



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL DO SEMIÁRIDO
UNIDADE ACADÊMICA DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

JOÁS DAVI LOPES DA SILVA

**UMA ANÁLISE DAS IMPLICAÇÕES DE UM ESPAÇO COM
DIMENSÕES EXTRAS NO CAMPO ELÉTRICO E NO POÇO DE
POTENCIAL INFINITO**

**SUMÉ/PB,
Março de 2018**

JOÁS DAVI LOPES DA SILVA

**UMA ANÁLISE DAS IMPLICAÇÕES DE UM ESPAÇO COM
DIMENSÕES EXTRAS NO CAMPO ELÉTRICO E NO POÇO DE
POTENCIAL INFINITO**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à disciplina de trabalho de conclusão de curso, do curso de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Alex de Albuquerque Silva

SUMÉ/PB, MARÇO DE 2018

S586a Silva, Joas Davi Lopes da.

Uma análise das implicações de um espaço com dimensões extras no campo elétrico e no poço de potencial infinito. / Joas Davi Lopes da Silva. - Sumé - PB: [s.n], 2018.

37 f.

Orientador: Prof. Dr. Alex de Albuquerque Silva.

Monografia - Universidade Federal de Campina Grande; Centro de Desenvolvimento Sustentável do Semiárido; Curso de Bacharelado em Engenharia de Produção.

1. Engenharia de Produção. 2. Eletrodinâmica. 3. Campo elétrico.
I. Título.

UFCG/BS

CDU: 537 (043.1)

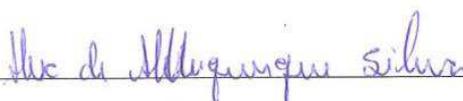
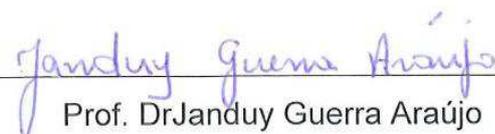
JOAS DAVI LOPES DA SILVA

**UMA ANÁLISE DAS IMPLICAÇÕES DE UM ESPAÇO COM DIMENSÕES EXTRAS
NO CAMPO ELÉTRICO E NO POÇO DE POTENCIAL INFINITO**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à disciplina de trabalho de conclusão de curso, do curso de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Produção.

Aprovado em 06 / 03 / 2018

BANCA EXAMINADORA

 Prof. Dr Alex de Albuquerque Silva	Nota (10,0)
 Prof. Dr Adriano Trindade de Barros	Nota (10,0)
 Prof. Dr Janduy Guerra Araújo	Nota (10,0)
Nota Final	Média (10,0)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado capacidade e força para a realização deste trabalho, pois sem ele minha caminhada até aqui não teria sido possível.

Agradeço também ao meu orientador e amigo Alex de Albuquerque Silva, por sua orientação e apoio ao longo de todo esse tempo.

À Secretaria do Curso, pela cooperação.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha noiva Amanda Chirlley e a minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desse trabalho.

RESUMO

De acordo com o nosso senso comum, ao que parece o espaço-tempo possui quatro dimensões. Contudo, existem razões para acreditar, do ponto de vista da física teórica, na existência de dimensões extras. Modelos de unificação de interações fundamentais, como descrito na teoria de Kaluza-Klein, postulam a existência de uma coordenada espacial que está compactada em um círculo de raio R do comprimento da escala de Planck. Porém, apesar de até então não podermos provar a existência das dimensões extras, podemos ver pelo menos do ponto de vista teórico algumas implicações que esse tipo de espaço causaria em leis físicas. Este trabalho tem o objetivo de verificar como a existência de dimensões extras compactas pode afetar o comportamento do campo elétrico, gerado por uma configuração específica de cargas, e suas interferências também no problema do poço de potencial infinito, que é um problema da mecânica quântica.

Palavras-chave: Dimensões extras. Eletrodinâmica. Poço de potencial.

ABSTRACT

According to our common sense, space-time seems to have four dimensions. However, there are reasons to believe, from the viewpoint of theoretical physics, in the existence of extra dimensions. Models of unification of fundamental interactions as described in the Kaluza- Klein theory, postulate the existence of a spatial coordinate that is packed in a circle of radius R of the Planck scale length. However, although we cannot prove the existence of the extra dimensions until now, we can see at least from the theoretical point of view some implications that this type of space would cause in physical laws. This work aims to verify how the existence of extra compact dimensions can affect the behavior of the electric field, generated by a specific configuration of charges, and their interference also in the problem of the infinite potential well, that is a problem of quantum mechanics.

Keywords: Extra dimensions. Electrodynamics. Potential well.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	9
2	REFERENCIAL TEÓRICO	11
2.1	Eletrodinâmica.....	11
2.1.1	Campo elétrico.....	12
2.1.2	Lei de gauss.....	12
2.1.3	Potencial elétrico	13
2.1.4	Equações de maxwell.....	13
2.2	RELATIVIDADE RESTRITA.....	14
2.2.1	Transformações de Lorentz.....	15
2.3	MECÂNICA QUÂNTICA.....	17
2.3.1	Interpretação estatística.....	17
2.3.2	Equação de Schrödinger.....	18
2.4	DIMENSÕES EXTRAS COMPACTAS.....	19
2.4.1	Invariância de Lorentz em dimensões extras.....	21
3	APLICAÇÕES E RESULTADOS.....	23
3.1	Cálculo do campo e potencial elétricos em dimensões superiores.....	23
3.2	A mecânica quântica e o poço quadrado infinito.....	24
3.3	Poço quadrado infinito com dimensões extras.....	27
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	30
	REFERÊNCIAS.....	32
	ANEXO A- VOLUMES EM DIMENSÕES EXTRAS	34
	ANEXO B- CALCULO DA FUNÇÃO GAMA	37

1 INTRODUÇÃO

No passado a eletricidade e o magnetismo eram vistos como assuntos separados, porém o trabalho de cientistas como Oersted e Ampère mostraram que havia uma conexão entre os fenômenos dessas naturezas. Mais tarde Maxwell e Lorentz formalizaram uma teoria onde a eletricidade e o magnetismo estavam unificados, e não podiam mais ser vistos separadamente, daí surgiu a denominação, eletromagnetismo (GRIFFITHS,1999).

