assume valores decrescentes no decorrer do tempo.

Através da Figura 4.5 procurou-se destacar o último período da resposta em deslocamento (Figura 4.3), compreendido entre 28 e 35 segundos aproximadamente, onde considerou-se para este intervalo de tempo, a resposta livre de transitórios, e portanto, em estado permanente.

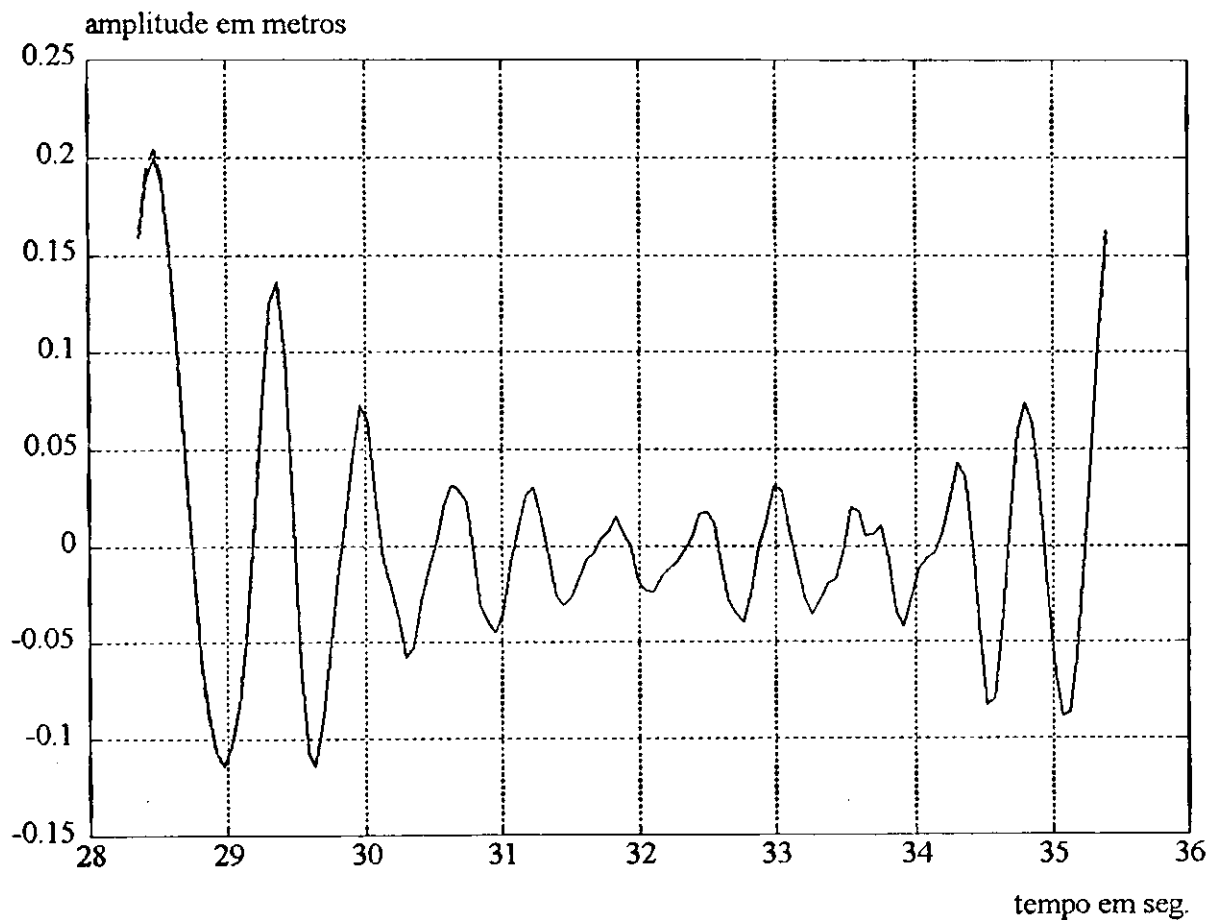


FIG. 4.5 Resposta em deslocamento de regime permanente a uma excitação com sinal sintetizado.

Cabe destacar, com relação à Figura 4.5, a existência de duas curvas superpostas, representantes da resposta de estado permanente. A distinção entre as duas curvas apresenta-se imperceptível devido à escala gráfica. Não obstante, mostra-se através da Figura 4.6, a magnitude do desvio entre as duas curvas de resposta.

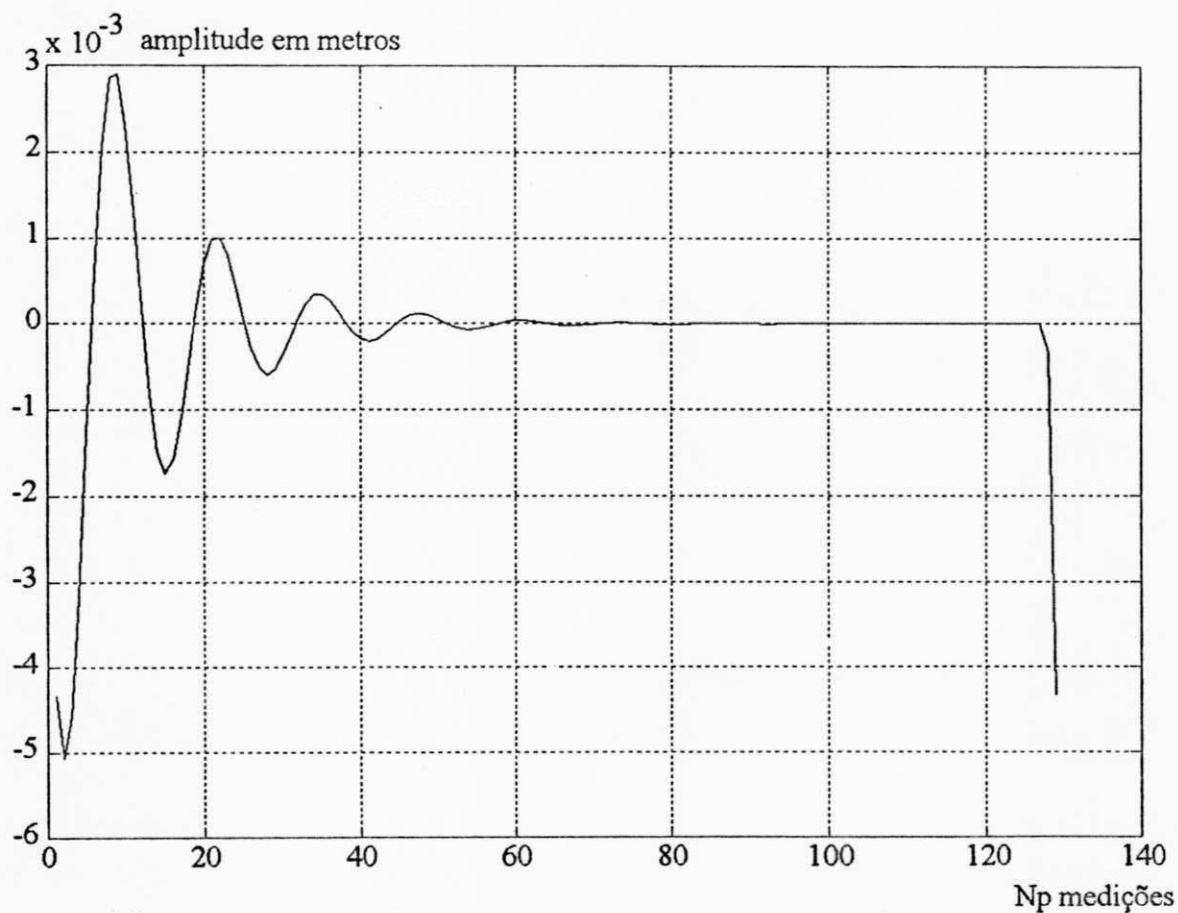


FIG. 4.6 Magnitude do desvio entre as respostas em deslocamento de regime permanente obtidas via compilador Fortran 77 e compilador C (MATLAB).

Através da Figura 4.6, procurou-se enfatizar os problemas de resolução numérica do aparato computacional utilizado, considerando-se a obtenção da resposta simulada utilizando-se dois compiladores distintos.

4.4. Contaminação do Vetor de Estado com Ruído Simulado

Neste item será dada ênfase às características do ruído a ser adicionado ao vetor de estado (equação (3.2.8)) que compõe a matriz das variáveis instrumentais (equação (3.5.8)) e por conseguinte, às variáveis de estado (equação (2.6.3.3.4)) que compõem o Filtro de Kalman (equação (2.6.3.3.11)).

A contaminação com ruído simulado na matriz ou vetor de estado, procura retratar de forma mais realística, dados mensuráveis de forma direta obtidos em situações reais. A questão que se coloca, entretanto, é o efeito e/ou influência do ruído no processo de estimação de parâmetros do sistema, quando o ruído é adicionado nas grandezas que se desejam medir. Algumas considerações com relação à influência do ruído já foram abordadas no Capítulo 2 (item 2.6.1).

O ruído que se adiciona ao processo de simulação do sistema é gerado de forma determinística. Para isso, utilizam-se sequências de números aleatórios no intervalo (0,1) [01]. Chaharbaghi [40] descreve técnicas utilizadas por um gerador de números randômicos de um sistema computacional de simulação (DSSL- DYNAMIC SYSTEMS SIMULATION LANGUAGE), utilizado na obtenção de sequências independentes de números aleatórios com baixa autocorrelação, e apresenta softwares para avaliação de propriedades estatísticas locais, buscando impor aos elementos da sequência, o grau mais elevado possível de randomicidade.

Neste trabalho, contaminou-se o vetor de estado utilizando-se uma sequência de números pseudo-randômicos gerada via MATLAB [47] (Gerador "RAND") cujas características estatísticas

aproximam-na de um ruído branco. A média da função de autocorrelação [41] para uma sequência de ruído pode ser obtida utilizando-se a função matlab "CORRCOEF" e aproxima-se de zero quando o ruído apresenta características de ruído branco.

A questão que envolve a utilização de ruído que assemelha-se ao ruído gaussiano-branco, advém da própria formulação teórica do Filtro de Kalman. Em situações reais, o ruído sobreposto ao vetor de estado (vetor de medições) é autocorrelacionado, e portanto, de natureza colorida [09]. Bem entendido, quando considera-se o ruído um processo estocástico estacionário do tipo gaussiano-branco, ficam evidenciadas restrições de natureza teórica à utilização do Filtro de Kalman neste caso. Em contrapartida, o esboço matemático para o estabelecimento do método de Kalman torna-se menos complexo, uma vez que a sequência de ruído fica caracterizada unicamente em termos dos seus momentos de primeira e segunda-ordem (média, variância e autocovariância). Neste caso pode-se escrever :

$$\begin{aligned} \text{média} & \Rightarrow E [V_k] = 0 \\ \text{variância} & \Rightarrow \text{Var} [V_k] = \text{CONSTANTE} \end{aligned}$$

onde a autocovariância depende unicamente do número de intervalos de tempo entre as medições.

A Figura 4.7 mostra a sequência de ruído obtida no tempo com 128 elementos e sua densidade espectral (Transformada de Fourier da Função de Autocorrelação), Figura 4.8.

A resposta de regime permanente com aproximadamente 10.0 % (RMS) de ruído sobreposto, pode ser vista através da Figura 4.9.

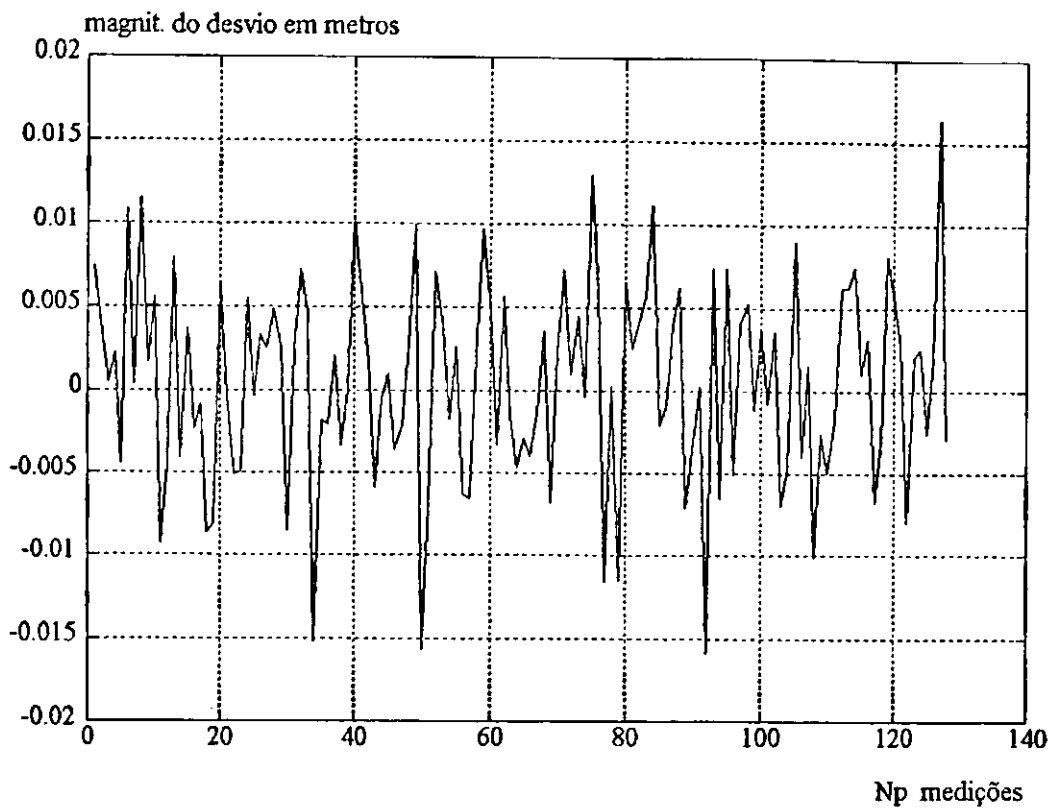


FIG. 4.7 Ruído simulado no tempo

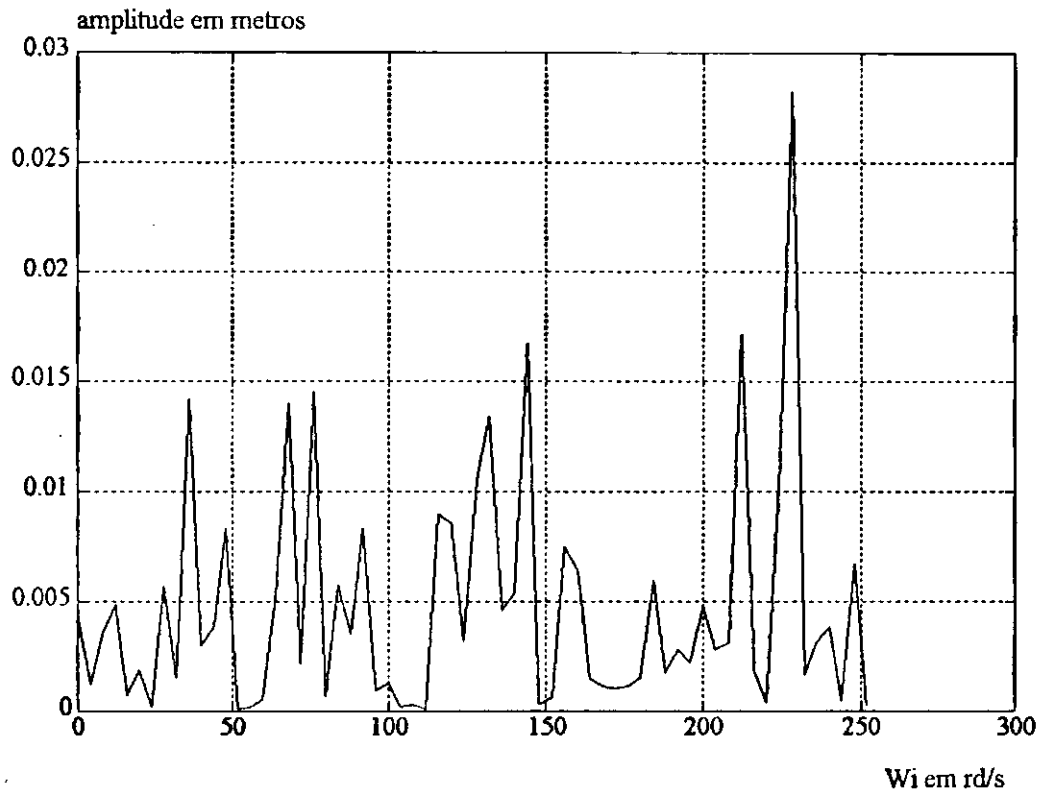
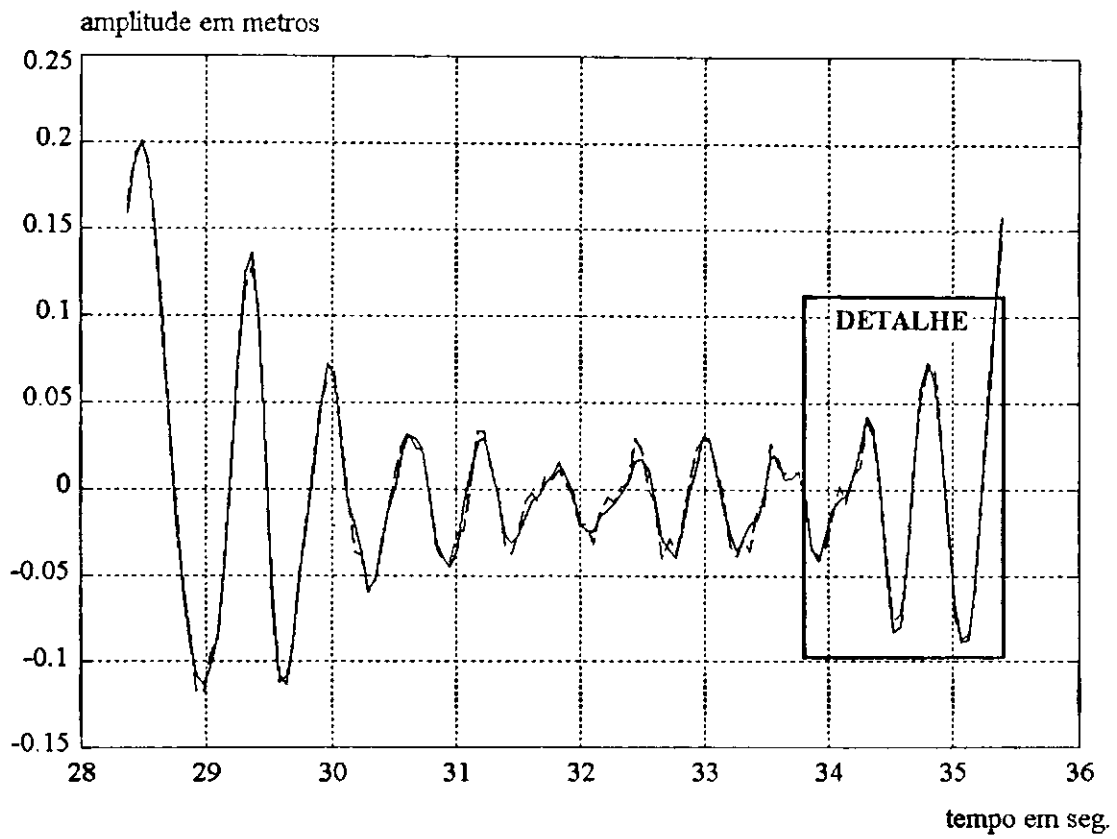


FIG. 4.8 Densidade espectral de potência da sequência de ruído



DETALHE

----- Com Ruído

———— Sem Ruído

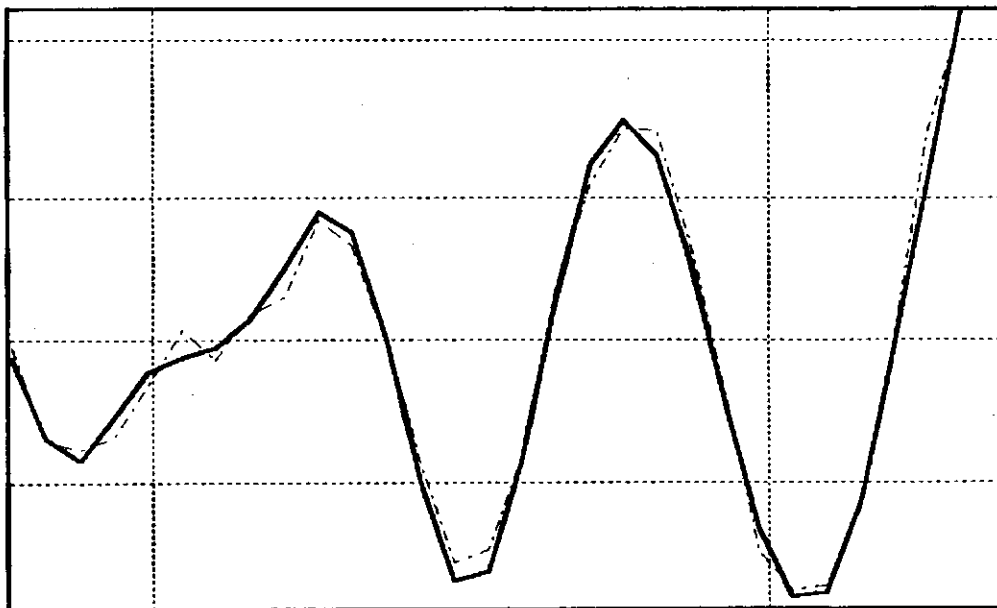


FIG. 4.9 Resposta em deslocamento de regime permanente com nível de ruído sobreposto em torno de 10 % RMS

4.5 Apresentação dos Resultados

Neste ítem são apresentados resultados do problema de estimação de parâmetros de sistemas mecânicos utilizando-se o Filtro de Kalman em conjunção com o Estimador das Variáveis Instrumentais.

4.5.1 Metodologia de Análise

A metodologia empregada para obtenção dos resultados apresentados, foi desenvolvida da seguinte maneira:

- i. Inicialmente, buscando-se uma primeira visão da eficiência da técnica de estimação em estudo, adotou-se um nível 10 % RMS de ruído, sobreposto aos sinais de deslocamento e velocidade, e aplicou-se o procedimento descrito no próximo ítem.
- ii. Tomou-se, de acordo com a metodologia empregada para discretização de sinais (ítem 4.2), valores de NPI no intervalo de 1 a 10, sendo que para cada valor de NPI foi feita uma varredura com número de pontos de discretização N_p variando entre 64 e 260 pontos. Pode-se observar (ítem 4.2) que uma variação em N_p , para um dado NPI, equivale a obter-se intervalos de tempo de discretização diferentes para um mesmo período do sinal de excitação (Anexo II).
- iii. Calculou-se, tendo-se em vista o que foi exposto em "ii", o erro cometido na estimação dos elementos da matriz ϕ , expressão (3.5.5), relacionados com K e C através da aproximação de Taylor de primeira ordem.
- iv. A partir dos primeiros resultados obtidos, mostrados no Anexo II, realizou-se uma varredura em porcentagem RMS de ruído, para valores de N_p e NPI, cujos resultados de estimação foram considerados passíveis de discussão (Anexo III). Neste caso adotou-se como critério para seleção dos

valores de N_p e N_{PI} : os casos onde conseguiram-se melhores resultados de estimação utilizando-se o Filtro de Kalman e os casos em que o Filtro de Kalman apenas proporcionou resultados equivalentes aos do Método das Variáveis Instrumentais. Esses valores e seus respectivos resultados encontram-se em destaque nas tabelas do Anexo II.

- v. A partir dos resultados obtidos para valores de $N_{PI} = 5$ e $N_p = 92$, utilizando-se a conjunção do Filtro de Kalman com Variáveis Instrumentais, verificou-se a superioridade deste método em relação aos demais. Neste caso efetuou-se uma varredura para diversos coeficientes de amortecimento (do subamortecimento ao amortecimento crítico), buscando-se avaliar o comportamento da técnica segundo este aspecto.

- vi. Finalmente, analisou-se os resultados das estimativas quando utilizou-se a conjunção de Mínimos Quadrados não recursivo com o Filtro de Kalman (Anexos IV e V). Buscou-se deste modo, avaliar a influência das características estatísticas do ruído nas estimativas, uma vez que, ao utilizar-se a conjunção com Mínimos Quadrados neste caso, o vetor de medições do Filtro de Kalman, expressão (2.6.3.3.4), é o próprio vetor de estado sobreposto ao ruído, ao passo que, a conjugar-se com Variáveis Instrumentais, o vetor de medição do filtro passa a ser composto de instrumentos obtidos da última iteração.

4.5.2 Considerações

De acordo com o que foi exposto no item anterior, buscou-se avaliar o desempenho da conjunção entre o Filtro de Kalman e o Estimador das Variáveis Instrumentais, onde procurou-se examinar o comportamento da técnica de estimação quando se varia o intervalo de tempo de discretização em determinadas faixas de frequência do sinal de excitação. O critério utilizado para este fim encontra-se bem posto na referência [01].

As equações utilizadas para verificação da técnica de estimação de parâmetros em estudo, considerando-se valores teóricos adotados para simulação (ítem 4.3), são :

$$\begin{bmatrix} x_2 & \dot{x}_2 \\ x_3 & \dot{x}_3 \\ x_4 & \dot{x}_4 \\ \vdots & \vdots \\ x_{k+1} & \dot{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \dot{x}_1 & \mu_1 \\ x_2 & \dot{x}_2 & \mu_2 \\ x_3 & \dot{x}_3 & \mu_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k & \dot{x}_k & \mu_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -80T \\ T & 1-3T \\ 0 & T/10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{x_1} & \Gamma_{\dot{x}_1} \\ \Gamma_{x_2} & \Gamma_{\dot{x}_2} \\ \Gamma_{x_3} & \Gamma_{\dot{x}_3} \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma_{x_k} & \Gamma_{\dot{x}_k} \end{bmatrix} \quad (4.5.2.1)$$

com a matriz dos parâmetros do modelo discreto, dada por :

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \\ \phi_{31} & \phi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{K}{M}T \\ T & 1-\frac{C}{M}T \\ 0 & T/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -80T \\ T & 1-3T \\ 0 & T/10 \end{bmatrix} \quad (4.5.2.2)$$

equivalente à versão discretizada da equação de estado do sistema na forma compacta , equação (3.5.5) .

