



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**OS ESTADOS COERENTES VIA ÁLGEBRA DE
WIGNER-HEISENBERG E SUA APLICAÇÃO
NO OSCILADOR DE CELKA-HUSSIN**

Paulo Ribeiro da Silva Júnior

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**OS ESTADOS COERENTES VIA ÁLGEBRA DE
WIGNER-HEISENBERG E SUA APLICAÇÃO
NO OSCILADOR DE CELKA-HUSSIN**

Paulo Ribeiro da Silva Júnior

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Aécio Ferreira de Lima, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586e

Silva Júnior, Paulo Ribeiro da.

Os estados coerentes via álgebra de Wigner-Heisenberg e sua aplicação no oscilador de Celka-Hussin / Paulo Ribeiro da Silva Júnior. – Campina Grande, 2013.

48 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

"Orientação: Prof. Dr. Aécio Ferreira de Lima".

Referências.

1. Estados Coerentes.
2. Álgebra de Wigner-Heisenberg.
3. Oscilador de Celka-Hussin. I. Lima, Aécio Ferreira de. II. Título.

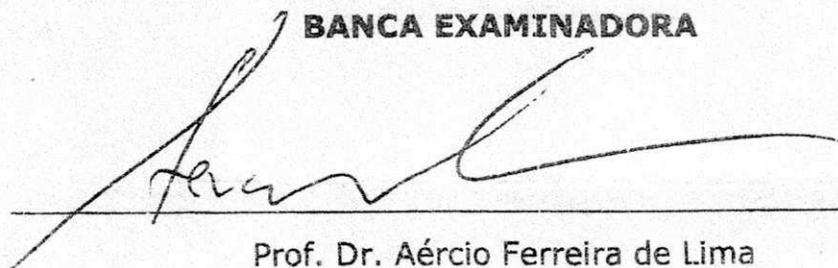
CDU 530.145(043)

PAULO RIBEIRO DA SILVA JÚNIOR

**ESTADOS COERENTES VIA ÁLGEBRA DE WIGNER-HEISENBERG E SUA
APLICAÇÃO NO OSCILADOR DE CELKA-HUSSIN**

Dissertação aprovada em 27/02/2013

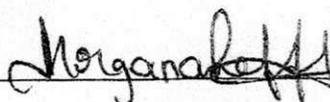
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Aécio Ferreira de Lima
Unidade Acadêmica de Física - UFCG
(Presidente)



Prof. Dr. Rafael de Lima Rodrigues
Unidade Acadêmica de Educação - UFCG
(Membro externo)



Prof. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire
Departamento de Física - UEPB
(Membro externo)

*A meus pais,
Paulo Ribeiro (in memoriam)
e Ana Gomes, cujo apoio
e estímulo foram imprescindíveis
para concluir mais esta
etapa da minha vida acadêmica.*

*A Deus, acima de tudo,
por ter me dado forças, garra
e perseverança para vencer mais
este desafio.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu estimado orientador Aécio Ferreira de Lima, pelo muito que me ensinou, por sua disponibilidade, generosidade e paciência, tornando-se amigo dileto nas horas de insegurança e medo.

Ao meu querido professor Rafael de Lima Rodrigues pela generosidade com que se disponibiliza para tirar dúvidas e, as vezes, criá-las também! Grande amigo e valoroso co-orientador.

Aos companheiros, José Gonzales Firmino e a Antonildo Santos Pereira, além de se tornarem grandes amigos, tiveram contribuições decisivas para conclusão desse curso, dando-me força, incentivo, companheirismo e amizade.

Ao Professor Francisco de Assis Brito, pela acolhida na Unidade Acadêmica de Física - UAF- UFCG.

A todos os meus professores desde o primário até o mestrado, pois sem seus ensinamentos e estímulos jamais teria chegado até aqui.

Aos meus colegas, Neymar Nepomuceno, Pablo Sampaio e Karina Soares, pela amizade, agradável convívio e intercâmbio de ideias.

A minha estimada mãe. Seu amor e incentivo foram fundamentais na superação de obstáculos e na formação da pessoa que sou hoje.

A minha família e aos meus amigos, fontes inesgotáveis de estímulo e apoio.

A Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar o caminho nas horas incertas e me suprir em todas as necessidades.

Aos todos os funcionários da UAF-UFCG, pela presteza em ajudar sempre.