Einstein propôs a ideia de uma unificação ainda maior, que combinaria sua teoria da gravidade (relatividade geral) e a teoria eletromagnética de Maxwell, do mesmo modo que a eletricidade e o magnetismo haviam sido unificados já há algum tempo. Apesar dos seus esforços Einstein não obteve êxito em sua teoria de campo unificado (LESCH, 2005).

No ano de 1921, um matemático e físico alemão chamado Theodor Kaluza, propôs a unificação entre a teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a Relatividade Geral de Einstein, em sua teoria ele postula a existência de uma dimensão extra do espaço-tempo, dessa forma, ele conseguiu unificar as duas interações. O físico sueco Oscar Klein aperfeiçoou a teoria de Kaluza propondo que a dimensão extra possui a topologia de um círculo de raio l , e que a magnitude deste raio é da ordem do comprimento de escala de Planck $10^{-35}m$, o que justificaria o fato dela não ser observada (KALUZA,1921);(KLEIN, 1926).

Com o passar dos anos novas interações fundamentais foram descobertas, as chamadas forças nuclear forte e nuclear fraca. Na atualidade, existem várias teorias que propõem a unificação de interações fundamentais conhecidas (gravitacional, eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca) (SILVA, 2009). A ideia de unificação sempre foi algo cobiçado pelos físicos e cientistas, pois tais unificações ao longo da história sempre se mostraram como impulsionadores de avanços científicos. O objetivo fundamental da unificação de teorias físicas é obter modelos, cada vez mais eficazes em explicar fenômenos da natureza.

Um grande obstáculo que se apresentou aos físicos do século XX e se estende até a atualidade é a incompatibilidade entre as duas teorias físicas, a saber, a relatividade geral e a mecânica quântica. A teoria das cordas surge como grande candidata a unificar todas essas forças conhecidas, porém tal teoria postula que o espaço possui dimensões extras.

O presente trabalho faz um estudo das dimensões extras compactas, bem como alguns tópicos bem conhecidos de física a fim de observarmos do ponto de vista teórico, as implicações que um espaço com esse tipo de dimensão causaria em leis físicas ou em situações cujo o resultado já nos é familiar.

2 REFERÊNCIAL TEÓRICO

2.1 ELETRODINÂMICA

A física dos problemas envolvendo eletromagnetismo intrigou a humanidade. Há muito tempo filósofos gregos já se questionavam e tentavam entender fenômenos que tinham em sua base o eletromagnetismo, como exemplo, a atração entre âmbar e uma palha (que tem na sua origem uma força elétrica) ou as magnetitas que se tratavam de ímãs naturais que quando eram aproximados de metais os atraíam; na atualidade sabemos que se trata de uma força magnética (HALLIDAY e RESNICK, 2012).

Apesar de ter suas origens já na antiguidade, foi somente no século XIX que o estudo sobre os fenômenos elétricos e magnéticos se desenvolveram de fato, o trabalho de grandes estudiosos desse ramo da física como Oersted, Faraday e Gauss revolucionou o campo e colocou luz sobre muitos fenômenos que não eram compreendidos até então.

Todavia, foi em meados do século XIX, que James Clerk Maxwell, através das leis desenvolvidas por tais cientistas e ideias próprias, desenvolveu uma base teórica sólida para o eletromagnetismo. Ele compactou a teoria eletromagnética em um conjunto de quatro equações chamadas equações de Maxwell, tais equações levaram a um entendimento mais profundo do eletromagnetismo clássico, que foi responsável por uma incrível revolução tecnológica no final do século XIX.

A teoria eletromagnética visa responder uma questão essencial: considerando um conjunto de cargas em uma dada região, o que acontece com outras cargas que estão em uma outra região próxima a primeira? Essa pergunta é respondida quando fazemos uso do conceito de campo, diremos que uma carga elétrica tem a propriedade de perturbar o espaço em seu entorno de forma a fazer aparecer o que denominamos de “campos”. Uma segunda carga, na presença desses campos, sente uma força. Podemos entender isso da seguinte forma: o campo tem a propriedade de transmitir a influência de uma carga sobre outra (GRIFFITHS, 1999).

2.1.1 Campo elétrico

A força imposta sobre uma carga de prova Q , devida a uma única carga pontual q que está em repouso a uma distância r é dada pela lei de Coulomb, lei essa que foi obtida com base na experimentação.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.1.1)$$

Para um caso onde temos várias cargas pontuais (q_1, q_2, \dots, q_n), à distâncias (r_1, r_2, \dots, r_n) de Q , a força será evidentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 + \dots + \frac{q_n Q}{r_n^2} \hat{\mathbf{r}}_n \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 + \frac{q_3}{r_3^2} \hat{\mathbf{r}}_3 + \dots + \frac{q_n}{r_n^2} \hat{\mathbf{r}}_n \right) \end{aligned}$$

Onde ϵ_0 é a constante de permissividade do vácuo.

Desta forma podemos escrever,

$$\mathbf{F} = QE \quad (2.1.2)$$

Onde,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (2.1.3)$$

Onde definimos \mathbf{E} como o campo elétrico das cargas fontes.

2.1.2 Lei de GAUSS

A lei de Gauss relaciona o fluxo do campo elétrico \mathbf{E} , através de uma superfície S . Ela é dada pela seguinte expressão,

$$\phi_E \equiv \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{interior}} \quad (2.1.4)$$

Essa expressão estabelece a medida do número de linhas de campo que passam através de S . Para uma dada taxa de amostragem, o fluxo é proporcional ao número de linhas desenhadas, pois, a intensidade do campo é proporcional a densidade das linhas de campo, e, portanto, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ é proporcional ao número de linhas que passam através da área infinitesimal $d\mathbf{a}$ (GRIFFITHS, 1999, p.48).

Na forma diferencial teremos,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (2.1.5)$$

Sendo ρ a densidade de cargas.