A equação recursiva que implementa o Método de Kalman Padrão , expressão (2.6.3.3.10), é da forma :

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\dot{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ -\frac{\hat{K}T}{10} & -\frac{\hat{C}}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{\dot{x}}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T \\ 10 \end{bmatrix} \mu_{k-1} + \bar{K}_k \left\{ Z_k - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{\dot{x}}_{k-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T \\ 10 \end{bmatrix} \mu_{k-1} \right\} \quad (4.5.2.3)$$

Deve-se observar que o termo \bar{K}_k na expressão (4.5.2.3) representa o ganho ótimo de estado permanente obtido através da expressão (3.8.D-Apêndice D) e a configuração da expressão (4.5.2.2) decorre da aproximação de primeira ordem, via Série de Taylor (item 3.4), tomada para discretização da equação de estado do sistema.

No Capítulo 2 (item 2.5.2), tratou-se do problema de sistemas para simulação, uma vez que a eficiência dos métodos de estimação de parâmetros depende da busca criteriosa para obtenção de um intervalo de tempo de discretização adequado. Com isso, procura-se obter uma representação conveniente de sinais de sistemas na forma discretizada, sem contudo descaracterizar a dinâmica do processo causada por perdas de informações entre os instantes discretos de tempo.

Uma alternativa para se contornar o problema [23] é estabelecer um limite superior para o intervalo de tempo de discretização em função dos autovalores do sistema. Acima deste limite corre-se o risco de perder informações sobre a dinâmica do processo, obtendo-se como consequência a impossibilidade de reconstituição da forma contínua dos sinais a partir da versão discretizada (Apêndice B)

Uma vez estabelecido o limite superior para o intervalo de tempo de discretização, o valor adequado deve situar-se abaixo desse limite. No entanto, deve-se precaver quanto ao uso de intervalos discretos demasiadamente pequenos, uma vez que isto pressupõe amostragem demasiadamente rápida, e portanto, mais susceptível à introdução de ruídos [03].

A determinação do limite superior para o intervalo de discretização pode ser feita tomando-se a matriz dinâmica do sistema, expressão (3.2.8) usada para verificação do método, e calculando-se seus autovalores :

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -80 & -3 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são :

$$\lambda_1 = -1,5000 + 8,8176i \quad \lambda_2 = -1,5000 - 8,8176i$$

onde, através do item 2.5.2, pode-se escrever :

$$T \leq \frac{1}{2|\rho_1|} = 0,3333 \quad \text{ou} \quad T = \frac{\pi}{4\text{Im}(\lambda_1)} = 0,0891$$

A partir destes valores, toma-se como limite superior para o intervalo de tempo de discretização, o menor valor obtido, isto é, $T=0,0891$.

Os valores obtidos segundo este critério para intervalo de tempo de discretização ou amostragem, asseguram que a resposta do sistema representa convenientemente uma exponencial ($T \leq 0,3333$) e um movimento oscilatório ($T \leq 0,0891$). Vale salientar que em aplicações práticas envolvendo o problema de caracterização de sistemas, não se tem conhecimento dos parâmetros que compõem a matriz dinâmica ϕ . Neste caso os cálculos foram obtidos a partir de parâmetros teóricos com o intuito de preservar a inviolabilidade do limite superior durante toda análise.

Em situações reais, um critério que pode ser utilizado na busca por um intervalo de tempo de discretização adequado, relaciona-se com o período de vibrações livres do sistema e com a faixa de frequência do sinal de excitação. De acordo com o que mostrou-se no item 4.2, deve-se garantir que as frequências naturais do sistema situem-se dentro dessa faixa. Este procedimento torna-se possível quando se tem conhecimento a priori da dinâmica do sistema, seja pela estrutura física do sistema, seja pela análise espectral da resposta.

Considerando-se o critério relacionado com a faixa de frequência do sinal de excitação utilizado neste trabalho, a análise envolve decomposição espectral dos sinais de entrada e saída (Apêndice

B). Com isto pode-se decidir sobre a faixa de frequência a ser adotada, considerando-se o conteúdo frequencial do sinal de excitação.

Outros critérios podem ser apontados. Cita-se um critério proposto por Ljung [03], referindo-se à utilização de um valor aproximadamente igual a dez vezes a banda passante do sistema, estipulada, em determinados casos [18], para o ponto de meia potência do espectro da resposta em deslocamento do sistema . Entende-se por banda passante de um sistema, o espectro de sua resposta impulsional.

Outro aspecto a ser ressaltado diz respeito ao problema de estimação da massa do sistema. No início deste trabalho, atribuiu-se ao problema de caracterização do sistema, a dificuldade que surge na obtenção de certos parâmetros via medição direta. Não obstante, com base no modelo adotado neste estudo, há de se considerar, em determinados casos, a possibilidade de trabalhar-se com a massa do sistema concentrada em um único ponto, sem conseqüente perda de generalidade para a análise.

Em tais situações, é mais conveniente obter-se a massa do sistema via medição direta e aplicar-se técnicas de estimação na obtenção dos demais parâmetros. Este procedimento foi adotado neste trabalho, onde considerou-se apenas estimação dos coeficientes de rigidez e amortecimento. Para finalizar esta discussão, um último aspecto deve ser ressaltado e diz respeito à relação existente entre o erro de estimação de parâmetros do modelo matemático contínuo e do modelo matemático discreto. Esta distinção deve ficar suficientemente clara, uma vez que busca-se com este trabalho, investigar a eficiência de uma técnica de estimação medida a partir do erro cometido na obtenção dos elementos da matriz ϕ , expressão (4.5.2.2), mais precisamente ϕ_{12} e ϕ_{22} .

O erro cometido na obtenção dos parâmetros K e C , expressão (3.2.1), figurantes do modelo matemático contínuo, depende do erro cometido na obtenção de ϕ_{12} e ϕ_{22} , expressão (4.5.2.2), e do tipo de aproximação tomada para discretização do modelo contínuo (item 3.4). Deste modo, não se pode atribuir este erro à técnica de estimação.

As relações existentes para o erro de estimação entre \hat{K} e $\hat{\phi}_{12}$, e entre \hat{C} e $\hat{\phi}_{22}$, podem facilmente ser demonstradas através de relações extraídas da expressão (4.5.2.2), ou seja,

$$\hat{\phi}_{12} = -\frac{\hat{K}}{M} T \quad , \quad \hat{\phi}_{22} = 1 - \frac{\hat{C}}{M} T \quad (4.5.2.4)$$

De acordo com a expressão (3.5.11), o erro cometido na estimação dos elementos da matriz ϕ pode ser dado por :

$$\varepsilon_{\hat{\phi}_{12}} = \left| \frac{\phi_{12} - \hat{\phi}_{12}}{\phi_{12}} \right| * 100 \quad e \quad \varepsilon_{\hat{\phi}_{22}} = \left| \frac{\phi_{22} - \hat{\phi}_{22}}{\phi_{22}} \right| * 100 \quad (4.5.2.5)$$

Extraindo-se o valor de \hat{C} e \hat{K} em (4.5.2.4), e calculando-se o erro de estimação de acordo com (3.5.11), ou seja

$$\varepsilon_{\hat{K}} = \left| \frac{K - \hat{K}}{K} \right| * 100 \quad , \quad \varepsilon_{\hat{C}} = \left| \frac{C - \hat{C}}{C} \right| * 100 \quad (4.5.2.6)$$

pode-se substituir estes valores nas expressões (4.5.2.6), para o erro em \hat{C} e \hat{K} , e obter-se a expressão para o erro de estimação cometido na obtenção de \hat{C} e \hat{K} a partir dos elementos da matriz ϕ teórica e ϕ estimada dados por :

$$\varepsilon_{\hat{K}} = \left| \frac{\phi_{12} - \hat{\phi}_{12}}{\phi_{12}} \right| * 100 \quad , \quad \varepsilon_{\hat{C}} = \left| \frac{\phi_{22} - \hat{\phi}_{22}}{1 - \phi_{22}} \right| * 100 \quad (4.5.2.7)$$

De acordo com os resultados obtidos para o erro em \hat{C} e \hat{K} , expressões (4.5.2.7), pode-se concluir que o erro cometido pelo processo de estimação na obtenção do elemento ϕ_{12} é igual ao erro calculado para o coeficiente \hat{K} , bastando comparar-se a respectiva expressão em (4.5.2.6) com a

expressão em (4.5.2.5). Entretanto, com relação ao parâmetro \hat{C} isto não ocorre e pode ser verificado comparando-se a respectiva expressão em (4.5.2.7) com a expressão em (4.5.2.5).

Com isto procurou-se justificar a apresentação dos resultados de estimação, mostrados nas tabelas dos anexos II, III, IV e V, onde foram designados os termos $\varepsilon \hat{K}$ e $\varepsilon \hat{\phi}_{12}$ bem como $\varepsilon \hat{C}$ e $\varepsilon \hat{\phi}_{22}$ para que se faça a distinção entre o erro de estimação dos parâmetros de modelo contínuo e do modelo discreto, respectivamente. Neste caso, ao verificar-se a eficiência da técnica de estimação, utiliza-se apenas os valores do erro relativo indicados por $\varepsilon \hat{\phi}_{12}$ e $\varepsilon \hat{\phi}_{22}$.

Com base na discussão feita anteriormente, considerando-se a aproximação de Taylor de primeira ordem, utilizada neste trabalho, pode-se mostrar que a diferença entre os valores do erro calculados para \hat{C} e $\hat{\phi}_{22}$ é função do intervalo de tempo de discretização. Acrescenta-se a isto a existência de um determinado valor do coeficiente de amortecimento para a qual esta diferença é muito pequena. Neste sentido basta estabelecer uma relação entre as expressões (4.5.2.7) e (4.5.2.5) para \hat{C} e $\hat{\phi}_{22}$, onde obtém-se :

$$\frac{\varepsilon \hat{C}}{\varepsilon \hat{\phi}_{22}} = \frac{\phi_{22}}{1 - \phi_{22}}$$

donde

$$\varepsilon \hat{C} = \varepsilon \hat{\phi}_{22} \left(\frac{\phi_{22}}{1 - \phi_{22}} \right) \quad (4.5.2.8)$$

De posse do resultado anterior, expressão (4.5.2.8), e considerando-se que a diferença entre $\varepsilon \hat{C}$ e $\varepsilon \hat{\phi}_{22}$ tende para zero quando $\varepsilon \hat{C} / \varepsilon \hat{\phi}_{22}$ tende para um, pode-se afirmar que :

$$\frac{\phi_{22}}{1 - \phi_{22}} = \frac{M}{C.T} - 1 \quad (4.5.2.9)$$

tende para um, quando $M/C.T$ tende para dois. Neste caso pode-se calcular, em função do intervalo de tempo de discretização, o valor do coeficiente de amortecimento para qual a diferença entre \hat{C} e $\hat{\phi}_{22}$ é pequena.

$$C = \frac{M}{2.T} = \frac{10}{2 * 0,0382} = 130,8901 \frac{N.s}{m}$$

Este resultado pode ser comprovado observando-se os resultados obtidos e mostrados na tabela 03 do Anexo II, para $C = 130 \text{ N.s/m}$. Verifica-se que a diferença entre os erros representados por $\varepsilon_{\hat{C}}$ e $\varepsilon_{\hat{\phi}_{22}}$ é relativamente pequena, e isto constitui um aspecto importante a ser considerado quando se está diante do problema de estimação de parâmetros de modelos contínuos a partir da simulação do modelo discreto.

Muito embora esta análise não esteja contida nos objetivos do trabalho, cabe destacar que os parâmetros do modelo auxiliar, utilizados pelo Método das Variáveis Instrumentais, e os parâmetros utilizados na síntese do Filtro de Kalman para obtenção de novos instrumentos, contém erro oriundo do tipo de aproximação utilizada para discretização e conseqüentemente pode resultar em modelagem inadequada do Filtro.

4.5.3 Resultados e Discussões

Considerando-se os aspectos enfocados nos itens anteriores, apresenta-se neste item, resultados do problema de estimação de parâmetros obtidos através da técnica de estimação em estudo.

Segundo a metodologia adotada para análise, delineada no item 4.5.1 deste Capítulo, resultados obtidos utilizando-se a conjunção do Estimador das Variáveis Instrumentais com o Filtro de

Kalman são confrontados com resultados obtidos através da utilização do Estimador dos Mínimos Quadrados e das Variáveis Instrumentais utilizados separadamente.

Através dos resultados apresentados nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13, pode-se observar o erro relativo cometido nas estimativas dos elementos ϕ_{12} e ϕ_{22} , para valores $NPI = 1$ e $NPI = 5$, quando adota-se um nível 10 % RMS de ruído sobreposto aos sinais de saída.

Analisando-se as Figuras 4.10 e 4.11, para $\hat{\phi}_{12}$ e $\hat{\phi}_{22}$ respectivamente, constatou-se que a conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman não melhorou os resultados obtidos via Variáveis Instrumentais unicamente. Acredita-se que elevadas faixas de frequência do sinal de excitação, adequadas à utilização do Método das Variáveis Instrumentais, a constatar-se pela magnitude do erro apontado, impossibilita a obtenção de melhores resultados, obtidos via conjunção, pelo processamento numérico desencadeado no Filtro de Kalman.

Um aspecto importante pode ser destacado com relação às Figuras 4.12 e 4.13. Nestas figuras são mostrados resultados da conjunção em condições idênticas às apresentadas pelas Figuras 4.10 e 4.11, exceto por ter sido utilizado um valor $NPI = 5$. Pela magnitude dos erros observados no esboço gráfico, verifica-se a superioridade dos resultados proporcionados pela conjunção, para valores de Np menores que 160.

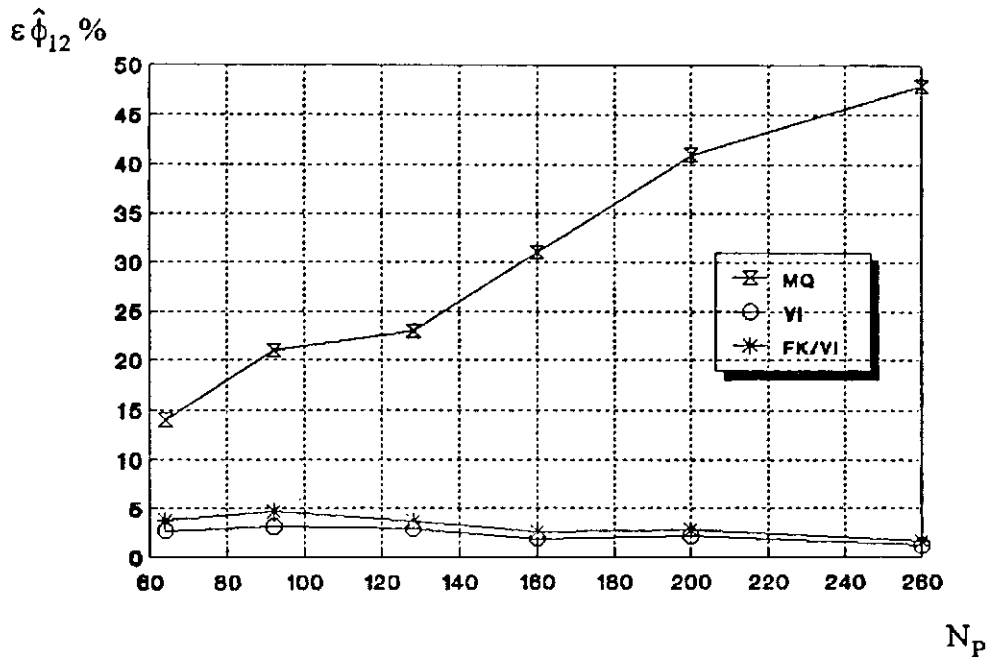


FIG. 4.10 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de N_p , 10 % RMS de ruído e $NPI = 1$

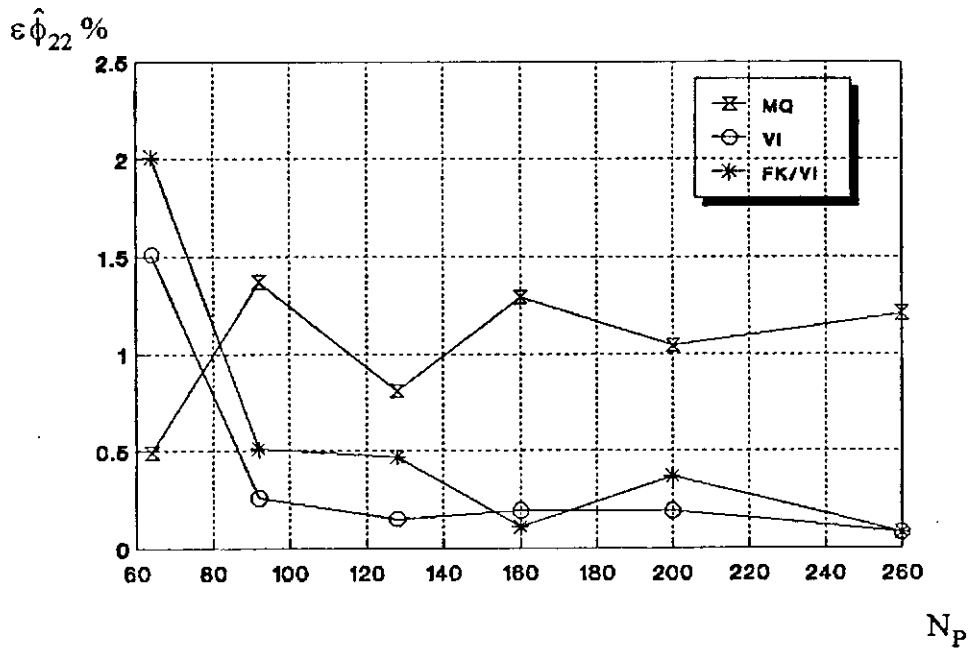


FIG. 4.11 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de N_p , 10 % RMS de ruído e $NPI = 1$

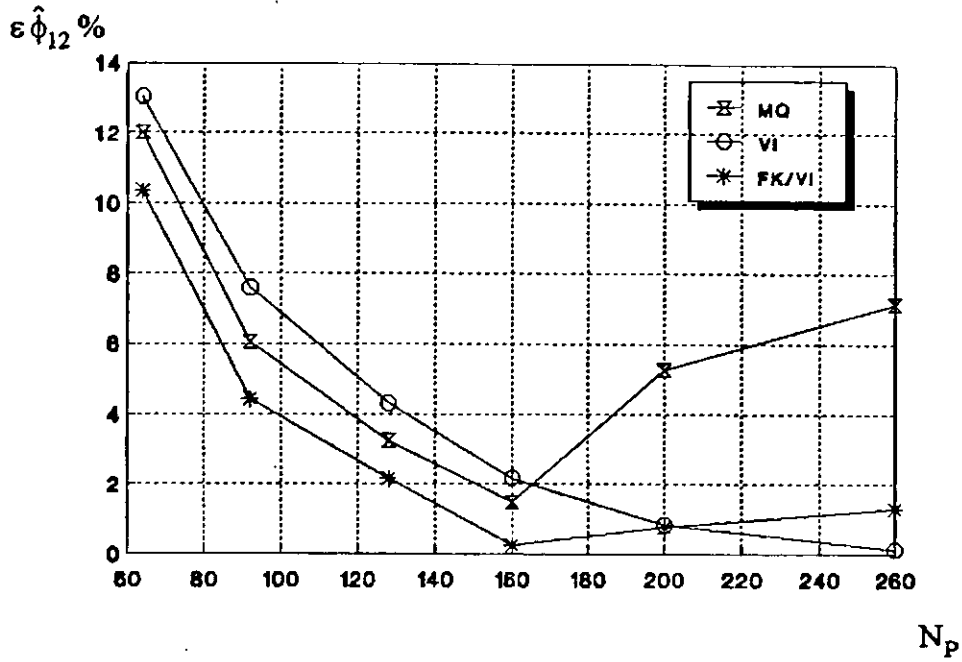


FIG. 4.12 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de N_p , 10 % RMS de ruído e $NPI = 5$

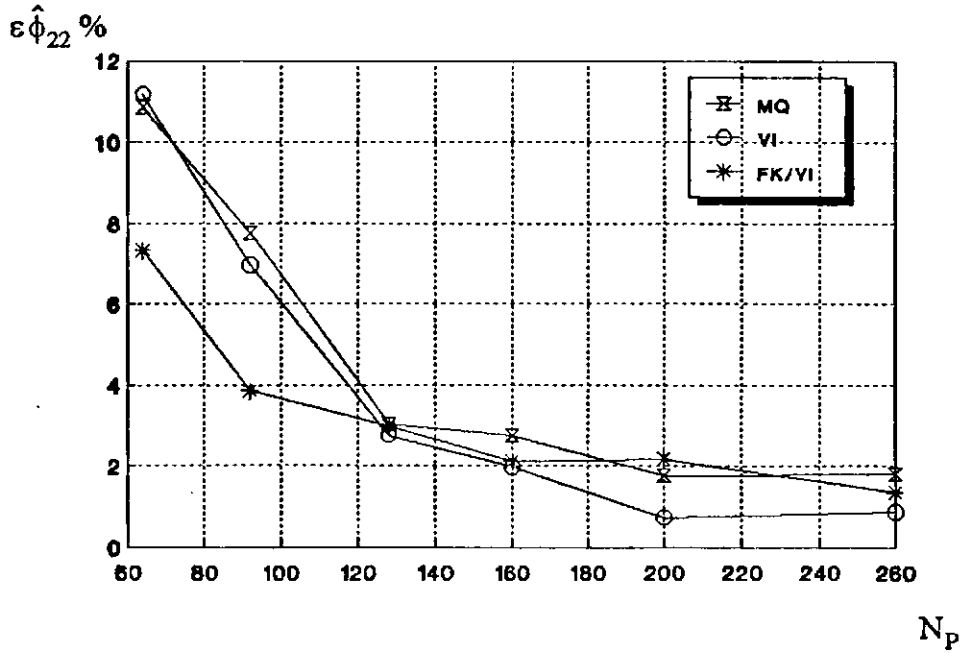


FIG. 4.13 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de N_p , 10 % RMS de ruído e $NPI = 5$.

Por outro lado, observando-se cuidadosamente as tabelas do Anexo II, constata-se que, para faixas de frequências decrescentes (NPI aumentando), o erro nas estimativas cresce paulatinamente quando utiliza-se o Método das Variáveis Instrumentais e sua conjugação com o Filtro de Kalman. Esta tendência atenuou-se bastante com o aumento da taxa de amostragem (obtido quando aumenta-se o valor de N_p), ou seja, com a diminuição do valor do intervalo de tempo de discretização.

As Figuras 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17 mostram este efeito de forma mais clara. O comportamento do erro nas estimativas de ϕ_{12} e ϕ_{22} é mostrado para $N_p = 260$ e $N_p = 92$, quando promove-se uma varredura sobre os valores de NPI de um a dez . Neste caso, pode-se verificar que a conjugação de Variáveis Instrumentais com Filtro de Kalman, utilizando-se taxas de amostragem relativamente elevadas ($N_p = 260$), mostradas nas Figuras 4.14 e 4.15, não proporciona resultados melhores por Variáveis Instrumentais unicamente. Entretanto, a magnitude do erro para ambos os métodos é muito pequena, recaindo a justificativa sobre os supostos problemas de ordem numérica mencionados anteriormente.

Observando-se as figuras 4.16 e 4.17, verifica-se que para taxas de amostragem relativamente menores ($N_p = 92$), os resultados proporcionados pela conjugação dos estimadores apresentam-se significativamente melhores, com o erro mostrando-se sempre inferior a 10 %, para todas as faixas de frequência adotadas. A partir dos resultados mostrados até o presente momento, constatou-se a ocorrência de um bom desempenho da conjugação do Método das Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman.

A técnica de estimação de parâmetros estudada mostrou-se eficiente em todas as faixas de frequência adotadas, em detrimento do Método das Variáveis Instrumentais e dos Mínimos Quadrados, que apresentaram melhores resultados para altas e baixas frequências do sinal de excitação, respectivamente.