*Todo o futuro da nossa espécie,
todo o governo das sociedades,
toda a prosperidade moral e material
das nações dependem da ciência,
como a vida do homem depende do ar.*

*Ora, a ciência é toda
observação, toda exatidão,
toda verificação experimental.
Perceber os fenômenos, discernir
as relações, comparar as analogias
e as dessemelhanças,
classificar as realidades,
e induzir as leis, eis a ciência;
eis, portanto, o alvo que a
educação deve ter em mira.*

(Rui Barbosa)

RESUMO

No presente trabalho, apresentamos a construção dos estados coerentes para oscilador de Celka-Hussin. Também determinamos as propriedades de super-completeza e não ortogonalidade para esses estados. A técnica adotada para sua construção é inspirada na técnica usada por Jayaraman e Rodrigues[1994]. Esses autores construíram, os estados coerentes para o setor bosônico do oscilador de Wigner, como também, o espectro completo da energia e as autofunções para o oscilador de Celka-Hussin(CH). Para clareza do método adotado, revisamos o procedimento para construção os estados coerentes para o setor Bosônico do oscilador de Wigner (H_W) para em seguida aplicarmos a técnica na construção do estado coerente para o hamiltoniano de Celka-Hussin (H_{CH}).

Palavra-chave: Estados coerentes, álgebra de Wigner-Heisenberg, oscilador de Celka-Hussin.

ABSTRACT

In this paper we discuss the coherent states of Celka Hussin (CH) oscillators. Also we have presented for these states overcompleteness and non-orthogonality properties. To achieve this purpose we used the work by Jayaraman and Rodrigues [1994] . These authors built the coherent states for the Hamiltonian of the bosonic sector of Wigner hamiltonian, (H_W) , and discussed the eigenfunctions of Celka Hussin Hamiltonian . (H_{CH}) .

We revised the study of Jayaraman and Rodrigues to clarified the methodology to obtain the coherent states of the bosonic sector of Wigner oscillators in the first, and following, we applied this procedure to obtain the coherent states of Celka-Hussin oscillators. **Keywords:** coherent states, Wigner-Heisenberg algebra e Celka Hussin oscillators.

Conteúdo

Lista de Figuras	ii
1 Introdução	1
2 Estados Coerentes	3
2.1 Estados Coerentes para o Oscilador Harmônico Simples	4
2.1.1 Auto Estados do Operador de Abaixamento	4
2.2 Estados coerentes obtidos através do Operador de Deslocamento atuando no Vácuo	7
2.2.1 Ortogonalidade e Completeza para os estados Coerentes	10
2.3 Os estados coerentes como estados quase clássicos.	11
3 Estados Coerentes via Álgebra de Wigner-Heisenberg	14
3.1 Estados coerentes de Wigner-Heisenberg	14
4 Espectro do Sistema de Celka e Hussin via álgebra de WH	20
4.1 Hamiltoniano de Wigner 3D com o Hamiltoniano de Celka-Hussin	21
4.2 O espectro de Energia Completo de H_{CH} a partir da conexão com o Hamiltoniano-Wigner	25
5 Estados Coerentes Canônico para o oscilador SUSY de Celka-Hussin	34
6 Conclusão	37
Bibliografia	39

Lista de Figuras

2.1	Operador Deslocamento atuando no Vácuo	9
2.2	Imagem da relação de incerteza dos estados Coerentes [14].	13

Capítulo 1

Introdução

Os estudos dos estados coerentes (EC), nos últimos 50 anos, se mostraram bastante empolgantes. Introduzidos em 1963 por Glauber [1], podem ser construídos para uma série de sistemas físicos, sendo largamente empregados no estudo da óptica e da eletrônica quântica [2], contudo a ideia de criar um estado coerente para um sistema quântico foi concebida muito antes, em 1926 por Schrodinger [3] ao propor uma conexão com os estados clássicos do oscilador harmônico quântico, buscando estabelecer o princípio de correspondência.

Na década de 60, com o surgimento do laser, foram desenvolvidos inúmeros trabalhos sobre a teoria quântica da luz. Klauder [4] usou estes estados para mostrar a equivalência entre as descrições da mecânica semiclássica e da mecânica quântica de feixes de luz arbitrários, desenvolvendo a eletrodinâmica quântica .