2.1.3 Potencial elétrico

O potencial elétrico é definido como

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_o^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.1.6)$$

Onde (o) é uma origem arbitrária, logo, V , só dependerá de r . Fazendo a diferença entre dois pontos \mathbf{a} e \mathbf{b} , teremos

$$\Phi(\mathbf{b}) - \Phi(\mathbf{a}) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

E

$$\int_a^b (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

E assim

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.1.7)$$

A vantagem de se formular um conceito como o do potencial nos é útil pois se V é uma grandeza conhecida, \mathbf{E} se torna fácil de se obter pela relação anterior o que facilita muito os cálculos envolvidos, já que V é uma grandeza escalar enquanto \mathbf{E} é uma grandeza vetorial (GRIFFITHS, 1999).

2.1.4 Equações de Maxwell

Em meados do século XIX, Maxwell compactou em um conjunto de quatro equações toda teoria eletromagnética. Na verdade todas as equações de Maxwell já nos são familiares com exceção de um termo extra na lei de Ampère, que foi acrescentado por Maxwell.

As equações de Maxwell se apresentam da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (\text{Lei de Gauss}), \quad (2.1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss do magnetismo}), \quad (2.1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Faraday}), \quad (2.1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampère-Maxwell}), \quad (2.1.11)$$

Juntamente com a lei de força

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1.12)$$

Elas resumem todo o conteúdo teórico da eletrodinâmica clássica.

2.2 RELATIVIDADE RESTRITA

Em 1905, Albert Einstein publicou sua teoria especial da relatividade. Apesar dos esforços de Einstein estarem concentrados em revelar uma visão mais profunda da natureza do Eletromagnetismo, através de sua teoria ele redefiniu a mecânica Newtoniana (D'INVERNO, 1992).

A mecânica newtoniana revelou-se como sendo um caso especial e importante de uma teoria mais geral (RESNICK, 1971, p.4). A teoria Eletromagnética de Maxwell implicava em uma velocidade c para uma onda eletromagnética, constante essa que está relacionada a permissividade e permeabilidade do meio em questão, porém uma grande questão para os cientistas da época foi: Com relação a que referencial a velocidade de uma onda eletromagnética é c ?

Foi nesse contexto que vários cientistas da época formularam diversas hipóteses para tentar explicar essa questão, uma das mais famosas foi a hipótese do éter luminoso, pois admitindo-se que tanto as transformações galileanas (transformações de posição e velocidades que são coerentes com o princípio da relatividade newtoniana) quanto as equações de Maxwell estão corretas, então teria de haver um único sistema privilegiado de referência (o sistema do éter) no qual as equações de Maxwell são válidas e, no qual, a luz se propaga com velocidade c . Sendo ainda que,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (2.2.1)$$

Com o passar do tempo, experimentos foram sendo feitos para testar a hipótese do éter. Um dos experimentos que mais intrigou os físicos e cientistas da época foi a experiência de Michelson-Morley. Realizada entre os anos de 1881 e 1887 a experiência pretendia medir a velocidade da luz em um sistema inercial (a terra) em movimento em relação ao éter, notando se a velocidade medida é diferente do valor c , fornecendo uma evidência de que de fato havia um referencial privilegiado no qual o valor da velocidade da luz era c , como previa a teoria eletromagnética de Maxwell. No entanto, após realizarem o experimento encontraram o mesmo valor c para velocidade da luz, o que indicou que não havia um sistema privilegiado em que a velocidade da luz era c . Uma maneira de interpretar o resultado nulo da experiência de Michelson e Morley, é concluir que a velocidade da luz é a mesma, isto é, c para todas as direções em qualquer sistema inercial (RESNICK, 1971, p. 39).

No ano de 1905, Albert Einstein, por meio de um artigo intitulado “A Eletrodinâmica de Corpos em Movimento” fornece uma solução para o problema, nele Einstein descreve um princípio muito mais amplo que o da relatividade Newtoniana, redefinindo a mecânica clássica e mostrando que a mesma é uma aproximação para situações onde as velocidades envolvidas (v), são muito menores que c (velocidade da luz). Os Postulados abaixo são os que Einstein publicou em seu artigo:

1. As leis da Física são as mesmas em todos os referencias inerciais. Não existe nenhum referencial inercial privilegiado. (O princípio da relatividade).
2. A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor c , em todos os sistemas inerciais. (O princípio da constância da velocidade da luz).

2.2.1 Transformações de Lorentz

Agora com um novo princípio de relatividade estabelecido (O princípio da relatividade de Einstein), que discordava das transformações galileanas, precisava-se estabelecer novas regras de transformações, regras essas que obedecessem aos postulados da relatividade. A essas regras, por razões históricas, foram dadas o nome de transformações de Lorentz.

São elas, no caso particular de dois sistemas inerciais s e s' que se movem ao longo dos eixos x e x' :

TABELA 1- transformações de Lorentz

$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	$t = \frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Fonte: Autoria própria

Quando $v \ll c$, obtemos as transformações galileanas o que é algo exigido dessas novas transformações um vez que para baixas velocidades a mecânica newtoniana funciona perfeitamente.

TABELA 2- transformações Galileanas

$x' = x - vt$	$x = x' + vt$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = t$	$t = t'$

Fonte: Autoria própria

Diferentemente do que acontecia na relatividade newtoniana, o tempo agora não era mais absoluto ou seja $t \neq t'$ para $v \approx c$. Porém na relatividade nós temos um novo tipo de invariante agora o chamado intervalo espaço-temporal, um "intervalo de espaço-tempo" entre dois acontecimentos é a quantidade análoga à distância no espaço euclidiano. O intervalo de espaço-tempo s numa curva é definido por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.2.2)$$

2.3 MECÂNICA QUÂNTICA

Um dos problemas que mais perturbavam os físicos do século XX foi o problema do espectro de radiação do corpo negro. Max Planck obteve êxito em explicar o problema, percebendo que a energia em questão não se propagava em um fluxo contínuo, mas através de pacotes denominados de quanta. A partir de tal ideia foi possível obter previsões teóricas em perfeito acordo com a experiência.