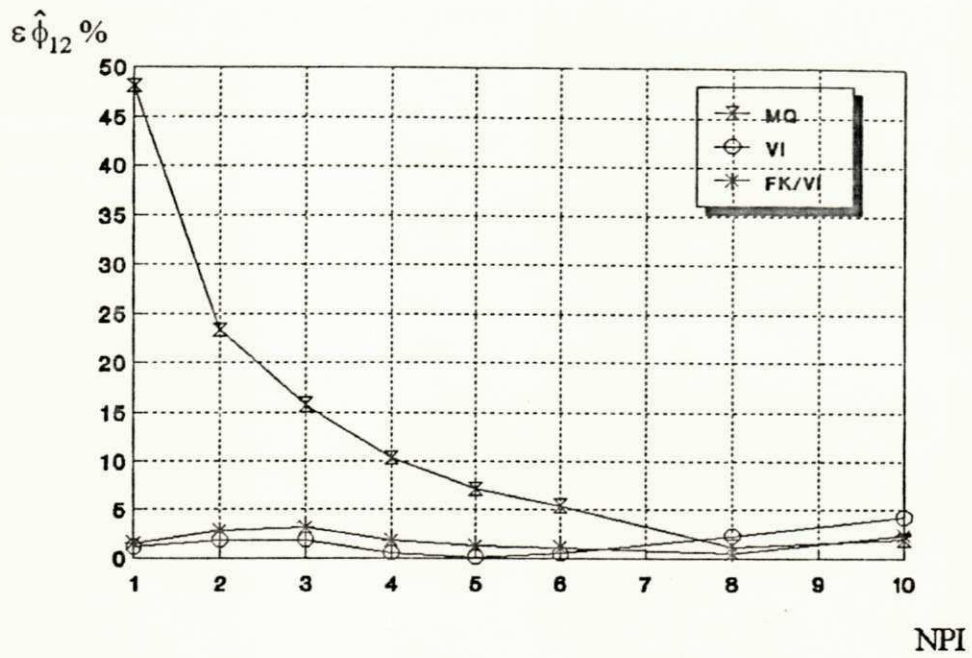


FIG. 4.14 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de NPI, 10 %
RMS de ruído e $N_p = 260$

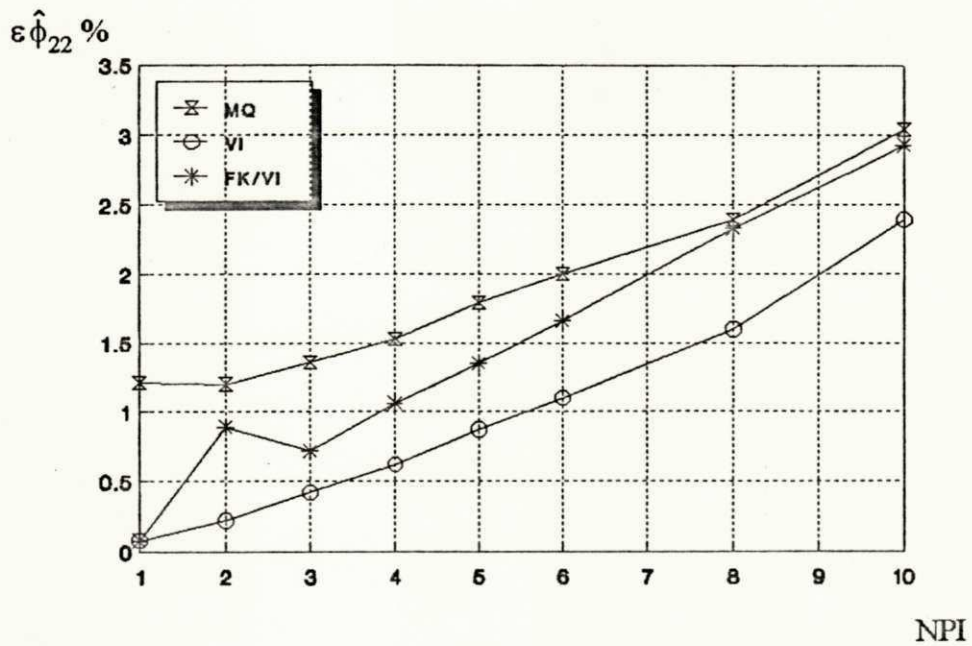


FIG. 4.15 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de NPI, 10 %
RMS de ruído e $N_p = 260$.

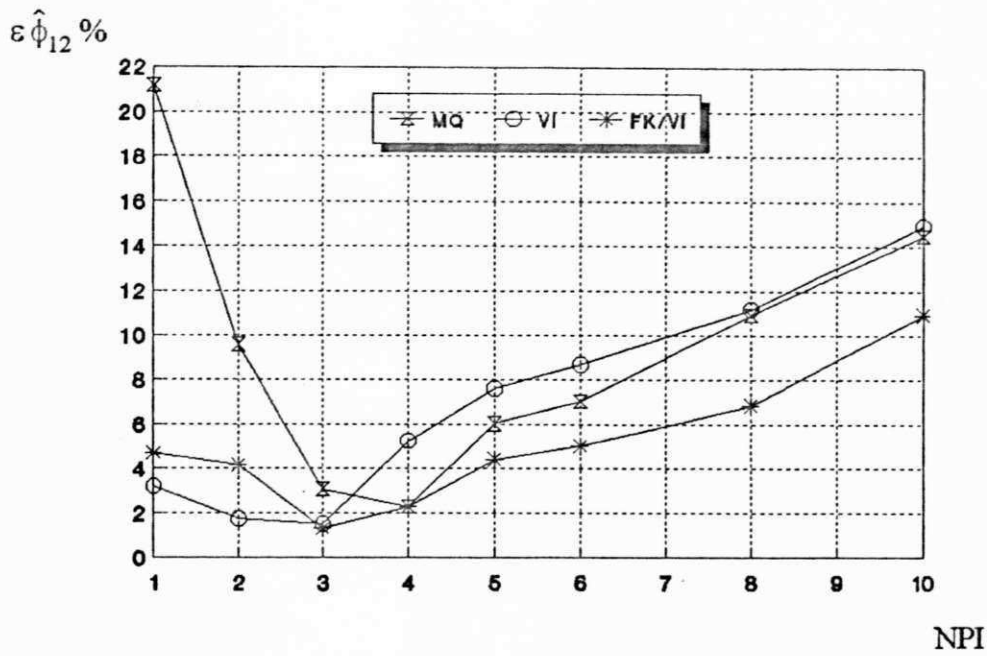


FIG. 4.16 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de NPI, 10 % RMS de ruído e $N_p = 92$.

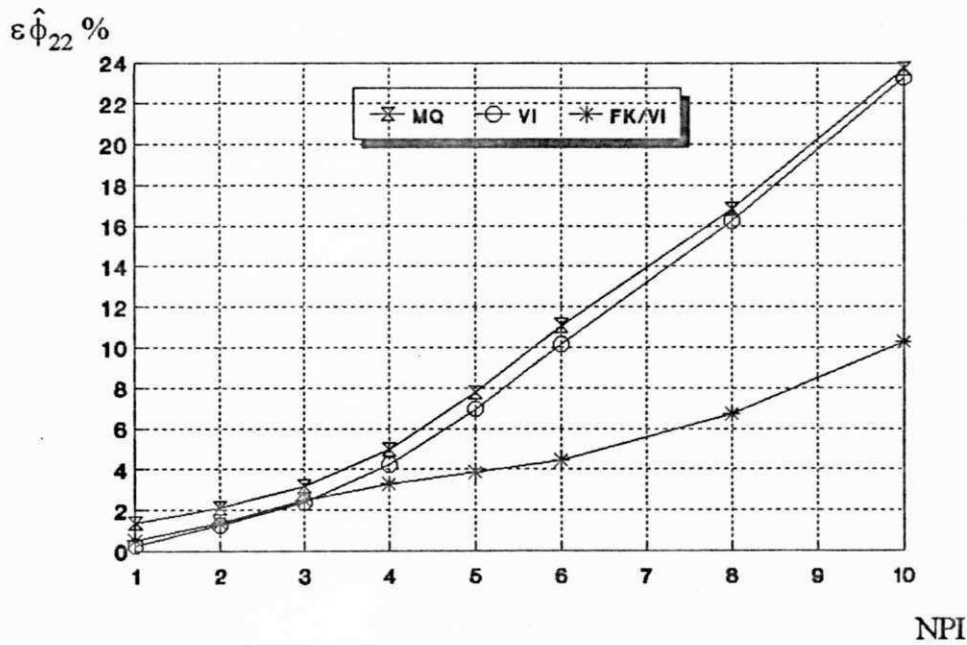


FIG. 4.17 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de NPI, 10 % RMS de ruído e $N_p = 92$.

Outro aspecto relacionado com o comportamento dos métodos de estimação utilizados neste trabalho, diz respeito aos resultados das estimativas mediante a adoção de níveis crescentes de ruído nos sinais de saída.

Através das Figuras 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21, são mostrados resultados de estimação obtidos a partir da adoção de diferentes níveis de ruído, considerando-se os valores $NPI = 1$ e $Np = 260$, Figuras 4.18 e 4.19, e $NPI = 5$ e $Np = 92$, Figuras 4.20 e 4.21. O que observa-se através destas figuras, quando utiliza-se $NPI = 1$ e $Np = 260$, é a alta sensibilidade ao efeito do ruído exibida pelo Método dos Mínimos Quadrados quando aplicado nestas condições. Isto se verifica para ambos os elementos ϕ_{12} e ϕ_{22} ao passo que, utilizando-se o Método das Variáveis Instrumentais ou sua conjunção com o Filtro de Kalman, os resultados são próximos e bastante satisfatórios.

Por outro lado, para valores de $NPI = 5$ e $Np = 92$ pode-se observar, através das Figuras 4.20 e 4.21, que a conjunção das Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman proporciona um nível de erro nas estimativas do elemento ϕ_{22} aproximadamente constante. Com relação ao elemento ϕ_{12} , o erro nas estimativas cresce com o aumento do nível de ruído sobreposto aos sinais, indicando uma maior sensibilidade ao ruído deste elemento neste caso.

Destaca-se ainda, com relação às Figuras 4.20 e 4.21, melhores resultados das estimativas via conjunção, comparados com aqueles obtidos via Variáveis Instrumentais. Acredita-se que isto esteja ligado à propriedade do filtro de ajustar o cálculo do ganho ao níveis de ruído do processo.

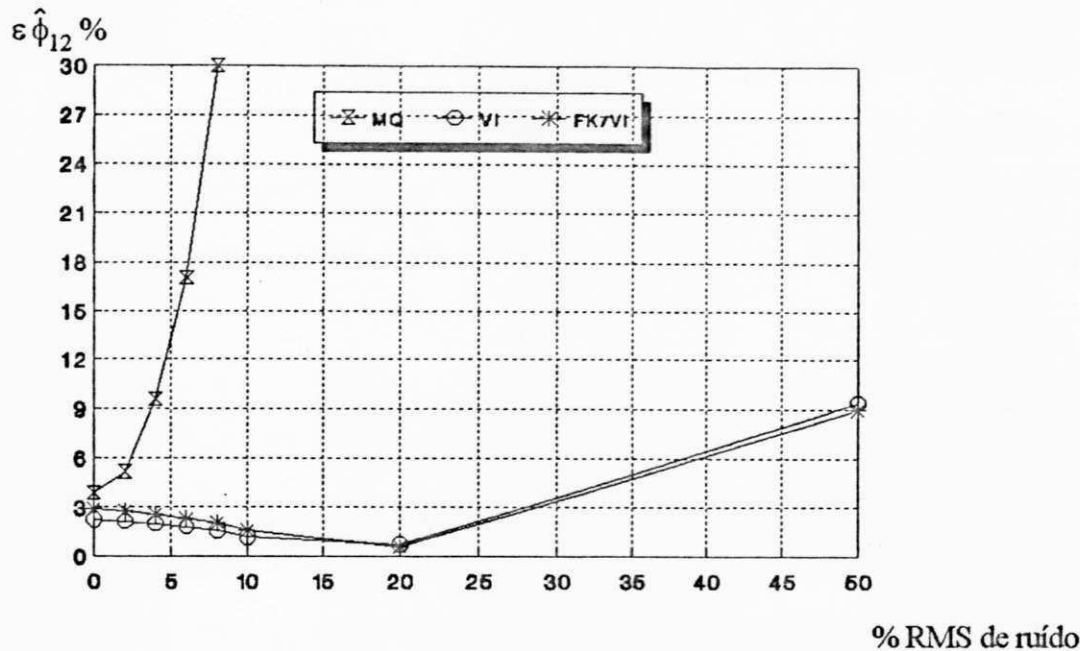


FIG. 4.18 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos níveis de ruído, NPI = 1 e $N_p = 260$.

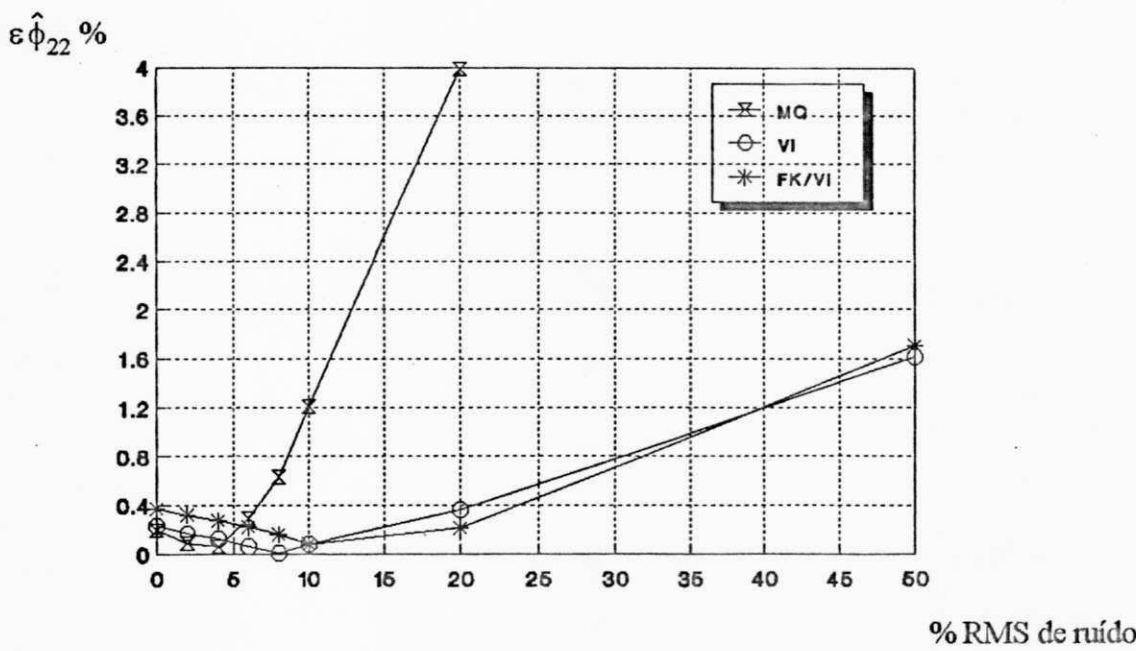


FIG. 4.19 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos níveis de ruído, NPI = 1 e $N_p = 260$.

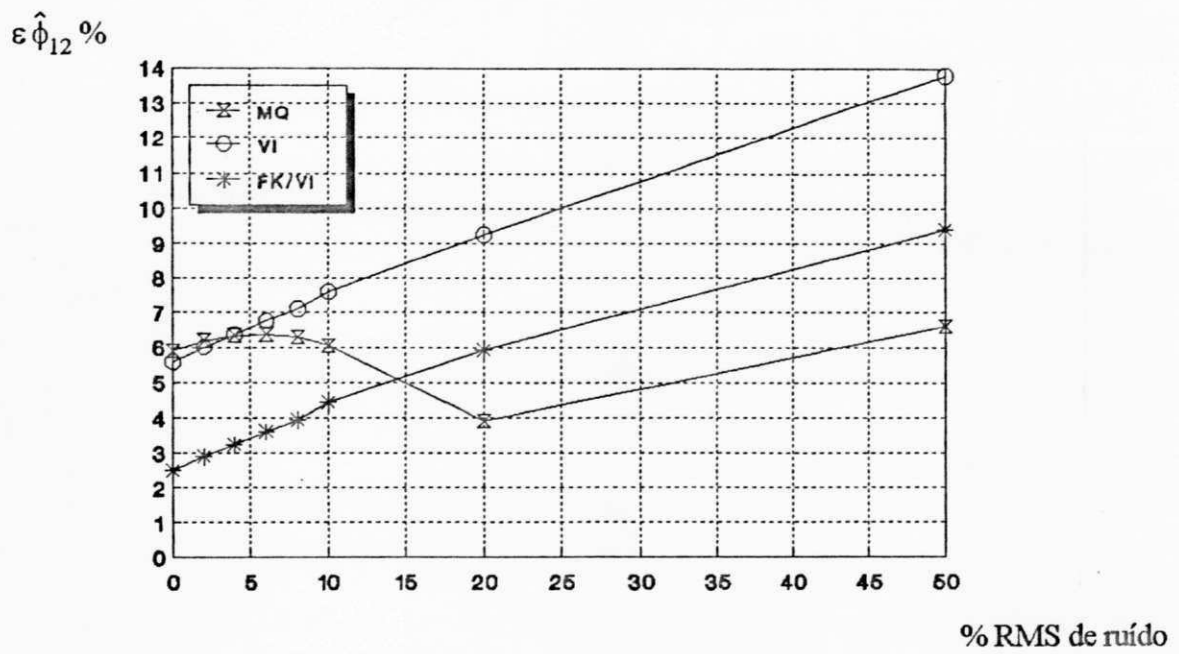


FIG. 4.20 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos níveis de ruído, NPI = 5 e $N_p = 92$.

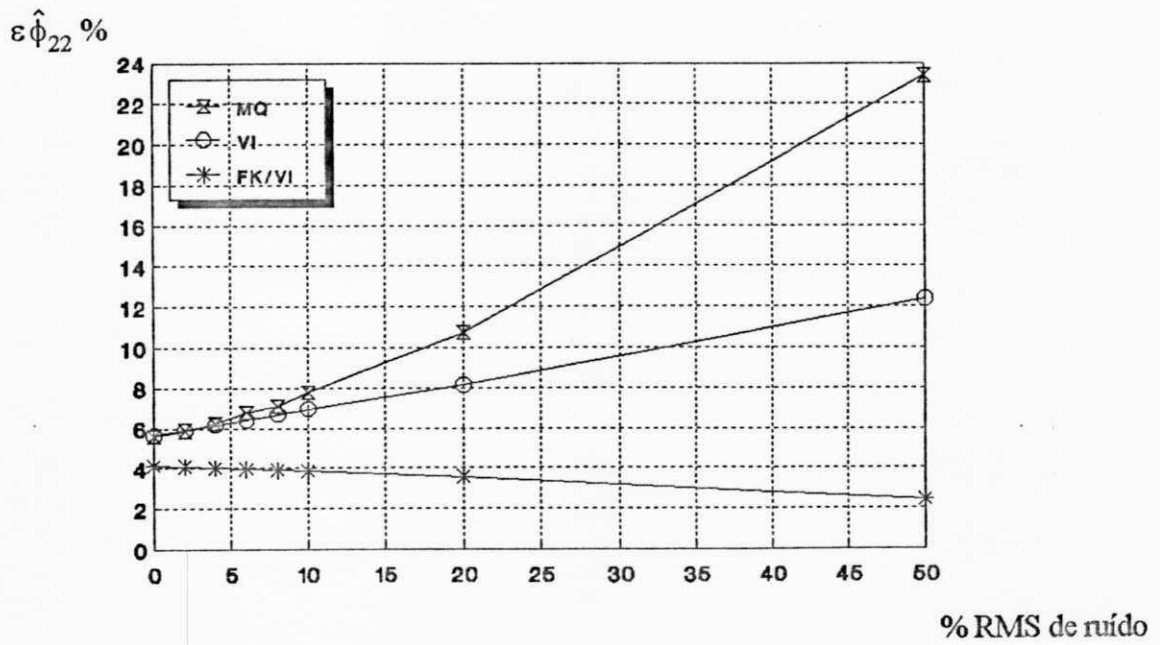


FIG. 4.21 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos níveis de ruído, NPI = 5 e $N_p = 92$.

Outra questão que merece enfoque diz respeito ao que ocorre com a eficiência da técnica de estimação de parâmetros em estudo, quando se varia o índice de amortecimento do sistema. Entretanto, cabe ressaltar, que uma análise conclusiva sob este aspecto, envolveria todo o processo de busca desencadeado até agora. Neste caso, necessitaria utilizar-se diversos valores do coeficiente de amortecimento, mantendo-se inalterado o coeficiente de rigidez. Isto tornaria o trabalho muito longo; neste caso, abordou-se o problema de forma resumida, conseqüentemente incompleta. Deste modo, prefere-se remeter o estudo detalhado deste problema a trabalhos posteriores, a nível de periódicos.

De acordo com o que foi estabelecido no parágrafo anterior, procurou-se demonstrar alguns resultados, considerando-se diversos valores para o coeficiente de amortecimento, de modo a obter-se uma varredura que vai de um sistema fracamente amortecido ($C=5\text{N.s/m}$) a um sistema criticamente amortecido ($C=180\text{N.s/m}$). Para isto tomou-se valores $NPI = 5$ e $Np = 92$, cujos resultados são mostrados nas Figuras 4.22 e 4.23.

O efeito observado neste caso aponta uma tendência crescente do erro nas estimativas dos dois elementos ϕ_{12} e ϕ_{22} . Isto permite constatar que a conjunção de Variáveis Instrumentais com Filtro de Kalman revela uma acentuada sensibilidade a este efeito, na determinação do elemento ϕ_{22} , para valores de C maiores que 50. Entretanto, isto não ocorre nas estimativas do elemento ϕ_{12} , que apresentou resultados melhores que os resultados proporcionados pelo Método das Variáveis Instrumentais.

Para melhor compreensão do que realmente ocorre, em face do fenômeno mostrado na Figura 4.23, necessita-se de um processo de busca que proporcione informações mais detalhadas sobre discretização e faixas de frequência de excitação. Esta tarefa também foi excluída do trabalho.

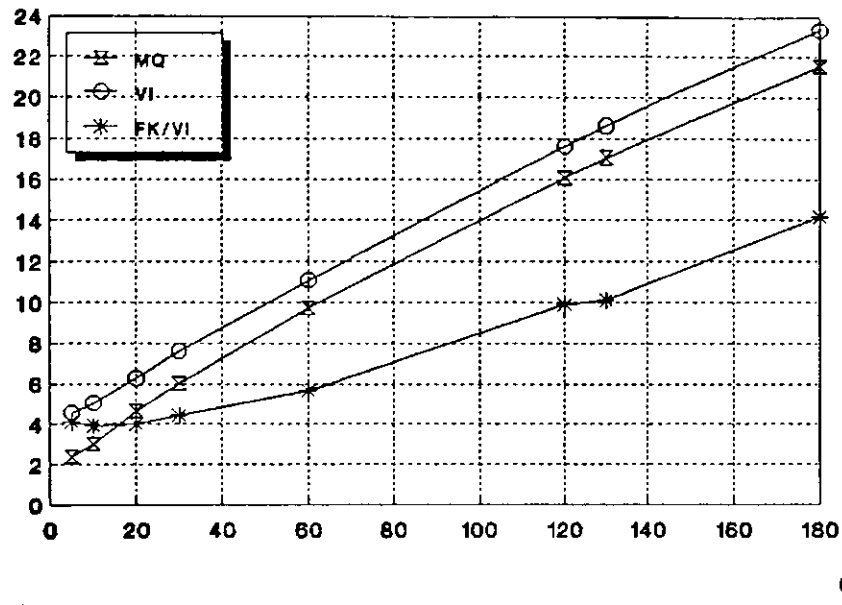
$\varepsilon_{\hat{\phi}_{12}} \%$ 

FIG. 4.22 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de amortecimento, $K=800$ N/m, $NPI = 5$, $Np = 92$ e 10 % de ruído.

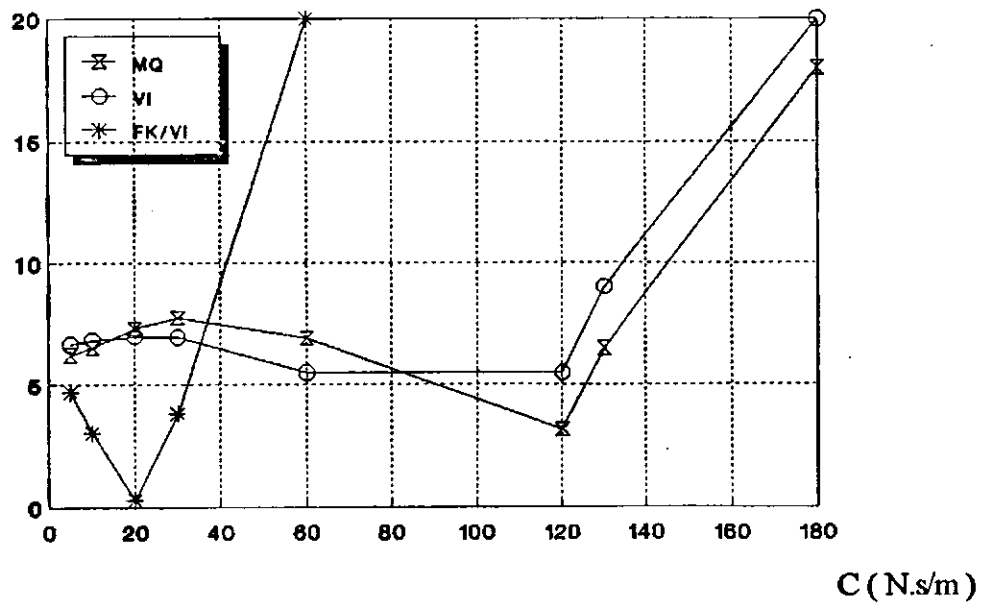
 $\varepsilon_{\hat{\phi}_{22}} \%$ 

FIG. 4.23 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de amortecimento, $K=800$ N/m, $NPI = 5$, $Np = 92$ e 10 % de ruído.

Outro aspecto importante a ser discutido diz respeito à natureza estatística do ruído, sobreposto ao vetor de medição do Filtro de Kalman. Apresentou-se no item 2.6.3, considerações de natureza teórica, envolvendo propriedades estatísticas do ruído, e sua influência na obtenção do conjunto de equações que compõem o Filtro de Kalman. Tais propriedades são características de ruído gaussiano branco (média zero e variância constante), e contribuem bastante para a simplificação do equacionamento matemático do filtro.

Buscando-se analisar melhor esta questão, procurou-se modelar o Filtro de Kalman com parâmetros obtidos via Mínimos Quadrados. Neste caso, o vetor de medição do filtro é obtido diretamente a partir do vetor de estado, sobreposto ao ruído. A diferença básica encontra-se na origem dos elementos que compõem o vetor de medição do filtro, uma vez que ao utilizar-se o Método das Variáveis Instrumentais, estes elementos constituem instrumentos resultantes da última iteração efetuada pelo Método das Variáveis Instrumentais.

Acredita-se que restrições impostas pelo Filtro de Kalman às características estatísticas do ruído, possam ter influência sobre os resultados obtidos, uma vez que o ruído contido nos instrumentos é oriundo de um processamento via filtro linear (modelo auxiliar). Neste caso, procurou-se apresentar conjuntamente, resultados obtidos utilizando-se ambos os métodos. As Figuras 4.24 e 4.25 mostram resultados e estimação dos elementos ϕ_{12} e ϕ_{22} , considerando-se a utilização de Mínimos Quadrados e Variáveis Instrumentais para modelagem do Filtro de Kalman, e posterior estimação dos elementos da matriz de parâmetros.