Em 1905, em um dos seus artigos revolucionários publicados nesse mesmo ano, Albert Einstein utiliza a ideia de Planck para interpretar o efeito fotoelétrico, segundo ele essa ideia de quantização deveria ser estendida a energia eletromagnética livre.

A mecânica quântica foi responsável por diversos avanços tecnológicos, apesar de suas estranhas características, ela foi e continua sendo uma teoria de grande importância não só para física, mas em diversos campos de estudo e suas aplicações.

2.3.1 Interpretação estatística

A mecânica quântica, diferentemente da mecânica newtoniana, apresenta um certo tipo de indeterminação, tudo que ela tem a oferecer são informações estatísticas sobre os resultados possíveis de um dado experimento envolvendo esses objetos que estão sob seu domínio.

A função de onda que é o instrumento matemático que descreve o estado quântico de um sistema de partículas, descreve a probabilidade de encontrarmos uma partícula quântica em uma dada região do espaço em um dado instante t . Mas como tal objeto representa o estado de uma partícula? A resposta é fornecida pela

interpretação estatística de Born sobre a função de onda, em que $|\psi(x, t)|^2 dx$ é a probabilidade de encontrar a partícula entre x e $x + dx$ no instante t (GRIFFITHS, 2011).

$$\int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{probabilidade de encontra a partícula} \\ \text{entre a e b no instante t} \end{array} \right\} \quad (2.3.1)$$

A probabilidade é correspondente ao valor da área sob o gráfico de $|\psi(x, t)|^2$.

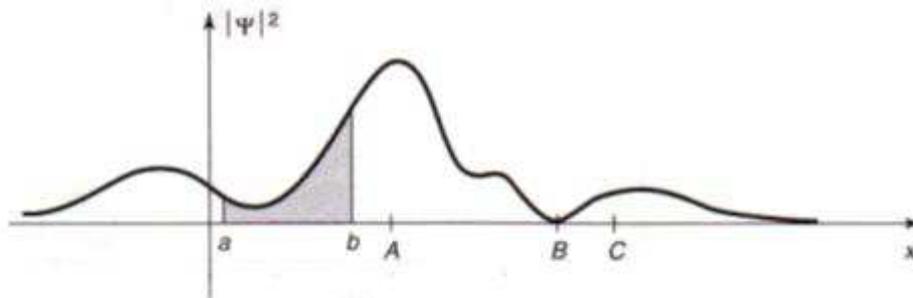


Figura 1. Função de onda típica. A área sombreada representa a probabilidade de encontrarmos a partícula entre a e b . (Fonte: GRIFFITHS 2011).

No entanto, devemos aplicar o que chamamos de condição de normalização, uma vez que definimos $|\psi(x, t)|^2$ como a densidade de probabilidade para encontrar a partícula no ponto x no tempo t .

Temos,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (2.3.2)$$

O que significa que a partícula tem que estar em algum lugar (probabilidade de encontrarmos a partícula integrando toda a região do espaço), sem isso a interpretação estatística não faria o menor sentido.

2.3.2 Equação de SCHRÖDINGER

Para obtermos a função de onda ψ devemos utilizar a equação de Schrödinger, que foi desenvolvida pelo físico austríaco Erwin Schrödinger e carrega seu nome.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\psi(x, t) \quad (2.3.3)$$

Onde teremos os termos:

$\hbar \rightarrow$ Constante de Planck ao quadrado.

m → Massa da partícula a ser descrita.

V → O potencial V que age sobre a partícula.

i → Unidade imaginária, dado por raiz quadrada de -1.

Esta é a famosa Equação de Schrödinger, proposta pelo físico em 1926. Através dela obtemos a descrição da dinâmica de partículas quânticas (TIPLER, 2006).

2.4 DIMENSÕES EXTRAS COMPACTAS

Existe a possibilidade de haver dimensões espaciais adicionais a serem ainda detectadas por experimentos, e que essas dimensões estejam recurvadas em um espaço compacto de pequeno volume.

Para explicarmos como seria uma dimensão desse tipo, vamos considerar um mundo unidimensional representado por uma linha infinita, diremos que x é uma coordenada ao longo dessa dimensão. Existe um número real x único associado a cada ponto P dessa mesma linha.

Um bom sistema de coordenadas nesta linha infinita deve satisfazer duas condições:

- Dois pontos distintos $P1 \neq P2$ devem ter diferentes coordenadas, isto é,

$$x(P1) \neq x(P2) \quad (2.4.1)$$

- A distribuição de coordenadas em cada ponto é contínua, ou seja, pontos próximos têm quase as mesmas coordenadas.

Considere a seguinte figura.

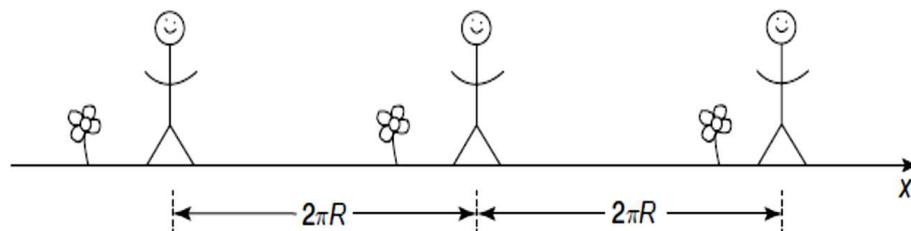


Figura 2. Representação de uma dimensão extra compactada. (Fonte: ZWIEBACH, 2009).

Agora, imagine que você vive em um mundo com uma dimensão espacial e suponha que você está andando ao longo dessa dimensão e nota um padrão

estranho: o cenário se repete cada vez que você se move uma distância igual a $2\pi R$, para qualquer valor de R . Digamos que você encontre uma certa pessoa em um dado ponto. À medida que você caminha, você verá que existem clones dessa mesma pessoa a distâncias $2\pi R, 4\pi R, 6\pi R \dots$ como podemos representar matematicamente uma propriedade tão estranha?