As estimativas do elemento ϕ_{12} mostrados na Figura 4.24 apresenta margem de erro relativamente elevada, quando modela-se o filtro via Mínimos Quadrados (exceto para valores de N_p próximos de 64). O que pretende-se mostrar é que quando modela-se o filtro via Mínimos Quadrados, as características do ruído sobreposto ao vetor de medição estão mais próximos das características de ruído branco. Contudo, não foram obtidos resultados significativamente melhores. Acredita-se que o erro nas estimativas, neste caso, relacionam-se com a modelagem inadequada do filtro, proporcionada pelo Método dos Mínimos Quadrados, quando utilizado em faixas de frequência relativamente altas. Portanto, o filtro aparenta ser mais sensível a erros de modelagem que propriamente às características do ruído.

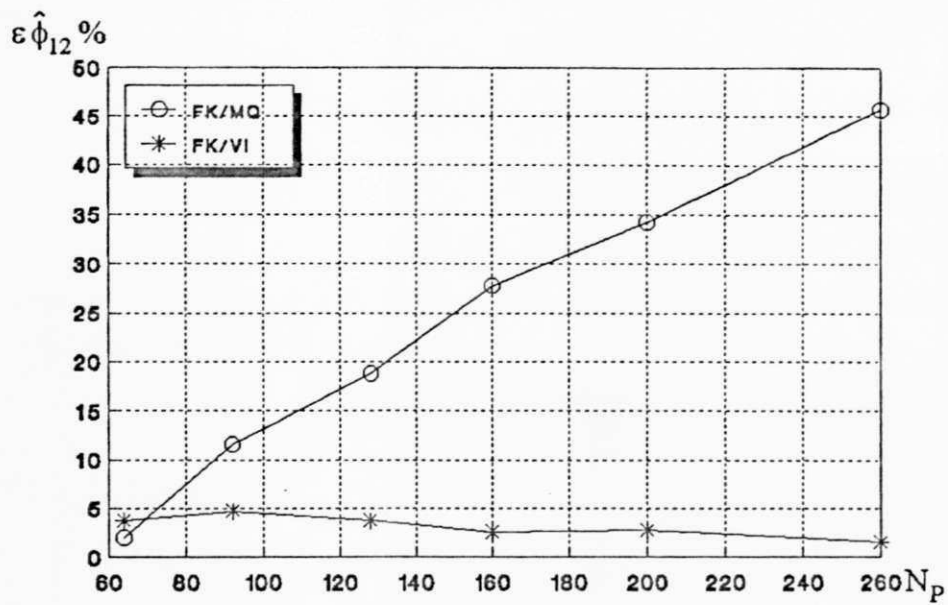


FIG. 4.24 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de N_p , 10 % RMS de ruído e $NPI = 1$.

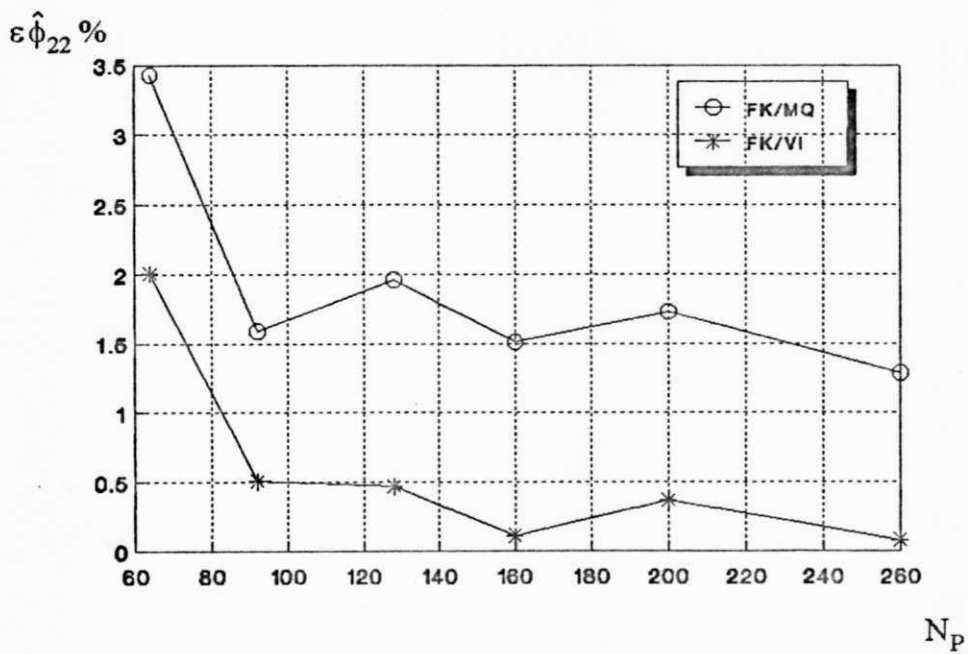


FIG. 4.25 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de N_p , 10 % RMS de ruído e $NPI = 1$.

Outros resultados são apresentados através das Figuras 4.26 e 4.27 para uma faixa de frequência mais baixa ($NPI = 5$). Observa-se através destas figuras, que resultados para N_p relativamente pequenos mostra-se melhores quando utiliza-se o Método dos Mínimos Quadrados para modelagem do filtro. Pelo que pode-se observar, o Método dos Mínimos Quadrados proporciona melhores resultados em faixas de frequência relativamente baixas e para valores de N_p relativamente pequenos. Acredita-se que isto, eventualmente, proporcione uma modelagem mais adequado para o Filtro de Kalman.

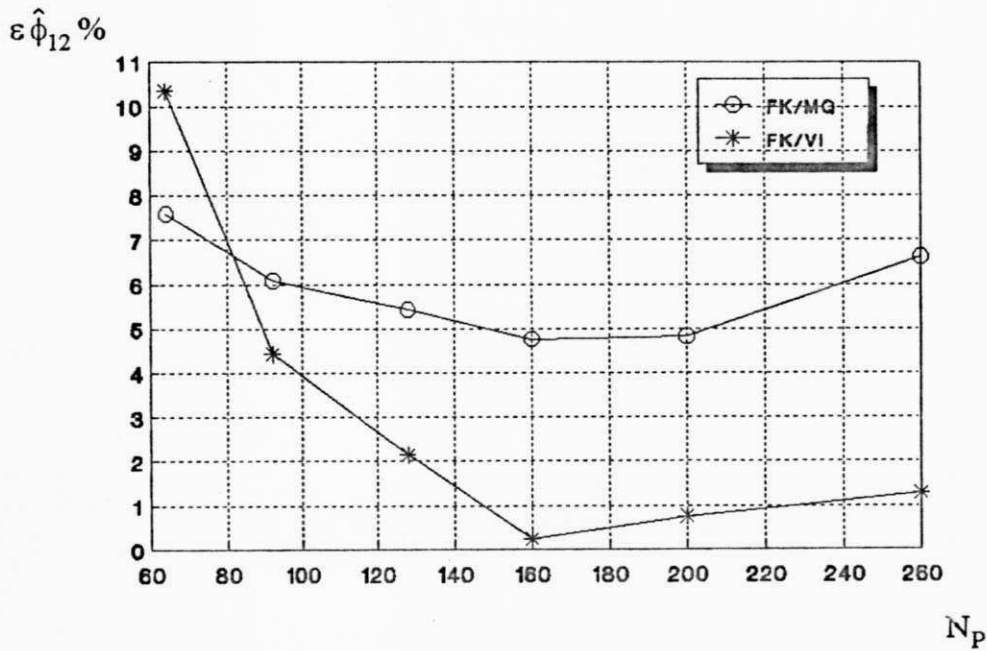


FIG. 4.26 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos valores de N_p , 10 % RMS de ruído e $NPI = 5$.

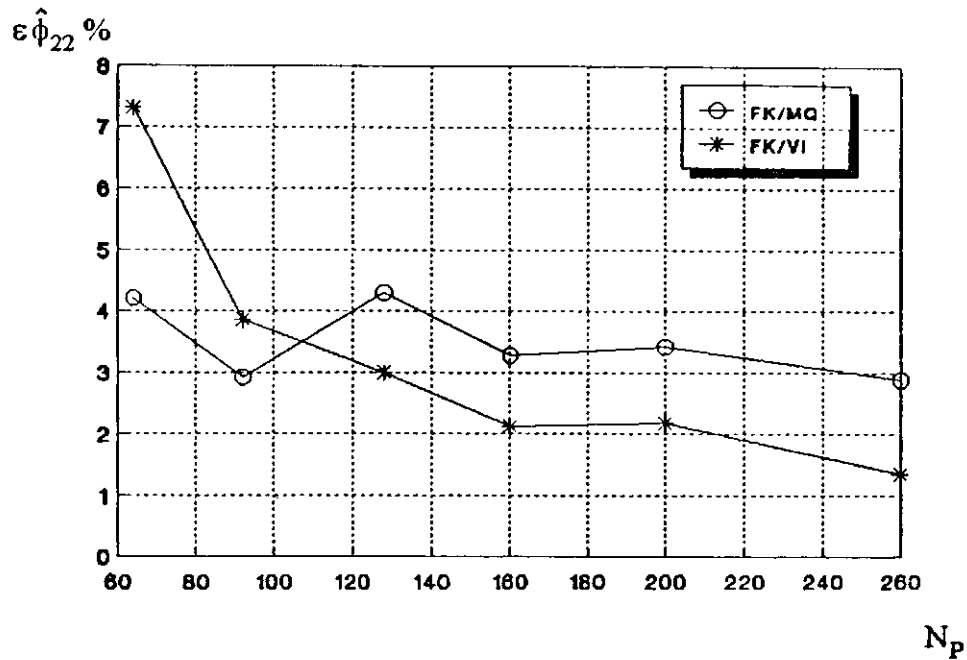


FIG. 4.27 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos valores de N_p , 10 % RMS de ruído e $NPI = 5$.

Finalmente, com o intuito de investigar a influência das características estatísticas do ruído nas estimativas, quando submete-se a resposta do sistema a diferentes níveis de ruído, promoveu-se uma varredura em porcentagem RMS de ruído para aplicação das técnicas em conjunção. Os resultados obtidos para as conjunções entre o Filtro de Kalman e Variáveis Instrumentais, e entre o Filtro de Kalman e o Estimador dos Mínimos Quadrados, são mostrados nas Figuras 4.28, 4.29, 4.30, e 4.31.

As Figuras 4.28 e 4.29 mostram resultados de estimação obtidos para $NPI = 1$ e $N_p = 260$. Estes valores indicam a utilização de faixas de frequências relativamente altas (NPI) e alta taxa de amostragem (N_p). Nesta situação, o Método dos Mínimos Quadrados não tem apresentado bons resultados de estimação, e isto pode ser comprovado através dos resultados mostrados nas tabelas e gráficos contidos neste capítulo e nos anexos. Este comportamento mostra-se mais acentuado na obtenção do elemento ϕ_{12} , muito embora ambos os elementos, ϕ_{12} e ϕ_{22} , influem diretamente na modelagem da

equação do Filtro de Kalman, onde acredita-se que seja um dos principais fatores responsáveis pelo erro no processo de estimação, em detrimento de se ter ruído branco ou colorido.

Observando-se as Figuras 4.30 e 4.31, constata-se a ocorrência de um bom desempenho da conjunção entre o Filtro de Kalman e o Estimador das Variáveis Instrumentais, mesmo em níveis elevados de ruído, por motivos já mencionados anteriormente. Supõe-se que o ruído sobrepostos aos instrumentos, quando não se tem estimativas exatas, apresenta um nível de correlação bem mais elevado que a sequência de ruídos obtida pelo gerador de ruídos aleatórios. Esta sequência de ruído passa a ser sobreposta ao vetor de medição do filtro quando a conjunção é feita com Mínimos Quadrados.

Do ponto de vista dos resultados obtidos através da conjunção do Filtro de Kalman com o Método dos Mínimos Quadrados, verifica-se a superioridade destes resultados, se comparados com os resultados mostrados nas Figuras 4.28 e 4.29. Entretanto, os resultados desta conjunção superaram aqueles obtidos via Variáveis Instrumentais, apenas em baixos níveis de ruído onde, em geral, nesta faixa de frequência e neste intervalo de tempo de discretização, obteve-se melhor modelagem do Filtro de Kalman, proporcionada pelos resultados de estimação via Mínimos Quadrados.

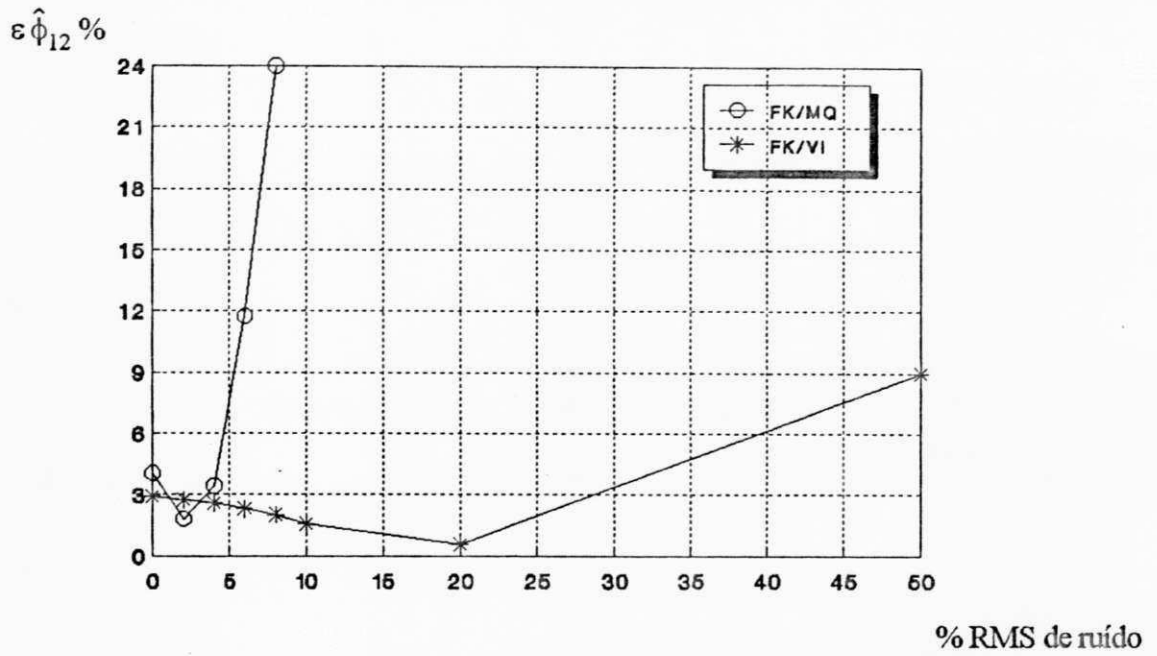


FIG. 4.28 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos níveis de ruído, NPI = 1 e $N_p = 260$.

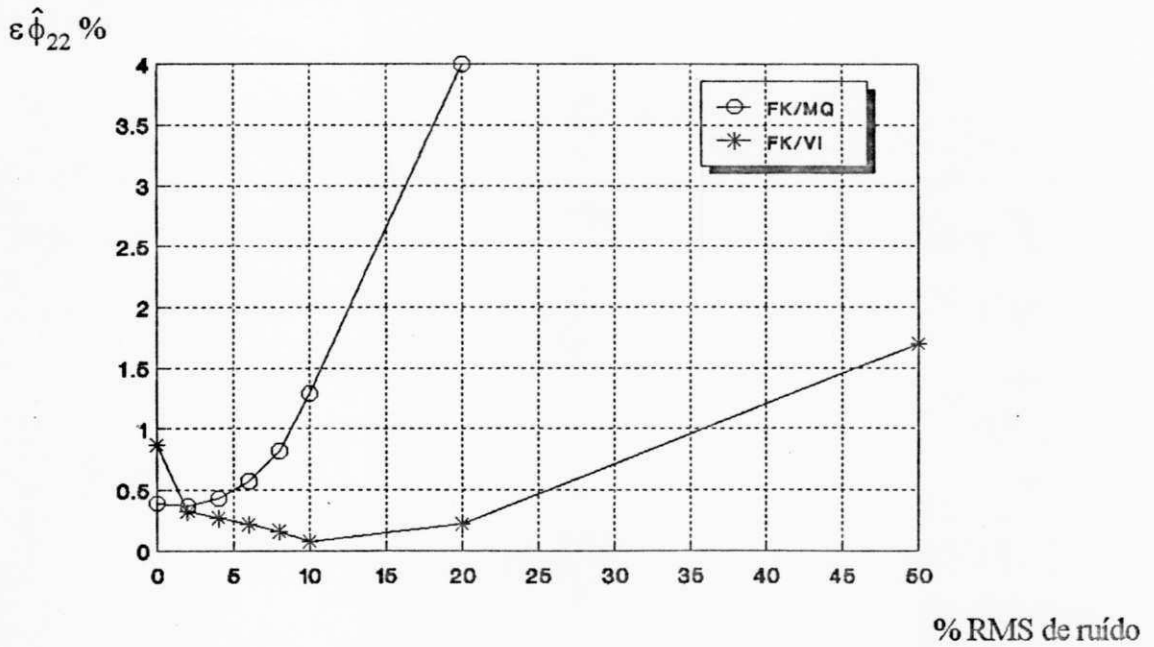


FIG. 4.29 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos níveis de ruído, NPI = 1 e $N_p = 260$.

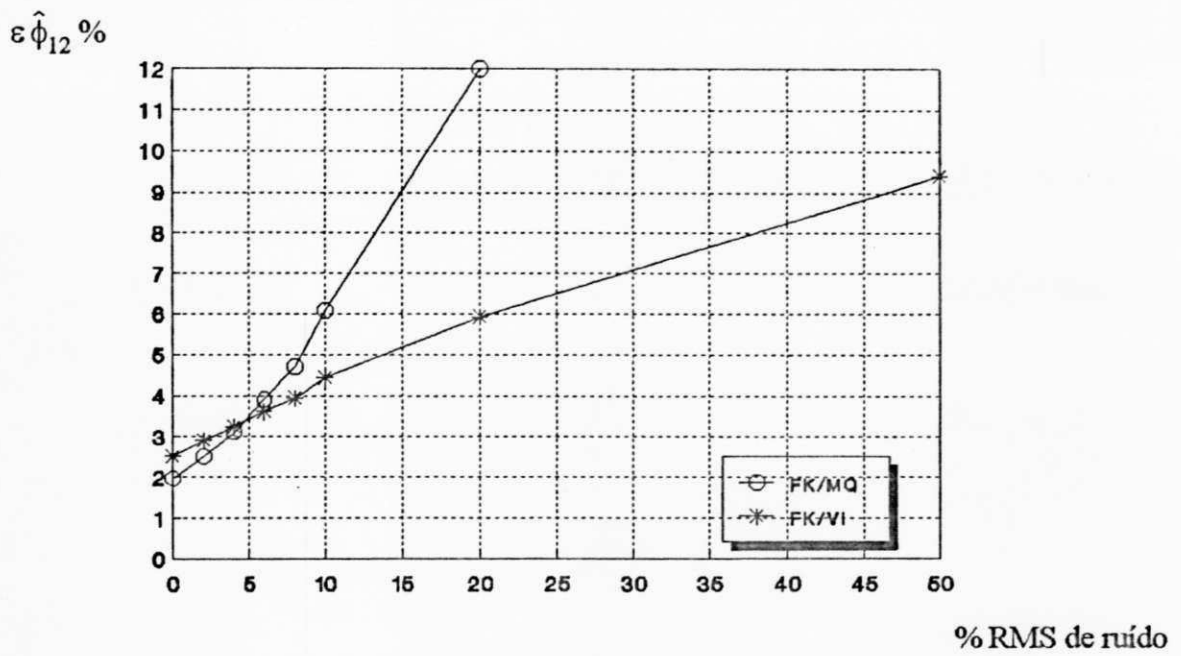


FIG. 4.30 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{12} para diversos níveis de ruído, NPI = 5 e $N_p = 92$.

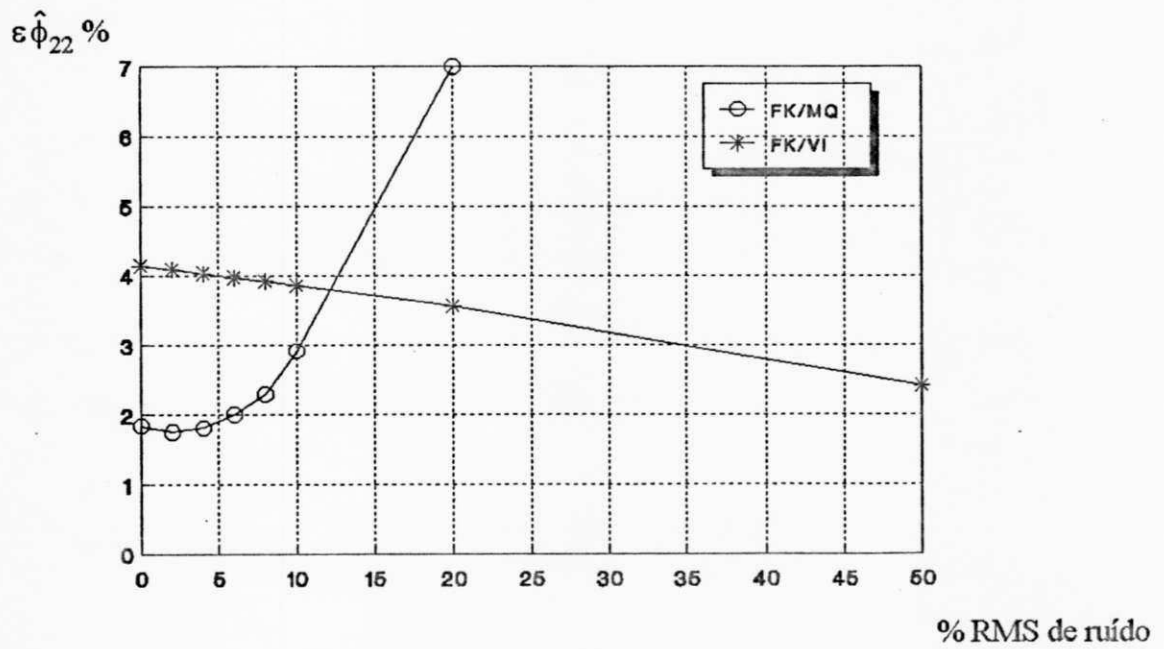


FIG. 4.31 Erro percentual nas estimativas do elemento ϕ_{22} para diversos níveis de ruído, NPI = 5 e $N_p = 92$.

4.6 Conclusão

Apresentou-se neste capítulo, resultados do problema de estimação de parâmetros de sistemas mecânicos no domínio do tempo. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados, o Método das Variáveis Instrumentais, e a conjunção destes métodos com o Filtro de Kalman, onde procurou-se avaliar a eficiência das conjunções. Procurou-se medir a eficiência do método em conjunção, comparando-se seus resultados com resultados obtidos utilizando-se Mínimos Quadrados e Variáveis Instrumentais separadamente.

Para este fim, simulou-se o sistema massa-mola-amortecedor viscoso com um grau de liberdade, excitado por um sinal rico em componentes de frequência (Schroeder). O vetor de estado do sistema (resposta à excitação) foi obtido através de integração numérica, utilizando-se o Método Runge Kutta de quarta ordem.

Vale ressaltar a importância da obtenção da resposta de regime permanente para o processo de estimação de parâmetros. Neste sentido, procurou-se viabilizar a obtenção da resposta de regime permanente utilizando-se comandos específicos no programa computacional. Deve-se observar (Figura 4.9) a existência de resíduo entre as respostas de regime permanente para dois compiladores diferentes. É importante destacar a repetição dos valores residuais de mesma grandeza, nos cinco períodos de resposta mostrados na Figura 4.3.

Estes e outros aspectos têm grande influência no problema de estimação de parâmetros. Entretanto, neste estudo, procurou-se avaliar a eficiência da conjunção do Estimador das Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman, a partir dos resultados de simulação.

No entanto pode-se concluir, com base nos resultados apresentados, que a técnica de estimação de parâmetros em estudo proporcionou a obtenção de resultados bastante satisfatórios.

Entretanto deve-se reconhecer a necessidade da realização de pesquisas mais aprofundadas sobre o assunto, incluindo-se a extensão da sua aplicação a sistemas de ordem mais elevada.

A principal vantagem proporcionada por esta forma de estimação é a obtenção de bons resultados em altas e em baixas faixas de frequência do sinal de excitação. O mesmo não ocorre quando utiliza-se o Estimador dos Mínimos Quadrados e das Variáveis Instrumentais, separadamente. Isto pode ser observado através dos resultados obtidos, uma vez que, trabalhando-se em baixas faixas de frequência e com intervalos de discretização relativamente elevados, o Método dos Mínimos Quadrados apresenta melhores resultados, enquanto que, na situação oposta prevalece o Método das Variáveis Instrumentais. Acrescenta-se ainda que a utilização do Filtro de Kalman demonstra proporcionar bons resultados em situações onde se tem elevados níveis de ruído. Acredita-se que isto deve-se à propriedade apresentada pelo Filtro de Kalman, de ajustar os valores do ganho de acordo com o nível de ruído de estado e de medição

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSÃO GERAL

Desenvolveu-se neste trabalho o estudo de uma técnica de estimação de parâmetros de sistemas mecânicos no domínio do tempo, onde investigou-se o efeito resultante da utilização do Filtro de Kalman em conjunção com o Estimador das Variáveis Instrumentais.

Para a verificação da técnica de estimação de parâmetros em questão, utilizou-se um sistema massa-mola-amortecedor viscoso de um grau de liberdade (modelo de Kelvin), cujo comportamento dinâmico é descrito por uma equação diferencial linear de segunda-ordem com coeficientes constantes.

Inicialmente de posse do modelo matemático, utilizado como veículo no processo de investigação, reduziu-se este modelo à sua forma de estado, adequada para simulação no tempo onde utilizou-se o método explícito Runge-Kutta de quarta-ordem com coeficientes de Runge. Outros métodos de integração numérica foram citados, vantagens e desvantagens de cada método foram analisadas e discutidas.