Diremos que os pontos que se encontram a uma distância de $2\pi R$ estão identificados, tal propriedade seria como a de um círculo de mesma circunferência, pois isso explicaria essa peculiar propriedade (ZWIEBACH, 2009, p.31). Percebemos então, que não existem clones de uma mesma pessoa enquanto você caminha, na realidade, você vê essa mesma pessoa como se você estivesse caminhando ao redor de um círculo. Nós declaramos que os pontos que diferem por $2\pi R$ são os mesmos pontos, ou mais precisamente são pontos idênticos. Dois pontos são declarados idênticos se as suas coordenadas diferem por um número inteiro de $2\pi R$, vejamos:

$$P1 \sim P2 \leftrightarrow x(P1) = x(P2) \quad (2.4.2)$$

Esquemáticamente, temos:

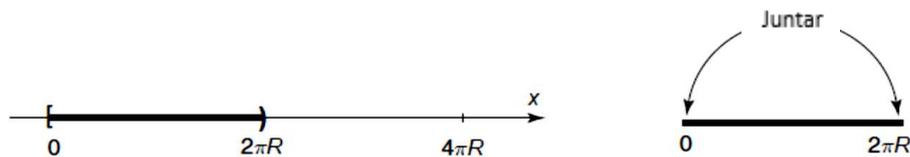


Figura 3. Domínio fundamental. O espaço é identificado em um círculo de raio R . (Fonte: ZWIEBACH, 2009).

Com o intuito de especificar a identificação entre dois pontos, definimos um domínio fundamental. Um domínio fundamental é um subconjunto da totalidade do espaço que satisfaz duas condições.

- Dois pontos que estão contidos em um domínio fundamental não são identificados.
- Qualquer ponto que está contido nesse espaço está em domínio fundamental, ou é relacionado pela identificação de algum ponto no domínio fundamental.

O espaço é identificado por um círculo de raio R , poderíamos escrever isso simplesmente:

$$x \sim x + 2\pi R \quad (2.4.3)$$

Que deve ser lida como “identificação de dois pontos quaisquer cujas coordenadas diferem por $2\pi R$ ”.

Para uma dimensão esse espaço é identificado por um círculo de raio R , e podemos representá-lo pela seguinte notação: R^1/Z_2 onde R^1 é o representante da reta unidimensional e Z_2 é a propriedade que conecta pontos.

2.4.1 Invariância de Lorentz em dimensões extras

Do ponto de vista da relatividade especial de Einstein, o espaço é constituído por quatro dimensões, das quais 3 são dimensões espaciais e 1 é temporal (D'INVERNO, 1992). Todos os eventos no espaço agora são rotulados por essas quatro coordenadas, em um sistema cartesiano de coordenadas temos (t, x, y, z) . Iremos considerar a possibilidade de um espaço-tempo com mais de quatro dimensões, escolhamos um sistema de coordenadas genérico $(t, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$, onde o número de dimensões temporais ainda é mantido igual a um.

Tendo isso em vista, cabe a nós uma pergunta, será que as transformações de Lorentz são válidas para um espaço-tempo com mais de quatro dimensões? A resposta é sim. A invariância das transformações de Lorentz é um conceito que admite uma generalização muito natural para espaço-tempo com dimensões adicionais. O primeiro passo, é ampliar a definição de ds^2 (intervalo espaço-tempo), para incorporar as dimensões extras do espaço (BARTON, 2009, p.16). Podemos dizer, por exemplo, que um mundo com cinco dimensões espaciais terá a seguinte métrica:

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 + (dx^5)^2 \quad (2.4.4)$$

Podemos definir as transformações de Lorentz como alterações lineares de coordenadas que resultam no invariante ds^2 , ou seja, essa quantidade " ds^2 " é constante para todos os referências inerciais no espaço-tempo. Uma vez que esse conceito pode ser estendido para um espaço-tempo com mais de três dimensões espaciais implicará como no exemplo acima, que cada observador inercial no espaço-tempo de seis dimensões vai medir a mesma velocidade para a luz. No

entanto, neste trabalho, vamos considerar o caso de quatro dimensões espaciais e uma temporal.

3 APLICAÇÕES E RESULTADOS

Nessa etapa do nosso trabalho, pretendemos obter de fato os cálculos mostrando do ponto de vista teórico as interferências que um espaço-tempo com esse tipo de dimensão (extra compactada) causariam nas leis e situações que foram propostas.

Nas seções seguintes apresentamos o passo a passo dos cálculos e resultados obtidos.

3.1 CÁLCULO DO CAMPO E POTENCIAL ELÉTRICO EM DIMENSÕES SUPERIORES

Começamos primeiro com o cálculo do campo elétrico gerado por uma carga pontual em 3 dimensões, para isso consideramos: $S^2(r)$ a esfera bidimensional de raio r , uma carga pontual q no centro da esfera, e a bola tridimensional $B^3(r)$ que tem seu volume limitado por $S^2(r)$, conforme suas definições podem ser verificadas no “ANEXO A” deste trabalho.

Utilizando a equação de Gauss na forma diferencial, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\int_{B^3} \nabla \cdot \mathbf{E} \, d(\text{Vol}) = \int_{B^3} \rho \, d(\text{Vol}) \quad (3.1.1)$$

Utilizando o teorema da divergência teremos,

$$\int_{S^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = q \quad (3.1.2)$$

Desde que a magnitude de $E(r)$ seja constante sobre s^2 , podemos escrever

$$\text{Vol}(S^2(r))E(r) = q \quad (3.1.3)$$

Lembrando que o volume da 2-esfera é a área $4\pi r^2$, temos

$$E(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (3.1.4)$$

O que já nos é uma relação familiar.

Consideremos de uma forma genérica um subespaço V^n de R^n e sendo ∂V^n a fronteira limite de V^n , nesse mesmo espaço. Além disso, seja \mathbf{E} um campo vetorial em R^n (ZWIEBACH, 2009).

O teorema da divergência afirma que,

$$\int_{V^n} \nabla \cdot \mathbf{E} \, d(\text{Vol}) = \text{Fluxo de } \mathbf{E} \text{ através de } \partial V^n = \int_{\partial V^n} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{v} \quad (3.1.5)$$

A partir disso poderemos realizar o cálculo do campo elétrico em n dimensões.