Buscando-se avaliar a eficiência da técnica de estimação em estudo, procurou-se contaminar o vetor de estado (conjunto de dados ou medições) com uma sequência de ruídos simulados com características próximas de ruído branco. Neste caso, obteve-se o vetor de estado, uma vez assegurada a condição de regime permanente do sistema, ou seja, completa eliminação de transitórios que se sobrepõe à resposta do sistema.

Uma exposição teórica sobre os estimadores de parâmetros de estado utilizados na síntese da técnica de estimação, foi realizada. Com isso buscou-se destacar propriedades estatísticas dos estimadores, como também, eventuais restrições impostas ao modelo matemático e ao ruído.

Como forma de viabilizar a utilização de computador digital para processamento da técnica de estimação utilizou-se a técnica de discretização de sistemas via Série de Taylor (aproximação de primeira ordem).

Testou-se a eficiência da técnica de estimação para vários intervalos de tempo de discretização, considerando-se determinadas faixas de frequências de excitação, e para vários níveis de ruído sobrepostos aos sinais de saída do sistema . Para isto utilizou-se o modelo matemático na forma discreta e montou-se um algoritmo para obtenção de resultados .

Formulou-se o problema de estimação de parâmetros reduzindo-se o modelo matemático à forma matricial compacta onde utilizou-se, a partir desta formulação, o Método das Variáveis Instrumentais para obtenção dos coeficientes de rigidez e amortecimento. Com os parâmetros assim obtidos, modelou-se o Filtro de Kalman com objetivo de gerar novos instrumentos, e posteriormente recalculou os coeficientes de rigidez e amortecimento.

Adicionalmente, procurou-se avaliar a eficiência da técnica de estimação sem a participação do Estimador das Variáveis Instrumentais no processo. Neste caso, utilizaram-se os coeficientes estimados via Mínimos Quadrados na modelagem do Filtro de Kalman, e utilizou-se o vetor de estado sobreposto ao ruído, como vetor de medição do filtro. A questão que se coloca é que o vetor de medições do Filtro de Kalman, obtido desta forma, contém ruído sobreposto com características próximas de ruído branco, ao passo que, quando obtido a partir de instrumentos, acredita-se que isto não ocorra.

Uma exposição teórica sobre os estimadores de parâmetros de estado utilizados na síntese da técnica de estimação, foi realizada. Com isso buscou-se destacar propriedades estatísticas dos estimadores, como também, eventuais restrições impostas ao modelo matemático e ao ruído.

Como forma de viabilizar a utilização de computador digital para processamento da técnica de estimação utilizou-se a técnica de discretização de sistemas via Série de Taylor (aproximação de primeira ordem).

Testou-se a eficiência da técnica de estimação para vários intervalos de tempo de discretização, considerando-se determinadas faixas de frequências de excitação, e para vários níveis de ruído sobrepostos aos sinais de saída do sistema . Para isto utilizou-se o modelo matemático na forma discreta e montou-se um algoritmo para obtenção de resultados .

Formulou-se o problema de estimação de parâmetros reduzindo-se o modelo matemático à forma matricial compacta onde utilizou-se, a partir desta formulação, o Método das Variáveis Instrumentais para obtenção dos coeficientes de rigidez e amortecimento. Com os parâmetros assim obtidos, modelou-se o Filtro de Kalman com objetivo de gerar novos instrumentos, e posteriormente recalculou os coeficientes de rigidez e amortecimento.

Adicionalmente, procurou-se avaliar a eficiência da técnica de estimação sem a participação do Estimador das Variáveis Instrumentais no processo. Neste caso, utilizaram-se os coeficientes estimados via Mínimos Quadrados na modelagem do Filtro de Kalman, e utilizou-se o vetor de estado sobreposto ao ruído, como vetor de medição do filtro. A questão que se coloca é que o vetor de medições do Filtro de Kalman, obtido desta forma, contém ruído sobreposto com características próximas de ruído branco, ao passo que, quando obtido a partir de instrumentos, acredita-se que isto não ocorra.

BIBLIOGRAFIA

- [01] OLIVEIRA, N. V.; "Identificação de Parâmetros de Sistemas Mecânicos com aplicação a Mancais", Tese de Doutorado Unicamp-SP. 1988.
- [02] KALMAN, R. E.; "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems" - Research Institute for Advanced Study, Baltimore, Md, ASME, J. Basic Eng., Séries 820, PP35-45. Mar 1960.
- [03] LJUNG, L., GLOVER, K. - "Frequency Domain Versus Time Domain Methods in System Identification", 1974, Automática, vol 10, pp. 233-244.
- [04] UNBEHAVEN, H.; GOHRING, B. - "Teste for Determining Model Order in Parameter Estimation", 1974, Automática, vol 10, pp. 46-55.
- [05] EYKHOFF, P.; "System Identification - Parameter and States Estimation", John Wiley & Sons, 1974.
- [06] SHAMPINE, LAWRENCE F. E GORDON, MARILYN KAY. "Computer Solution Of Ordinary Differential Equations - The Initial Value Problem". Copyright 1975 by W. H. Freeman and Company.
- [07] KUO, SHAN S., "Numerical Methods and Computers". Copyright 1965 by Addison-Wesley publishing Company, inc.
- [08] BOYCE, W. E.; "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno", Ed. Guanabara Dois, 1978.

[09] RADIX, JEAN-CLAUDE; "Introduction au Filtrage Numérique" - Lissage de données, estimation de paramètres, identification de processus.; Éditions Eyrolles, 1970.

[10] CHEN, C. T.; "Introduction to Linear System Theory" - Holt, Rinchart and Winston, Inc, 1970.

[11] MERRIT, PAUL H.; "A Method of System Identification with Experimental Investigations of Real Systems" - Dissertation - Doctor of Philosophy in Mechanical Engineering - University of New Mexico, 1974.

[12] LJUNG, LENNART; "System Identification Theory for the User". University of Linkoping Sweden - Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs, New Jersay, 1987.

[13] ZADEH, L. A. & DESOER C. A.; "Linear System Theory" McGraw Hill, 1963.

[14] ELBERT, T. F.; "Estimation and Control of Systems" - Van Nostrand R. Company inc-1984.

[15] YOUNG, P. C.; "An Instrumental Variable Method for Real-time Identification of a Noisy Process". Automática, vol. 6 pp 271-287, 1970.

[16] SILVA, K. F. da, "Estimação de Fluxo Magnético em Máquinas Assíncronas Utilizando o Filtro de Kalman". Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica - UFPB - Campus II, Campina Grande, 1991.

[17] PEDERIVA, R.; "Identificação de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo: Alguns aspectos praticos" Dissertação de Mestrado Unicamp S.P, 1983.

- [18] TREIQUER, J. M. "Desenvolvimento Teórica e Investigação Experimental da Função Decremento Aleatório". UFSC, 1981, Dissertação de Mestrado.
- [19] BURROWS, C. R.; "An Appraisal of Schroeder- Phased Harmonic Signals for Bearing Identification". ASME, 80WA/DSC -34, 1980.
- [20] SCHROEDER, M. R.; Synthesis of Low-PeakFactor Signal and Binary Sequences with Low Autocorrelation. IEEE Transations on Information and Theory. 85-89, jan 1970.
- [21] DOGAN, I. U., BURDESS, J. S., HEWIT, J. R.; "Identification of Journal Bearing Coefficient using a Pseudo-Random Binary Sequence". I Mech C292/80, 1980
- [22] CADZOW, J. A., "Discrete-Time Systems an Introduction with Interdisciplinary Applications. "Prentice-Hall, inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [23] BUHLER, H.; "Réglages Echantillonnés, Traitement par la Transformation en Z", Presses Polytechnique Romandes. vol 1, 1983.
- [24] STRANG, G. "Linear Algebra and Its Applications". London Academic Press, 2 Ed. 1976.
- [25] FRITZEN, C. P.; "Identification of Mass, Damping and Stiffness Matrices of Mechanical Systems". 10th ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise, Cincinnati, USA 1985.
- [26] JOSEPH, P.; LEWIS, J.; TOU; "Plant Identification in the Presence of Disturbances and Application to Digital Systems". AIEE trans. 80, pp 18-24, 1961.

- [27] CREMONA, C. F. E BRANDON, J. A.; "On the use of some Instrumental Variable Matrices for Inversion in Modal Analysis" - Department of Mechanical Engineering and Energy Studies Scholl of Engeneering - University of Wales College of Cardiff, 8th IMAC, 1990.
- [28] IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-28, Mar. 1983.
- [29] SORENSON, H. W.; "Least-Squares Estimation: from Gauss to Kalman". IEEE Spectrum, vol 7, pp 63-68, 1970.
- [30] SORENSON, H. W.; "Kalman Filtering Techniques - Advances in Control Systems Theory and Applications", vol 3, C. T. Leondes pp 219-292, 1966.
- [31] BATHE, KLAUS -JÜRGEN. "Numerical Methods in Finite Element Analysis". Prentice-Hall, inc. Engewood Cliffs, New Jersay 1976.
- [32] WILLIAMSON, D.; "Finite Wordlength Design of Digital Kalman Filters for State Estimation". IEEE Transations on Aut. Control, vol. AC-30, No 10, 1985.
- [33] TAN, J., KYRIAKOPOULOS, N.; "Implementation of a Tracking Kalman Filter on a Digital Signal Processor". IEEE Transations on Industrial Eletronics. vol. 25, NO 1. 1988.
- [34] SCHLEE, F. H., STENDISH, C. J. AND TODA, N. F.; "Divergence in the Kalman Filter". AIAA. (American Institute of Aeronautics and Astronautics), vol. 5 pp 1114-1120, 1967.
- [35] FITZGERALD, J. R.; "Divergence of the Kalman Filter". IEEE Trans. Autom. Contr. vol. AC-16, pp 736-747, 1971.

- [36] SAHINKAYA, M. N. and Burrows, C. R.; "Kalman Filters Applied to Time-Domain Estimation of Linearized Oil-Film Coefficients", c287/84, IMechE 1984.
- [37] ADDISON, C. A., ERRIGHT, W. H. et al; "A Decision Tree for the Numerical Solution of Initial Value Ordinary Differential Equations", ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 17, NO 1, Pages 1-10, March 1984.
- [38] SHARP, P. W.; "Numerical Comparisons of Some Explicit Runge-Kutta Pairs of Orders 4 through 8", ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 17, NO 3, Pages 387-409, September 1991.
- [39] GUSTAFSSON, K.; "Control Theoretic Techniques for Step-size Selection in Explicit Runge-Kutta Methods", ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 17, NO 4, Pages 533-554, December 1991.
- [40] CHAHARBAGHI, K., DAVIES, B. L.; "Numerical Evaluation of a Multi-Stream Pseudo-Random Number Generator", Appl. Math. Modelling, Vol. 11, June 1987.
- [41] PAPOULIS, A.; "Probability, Random Variable and Stochastic Processes", Copyright 1965 by McGraw-Hill, Inc.
- [42] MAYBECK, P. S., "Stochastic Models, Estimation and Control", Vol. 1, Academic Press, 1979.
- [43] BENDAT, J. S E PIERSOL, A. G.; "Random Data: Analysis and Measurement Procedures", John Wiley & Sons, Inc., 1971.
- [44] MEIROVITCH, L.; "Elements of Vibration Analysis", New York, McGraw-Hill, Serie International Student, 1975.

- [45] JÚNIOR, M. D.; " Identificação de Parâmetros de Sistemas Mecânicos e das Características de uma Perturbação Externa pelo Método das Covariâncias ", Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 1987.
- [46] SMITH, G. L., SCHMIDT S. F. and McGEE, L. A.; " Application of Statistical Filter Theory to the Optimal Estimation of Position and Velocity on-board a Circular Vehicle " , NASA-TR-R-135, 1962.
- [47] THE MATHWORKS, INC ; " The Student Edition of MATLAB - for MS-DOS Personal Computers ", Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.
- [48] MELO, G. P. and STEFFEN Jr., V. ; " ,Mechanical Systems Identification Through Fourier Series Time Domain Technique ", RBCM - J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. 15, n. 2, pp. 124-135, 1993.
- [49] ARRUDA, J. R. DE F. et OLIVEIRA, N. V. ; "Frequency Domain Methods for Structural Parameters Estimation ", Matériaux Mécanique Électricité n.416 - mai-juin, 1986.
- [50] OLIVEIRA N. V. e ARRUDA, J. R. DE F. ; " Identificação das Características de Rigidez e Amortecimento de Mancais Hidrodinâmicos ", IX COBEM. Florianópolis - SC, : 709 - 711, Dez. 1987.

APÊNDICES

APÊNDICE A

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.

1. Introdução

A operação de integração numérica geralmente surge em investigações num largo espectro de disciplinas, onde cada operador toma uma função contínua no domínio do tempo e a partir de determinados procedimentos, gera uma outra função contínua no tempo denominada integral. No curso de cálculo as funções a serem integradas apresentam formas convenientes para integração analítica, porém, em situações no âmbito prático, existe uma tendência consistente dessas funções de não se adequarem à integração analítica, viabilizando o processo de integração por meios numéricos.

O advento dos computadores analógicos e digitais pôs fim a uma barreira que impedia o aprofundamento de determinadas investigações sobre fenômenos governados por funções, por assim dizer, "mal comportadas".

Supõe-se que se tenha uma função contínua no tempo $\mu(t)$ a ser integrada usando-se técnicas numéricas. Precisa-se, no entanto, convertê-la numa função consoante com o cálculo numérico. Uma forma básica é dividi-la em intervalos de tempo iguais e considerar a função constante naquele intervalo (Amostragem Uniforme); a função assim, é dita, digitalizada ou discretizada e a cada intervalo de tempo gera-se uma sequência de números

$$\mu(0), \mu(T), \mu(2T) \dots$$

O objetivo é obter um sistema discreto no tempo, onde $\mu(t=kT)$ é usada como entrada e a resposta constitui uma boa aproximação da integral de $\mu(t=kT)$, denotada por $y(kT)$, ou simplesmente $Y(k)$. Então,

$$\theta_n = -\text{tg}^{-1}\left[\frac{b_n}{a_n}\right]y(k) \approx \int_0^{kT} \mu(t) dt \quad (\text{INTEGRADOR NUMÉRICO})$$

Um modelo conceitual deste procedimento é :

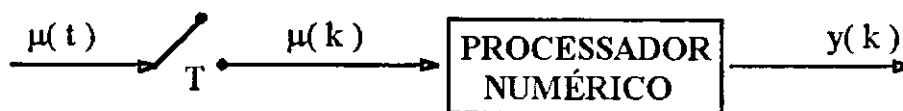


FIG. 1A Integrador numérico. Modelo conceitual.

Construindo-se um gráfico com elementos espaçados de um valor T como abcissa e $y(K)$ como ordenada, tem-se uma versão aproximada e discretizada da integral de $\mu(t)$. Em geral a exatidão da versão discretizada aumenta quando se usa valores de T cada vez menores, entretanto, a escolha de T não é simples e deve situar-se no ponto de equilíbrio entre dois fatores conflitantes:

⇒ T deve ser bastante pequeno para que se tenha máxima aproximação.

⇒ T deve ser o maior possível, de forma que se tenha a integração completa com um número reduzido de iterações. Com isto evita-se a propagação de erros de truncamento, round-off etc., gerados pelo comprimento finito de palavra dos processadores numéricos.

Em muitas ocasiões, a caracterização do comportamento dinâmico de sistemas é feita com o uso de equações diferenciais. Numerosos exemplos são encontrados nos campos da Engenharia, Economia, Administração, Física, Fisiologia etc.. Em cada caso, cumpre resolver a equação

diferencial; porém, em situações práticas, essas soluções são, em geral, difíceis de se obter via métodos analíticos. Daí então, a necessidade do uso de computadores digitais para este propósito.

Para se obter a solução aproximada de uma equação diferencial, através do uso de computador digital, passa-se a equação à sua versão discretizada, conveniente ao procedimento numérico.

A seguir descreve-se, a título de ilustração, um procedimento para integração numérica de equações diferenciais ordinárias (E.D.O) de segunda-ordem.

2. Integração Numérica de uma E.D.O de Segunda-Ordem

Seja o caso de uma E.D.O de segunda-ordem que relate a trajetória $y(t)$ de uma determinada massa, sobre um plano fixo. Esta massa encontra-se presa a uma mola e a um amortecedor viscoso, e portanto, restrita a um movimento oscilatório em torno de um ponto de equilíbrio. Ao ser desequilibrada por uma perturbação qualquer $\mu(t)$, ela movimenta-se de forma permanente ou transitória.

Este sistema físico pode ter seu comportamento regido por uma equação diferencial linear ordinária de segunda-ordem:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + C/M \frac{dy(t)}{dt} + K/M y(t) = F/M \mu(t) \quad (2.1.A)$$

onde M , C , K e F são constantes arbitrárias.

Supõe-se, neste caso, que haja necessidade de procedimento numérico. A intervalos discretos $t = kT$ obtém-se:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(kT) + \frac{C}{M} \frac{d}{dt}y(kT) + \frac{K}{M}y(kT) = \frac{F}{M}\mu(kT) \quad (2.2.A)$$

Do cálculo elementar, tem-se a seguinte aproximação:

$$\frac{d}{dt}y(kT) \approx \frac{y(kT) - y(kT - T)}{T} \quad (2.3.A)$$

Consequentemente, a partir de um procedimento análogo, obtém-se para a segunda derivada :

$$\frac{d^2}{dt^2}y(kT) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}y(kT) \right) \approx \frac{\frac{d}{dt}y(kT) - \frac{d}{dt}y(kT - T)}{T} \quad (2.4.A)$$

que melhora em precisão quando T torna-se muito pequeno. Substituindo-se a relação (2.3.A) em (2.4.A) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}y(kT) &\approx \frac{\frac{y(kT) - y(kT - T)}{T} - \frac{y(kT - T) - y(kT - 2T)}{T}}{T} = \\ &= \frac{y(kT) - 2y(kT - T) + y(kT - 2T)}{T} \end{aligned} \quad (2.5.A)$$

Inserindo-se as aproximações (2.3.A) e (2.5.A) na expressão (2.2.A), obtém-se, após algumas manipulações, o seguinte resultado:

$$y(kT) = \left(\frac{2 + \frac{C}{M}T}{1 + \frac{C}{M}T + \frac{K}{M}T^2} \right) y(kT - T) - \left(\frac{1}{1 + \frac{C}{M}T + \frac{K}{M}T^2} \right) y(kT - 2T) +$$

$$+ \left(\frac{T^2 F}{1 + \frac{C}{M}T + \frac{K}{M}T^2} \right) \mu(kT) \quad (2.6.A)$$

A expressão (2.6.A) pode ainda ser escrita na forma:

$$y_a(k) = b_0 \mu(k) - a_1 y_a(k-1) - a_2 y_a(k-2) \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \quad (2.7.A)$$

onde :

$$b_0 = \frac{T^2 F}{1 + \frac{C}{M}T + \frac{K}{M}T^2} \quad (2.8.A)$$

$$a_1 = \frac{\frac{C}{M}T - 2}{1 + \frac{C}{M}T + \frac{K}{M}T^2} \quad (2.9.A)$$

$$a_2 = \frac{1}{1 + \frac{C}{M}T + \frac{K}{M}T^2} \quad (2.10.A)$$

Dessa forma, pode-se usar a relação iterativa (2.7.A) para se encontrar uma solução aproximada para a E.D.O. de segunda-ordem.

Da teoria das equações diferenciais, obtém-se uma das curvas, de uma família de curvas, que compõe a solução geral de uma E.D.O., fornecendo-se duas condições iniciais em $t=0$, isto é, $y(0)$ e $\frac{dy(0)}{dt}$.

Uma vez iniciada a iteração em $K=1$, toma-se inconveniente pré-especificar a condição inicial $y_a(-1)$, o que pode ser contornado facilmente fazendo-se:

$$\frac{dy(0)}{dt} \approx \frac{y_a(0) - y_a(-1)}{T} \quad \therefore \quad y_a(-1) = y(0) - T \frac{dy(0)}{dt}$$

Em suma, as condições iniciais para a obtenção da solução numérica aproximada da expressão (2.7.A) são:

$$y_a(0) = y(0)$$

$$y_a(-1) = y(0) - T \frac{dy(0)}{dt} \quad \text{em } k = 1$$

Estes conceitos, de maneira similar, podem ser estendidos aos casos de E.D.O.'s de ordem mais elevada. É importante notar que uma E.D.O. de primeira ou segunda-ordem, gera uma equação a diferenças, também de primeira ou de segunda-ordem, respectivamente, e, por razões óbvias, esta propriedade estende-se a E.D.O.'s de ordem mais elevada.

Deve-se notar que utilizou-se como ilustração para o processo de integração numérica, e obtenção da equação a diferenças padrão usando-se o método da primeira diferença, adequada para a descrição de sistemas na forma entrada-saída. Adotou-se esta forma, uma vez que, do ponto de vista analítico, fica mais evidente o que realmente ocorre no processo de aproximação. Não obstante, acrescenta-

se que utilizou-se neste trabalho, a descrição matemática a partir do conceito de estado. Esta forma de descrição é adequada para a implementação de métodos de integração indireta do tipo Runge-Kutta.

3. Métodos de Integração Numérica usando as Fórmulas de RUNGE-KUTTA com Coeficientes de RUNGE

Em meio a um vasto número de métodos numéricos disponíveis para se resolver problemas de valor inicial, o método de RUNGE-KUTTA é provavelmente um dos mais frequentemente usados em computadores. Um desenvolvimento detalhado da fórmula de RUNGE-KUTTA com coeficientes de RUNGE, com coeficientes de KUTTA, ou com coeficientes de GILL, pode ser facilmente encontrado na literatura.

Supõe-se uma equação diferencial de primeira-ordem, por simplicidade, $Y' = f(t, Y)$. As condições iniciais são dadas como (t_0, Y_0) . O problema é encontrar Y_1 correspondente ao novo tempo $t = t_0 + \Delta t$ (FIG. 2A).

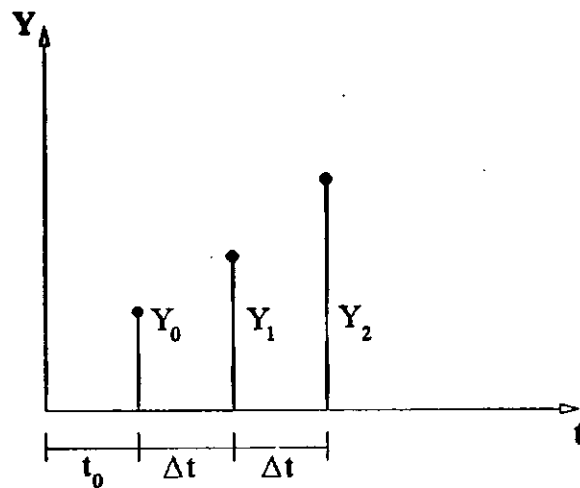


FIG. 2A Solução passo-a-passo de $y' = f(t, y)$.

Uma vez encontrando-se y_1 , um valor subsequente de y , no caso, y_2 , que corresponde a um novo valor do tempo $t + 2\Delta t$, passa a ser calculado. Desta maneira, passo-a-passo, a relação $y - t$ procurada pode ser obtida e tabulada.

No método RUNGE-KUTTA, a fórmula básica, com coeficientes de RUNGE é:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \quad (3.1.A)$$

onde

$$\Delta y_n = \frac{\Delta t}{6}(k_0 + 2k_1 + k_3) \quad (3.2.A)$$

e

$$k_0 = f(t_n, y_n) \quad (3.3.A)$$

$$k_1 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}\Delta t\right) \quad (3.4.A)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\Delta t\right) \quad (3.5.A)$$

$$k_3 = f(t_n + \Delta t, y_n + k_2\Delta t) \quad (3.6.A)$$

A interpretação geométrica dos valores K_0 até K_3 é mostrada na FIG. 3A. Os quatros valores de K_i representam as inclinações da curva em vários pontos.

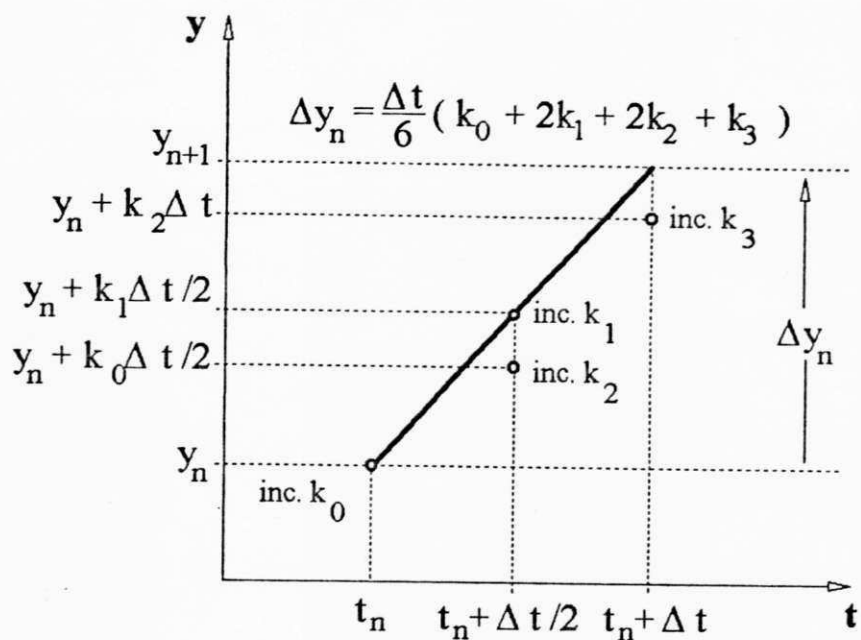


FIG. 3A. Quatro avaliações da função antes de avançar um passo.

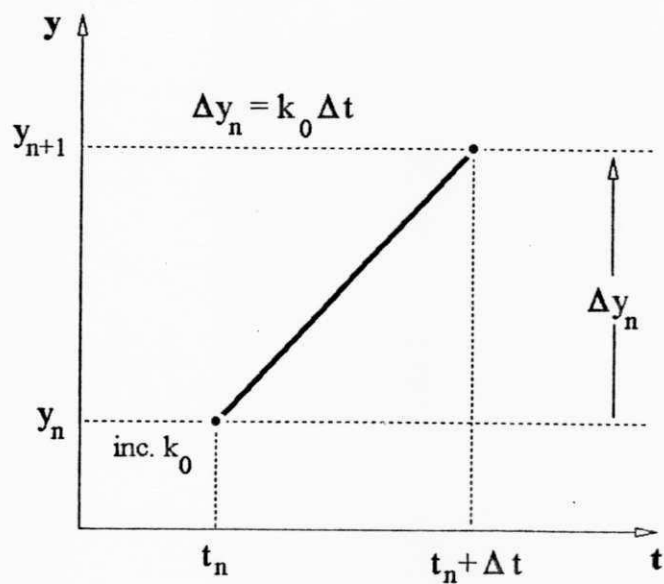


FIG. 4A. Uma avaliação da função por passo pelo método de EULER.

É interessante comparar o método RUNGE-KUTTA com o método de EULER, que é usualmente discutido nos cursos básicos de cálculo numérico. No método de EULER a fórmula básica é simplesmente

$$y_{n+1} = y_n + k_0 \Delta t \quad (3.7.A)$$

onde $k_0 = y'_n = f'(t_n, Y_n)$.

Dessa forma, no método de EULER, a solução aproximada y_{n+1} (FIG. 4A), depende unicamente de y_n e da inclinação k no ponto (t_n, y_n) , enquanto que no método RUNGE-KUTTA, ela depende, não somente de y_n e K_0 , como também de três inclinações médias ponderadas, sendo que a inclinação no centro do intervalo é ponderada duas vezes. Neste contexto, torna-se clara a superioridade do método RUNGE-KUTTA no que se refere à precisão numérica da operação da aproximação. Este método apresenta um erro local proporcional a Δt^5 e um erro global proporcional a Δt^4 , ao passo que usando-se o método de EULER, obtém-se um erro local proporcional a Δt^2 e um erro global proporcional a Δt .

APÊNDICE B

ANÁLISE ESPECTRAL

1. Série de Fourier

Seja $f(t)$ um sinal periódico no tempo, com período T_p . Admite-se que $f(t)$ satisfaça às seguintes condições:

- 1 Possui valor médio finito no intervalo $[0, T_p]$.
- 2 É contínua no intervalo $[0, T_p]$, ou, se apresentar descontinuidades, que sejam finitas e em número finito.
- 3 Possui número finito de máximos e mínimos no intervalo $[0, T_p]$.

Se $f(t)$ atende as condições acima, ditas condições de Dirichlet, então pode ser decomposta em uma série de Fourier ou série trigonométrica de sinais senoidais e cossenoidais, com frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T_p$.

A série trigonométrica de Fourier apresenta-se da seguinte forma :

$$a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t)]$$

onde, quando $N \rightarrow \infty$, converge para $f(t)$. Assim, em tais circunstâncias,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t] \quad (1.1.B)$$

cujos termos a_0 , a_n e b_n são dados por :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T_p} f(t) dt \quad (1.2.B)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T_p} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (1.3.B)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T_p} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt \quad (1.4.B)$$

O termo a_0 , é o valor médio ou nível d.c. do sinal $f(t)$ no intervalo $[t_0, t_0 + T_p]$.

Outras representações são admitidas, como:

i. Forma Trigonométrica Compacta

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (1.5.B)$$

onde ,
$$C_n = [a_n^2 + b_n^2]^{1/2} \quad (1.6.B)$$

$$\theta_n = -\text{tg}^{-1} \left[\frac{b_n}{a_n} \right] \quad (1.7.B)$$

ii. Forma Exponencial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.8.B)$$

onde
$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^{t_0+T_p} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (1.9.B)$$

A obtenção da forma exponencial é possível fazendo-se uma substituição na expressão (1.1.B), das expressões equivalentes de EULER,

$$\operatorname{sen} n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$\operatorname{cos} n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

Após algumas manipulações, as formas (1.8.B) e (1.9.B) são obtidas e os coeficientes a_0 , F_0 , a_n , b_n e F_n são dados por

$$a_0 = F_0$$

$$a_n = F_n + F_{-n}$$

$$b_n = j(F_n - F_{-n})$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

O termo F_{-n} representa o cômputo das frequência angulares negativas. Uma interpretação geométrica para as frequências angulares negativas pode ser dada pela Figura (1B):

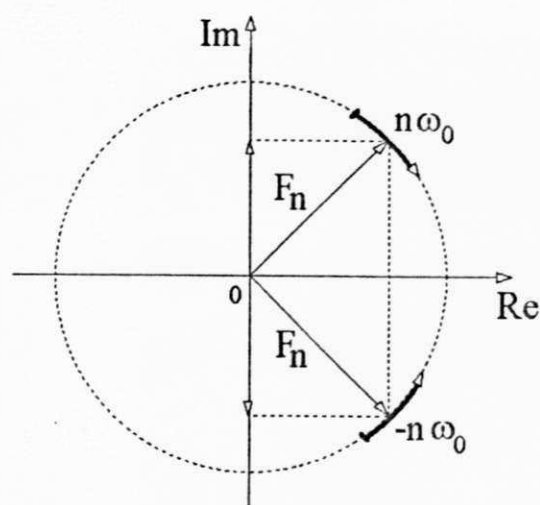


FIG. 1B. Interpretação geométrica para as frequências angulares negativas.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-j\omega t} dt$$

No plano imaginário, as componentes imaginárias de F_n e F_{-n} se anulam para um dado valor real de $f(t)$, como mostra a figura (1B).

2. Transformada de Fourier

Como já mencionada, a série trigonométrica de Fourier é a expansão de uma função periódica como uma soma de senos e cossenos, cujas amplitudes são finitas e suas frequências são múltiplos da frequência fundamental ω_0 .

Contudo, esta técnica de análise pode ser aplicada a sinais não periódicos, mediante o uso das integrais de Fourier. Deste modo, para todo sinal não periódico de energia finita, sua transformada pode ser calculada por meio de transformações lineares da forma,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.1.B)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.2.B)$$

Usando-se a equação (2.1.B), podemos escrever uma função não-periódica $f(t)$, em termos de funções exponenciais, em todo intervalo $[-\infty, \infty]$. Uma componente qualquer de frequência ω_k terá amplitude igual a $F(\omega)$.

As equações (2.1.B) e (2.2.B) são conhecidas como pares de transformadas de Fourier permitindo a transferência de uma função do domínio do tempo para o domínio da frequência, e vice-versa; procedimento bastante usual em análise de funções. Assim:

$$F(\omega) = \text{Transformada de Fourier} = F[f(t)]$$

$$f(t) = \text{Transformada inversa de Fourier} = F^{-1}[F(\omega)]$$

No estudo das séries de Fourier, as frequências angulares são discretas e múltiplas da frequência fundamental ω_0 , ou seja, $\omega_n = n\omega_0$ com n inteiro, onde $\omega_0 = 2\pi/T_p$ e T_p é o período do sinal. Assim

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T_p}$$

Considera-se agora, o caso de ω não ser mais discreta e sim contínua em $[-\infty, \infty]$: no primeiro caso a discretização implica em $\Delta\omega = 2\pi/T_p$, porém, no segundo caso, com $T_p \rightarrow \infty$, temos que $\omega \rightarrow \infty$, daí a justificativa para o uso da integral ao invés de somatório.

É importante assegurar neste estudo, condições matemáticas para a existência da transformada de Fourier. Observando-se a expressão (2.2.B), a magnitude de $e^{-j\omega t}$ é 1. Portanto uma condição para a existência da transformada de Fourier é que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (2.3.B)$$

seja limitada.

Esta condição é necessária mas não é suficiente. Sabe-se no entanto, que tanto a série de Fourier como a transformada de Fourier são definições essencialmente matemáticas. Do ponto de vista prático, não podemos integrar um sinal durante um intervalo de tempo infinito. Portanto, o procedimento usual é se fazer uma estimação da transformada de Fourier, definida na forma,

$$f(\omega, t) = \frac{1}{T_p} \int^{T_p} f(t) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.4.B)$$

tanto para sinais periódicos como para sinais transitórios.

3. Análise Espectral

3.1 Interpretação direta

É dado um sinal $f(t)$ e busca-se decompor este sinal em sinais senoidais. O interesse nesta decomposição, provém do fato de ser possível estudar a transmissão de um sinal por um sistema linear e decompor este sinal em elementos simples como senóides, por exemplo. A ação de um

sistema linear sobre um sinal senoidal também pode ser comodamente representada pela sua função de transferência. Esta operação pode ser efetuada pela transformada de Fourier de $f(t)$, definida anteriormente pela integral

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1.B)$$

onde, para o caso de funções habitualmente encontradas na prática industrial e científica, esta integral sempre converge. Com efeito, estes sinais $[f(t)]$ descrevem fenômenos limitados no tempo e no espaço, e não são diferentes de zero por mais que um domínio finito.

Como exemplo, pode-se facilmente verificar que a transformada de Fourier de

$$f(t) = e^{-\alpha t} \text{sen } \beta t \quad x(t), \text{ com } [x(t) = 0, t < 0 \\ x(t) = 1, t \geq 0]$$

admite por expressão

$$\delta(t - nT) \xrightarrow{F} e^{-j\omega nT} \quad \therefore$$

$$f^*(t) \xrightarrow{F} \Delta t \sum f(nT) e^{-j\omega nT} = F^*(\omega)$$

$$F^*(\omega + \omega^*) = T \sum_n f(nT) e^{-j\omega nT} e^{-j\omega^* nT}$$

$$e^{-j\omega^* nT} = 1, \text{ pois } \omega^* = \frac{2\pi}{T}$$

$$= F^*(\omega)$$

$$F(\omega) = \frac{\beta}{(j\omega + \alpha)^2 + \beta^2}$$

O significado da função $F(\omega)$ pode, muito simplesmente, ser compreendido da seguinte maneira: decompõe-se a exponencial $e^{-j\omega t}$,

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \text{sen } \omega t \quad (3.2.B)$$

onde substituindo-se (3.2.B) em (3.1.B) se tem,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{sen } \omega t \, dt \quad (3.3.B)$$

Considera-se agora um valor particular de ω . Se $f(t)$ admite uma componente semelhante a $\cos \omega t$, ou seja, uma componente que muda de sinal no mesmo tempo em que $\cos \omega t$, então a integral

$$\text{Re}[F(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \quad (3.4.B)$$

é diferente de zero, como é observado em $f_1(t) = A \cos \omega t e^{-\alpha|t|}$. Do contrário, para $f_2(t) = \text{sen } \omega t$ ou $f_3(t) = \cos \omega' t$ com $\omega' \neq \omega$ não há sincronismo com $\cos \omega t$ nas mudanças de sinal, logo, a integral anterior se anula. Desta forma, a primeira integral da expressão (3.3.B) assume um valor real que entra na composição de $F(\omega)$.

Constata-se assim, que a operação matemática (3.4.B) provoca, de tal sorte, uma extração da componente de $f(t)$ semelhante a $\cos \omega t$.

Seja o caso de um sinal contaminado com algum tipo de ruído:

$$S(t) = A \cos \omega t + r$$

onde interessa-nos as integrais no período $T_p = 2\pi / \omega$,

$$\int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} S(t) m(t) dt$$

$\mu(t)$ é uma função moduladora semelhante a $\cos \omega t$. Esta operação permite uma boa eliminação do ruído "r" em $S(t)$, pois em geral, o ruído apresenta diversas componentes que não se assemelham ao sinal útil, e em particular, as componentes em quadratura, como $\sin n\omega t$, sendo por isso totalmente eliminadas.

Da mesma forma, verifica-se que se $f(t)$ admite uma componente semelhante a $\sin \omega t$, a segunda integral de (3.3.B) vai introduzir um termo imaginário na composição de $F(\omega)$. Portanto, a existência de uma parte real ou imaginária em $F(\omega)$, traduz a existência de componentes semelhantes a $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$ no sinal respectivamente, sem depender da frequência angular.

3.2 Análise Espectral de uma Função Discreta

Seja uma sequência de números $f(iT)$ com $(i = 1, 2, \dots, n)$, onde deseja-se obter a análise espectral do sinal $f(t)$, cuja amostragem, pode conduzir a $f(iT)$. Uma forma habitual de obtenção consiste em associar um impulso de Dirac a cada valor $f(iT)$, admitindo-se que a função espectral procurada é a transformada de Fourier da função $f^*(t)$, resultante da sequência de impulsões na forma:

$$\alpha f(iT) \delta(t - iT), \quad \alpha = \text{CONSTANTE}$$

Um modelo matemático da função $f^*(t)$ que possui transformada de Fourier pode ser dado por :

$$f^*(t) = \alpha \sum_i f(iT) \delta(t - iT) \tag{3.5.B}$$

onde, tomando-se $\alpha = T$, é possível obter a relação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) dt \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

A transformada de Fourier de um impulso de Dirac é bem conhecida e vale

$$\begin{aligned} \delta(t - nT) &\xrightarrow{F} e^{-j\omega nT} \quad \therefore \\ f^*(t) &\xrightarrow{F} \Delta t \sum f(nT) e^{-j\omega nT} = F^*(\omega) \end{aligned} \quad (3.6.B)$$

É possível provar a periodicidade de $F^*(\omega)$:

$$F^*(\omega + \omega^*) = T \sum_n f(nT) e^{-j\omega nT} e^{-j\omega^* nT} = F^*(\omega) \quad (3.7.B)$$

onde o fator $e^{-j\omega^* nT} = 1$, pois $\omega^* = \frac{2\pi}{T}$.

Pode-se mostrar (item 4) que funções senoidais com frequências angulares diferentes de um múltiplo da frequência de amostragem, apresentam a mesma função espectral, ou seja:

$$F^*(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(\omega + n\omega^*) \quad (3.8.B)$$

3.3 Transformada de Fourier Discreta

Para se traduzir numericamente as relações (2.1.B) e (2.2.B), existentes entre uma função e sua transformada de Fourier, é necessário definir-se uma relação entre uma sequência de números reais e uma sequência de números complexos.

Sejam as seqüências:

$$A_r(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) \text{ complexa}$$

$$X_k(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \text{ real}$$

define-se uma relação da seguinte forma:

$$A_r = \sum_{k=0}^{n-1} X_k e^{-\frac{2\pi r}{n}jk} \quad (3.9.B)$$

A seqüência A_r é dita transformada de Fourier discreta (TFD) de X_k , cuja relação também pode ser representada por,

$$X_k \xrightarrow{\text{TFD}} A_r$$

Fazendo-se $\omega = e^{-\frac{2\pi j}{n}}$ a relação (3.9.B) pode ser colocada sob a forma:

$$A_r = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \omega^{rk} \quad (3.10.B)$$

É possível, de maneira inversa, calcula-se X_k a partir de A_r fazendo-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n-1} A_r \omega^{-rg} &= \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} X_k \omega^{rk} \right) \omega^{-rg} = \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \omega^{r(k-g)} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[X_k \left(\sum_{r=0}^{n-1} \omega^{r(k-g)} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{3.11.B}$$

Dado que o termo entre parênteses é

$$\begin{aligned}
N, & \quad \text{se } k = g, \quad e \\
0, & \quad \text{se } k \neq g \text{ com } k \geq 0 \text{ e } N > g
\end{aligned}$$

então,

$$X_g = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} A_r \omega^{-rg}
\tag{3.12.B}$$

Portanto, a expressão (3.12.B) é chamada de transformada de Fourier discreta inversa da sequência A_p cuja relação pode ser expressa por :

$$A_r \xrightarrow{\text{TFDI}} X_g$$

O uso da TFD passou a ser amplamente utilizado a partir de 1965, graças à exploração sistemática de um método de cálculo astucioso denominado Transformada Rápida de Fourier (Fast

Fourier Transform - FFT). A forma deste algoritmo, permite sua implementação com eficiência em computadores digitais, e de cuja rapidez nos cálculos, viabiliza a análise espectral em tempo real.

4. Aspectos sobre Discretização, Teorema da Amostragem e Teorema de Shannon

Para um sinal $f(t)$ contínuo, assumindo valores no intervalo de tempo de discretização constante T , pode-se obter um sinal discreto $f^*(t)$ na forma:

$$f^*(t) = f(t = nT), \quad n = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.1.B)$$

A transformada de Fourier contínua do sinal discreto (4.1.B), pode ser dada por

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega n \Delta t} \quad (4.2.B)$$

Pode-se mostrar que a transformada de Fourier do sinal discreto $f^*(t)$ em (4.1.B) é periódica,

$$F^*(\omega + r\omega^*) = F^*(\omega), \quad r = \text{INTEIRO} \quad (4.3.B)$$

sendo ω a frequência de amostragem dada por

$$\omega^* = 2\pi / T \quad (4.4.B)$$

Consegue-se uma melhor compreensão da origem da relação expressa em (4.3.B), fazendo-se o seguinte estudo teórico: é dada uma sequência de números $f(n \Delta t)$ ($n = 1, 2, \dots, i$). Precisa-se

obter a análise espectral do sinal $f(t)$, cuja amostragem pode conduzir aos $f_n(\Delta t)$. O método habitualmente seguido consiste em associar um impulso de Dirac $F \cdot f(n \Delta t) \delta(t - n \Delta t)$, onde "F" é uma constante, e para cada um dos valores $f(n \Delta t)$, deve-se admitir que a função espectral procurada é a transformada de Fourier da função $f^*(t)$, resultante desta sequência de impulsões. Assim pode-se escrever

$$f^*(t) = F \sum_n f(n \Delta t) \delta(t - n \Delta t) \quad (4.5.B)$$

Bem entendido, a escolha de $f^*(t)$ apresenta um caráter arbitrário. Em particular, o valor escolhido para o fator F difere segundo alguns autores podendo-se citar $F = 1$ e $F = \Delta t$.

Prefere-se o valor $F = \Delta t$ que permite respeitar a relação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) dt \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \quad (4.6.B)$$

Utilizando-se o conceito de transformada de Fourier, pode-se facilmente mostrar que:

$$\delta(t - n \Delta t) \xrightarrow{F} e^{-jn\omega\Delta t}$$

donde

$$f^*(t) \xrightarrow{F} \Delta t \sum f(n \Delta t) e^{-jn\omega\Delta t} = F^*(\omega) \quad (4.7.B)$$

Assim, pode-se facilmente verificar a periodicidade de $F^*(\omega)$ prevista no item anterior, onde a partir de (4.7.B) se tem

$$F^*(\omega + \omega^*) = \Delta t \sum_n f(n\Delta t) e^{-jn\omega\Delta t} e^{-jn\omega^*\Delta t} = F^*(\omega) \quad (4.8.B)$$

considerando-se que a segunda exponencial em (4.8.B) é igual a um, uma vez que o produto $\omega^*\Delta t$ é igual a 2π . Dessa forma, a transformada em (4.2.B) é periódica e de período ω^* .

Após algumas manipulações e considerando-se a relação (4.4.B) pode-se mostrar que a transformada inversa de (4.2.B) é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\omega^*} \int_{-\omega^*/2}^{\omega^*/2} F(\omega) e^{j\omega nT} dt \quad (4.9.B)$$

onde a equação (4.9.B) pode ser interpretada como sendo os coeficientes de EULER-FOURIER da expansão em série da relação (4.2.B).

Para se estabelecer o teorema da amostragem, pode-se considerar que $f^*(t)$ é a transformada inversa de $F(\omega)$ na forma,

$$f^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega nT} dt \quad (4.10.B)$$

onde, após algumas manipulações, pode-se chegar a:

$$f^*(t) = \int_{-\omega^*/2}^{\omega^*/2} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} F^*(\omega + r\omega^*) \right] e^{j\omega n\Delta T} dt \quad (4.11.B)$$

com r e n assumindo valores inteiros.

Comparando-se (4.9.B) com (4.11.B), chega-se a:

$$F^*(\omega) = \omega^* \sum_{r=-\infty}^{\infty} F^*(\omega + r\omega^*) \quad (4.12.B)$$

que é a equação conhecida como teorema da discretização ou da amostragem.

Para que não haja distorção do sinal após a discretização (4.12.B), é necessário que a frequência de amostragem seja maior ou igual a duas vezes a maior frequência contida no sinal.

No caso em que o sinal contiver componente em frequência maior que a metade da frequência de amostragem, ocorrerá uma distorção no sinal. Esta distorção pode ser vista como um rebatimento do espectro devido à discretização (ALIASING). Neste caso, faz-se necessário utilizar um filtro passa-baixa ou um filtro anti-aliasing, para se contornar este efeito.

No caso em que a frequência máxima do sinal for menor ou igual a metade da frequência de amostragem (frequência de Nyquist), $f(t)$ pode ser escrita adequadamente na forma:

$$f(t) = \frac{1}{\omega^*} \int_{-\omega^*/2}^{\omega^*/2} F^*(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.13.B)$$

Substituindo-se (4.2.B) em (4.12.B), pode-se chegar à expansão conhecida como interpolação de "Shannon",

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^*(t) \frac{\text{sen } \pi \omega^* (t - nT)}{\pi \omega^* (t - nT)} \quad (4.14.B)$$

Deste modo, a expressão (4.14.B) permite reconstituir um sinal contínuo ou analógico, a partir do mesmo sinal discretizado, desde que a frequência de amostragem seja maior ou igual ao dobro da maior componente de frequência contida no sinal.

Resumindo, o "Teorema da Amostragem de Shannon" estabelece: para que um sistema amostrado tenha as mesmas condições de saída de um sistema funcionando de forma contínua, a frequência de amostragem deve ser maior ou igual a duas vezes a maior frequência possível de ser transmitida pelo sistema contínuo. Entretanto, para um sistema causal e real, isto é muito arbitrário; na frequência limite do sistema, o valor da função espectral é nulo, uma vez que em sistemas reais esta frequência deve tender para o infinito. Por isso, é conveniente arbitrar o valor limite da frequência de sistemas reais como aquela, cujo valor da função espectral está entre 0.01 e 0.001 do seu valor máximo, procedimento este que pode servir como parte do critério para amostragem de sinais.

APÊNDICE C

RUÍDO BRANCO.

1. Noção de Ruído Branco

O ruído branco é um tipo de sinal que não descreve exatamente algum fenômeno físico e por isso, não obstante, é freqüentemente questionado.

Chama-se ruído branco um sinal de valor médio nulo, cuja densidade espectral de potência média é uma constante positiva.

O conceito de densidade espectral de potência é usado em análise espectral de sinais aleatórios, através da transformada de Fourier da função autocorrelação do sinal, visto que, um sinal desta natureza é caracterizado pelas suas propriedades estatísticas. Para dar maior clareza a este conceito, supõe-se um sinal aleatório, estacionário e contínuo $f(t)$, cujo valor médio é nulo. Introduzindo-se a transformada de Fourier $S(\omega)$ da função autocorrelação $\varphi_f(\xi)$ de $f(t)$, obtém-se:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_f(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} \varphi_f(\xi) \cos \omega\xi d\xi \quad (1.1.C)$$

As funções $S(\omega)$ e $\varphi_f(\xi)$ são pares, portanto, limitam-se este conceito ao caso particular de integrais limitadas. A transformada inversa resulta:

$$\varphi_f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\xi} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} S(\omega) \cos \omega\xi d\omega \quad (1.2.C)$$

onde fazendo-se $\xi = 0$ em (1.2.C), obtém-se

$$\varphi_f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} S(f) df \quad \therefore f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.3.C)$$

Entretanto, por definição de $\varphi_f(\xi)$, $\varphi_f(0) = E[f(t)]^2 = \varphi_f^2$, que por sua vez é a variância de $f(t)$. Esta grandeza é igual à potência média debitada por uma tensão elétrica de $f(t)$ volts numa resistência de 1Ω (ohm). Esta é a origem do abuso de linguagem habitual, que consiste em denominar-se φ_f^2 de potência média de $f(t)$, e então se considerar $S(\omega)$ como a densidade espectral de potência média.

Para os sinais discretizados, a densidade espectral de potência média vale

$$S^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega + r\omega^*) \quad \therefore \quad \omega^* = \frac{2\pi}{T} \quad (1.4.C)$$

O conceito de ruído branco representa, contudo, um interesse; ele permite representar de uma maneira simples, a aplicação de um ruído a um sistema físico, cuja banda em frequência, é bastante larga em relação à banda passante do sistema. Este fato é então motivado pelo valor constante da densidade espectral de potência média $S(\omega)$ admitida para o ruído. Vide figura (1C e 2C).