Consideremos a seguinte relação,

$$\int_{B^n} \nabla \cdot \mathbf{E} \, d(\text{Vol}) = \int_{B^n} \rho \, d(\text{Vol}) \quad (3.1.6)$$

A integral de volume no lado direito resultará no valor da carga total que está contida nesse volume em n dimensões.

Relacionando com o teorema da divergência temos

$$\text{Fluxo de } \mathbf{E} \text{ através de } S^{n-1}(r) = q \quad (3.1.7)$$

O fluxo será igual a magnitude do campo elétrico vezes o volume de $S^{n-1}(r)$.

Então, de acordo com o anexo A, tem-se

$$E(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) q}{2\pi^{n/2} r^{n-1}} \quad (3.1.8)$$

Uma vez obtido a expressão para o cálculo do campo elétrico em n dimensões, podemos agora obter um expressão para o potencial elétrico.

Partindo da seguinte relação,

$$-\frac{d\Phi}{dr} = E(r) \quad (3.1.9)$$

Podemos integrar a relação obtida anteriormente e acharmos a expressão para o potencial,

$$\Phi^{(n)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) q}{4\pi^{n/2} r^{n-2}} \quad (3.1.10)$$

Verifique que para $n = 3$ recuperamos a expressão clássica do potencial elétrico ou seja, o potencial vai depender do número de dimensões espaciais que estamos tratando.

3.2 A MECÂNICA QUÂNTICA E O POÇO QUADRADO INFINITO

Um dos problemas mais simples que podemos usar para mostrar algumas das propriedades da função de onda é o problema do poço quadrado infinito. Para resolvermos esse problema consideramos a equação de Schrödinger unidimensional e independente do tempo. O problema consiste de uma partícula que pode se mover livremente ao longo do eixo x , porém em $x = 0$ e $x = a$ existem paredes

impenetráveis, isso implica que a probabilidade de a partícula está fora do intervalo $0 \leq x \leq a$ seja 0.

A função de onda para partícula deve se anular fora do poço, isto é, $\psi(x) = 0$ para $x \geq a$ e para $x \leq 0$. Digamos que essa parede seja formada por um potencial V e a partícula referida seja um elétron, e que esse potencial seja grande o suficiente para impedir que a partícula escape dessa região. Para este problema, a energia potencial é da forma:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, a) \\ \infty & \text{se } x \notin (0, a) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Representação gráfica do potencial:

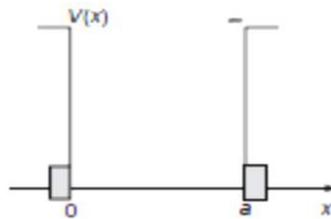


Figura 5. Representação do potencial. (Fonte: ZWIEBACH, 2009).

Nas regiões internas das paredes teremos:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad (3.2.2)$$

Reorganizando esta equação e fazendo $K^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, ficaremos com:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -K^2\psi(x) \quad (3.2.3)$$

Cuja solução já é bem conhecida na literatura e é dada por:

$$\psi(x) = A \text{ sen } Kx + B \text{ cos } Kx \quad (3.2.4)$$

Impondo as devidas condições de contorno sobre a função de onda, temos:

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \quad (3.2.5)$$

Para satisfazer $\psi(x=0) = 0$, basta tomar $B = 0$, pois o seno se anula automaticamente em $x = 0$. Então, antes de usar a segunda condição de contorno temos:

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} Kx \quad (3.2.6)$$

A segunda condição exige que:

$$A \operatorname{sen} Ka = 0 \quad (3.2.7)$$

Ou seja, para satisfazer a equação o argumento do seno deve igual a $n\pi$, com n inteiro. Assim:

$$Ka = n\pi \quad (3.2.8)$$

Logo,

$$K_n = \frac{n\pi}{a} \quad (3.2.9)$$

Introduzimos o índice n na constante K para dar mais clareza, ou seja, para indicar que K tem seus valores restritos à expressão (3.2.9).

As soluções da equação de Schrödinger que satisfazem as condições de contorno são,

$$\psi_n(x) = A \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \quad (3.2.10)$$

Com $n \in \mathbb{Z}$ (inteiros).

O fato da função se anular em $x = a$, restringe os valores de K e também os valores da energia:

$$E_n = \frac{\hbar^2 K_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \quad (3.2.11)$$

Da equação acima nós percebemos que, diferentemente da física clássica, a energia da partícula não varia continuamente, mas sim passa do valor E_n para E_{n+1} . E fazendo a diferença entre essas energias nós teremos o que chamamos de espectro discreto para energia:

$$E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} (2n + 1) \quad (3.2.12)$$

Com o intuito de encontrar a constante A na função de onda (3.2.10) vamos normalizá-la, ou seja, devemos exigir que:

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1 \quad (3.2.13)$$

E resolvendo para A, encontramos que: $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$. Assim:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (3.2.14)$$

3.3 POÇO QUADRADO INFINITO COM DIMENSÕES EXTRAS

Agora vamos adicionar uma dimensão extra para o problema do poço quadrado, além de x teremos uma dimensão y que estará enrolada em um pequeno círculo de raio R , em outras palavras utilizamos a seguinte identificação:

$$(x, y) = (x, y + 2\pi R) \quad (3.3.1)$$

A dimensão original x não foi alterada. Uma vez que a direção de y foi transformada em um círculo de circunferência igual a $2\pi R$, o espaço onde a partícula se move é agora um cilindro. O cilindro tem um comprimento de perímetro $2\pi R$. O potencial $V(x, y)$ vai permanecer sendo dado como era anteriormente.