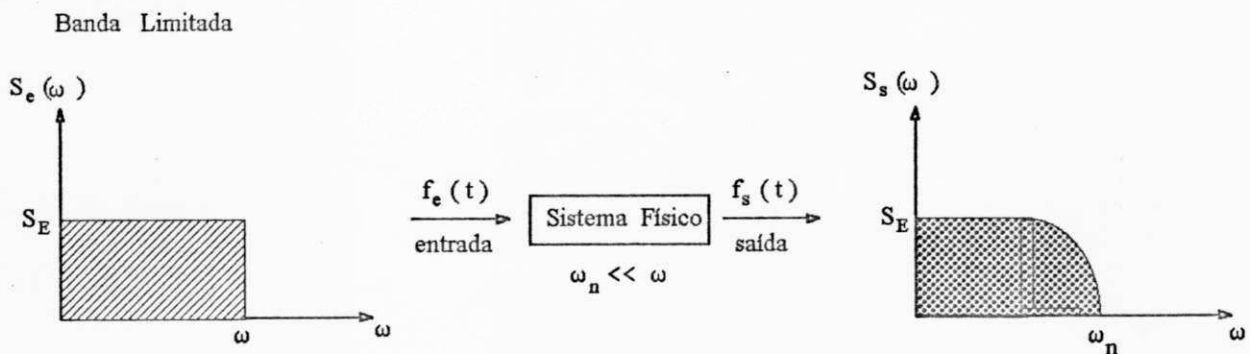


FIG. 1C Densidade espectral - Ruído de banda limitada

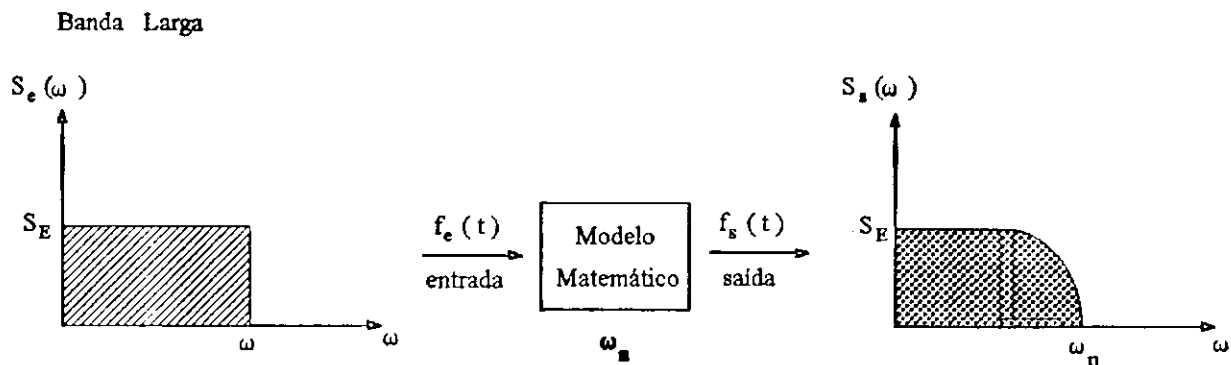


FIG. 2C Densidade espectral - Ruído de banda larga

Uma pergunta que se faz diante deste quadro é: qual seria a autocorrelação de um ruído branco? Para responder esta questão, basta supor um ruído $r_{\omega_0}(t)$, com densidade espectral $S(\omega)$ e função autocorrelação $\varphi_r(\xi)$. Considere que:

$$S(\omega) = S = \text{CONSTANTE} \quad \text{para } |\omega| \leq \omega_0$$

$$S(\omega) = 0 \quad \text{para } |\omega| > \omega_0$$

fazendo-se ω_0 tender para o infinito e aplicando-se (1.2.C), obtém-se:

$$\varphi_r(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S e^{j\omega\xi} d\omega = \frac{S}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega\xi}}{j\xi} \right]_{-\omega_0}^{\omega_0} = S \frac{\text{sen } \omega_0 \xi}{\pi \xi}$$

donde,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(\xi) d\xi = \frac{S}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } \omega_0 \xi}{\pi \xi} d\xi = S$$

Quando $\omega_0 \rightarrow \infty$, constata-se que $\varphi_r(\xi) \rightarrow \infty$, para todo valor $\xi \neq 0$, respeitando a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(\xi) d\xi = S = \text{CONSTANTE}$$

Isto nos leva a admitir que, no limite, a autocorrelação de um ruído branco, de densidade espectral S é uma impulsão de Dirac de amplitude S . Isto significa que, para um ruído branco, dois valores próximos $f(t)$ e $f(t + \Delta t)$ não estão correlacionados, por menor que seja Δt , constituindo-se assim uma abstração matemática, uma vez que em casos reais, admite-se alguma correlação, até mesmo pela extrema aproximação entre instantes vizinhos.

APÊNDICE D

DEMONSTRAÇÃO DA FORMULA DE KALMAN

O Filtro de Kalman produz estimativas \hat{X}_k de probabilidade máxima ($p(X_k / Z_1', Z_2', \dots, Z_k')$ máxima), uma vez que o ruído e o vetor de estado inicial são considerados variáveis aleatórias de distribuição gaussiana. A busca por um valor X_k que maximiza a probabilidade a posteriori $p(X_k / Z_1', Z_2', \dots, Z_k')$, a partir do estabelecimento de leis da Teoria da Probabilidade, constituem fundamentos básicos para a demonstração da Teoria de Kalman.

Os tópicos que seguem postulam a Teoria de Kalman :

1. Uma vez que dispõe-se das informações $(Z_1', Z_2', \dots, Z_{k-1}')$, X_k admite uma lei de probabilidade de valor médio $\hat{X}_{k/k-1}$ e de matriz de covariância $P_{k/k-1}$ ($k/k-1$ denota estimativa em k com base no valor obtido em $k-1$). Se a lei é gaussiana, a expressão da densidade de probabilidade é a seguinte:

$$P(X_k / Z_1', \dots, Z_{k-1}') = \frac{e^{-\frac{1}{2}(X_k - \hat{X}_{k/k-1})^T P_{k/k-1}^{-1} (X_k - \hat{X}_{k/k-1})}}{(2\pi)^{n/2} \det(P_{k/k-1})^{1/2}} \quad (1.1.D)$$

onde n é o número de variáveis de estado e $\det(P_{k/k-1})$ é o determinante formado pelos elementos da matriz de covariância, cujo valor é sempre positivo, uma vez que os valores próprios desta matriz são todos positivos.

2. A partir das informações $(Z_1', Z_2', Z_3', \dots, Z_{k-1}')$ deve-se atribuir a Z_k' uma lei de probabilidade de valor médio

$$E[Z_k'] = Z_{k/k-1} = H_k \hat{X}_{k/k-1} \quad (2.1.D)$$

e uma matriz de covariância

$$P Z_{k-1} = H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k \quad (2.2.D)$$

obtida fazendo-se $E \left[(Z'_k - Z'_{k/k-1})(Z'_k - Z'_{k/k-1})^T \right]$. Se esta lei de probabilidade é gaussiana, a expressão da sua densidade de probabilidade é a seguinte :

$$P(Z'_k / Z'_1, \dots, Z'_{k-1}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(Z'_k - \bar{Z}'_{k/k-1})^T P Z^{-1} (Z'_k - \bar{Z}'_{k/k-1})}}{(2\pi)^{m/2} \det(P Z_{k-1})^{1/2}} \quad (2.3.D)$$

onde m é o número de medições.

3. Interessa agora, a densidade de probabilidade do vetor de medição Z'_k uma vez que X_k é supostamente conhecido. Considere a relação:

$$Z'_k = H_k X_k + V_k \quad (3.1.D)$$

onde a parte aleatória de Z'_k limita-se ao ruído de medição V_k . A lei de probabilidade de Z'_k admite $H X_k$ como valor médio e $R_k = E[V_k + V_k^T]$ como matriz de covariância do ruído de medição. Se esta lei é gaussiana, sua densidade de probabilidade é:

$$P(Z'_k / X_k) = P(V_k) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(V_k^T S_k^{-1} V_k)}}{(2\pi)^{m/2} \det(S_k)^{1/2}} \quad (3.2.D)$$

uma vez que X_k é supostamente conhecido, o fato de se ter conhecimento sobre Z'_1, \dots, Z'_{k-1} não muda a densidade de probabilidade de Z'_k . Assim, tem-se como consequência $Z'_k = H X_k + V_k$, onde considera-se o ruído V_k independente de Z'_k , e a lei de probabilidade condicional resulta em,

$$P(Z'_k / X_k) = P(Z'_k / X_k, Z'_1, \dots, Z'_{k-1}) \quad (3.3.D)$$

De posse das expressões (1.1.D), (2.3.D) e (3.2.D), pode-se determinar a densidade de probabilidade a posteriori de X_k , levando-se em conta os resultados das medições Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_k . Com efeito, pela aplicação do axioma das probabilidades totais, obtém-se

$$\begin{aligned} P(X_k, Z'_k / Z'_1, \dots, Z'_{k-1}) &= P(X_k / Z'_1, \dots, Z'_{k-1}) P(Z'_k / X_k, Z'_1, \dots, Z'_{k-1}) = \\ &= P(Z'_k / Z'_1, \dots, Z'_{k-1}) P(X_k / Z'_1, \dots, Z'_{k-1}, Z'_k) \end{aligned}$$

donde, a partir de (3.3.D)

$$P(X_k / Z'_1, \dots, Z'_{k-1}, Z'_k) = \frac{P(X_k / Z'_1, \dots, Z'_{k-1}) P(Z'_k / X_k)}{P(Z'_k / Z'_1, \dots, Z'_{k-1})} \quad (3.4.D)$$

Substituindo-se as expressões para cada uma destas probabilidades condicionais, a partir de (1.1.D), (2.3.D) e (3.2.D), obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{fdp}(X_k) = XC \left\{ -\frac{1}{2} \left[(X_k - \bar{X}_{k/k-1})^T P_{k/k-1}^{-1} (X_k - \bar{X}_{k/k-1}) + V_k^T R_k^{-1} V_k - \right. \right. \\ \left. \left. - (Z'_k - \bar{Z}_{k/k-1})^T P_{Z'_k}^{-1} (Z'_k - \bar{Z}_{k/k-1}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.5.D)$$

onde $XC = \text{CONSTANTE}$.

A maximização desta grandeza implica na nulidade do gradiente de seu expoente escalar, para o qual, por decorrência da álgebra matricial, obtém-se:

$$2(X_k - \hat{X}_{k/k-1})^T P_{k/k-1}^{-1} - 2(Z'_k - \hat{Z}'_{k/k-1})^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + S_k)^{-1} \text{grad}(Z'_k) = 0 \quad (3.6.D)$$

onde, para $Z'_k = H_k X_k + V_k$, tem-se que $\text{grad}(Z'_k) = H_k$.

De posse da expressão (3.6.D), chega-se facilmente à formulação para o Estimador de Kalman, isolando-se o termo X_k .

$$X_k = X_{k/k-1} + P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + S_k)^{-1} (Z'_k - \hat{Z}'_{k/k-1}) \quad (3.7.D)$$

Pelo que fica demonstrado, obtém-se a forma linear de correção através do ganho do Filtro de Kalman para $\hat{X}_{k/k-1}$ a partir de $Z'_k - \hat{Z}'_{k/k-1}$ e da expressão para o ganho de estado permanente dada por

$$\bar{K}_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + S_k)^{-1} \quad (3.8.D)$$

ANEXO I

Programas Utilizados para Verificação da Técnica de Estimação Investigada

1. **Programa Principal** - Este programa utiliza o FILTRO DE KALMAN com parâmetros obtidos via VARIÁVEIS INSTRUMENTAIS para geração de novos instrumentos.

```
%  
%  
%      METODO DE ESTIMACAO DE PARAMETROS NO DOMINIO DO TEMPO  
%      UTILIZANDO -SE VARIABEIS INSTRUMENTAIS EM CONJUNCAO COM  
%  
%      O FILTRO DE KALMAN  
%  
%  
%  
% Descricao :  
%  
% np = numero de componentes do SINAL DE SCHROEDER  
% npi = muda a faixa de frequencia de excitacao  
% f0 = amplitude maxima das harmonicas que compoem o SINAL DE SCHROEDER  
% int4 = muda o intervalo de tempo de discretizacao.  
% mx, cx, kx = parametros do sistema para simulacao  
% sx = desvio padrao para o ruido sobreposto ao sinal de deslocamento  
% sv = desvio padrao para o ruido sobreposto ao sinal de velocidade  
%  
%
```

```

%
% Adaptado por J.A.L.Junior  Data : 27.01.1994
%
% Advertencia! "Este programa utiliza a aproximacao de TAYLOR de primeira ordem
% com a descricao do sistema na forma ESPACO DE ESTADOS : "
%
%          dx/dt = Ax + Bu
%          y = Cx + Du
%
clear

np = 64; npi = 1; f0 = 10; int = 1; int4 = 1; mx = 10; cx = 30 ;kx = 800;
A = [0  1; -kx/mx  -cx/mx];
[Wn,Fdamp] = damp(A);
disp('Frequencia natural ='); Wn
disp('Fator de amortecimento ='); Fdamp
disp('TECLE <ENTER>');

pause;

TOL = 1.e-3;

ok = 1;

KC(1,2) = zeros;

[stat,U,Ti] = natv(kx,cx,mx,np,npi,f0,int,int4,ok,KC);

%
%          X = W*PHI + RUIDO - Forma Compacta
%
phi = [1  -kx*Ti/mx; Ti  1-cx*Ti/mx; 0  Ti/mx];
sx = 64.e-4; sv = 53.e-3;

[rx,rv,RMSx,RMSv] = noise(sx,sv,stat);

```

```

for i=1:np,
    W(i,1)=stat(1,i)+rx(1,i);
    W(i,2)=stat(2,i)+rv(1,i);
    W(i,3)=U(i,1);
end;
for i=2:np+1,
    X(i-1,1)=stat(1,i)+rx(1,i);
    X(i-1,2)=stat(2,i)+rv(1,i);
end;
%[U,S,V]=svd([W'*W]eye(W'*W)*W);          % Decomposicao em Valores Singulares
%phiest=U*S*V'*X;                          % Metodo dos Minimos Quadrados
phiest=[W'*W]eye(W'*W)*W'*X;              % Metodo dos Minimos Quadrados
disp('Matriz PHlteorica e PHlestimada');
PHlteor=phi
PHlest=phiest
disp('TECLE <ENTER>');
pause;
disp('MINIMOS QUADRADOS');
disp('Erro Relativo para PHlest(1,2) e PHlest(2,2) em %');
Ephi12=abs(phi(1,2)-phiest(1,2))*100/abs(phi(1,2))
Ephi22=abs(phi(2,2)-phiest(2,2))*100/abs(phi(2,2))
disp('TECLE <ENTER>');
pause;
ti=phiest(2,1);k=(-1)*phiest(1,2)*nx/Ti;c=(1-phiest(2,2))*nx/Ti;
EST(1,1)=k; EST(2,1)=c; EST(3,1)=ti;  % EST = Matriz de Estimativas
ERKmq=abs(k-kx)*100/kx
ERCmq=abs(c-cx)*100/cx

```



```

Wv(i,2) = stat(2,i);
Wv(i,3) = U(i,1);

end;

%[U,S,V] = svd([Wv'*W]\eye(Wv'*W)*Wv');
%phiest = U*S*V'*X;          % Metodo das Variaveis Instrumentais
phiest = [Wv'*W]\eye(Wv'*W)*Wv'*X;    % Metodo das Variaveis Instrumentais
tiv=phiest(2,1);kv=(-1)*phiest(1,2)*mx/Ti;cv=(1-phiest(2,2))*mx/Ti;
EST(1,n) = kv, EST(2,n) = cv, EST(3,n) = tiv;
jj = n;
EST1=(abs(EST(1,n)-EST(1,n-1))); EST2=abs(EST(2,n)-EST(2,n-1));
EST3=abs(EST(3,n)-EST(3,n-1));
if(EST1) < TOL & EST2 & EST3, break;
else
    kv = EST(1,n); cv = EST(2,n); tiv = EST(3,n);
end;
end;
end;
end;
disp('VARIAVEIS INSTRUMENTAIS');
disp('Matriz PHl teorica e PHl estimada');
PHl teor = phi
PHl est = phiest
disp('TECLE <ENTER>');
pause;
disp('Erro Relativo para PHl est(1,2) e PHl est(2,2) em %');
Ephi12=abs(phi(1,2)-phiest(1,2))*100/abs(phi(1,2))
Ephi22=abs(phi(2,2)-phiest(2,2))*100/abs(phi(2,2))
disp('TECLE <ENTER>');

```

```

Ephi22=abs(phi(2,2)-phiest(2,2))*100/abs(phi(2,2))
disp('TECLE <ENTER>');
pause;
tik=phiest(2,1);kk=(-1)*phiest(1,2)*mx/Ti;ck=(1-phiest(2,2))*mx/Ti;
EST(1,jj+1)=kk, EST(2,jj+1)=ck, EST(3,jj+1)=tik;
ERKk=abs(kk-kx)*100/kx
ERCk=abs(ck-cx)*100/cx
ERTk=abs(tik-Ti)*100/Ti
disp('TECLE <ENTER>');
pause;

```

2. Subprograma - Este subprograma utiliza o Gerador de Números Aleatórios "RAND" para o processode contaminação do vetor de estado, informando o nível RMS de ruído a ser adicionado.

```
function [ rx,rv,RMSx,RMSv ] = noise(sx,sv,y);
%
% [Rx,Rv,RMSx,RMSv] = NOISE(Sx,Sv,Y)
%
% GERADOR DE SEQUENCIAS DE RUÍDO COM CARACTERÍSTICAS PRÓXIMAS
% DE UM RUÍDO BRANCO
%
%RUÍDO :Esta função gera uma sequência randômica de comprimento (length(Y),1)
% sobre Rx e Rv, e fornece o valor %RMS do desvio a ser adicionado
% no vetor de estado ou matriz de medição.
%
% Descrição:
% Sx, Sv = Desvio Padrão
% Y = Matriz de medição [dimensão (np,2)]
%
% Adaptado por J.A.L.Júnior Data:04.02.1994
%
% U.F.Pb - Professor do Departamento de Engenharia Mecânica
% C. Grande
%
rand('normal')
rand('seed',0)
yx=y(1,:); yv=y(2,:);
```

3. Subprograma - Este subprograma chama o Integrador RUNGE-KUTTA de quarta-ordem, repetidas vezes, até a obtenção da resposta de estado permanente.

```
function [stat,U,Ti] = natv(kc,cx,mx,np,rpi,f0,int,int4,ok,KC)
%
%NATV: SIMULACAO DE ESTADO PERMANENTE utilizando RK4R - Metodo Runge-Kutta
% de quarta-ordem com coeficientes de Runge para obtencao de vetore de estado livre de transitorios.
%
%
% Adaptado por J.A.L.Junior Data: 25.01.1994
%
% Descricao
%
% Amortecimento(cx), Massa (mx) e Rigidez (kc)
% Frequencia Natural = wn e Fator de Amortecimento = Fdamp
%
% stat = matriz(np,2)
% U = Sinal de Schroeder
% Ti = Intervalo de tempo de discretizacao
%
%
wn = sqrt(kc/mx); Fdamp = cx/(2*mx*wn);
if ok == 1,
    A=[0 1;-kc/mx -cx/mx];
else
    A=[0 1;-KC(1,1)/mx -KC(1,2)/mx];
```

3. Subprograma - Este subprograma chama o Integrador RUNGE-KUTTA de quarta-ordem, repetidas vezes, até a obtenção da resposta de estado permanente.

```
function [stat,U,Ti] = natv(kx,cx,mx,np,np1,f0,int,int4,ok,KC)
%
%NATV: SIMULACAO DE ESTADO PERMANENTE utilizando RK4R - Metodo Runge-Kutta
% de quarta-ordem com coeficientes de Runge para obtencao de vetore de estado livre de transitorios.
%
%
% Adaptado por J.A.L.Junior Data: 25.01.1994
%
% Descricao
%
% Amortecimento(cx), Massa (mx) e Rigidez (kx)
% Frequencia Natural = wn e Fator de Amortecimento = Fdamp
%
% stat = matriz(np,2)
% U = Sinal de Schroeder
% Ti = Intervalo de tempo de discretizacao
%
%
wn = sqrt(kx/mx); Fdamp = cx/(2*mx*wn);
if ok == 1,
    A=[0 1;-kx/mx -cx/mx];
else
    A=[0 1;-KC(1,1)/mx -KC(1,2)/mx];
```

```

end;
B=[0 1/mx];C=eye(A);D=[0 0];
int3 = 2^(int4-1);
maxstp = np*int*int3; ni = np*int3;
w0 = wn/np; T = 2*pi/np/w0; Ti = T/int3;
t0 = 0; tf = np*T; tk = (tf-t0); Tk = (tf-t0)/maxstp;
tol = 1.e-8;
ynt(2,1) = zeros; yxy(2,maxstp) = zeros; stat(2,maxstp) = zeros;
idm = 2; cont = 1;
c=ok
disp('TECLE <ENTER>');
pause;
if ok == 1,
    [U,TU] = sphs(ni,Ti,w0,f0,int);
    save UU
    save TUTU
else
load U
load TU
end;
h = Tk; h1 = h*int*int3;
for m = 1:200,
    y = rk4r(maxstp,idm,h,t0,tf,A,B,TU,ynt);
    T = h1;
    dmax = 0; vmax = 0;
    for i = 1:maxstp+1,
        yxy(1,i) = y(1,i);

```

4. **Subprograma** - Este subprograma implementa o Metodo RUNGE-KUTTA de quarta-ordem, com coeficientes de Runge, a passos constantes. A equação diferencial com solução a ser integrada, deve ser reduzida a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

```
function y = rk4r(maxstp,idm,h,t0,tf,A,B,TU,ynt)
%
%RK4R : SOLUCAO NUMERICA PELO METODO RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM
%      com COEFICIENTES DE RUNGE para EQUACOES DIFERENCIAIS
%              ORDINARIAS NO ESPACO DE ESTADOS
%
% Descricao:
%
% A = Matriz Dinamica do Sistema
% B = Matriz de Distribuicao
% ynt = Condicoes Iniciais
% t0 = Tempo Inicial
% tf = Tempo Final
% idm = Ordem do Sistema
%
% maxstp, h, TU      Vide NATV e SPHS..
%
%
% Adaptado por J.A.L.Junior Data:25.01.1994
%
ysv(2,1) = zeros; ss(2,1) = zeros; kk(4,2) = zeros; y(2,maxstp) = zeros;
eps = 1.e-8;
```

```

    ysv(1,1)=y(1,m)+kk(r,1)*.5;
    kk(r,2)=h*ss(2,1);
    ysv(2,1)=y(2,m)+kk(r,2)*.5;
else
end;
if r==4,
    k=k+1;
    ss=A*ysv+B*TU(k,1);
    kk(r,1)=h*ss(1,1);
    kk(r,2)=h*ss(2,1);
else
end;
end;
k=k-1;
np=m+1;
for i=1:ndm,
    y(i,np)=y(i,m)+(kk(1,i)+2*(kk(2,i)+kk(3,i))+kk(4,i))/6.0;
end;
m=np;
for i=1:ndm,
    ysv(i,1)=y(i,np);
end;
end;

```



```

    ysv(1,1)=y(1,m)+kk(r,1)*.5;
    kk(r,2)=h*ss(2,1);
    ysv(2,1)=y(2,m)+kk(r,2)*.5;
else
end;
if r==4,
    k=k+1;
    ss=A*ysv+B*TU(k,1);
    kk(r,1)=h*ss(1,1);
    kk(r,2)=h*ss(2,1);
else
end;
end;
k=k-1;
np=m+1;
for i=1:ndm,
    y(i,np)=y(i,m)+(kk(1,i)+2*(kk(2,i)+kk(3,i))+kk(4,i))/6.0;
end;
m=np;
for i=1:ndm,
    ysv(i,1)=y(i,np);
end;
end;

```

5. Subprograma - Este subprograma gera valores da fonte de excitação, utilizando o algoritmo de Schroeder incluindo valores intermediários entre dois pontos. Um sinal gerado desta forma apresenta espectro plano para a faixa de frequência adotada.

```
function [U,TU] = sphs(ni,Ti,w0,f0,int,int3)
%
%SPHS: SINAL DE SCHROEDER COM PONTOS INTERMEDIARIOS.
%
% Descrição:
%
% ni = Comprimento da Sequencia de Schroeder
% Ti = Intervalo do Tempo de Discretização
%
% w0, f0, int, int3 são definidos no Programa Principal
%
% U = Sinal de Schroeder ou Sequencia Fasada de Schroeder (SPHS)
% TU = Sequencia Intermediaria
%
% Adaptado por J.A.L.Junior Data:25.01.1994
%
for n = 1:ni+1,
    sphs(n) = 0.;
    for i = 1:(ni/2) - 1, % Metade dos pontos menos um
        AG = i^2./ni;
        while AG >= 2., AG = AG - 2.; end;
```

```

if(AG < 1.), AG = 0.; end;
if(AG >= 1.), AG = 1.; end;
ph = (1. - 2.*AG)*f0;          % (i*w0) = Faixa de Frequencia
sphs(n) = sphs(n) + ph*cos(i*w0*(n-1)*Ti); % [(n-1)*Ti] = Periodo do Sinal
end;
U(n,1) = sphs(n);
end;
I2 = 1;
m = 0;
int2 = int*2;
TU(1,1) = U(1,1);
for j = 2:(ni+1)*int2,
    m = m + 1;
    if m > 1,
        TU(j,1) = (U(I2,1) - U(I1,1))*m/2.0 + U(I1,1);
    end;
    if m == 1,
        I1 = I2;
        I2 = I2 + 1;
        TU(j,1) = (U(I2,1) - U(I1,1))*m/2.0 + U(I1,1);
    end;
    if I2 == ni,
        I1 = I2;
        I2 = 1;
        TU(j,1) = (U(I2,1) - U(I1,1))*m/2.0 + U(I1,1);
    end;
    if m == 2,

```

```
m=0;  
else  
end;  
end;  
TU(j,1)=U(l2,1);
```

6. Programa Principal - Este programa utiliza o FILTRO DE KALMAN com parâmetros obtidos via MÍNIMOS QUADRADOS para geração de dados filtrados e posterior aplicação do Método dos Mínimos Quadrados.

```
%  
% METODO DE ESTIMACAO DE PARAMETROS NO DOMINIO DO TEMPO  
% UTILIZANDO -SE MÍNIMOS QUADRADOS EM CONJUNCAO COM  
% O FILTRO DE KALMAN  
%  
%  
% Informacao  
% Este programa utiliza o FILTRO DE KALMAN com parametros obtidos via Mínimos  
% Quadrados não-recursivo para a obtencao de dados filtrados. Neste caso, obtém-se um  
% tempo de processamento bastante reduzido, se comparado ao que utiliza o Método das  
% Variáveis Instrumentais.  
%  
%  
% Descricao:  
%  
% np = numero de componentes do SINAL DE SCHROEDER  
% npi = muda a faixa de frequencia de excitacao  
% f0 = amplitude maxima das harmonicas que compoem o SINAL DE SCHROEDER  
% int4 = muda o intervalo de tempo de discretizacao.  
% mx, cx, kx = parametros do sistema para simulacao  
% sx = desvio padrao para o ruido sobreposto ao sinal de deslocamento  
% sv = desvio padrao para o ruido sobreposto ao sinal de velocidade
```

```

%
%
%
% Adaptado por J.A.L.Junior Data : 27.01.1994
%
% Advertencia! "Este programa utiliza a aproximacao de TAYLOR de primeira ordem
% com a descricao do sistema na forma ESPACO DE ESTADOS : "
%
%          dx/dt = Ax + Bu
%          y = Cx + Du
%
clear
np = 260; npi = 10; f0 = 10; int = 1; int4 = 1; mx = 10; cx = 30; kx = 800;
ok = 1;
KC(1,2) = zeros;
[stat,U,Ti] = natv(kx,cx,mx,np,npi,f0,int,int4,ok,KC);
%
%      X = W*PHI + RUIDO - Forma Compacta
%
phi = [1 -kx*Ti/mx;Ti 1-cx*Ti/mx;0 Ti/mx];
sx = 64.e-4; sv = 53.e-3;
[rx,rv,RMSx,RMSv] = noise(sx,sv,stat);
for i=1:np,
    W(i,1) = stat(1,i) + rx(1,i);
    W(i,2) = stat(2,i) + rv(1,i);
    W(i,3) = U(i,1);
    stat(1,i) = stat(1,i) + rx(1,i);