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, a) \\ \infty & \text{se } x \notin (0, a) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Em duas dimensões temos que a equação de Schrödinger independente do tempo fica escrita da seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = E\psi \quad (3.3.3)$$

Utilizaremos o método de separação de variáveis para resolver essa equação. Assim, podemos escrever a função $\psi(x, y)$ da seguinte forma, $\psi(x, y) = \varphi(x)\chi(y)$. Substituindo na equação acima, teremos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \varphi(x)\chi(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x)\chi(y)}{\partial y^2} \right) = E\varphi(x)\chi(y) \quad (3.3.4)$$

Reorganizando os termos, simplificando e separando a equação, devemos ter que para que a equação seja satisfeita, cada lado da igualdade acima deve ser igual a uma constante, desta forma ficamos com:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi} \frac{d^2\varphi}{dx^2} - E = -\varepsilon^2 \quad (3.3.5)$$

E

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\chi} \frac{d^2\chi}{dy^2} = -\varepsilon^2 \quad (3.3.6)$$

Da equação (3.3.5) temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = E - \varepsilon^2 = E_n \quad (3.3.7)$$

E organizando uma última vez essa parte da equação, ficaremos com:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE_n\varphi}{\hbar^2} = 0 \quad (3.3.8)$$

Da equação (3.3.6) temos:

$$\frac{d^2\chi}{dy^2} + \frac{2mE_l\chi}{\hbar^2} = 0; \varepsilon^2 = E_l \quad (3.3.9)$$

Se definirmos:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_n \quad (3.3.10)$$

E

$$q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_l \quad (3.3.11)$$

Logo, teremos:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0 \rightarrow \varphi(x) = A_n \operatorname{sen}(kx) + B_n \operatorname{cos}(kx) \quad (3.3.12)$$

$$\frac{d^2\chi}{dy^2} + q^2\chi = 0 \rightarrow \chi(y) = A_l \operatorname{sen}(qy) + B_l \operatorname{cos}(qy) \quad (3.3.13)$$

Utilizando as condições de contorno nós obtemos que:

$$\varphi(x) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (3.3.14)$$

E

$$\chi(y) = A_l \sin\left(\frac{ly}{R}\right) + B_l \cos\left(\frac{ly}{R}\right) \quad (3.3.15)$$

E os valores de energia associados a $\varphi(x)$ e $X(y)$ são:

$$E_{n,l} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{R}\right)^2 \right] \quad (3.3.16)$$

Estas energias correspondem a estados duplamente degenerados quando $l \neq 0$, pois nesse caso vamos ter duas soluções linearmente independentes. O novo sistema possui todos os antigos níveis de energia mais os adicionais devido à influência da dimensão extra. O menor dos níveis adicionais de energia é dado agora quando $n = 1$ e $l = 1$.

$$E_{1,1} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2 \right] \quad (3.3.17)$$

Quando $R \ll a$, a expressão tende a:

$$E_{1,1} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R}\right)^2 \quad (3.3.18)$$

Esta energia pode ser comparada com aquela obtida no problema original, isto é, E_n . Assim, podemos obter a seguinte relação entre os níveis de energia da partícula presa no poço de potencial e o raio da dimensão extra:

$$\frac{n\pi}{a} \sim \frac{1}{R} \rightarrow n \sim \frac{1}{\pi} \frac{a}{R} \quad (3.3.19)$$

Uma vez que R é muito menor do que a , n é um número muito grande. Assim, o primeiro nível adicional de energia aparece com uma energia muito superior àquela dos estados originais.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluimos portanto que nosso objetivo foi alcançado, através dos estudos dos tópicos de física propostos vimos como algumas leis e situações que estamos familiarizados seriam afetadas considerando um modelo de espaço-tempo onde existam dimensões extras compactas (no presente trabalho consideramos uma dimensão extra compacta).

Para o primeiro caso, após a ampliação do conceito de bolas e esferas para várias dimensões (o que nos possibilitou argumentação matemática necessária para ampliarmos as definições de campo e potencial elétricos para espaços-tempos com mais de 4 dimensões), vimos como as expressões para o campo elétrico, calculado através de uma gaussiana de simetria esférica em n dimensões, e o potencial elétrico se comportariam nesse tipo de espaço. Diferentemente do caso onde consideramos um mundo com 3 (três) dimensões espaciais (dimensões essas que são perceptíveis no nosso dia a dia), o campo elétrico não decairá mais com r^2 , mas sim com r^{n-1} , sendo n o número de coordenadas espaciais que estamos tratando. Já o potencial decairá com um fator de r^{n-2} . É fácil de notar que para um mundo onde consideramos apenas três dimensões, ou seja, $n = 3$, nossas expressões gerais recaem para aquelas que estamos acostumados.

Para o segundo caso, onde trabalhamos um problema da mecânica quântica, o problema de uma partícula presa em um poço de potencial infinito mas agora admitindo uma dimensão extra, vimos que os níveis de energia da partícula foram redefinidos e que eles dependem também da dimensão extra, correspondendo a estados duplamente degenerados. Concluimos para esse problema, que para uma dimensão extra muito pequena, a energia necessária para se observar tal dimensão deverá ser muito grande, estando assim fora do alcance dos experimentos atuais. Desta forma, uma dimensão extra compactada pode permanecer escondida dos experimentos, desde que o seu tamanho seja pequeno o suficiente, como o caso descrito na teoria de Kaluza-Klein onde o raio da dimensão extra é da ordem da escala de Planck.

Apesar de obtermos expressões que à primeira vista parecem ser muito diferentes das que estamos acostumados, vimos que elas facilmente recaem para o caso em que consideramos que o espaço-tempo possui apenas as coordenadas usuais que estamos acostumados.

Muitas outras leis e situações físicas podem ser reformuladas se de fato as dimensões extras existirem. A proposta do presente trabalho foi justamente mostrar alguns exemplos das implicações do ponto de vista teórico, que tais dimensões causariam nos problemas estudados.