```

```

    stat(2,i) = stat(2,i) + rv(1,i);
end;
for i = 1:np,
    X(i,1) = stat(1,i+1);
    X(i,2) = stat(2,i+1);
end;
%[U,S,V] = svd([W*W]eye(W*W)*W); % Decomposicao em Valores Singulares
%phiest = U*S*V*X; % Metodo dos Minimos Quadrados
phiest = [W*W]eye(W*W)*W*X; % Metodo dos Minimos Quadrados
disp('MINIMOS QUADRADOS');
disp('Matriz PHIteorica e PHIestimada');
PHIteor = phi
PHIest = phiest
disp('TECLE <ENTER>');
pause;
disp('Erro Relativo para PHIest(1,2) e PHIest(2,2) em %');
Ephi12 = abs(phi(1,2)-phiest(1,2))*100/abs(phi(1,2))
Ephi22 = abs(phi(2,2)-phiest(2,2))*100/abs(phi(2,2))
disp('TECLE <ENTER>');
pause;
ti=phiest(2,1); k = (-1)*phiest(1,2)*mx/Ti; c = (1-phiest(2,2))*mx/Ti;
EST(1,1) = k; EST(2,1) = c; EST(3,1) = ti; % EST = Matriz de Estimativas
ERKmq=abs(k-kx)*100/kx
ERCmq=abs(c-cx)*100/cx
ERTmq=abs(ti-Ti)*100/Ti
pause;
a = [1 Ti; -k*T/mx 1-c*T/mx]; g = eye(a); q = eye(a);

```

```

c = eye(a); h = eye(a); b = [0 Ti/mx]; r = [sx^2 0; 0 sv^2];
[K,P] = dlqe(a,g,c,q,r); % Ganho Otimo e Matriz de Covariancias
for i = 1:np,
    xkf(:,i) = a*stat(:,i) + b*U(i,1) + K*(stat(:,i+1) - h*a*stat(:,i) - h*b*U(i,1));
end; % Filtragem
for i = 1:np,
    Wv(i,1) = xkf(1,i);
    Wv(i,2) = xkf(2,i);
    Wv(i,3) = U(i,1);
end;
phiest = [Wv'*W] \ eye(Wv'*W) * Wv'*X; % Metodo dos Minimos Quadrados
% Eliminaçao Gaussiana
disp('FILTRO DE KALMAN - MINIMOS QUADRADOS ');
disp('Matriz PHl teorica e PHl estimada');
PHl teor = phi
PHl est = phiest
disp('TECLE <ENTER>');
pause;
disp('Erro Relativo para PHl est(1,2) e PHl est(2,2) em %');
Ephi12 = abs(phi(1,2) - phiest(1,2)) * 100 / abs(phi(1,2))
Ephi22 = abs(phi(2,2) - phiest(2,2)) * 100 / abs(phi(2,2))
disp('TECLE <ENTER>');
pause;
tk = phiest(2,1); kk = (-1) * phiest(1,2) * mx / Ti; ck = (1 - phiest(2,2)) * mx / Ti;
EST(1,1) = kk; EST(2,1) = ck; EST(3,1) = tk;
k = kk; c = ck;
ERKflm = abs(kk - kx) * 100 / kx

```


$ERCf_{km} = \text{abs}(ck - cx) * 100 / cx$

$ERTf_{km} = \text{abs}(tik - Ti) * 100 / Ti$

`disp('TECLE <ENTER>');`

`pause;`

ANEXO II

Tabela 01 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso utilizou-se um valor fixo $N_{PI} = 1$ (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_p , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10 %. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rrand-MATLAB) :

$$S_x = 28.10^{-4}$$

$$S_v = 27.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\hat{\phi}_{12}^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
64	0.0110	13.9820	2.7538	3.7859	14.3990	44.4617	59.0602
		13.9820	2.7538	3.7859	0.4903	1.5139	2.0110
92	0.0076	21.2092	3.1983	4.7053	58.5543	10.9528	21.5718
		21.2092	3.1983	4.7053	1.3727	0.2568	0.5057
123	0.0055	22.8740	2.8920	3.7165	48.5487	8.8208	27.8791
		22.8740	2.8920	3.7165	0.8127	0.1477	0.1129
160	0.0044	31.0927	1.9433	2.5900	96.8223	14.5672	8.4596
		31.0927	1.9433	2.5900	1.2923	0.1944	0.1129
200	0.0035	41.1662	2.1958	2.7626	97.9082	17.7336	34.4627
		41.1662	2.1958	2.7626	1.0427	0.1889	0.3670
260	0.0027	43.0799	1.1737	1.5567	147.6741	9.3764	9.8272
		43.0799	1.1737	1.5567	1.2058	0.0766	0.0303

Tabela 02: Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso utilizou-se um valor fixo $N_{p} = 2$ (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_{p} , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10 %. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) :

$$S_x = 31.10^{-4}$$

$$S_v = 29.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
64	0.0220	3.3818	0.2184	2.1726	0.7242	10.3514	49.4188
		3.3818	0.2184	2.1726	0.0511	0.7928	3.4841
92	0.0153	9.5819	1.7203	4.1656	43.9721	25.7330	28.6386
		9.5819	1.7203	4.1656	2.1091	1.2355	1.3750
128	0.0110	9.1851	1.8564	3.3715	26.9541	7.7759	31.9866
		9.1851	1.8564	3.3715	0.9178	0.2646	1.0891
160	0.0088	15.1446	2.2798	3.6875	50.3302	17.4310	22.9980
		15.1446	2.2798	3.6875	1.3617	0.4716	0.6222
200	0.0070	20.1865	2.3550	3.5144	48.4293	2.9817	37.7633
		20.1865	2.3550	3.5144	1.0426	0.0642	0.8130
260	0.0054	23.2986	1.8841	2.8477	72.8368	13.4143	23.6691
		23.2986	1.8841	2.8477	1.2002	0.2210	0.3900

Tabela 03 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso utilizou-se um valor fixo $N_{PI} = 3$ (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_p , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10 %. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto (ε_{ϕ^*}) e do modelo contínuo ($\varepsilon ()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) :

$$S_x = 36.10^{-4}$$

$$S_v = 33.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon_{\hat{K}_{MQ}}\%$ (ε_{ϕ^*})	$\varepsilon_{\hat{K}_{VI}}\%$ (ε_{ϕ^*})	$\varepsilon_{\hat{K}_{FKV}}\%$ (ε_{ϕ^*})	$\varepsilon_{\hat{C}_{MQ}}\%$ (ε_{ϕ^*})	$\varepsilon_{\hat{C}_{VI}}\%$ (ε_{ϕ^*})	$\varepsilon_{\hat{C}_{FKV}}\%$ (ε_{ϕ^*})
64	0.0329	5.3488	6.9123	4.9693	22.0796	19.0146	43.4280
		5.3488	6.9123	4.9693	2.4203	2.0843	4.7604
92	0.0229	3.0737	1.4805	1.3053	42.9016	31.9785	33.3496
		3.0737	1.4805	1.3053	3.1658	2.3598	2.4609
128	0.0165	4.5825	0.6919	2.6745	29.2396	19.6729	32.5809
		4.5825	0.6919	2.6745	1.5193	1.0222	1.6929
160	0.0132	8.2641	0.6284	2.2279	44.7290	24.3136	26.3022
		8.2641	0.6284	2.2279	1.8402	1.0003	1.0821
200	0.0105	11.9869	0.8903	2.1391	37.1264	4.4012	40.1891
		11.9869	0.8903	2.1391	1.2119	0.1437	1.3119
260	0.0081	15.7704	1.8768	3.1523	54.5147	16.7251	29.0792
		15.7704	1.8768	3.1523	1.3587	0.4168	0.7247

Tabela 04 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso utilizou-se um valor fixo $N_{p} = 4$ (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_{p} , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10 %. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon ()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) :

$$S_x = 42.10^{-4}$$

$$S_y = 37.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
64	0.0439	9.6964	11.2269	8.9828	47.0463	43.5075	37.6943
		9.6964	11.2269	8.9828	7.1367	6.5999	5.7181
92	0.0305	2.2844	5.1554	2.2634	49.1491	41.7400	32.5989
		2.2844	5.1554	2.2634	4.9577	4.2103	3.2883
128	0.0220	0.1000	1.9348	0.1430	29.8379	24.3447	34.2559
		0.1000	1.9348	0.1430	2.1036	1.7163	2.4151
160	0.0176	5.2375	0.2041	1.6744	39.7980	25.6184	29.1083
		5.2375	0.2041	1.6744	2.2134	1.4248	1.6189
200	0.0140	7.8396	0.1893	1.1833	34.8309	11.0636	39.1328
		7.8396	0.1893	1.1833	1.5327	0.4868	1.7220
260	0.0108	10.3593	0.5601	1.8545	45.7458	18.3892	31.6314
		10.3593	0.5601	1.8545	1.5329	0.6162	1.0599

Tabela 05 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso utilizou-se um valor fixo $N_{PI} = 5$ (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_p , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10%. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon(\)\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) :

$$S_x = 46.10^{-4}$$

$$S_y = 41.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
64	0.0549	12.0169	13.0282	10.3560	55.0877	56.7013	37.2136
		12.0169	13.0282	10.3560	10.8575	11.1755	7.3346
92	0.0382	6.0404	7.5976	4.4312	59.9077	53.7511	29.7409
		6.0404	7.5976	4.4312	7.7491	6.9527	3.8470
128	0.0274	3.2519	4.3229	2.1499	33.8486	30.3188	33.3230
		3.2519	4.3229	2.1499	3.0364	2.7647	2.9893
160	0.0220	1.4672	2.1667	0.2391	38.9487	27.8857	30.0213
		1.4672	2.1667	0.2391	2.7459	1.9660	2.1165
200	0.0176	5.2830	0.8223	0.7607	31.7946	13.3953	39.2140
		5.2830	0.8223	0.7607	1.7683	0.7450	2.1809
260	0.0135	7.1363	0.1345	1.2757	42.2909	20.6638	31.9356
		7.1363	0.1345	1.2757	1.7864	0.8728	1.3490

Tabela 06 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso utilizou-se um valor fixo $N_{p} = 6$ (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_{p} , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10 %. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) :

$$S_x = 51.10^{-4}$$

$$S_y = 45.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
64	0.0659	15.6577	15.8069	13.1776	67.7235	68.8921	40.0035
		15.6577	15.8069	13.1776	16.6748	16.9626	9.8486
92	0.0458	7.0371	8.6884	5.0307	69.5505	63.3262	27.5955
		7.0371	8.6884	5.0307	11.0823	10.1379	4.4290
128	0.0329	6.0490	6.4188	4.1286	40.5441	38.9069	31.3090
		6.0490	6.4188	4.1286	4.4442	4.2348	3.4319
160	0.0263	1.1886	3.9006	1.9044	39.8994	31.5191	29.6115
		1.1886	3.9006	1.9044	3.4238	2.7047	2.5410
200	0.0211	2.2845	2.4622	0.8674	31.2773	16.0106	38.8332
		2.2845	2.4622	0.8674	2.1109	1.0806	2.6209
260	0.0162	5.4057	0.4724	1.1242	39.2290	21.5008	32.4992
		5.4057	0.4724	1.1242	2.0054	1.0991	1.6613

Tabela 07 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso utilizou-se um valor fixo $NPI = 8$ (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_p , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10 %. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) :

$$S_x = 58.10^{-4}$$

$$S_y = 50.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
64	0.0878	22.1449	21.1463	19.9811	84.4267	90.5752	53.1288
		22.1449	21.1463	19.9811	30.1948	32.3938	19.0012
92	0.0611	10.9122	11.1794	6.8624	74.9775	72.4541	30.0143
		10.9122	11.1794	6.8624	16.8185	16.2568	6.7344
128	0.0439	8.9702	8.7182	5.8690	55.4779	54.6990	28.0603
		8.9702	8.7182	5.8690	8.4158	8.2976	4.2566
160	0.0351	5.7216	7.0131	4.8703	46.6152	42.0276	27.2199
		5.7216	7.0131	4.8703	5.4905	4.9501	3.2060
200	0.0281	2.1157	5.1276	3.4329	33.9396	23.9460	36.2337
		2.1157	5.1276	3.4329	3.1244	2.2044	3.3356
260	0.0216	1.2444	2.3340	0.5681	34.4224	23.0211	33.6711
		1.2444	2.3340	0.5681	2.3869	1.5963	2.3348

Tabela 08 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso utilizou-se um valor fixo $N_p = 10$ (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_p , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10%. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon(\)\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) :

$$S_x = 64.10^{-4}$$

$$S_y = 53.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
64	0.1098	28.2518	26.5130	29.6261	103.6094	106.3846	77.5933
		28.2518	26.5130	29.6261	50.8674	52.2299	38.0947
92	0.0764	14.5016	14.9277	10.9409	79.7640	78.3082	34.5030
		14.5016	14.9277	10.9409	23.7007	23.2681	10.2520
128	0.0549	10.7999	10.4795	7.0828	58.5444	62.3785	29.7490
		10.7999	10.4795	7.0828	11.5388	12.2945	5.8334
160	0.0439	8.2788	9.0371	6.6210	55.8464	52.6704	25.5991
		8.2788	9.0371	6.6210	8.4717	7.9899	3.8833
200	0.0351	5.4773	7.3810	5.5458	40.7058	33.7795	33.0174
		5.4773	7.3810	5.5458	4.7945	3.9787	3.8889
260	0.0270	1.9124	4.2481	2.3527	34.4610	27.0983	33.2081
		1.9124	4.2481	2.3527	3.0396	2.3902	2.9291

ANEXO III

Tabela 01 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso, selecionaram-se os valores $N_{PI} = 1$, $N_p = 260$ e promove-se uma varredura no nível RMS de ruído. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) : S_x e S_v

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

Intervalo de Tempo de Discretização : $T = 0.0027 \text{ s}$.

% RMS	S_x S_v	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi_{22}^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
APROX. 0 %	1.E-8	13.8810	2.2652	2.9143	23.2424	27.8589	45.5287
	1.E-7	13.8810	2.2652	2.9143	0.1899	0.2277	0.3721
2	56.E-5	5.1769	2.1449	2.7462	11.7594	20.5838	38.9059
	54.E-4	5.1769	2.1449	2.7462	0.0961	0.1682	0.3179
4	108.E-5	9.6012	1.9987	2.5557	7.2071	14.3444	33.0819
	100.E-4	9.6012	1.9987	2.5557	0.0589	0.1172	0.2703
6	158.E-5	17.0443	1.8131	2.3217	35.8769	7.7584	26.7973
	148.E-4	17.0443	1.8131	2.3217	0.2932	0.0634	0.2190
8	216.E-5	28.8662	1.5663	2.0196	76.7733	0.5473	19.7592
	200.E-4	28.8662	1.5663	2.0196	0.6274	0.0045	0.1615
10	28.E-4	48.0799	1.1787	1.5567	147.6741	9.3764	9.8272
	27.E-3	48.0799	1.1787	1.5567	1.2068	0.0766	0.0803
20	53.E-4	153.7571	0.7147	0.5529	48.2701	43.8060	26.5679
	50.E-3	153.7571	0.7147	0.5529	3.9900	0.3580	0.2171
50	134.E-4	675.0732	9.4120	8.9619	2 095.40	196.8760	208.2703
	124.E-3	675.0732	9.4120	8.9619	17.1230	1.6088	1.7019

Tabela 02: Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso, seleccionaram-se os valores $N_{PI} = 5$, $N_p = 92$ e promove-se uma varredura no nível RMS de ruído. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) : S_x e S_v

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

Intervalo de Tempo de Discretização : $T = 0.0382 \text{ s}$

% RMS	S_x S_v	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
APROX. 0 %	1.E-8	5.9854	5.5915	2.5040	43.1716	43.6767	32.0779
	1.E-8	5.9854	5.5915	2.5040	5.5843	5.6496	4.1402
2	9.E-4	6.1931	5.9985	2.9043	45.5045	45.6004	31.5828
	8.E-3	6.1931	5.9985	2.9043	5.8860	5.8984	4.0852
4	17.E-4	6.3412	6.3628	3.2438	48.3140	47.5443	31.1670
	16.E-3	6.3412	6.3628	3.2438	6.2494	6.1499	4.0315
6	26.E-4	6.3721	6.7555	3.6217	51.5827	49.5095	30.7246
	24.E-3	6.3721	6.7555	3.6217	6.7722	6.4041	3.9742
8	34.E-4	6.2981	7.0978	3.9496	54.7979	51.2456	30.3285
	31.E-3	6.2981	7.0978	3.9496	7.0881	6.6826	3.9230
10	46.E-4	6.0404	7.5976	4.4312	59.9077	57.7511	29.7409
	41.E-3	6.0404	7.5976	4.4312	7.7491	6.9527	13.8470
20	87.E-4	3.9125	9.2454	5.9306	83.0074	63.0456	27.5259
	77.E-3	3.9125	9.2454	5.9306	10.7370	8.1550	3.5605
50	214.E-4	6.6064	13.8082	9.4196	180.6402	95.6355	18.6389
	192.E-3	6.6064	13.8082	9.4196	23.3658	12.3705	2.4174

Tabela 03 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ), Variáveis Instrumentais (VI) e a Conjunção de Variáveis Instrumentais com o Filtro de Kalman (FKV). Neste caso, selecionaram-se os valores $N_{PI} = 5$, $N_p = 92$ e promove-se uma varredura no fator de amortecimento do sistema, dado pela expressão: $\zeta = C/2M\omega_n$, onde $\omega_n = 8.9443$ rd/s. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo (ε (%)).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800$ N/m e $C = 30$ N.s/m

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) : S_x e S_y

Semente (SEED) $\rightarrow 0$ e 10 % RMS de ruído

Intervalo de Tempo de Discretização : $T = 0.0382$ s.

C	S_x S_y	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{VI} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKV} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
5	164.E-4	2.3778	4.5559	4.1189	320.5200	342.3561	241.8139
	146.E-3	2.3778	4.5559	4.1189	6.2375	6.6625	4.7059
10	88.E-4	3.0247	5.0440	3.9312	164.2392	171.8907	76.3885
	81.E-3	3.0247	5.0440	3.9312	6.5193	6.8230	3.0321
20	55.E-4	4.6313	6.2770	4.0041	88.2857	84.4203	3.4335
	50.E-3	4.6313	6.2770	4.0041	7.2985	6.9789	0.2838
30	46.E-4	6.0404	7.5976	4.4312	59.9077	57.7511	29.7409
	41.E-3	6.0404	7.5976	4.4312	7.7491	6.9527	3.8470
60	30.E-4	9.7237	11.0791	5.6495	23.3054	18.5204	62.4062
	28.E-3	9.7237	11.0791	5.6495	6.9248	5.5031	18.5430
120	21.E-4	16.0990	17.6194	9.3737	3.7399	6.4867	95.2208
	18.E-3	16.0990	17.6194	9.3737	3.1621	5.4844	80.5087
130	20.E-4	17.0693	18.6195	10.1007	6.5907	9.1405	99.6289
	17.E-3	17.0693	18.6195	10.1007	6.4943	9.0069	98.1725
180	17.E-4	21.5479	23.3744	14.1773	39.2412	43.5170	263.5546
	14.E-3	21.5479	23.3744	14.1773	17.8610	19.8072	119.9593

ANEXO IV

Tabela 01: Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ) e a Conjunção de Mínimos Quadrados com o Filtro de Kalman (FKM). Neste caso utilizou-se um valor fixo NPI = 1 (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_p , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10 %. Deve - se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) :

$$S_x = 28.10^{-4}$$

$$S_y = 27.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKM} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKM} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
64	0.0110	14.3703	1.9862	16.6042	100.8391
		14.3703	1.9862	0.5654	3.4336
92	0.0076	19.8362	11.5838	63.4860	67.8350
		19.8362	11.5838	1.4844	1.5903
128	0.0055	24.0550	18.7389	40.6401	117.3115
		24.0550	18.7389	0.6803	1.9638
160	0.0044	81.7998	26.7686	91.1443	113.2317
		81.7998	26.7686	1.2165	1.5113
200	0.0035	41.6999	34.2313	94.2278	162.2443
		41.6999	34.2313	1.0035	1.7278
260	0.0027	47.9977	45.7117	149.4038	158.3195
		47.9977	45.7117	1.2209	1.2938

Tabela 02: Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ) e a Conjunção de Mínimos Quadrados com o Filtro de Kalman (FKM). Neste caso utilizou-se um valor fixo NPI = 5 (vide item 4.3) e promoveu-se uma variação no número de pontos de discretização N_p , para um nível RMS de ruído de aproximadamente 10 %. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) :

$$S_x = 46.10^{-4}$$

$$S_v = 41.10^{-3}$$

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

N_p	T	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKM} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKM} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
64	0.0549	12.0763	7.5759	54.3859	21.3779
		12.0763	7.5759	10.7192	4.2135
92	0.0332	6.0555	6.0793	61.3580	22.5671
		6.0555	6.0793	7.9367	2.9191
128	0.0274	3.2943	5.4247	31.8909	47.9866
		3.2943	5.4247	2.8608	4.3047
160	0.0220	1.4272	4.7561	37.4489	46.4188
		1.4272	4.7561	2.6402	3.2726
200	0.0176	5.2805	4.8307	30.8367	61.2463
		5.2805	4.8307	1.7150	3.4063
260	0.0135	7.1596	6.6123	42.7209	56.4507
		7.1596	6.6123	1.8045	2.3845

ANEXO V

Tabela 01 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ) e a Conjunção de Mínimos Quadrados com o Filtro de Kalman (FKM). Neste caso, selecionaram-se os valores $N_{PI} = 1$, $N_p = 260$ e promove-se uma varredura no nível RMS de ruído. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon()\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) : S_x e S_v

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

Intervalo de Tempo de Discretização : $T = 0.0027 \text{ s}$.

% RMS	S_x S_v	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKM} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKM} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
APROX. 0%	1E-8 1E-7	3.8810 3.8810	4.0356 4.0356	23.2423 0.1899	47.2192 0.3859
2	56.E-5 54.E-4	5.1511 5.1511	1.8068 1.8068	11.4417 0.0935	44.9313 0.3672
4	108.E-5 100.E-4	9.5578 9.5578	3.4201 3.4201	7.8075 0.0638	52.7274 0.4309
6	158.E-5 148.E-4	16.9860 16.9860	11.7394 11.7394	36.7832 0.3006	70.3325 0.5747
8	216.E-5 200.E-4	28.7964 28.7964	24.6852 24.6852	78.0231 0.6376	100.3170 0.8198
10	28.E-4 27.E-3	47.9977 47.9977	45.7118 45.7118	149.4038 1.2209	158.3093 1.2938
20	53.E-4 50.E-3	153.6784 153.6784	166.9895 166.9895	491.6837 4.0179	490.2960 4.0099
50	134.E-4 124.E-3	675.0583 675.0583	1042.7000 1042.7000	2104.4000 17.1963	2960.2000 24.1900

Tabela 02 : Nesta tabela apresenta-se o erro percentual cometido na estimativa dos parâmetros, rigidez (K) e amortecimento (C), utilizando-se Mínimos Quadrados (MQ) e a Conjunção de Mínimos Quadrados com o Filtro de Kalman (FKM). Neste caso, selecionaram-se os valores $N_{PI} = 5$, $N_p = 92$ e promove-se uma varredura no nível RMS de ruído. Deve-se observar que são apresentados o erro cometido na estimativa dos parâmetros do modelo discreto ($\varepsilon\phi^*$) e do modelo contínuo ($\varepsilon(\)\%$).

Dados adicionais : Valores teóricos dos parâmetros : $K = 800 \text{ N/m}$ e $C = 30 \text{ N.s/m}$

Desvio padrão utilizado na geração de ruído (Rand-MATLAB) : S_x e S_v

Semente (SEED) $\rightarrow 0$

Intervalo de Tempo de Discretização : $T = 0.0382 \text{ s}$.

%RMS	S_x S_v	$\varepsilon\hat{K}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{K}_{FKM} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{MQ} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)	$\varepsilon\hat{C}_{FKM} \%$ ($\varepsilon\phi^*$)
APROX 0%	1.E-8	5.8954	1.9619	43.1716	14.1910
	1.E-7	5.8954	1.9619	5.5843	1.8356
2	9.E-4	6.1760	2.4969	45.8479	13.5428
	8.E-3	6.1760	2.4969	5.9304	1.7518
4	17.E-4	6.3159	3.0977	48.9719	13.9896
	16.E-3	6.3159	3.0977	6.3345	1.8097
6	26.E-4	6.3489	3.8882	52.5256	15.5282
	24.E-3	6.3489	3.8882	6.7942	2.0090
8	34.E-4	6.2849	4.6968	55.9659	17.7925
	31.E-3	6.2849	4.6968	7.2392	2.3023
10	46.E-4	6.0555	6.0973	61.3580	22.5523
	41.E-3	6.0555	6.0973	7.9367	2.9191
20	87.E-4	4.1364	12.3949	85.1088	54.3863
	77.E-3	4.1364	12.3949	11.0088	7.0556
50	214.E-4	5.0721	45.9838	182.2069	301.2007
	192.E-3	5.0721	45.9838	23.5685	41.2439