REFERÊNCIAS

- ARFKEN, G. B, WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. 6ªed. Elsevier Academic Press, 2005.
- BARTON ZWIEBACH. **A First Course in String Theory**. 2. ed. Cambridge University Press, 2009.
- D`INVERNO, R. **Introducing Einstein`s Relativity**. Oxford University Press, 1992.
- GRIFFITHS, D.J. **Introduction to Eletrodynamics**. 3ª ed. Prentice Hall, 1999.
- GRIFFITHS, D.J. **Mecânica Quântica de Griffths**. 2ª ed. Pearson, 2011.
- HALLIDAY D.; RESNICK R.; WALKER J. **Fundamentos da Física 3: Eletromagnetismo**.9ª ed. Ltc, 2012.
- KALUZA, T. **Akad. Wiss. Phys. Math.** Kl. 966, 1921.
- KLEIN, O. Z. **Phys**, 37, 895, 1926.
- LESCH, B. **Teoria da Relatividade. Livraria da Física**. São Paulo: editora livraria da física, 2005.
- RESNICK, ROBERT. **Introdução à Relatividade Especial**. EDUSP, 1971.
- SILVA, A.A. **Um estudo sobre dimensões extras**. Dissertação (Mestrado em física), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande, 2009.
- TIPLER, P. A. **Física Moderna**. LTC, 2006.

ANEXOS

ANEXO A- VOLUMES EM DIMENSÕES EXTRAS

Em nosso estudo, faz-se necessário utilizar um conceito generalizado para as definições de bolas e esferas e seus respectivos volumes em dimensões superiores. Começemos por diferenciar o conceito de esferas e bolas. Quando dizemos que o volume de uma esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$ queremos dizer na verdade que esse é o volume de uma bola-tridimensional (B^3) que tem seu volume encerrado pela esfera-bidimensional (S^2) (BARTON, 2009).

Em R^3 (espaço tridimensional) com coordenadas x_1, x_2, x_3 ; teremos a região da bola (B^3) definida por,

$$B^3(R) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \quad (\text{B.1})$$

Que tem seu volume limitado/encerrado pela esfera

$$S^2(R) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \quad (\text{B.2})$$

Generalizando essa definição para um espaço R^n , teremos:

$$B^n(R) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2 \quad (\text{B.3})$$

O volume das esferas (S) unidimensionais e bidimensionais são:

$$\text{Vol}(S^1(R)) = 2\pi R \quad (\text{B.4})$$

$$\text{Vol}(S^2(R)) = 4\pi R^2 \quad (\text{B.5})$$

Todos os espaços em dimensões superiores a 2 se tratam de volumes.

O volume de uma esfera de raio R , está relacionado com o volume de uma esfera de raio unitário por:

$$\text{Vol}(S^{n-1}(R)) = R^{n-1}\text{Vol}(S^{n-1}) \quad (\text{B.6})$$

Para o cálculo do volume da esfera S^{n-1} , consideremos o espaço R^n com coordenadas $x_1, x_2 \dots x_n$; e seja r a coordenada radial dada por

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad (\text{B.7})$$

Uma forma de obtermos o volume para a esfera é calcularmos a seguinte integral

$$I_n = \int_{R^n} dx_1 dx_2 \dots dx_n e^{-r^2} \quad (\text{B.8})$$

Para resolvermos esta integral seguiremos dois caminhos diferentes. O Primeiro modo é calcular o produto de n integrais gaussianas de forma a obtermos

$$I_n = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i e^{-x_i^2} = (\sqrt{\pi})^n = \pi^{\frac{n}{2}} \quad (\text{B.9})$$

Outra forma de calcularmos esse volume seria utilizando o seguinte argumento: calcular no espaço R^n os volumes das cascas esféricas. O volume entre as cascas esféricas localizadas em r e $r + dr$ é igual a:

$$Vol(S^{n-1}(r))dr \quad (\text{B.10})$$

Assim, a integral

$$I_n = \int_0^{+\infty} dr Vol(S^{n-1}(r))e^{-r^2} \quad (\text{B.11})$$

Nos dará o mesmo volume calculado anteriormente.

Utilizando a relação (B.6) teremos:

$$I_n = Vol(S^{n-1}) \int_0^{+\infty} dr r^{n-1} e^{-r^2} \quad (\text{B.12})$$

Fazendo $t = r^2$:

$$I_n = \frac{1}{2} Vol(S^{n-1}) \int_0^{+\infty} dt e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} \quad (\text{B.13})$$

Se lembrarmos da definição da função gama (ARFKEN, 2005),

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} dt e^{-t} t^{x-1}; \quad x > 0, \quad (\text{B.14})$$

Podemos reescrever (B.13) como:

$$I_n = \frac{1}{2} Vol(S^{n-1}) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad (\text{B.15})$$

E, igualando as equações (B.9) e (B.15) teremos:

$$\text{Vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (\text{B.16})$$

E utilizando a relação (B.6), teremos:

$$\text{Vol}(S^{n-1}(R)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^{n-1} \quad (\text{B.17})$$

A expressão (B.17) estabelece o volume da esfera em um espaço com n dimensões extras arbitrárias.

ANEXO B- CALCULO DA FUNÇÃO GAMA

Agora veremos como calcularmos $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$. Como n é o número de dimensões espaciais que estamos tratando, logo n é um número inteiro, então devemos determinar os valores da função gama para argumentos inteiros e meio inteiros.

Para

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} dt e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.1})$$

Fazendo $t = u^2$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} du e^{-u^2} = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.2})$$

De forma semelhante temos,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} dt e^{-t} = 1 \quad (\text{A.3})$$

Para relações com argumentos maiores utilizaremos uma relação de recursão. Veremos abaixo como obtermos tal relação. Seja,

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^{+\infty} dt e^{-t} t^x, \quad x > 0 \quad (\text{A.4})$$

Podemos reescrever essa relação da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= - \int_0^{+\infty} dt \left(\frac{d}{dt} e^{-t} \right) t^x & (\text{A.5}) \\ &= - \int_0^{+\infty} dt \left(\frac{d}{dt} (e^{-t} t^x) - x e^{-t} t^{x-1} \right) \end{aligned}$$

Para $x > 0$ temos,

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (\text{A.6})$$

Para demonstrarmos como essa relação funciona, calcularemos $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ para $n = 3$, assim teremos:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad (\text{A.7})$$

Para $n = 5$,

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \quad (\text{A.8})$$

Para argumentos inteiros, a função gama está relacionada ao fatorial. Por exemplo:

$$\Gamma(5) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot \Gamma(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 4!$$

Portanto, para $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$, temos

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad (\text{A.9})$$