Aproximadamente ao mesmo tempo, mas de forma independente Glauber [5, 6], Sudarshan [7], Klauder [8] desenvolveram um conjunto de estados contínuos no qual as ideias básicas de estados coerentes para grupos arbitrários de Lie foram contidos. Alguns anos após os trabalhos de Glauber [1, 5, 6], Sudarshan [7] e Klauder [8], foi alcançada a construção completa dos estados coerentes de grupos de Lie, com várias propriedades semelhantes aos estados coerentes do oscilador harmônico (Perelomov, [9]; Gilmore [10, 11, 12, 13]). O tema básico desse desenvolvimento foi relacionar inti-

mamente os estados coerentes com o grupo dinâmico para cada problema físico [14].

Mostraremos aqui, de maneira detalhada, os estados coerentes obtidos para o oscilador de Wigner e sua aplicação no oscilador de Celka-Hussin(CH), bem como a determinação completa dos espectros e as autofunções de energia para os respectivos osciladores. Assim nosso trabalho é estruturado da seguinte forma: No capítulo 2 é feita uma revisão sobre os estados coerentes canônicos, destacando duas importantes propriedades: não ortogonalidade e completeza, para isso usamos como referência livros de mecânica quântica [15, 16, 17] e óptica quântica, [18]. No capítulo 3 calculamos os estados coerentes para o setor bosônico do hamiltoniano de Wigner-Heisenberg(H_W), utilizando para esse fim a álgebra de WH, provamos sua não-ortogonalidade e supercompleteza, como era de se esperar. No capítulo 4 é estabelecida a conexão do Hamiltoniano de H_{CH} com a álgebra de WH, além de determinarmos sem ambiguidade a resolução completa do espectro e as autofunções de energia para H_W e posteriormente para o de H_{CH} . No capítulo 5 calculamos os estados coerentes para o hamiltoniano 3 D de Celka-Hussin, utilizando a conexão da álgebra de Wigner-Heisenberg estabelecida no capítulo 4 e por fim fazemos algumas conclusões

Capítulo 2

Estados Coerentes

Na mecânica quântica um estado coerente é o estado quântico específico do oscilador harmônico quantizado cuja dinâmica mais se assemelha ao comportamento oscilante de um oscilador harmônico clássico. No entanto, o conceito de estados coerentes tem sido consideravelmente generalizado, na medida em que se tornou um tópico importante na física matemática e matemática aplicada [19], com aplicações que vão desde quantização para processamento de sinais e processamento de imagem. Por essa razão, os estados coerentes associadas ao oscilador harmônico quântico são geralmente chamados estados coerentes canônicos (CCS) ou estados coerentes padrão ou ainda, estados Gaussianos.

Os estados coerentes ou estados quase-clássicos possuem duas importantes propriedades: não-ortogonalidade e completeza e na descrição de Schrodinger [3] são funções gaussianas que dependem do tempo e da posição, centrada num ponto que oscila de forma análoga a posição horaria do oscilador harmônico simples em mecânica clássica [20].

Neste capítulo trataremos dos conceitos básicos dos estados coerentes canônicos. Apresentaremos as três definições de estados coerentes que são equivalentes para o oscilador harmônico quantizado, a saber: (i) autoestados do operador de abaixamento (\hat{a}^-), (ii) estado deslocado do vácuo do oscilador e (iii) estados de mínima incerteza.

2.1 Estados Coerentes para o Oscilador Harmônico Simples

O oscilador harmônico é o mais simples modelo físico capaz de fornecer os ingredientes fundamentais para descrever o comportamento do campo luminoso.

No caso quântico podemos considerar o hamiltoniano do oscilador harmônico como:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}. \quad (2.1.1)$$

Os operadores de posição \hat{x} e momento \hat{p} são, evidentemente hermitianos, porém será útil representá-los através de operadores não hermitianos respectivamente, \hat{a}^+ e \hat{a}^- .

Assim usualmente defini-se

$$\begin{aligned} \hat{a}^- &= \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{x} + i \left(\frac{1}{2m\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{p}_x \\ &\text{e} \\ \hat{a}^+ &= \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{x} - i \left(\frac{1}{2m\hbar\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{p}_x, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

que são conhecidos como operadores de abaixamento e de levantamento, respectivamente. Eles são assim denominados porque operam como operadores “escadas”, abaixando e levantando os níveis quânticos.

2.1.1 Auto Estados do Operador de Abaixamento

Antes porém, da construção dos estados coerentes é válido ressaltar alguma propriedades do operador hamiltoniano que governa o Oscilador Harmônico Simples - OHS. Na representação dos estados de número $|n\rangle$, pode-se definir

$$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}^- \quad (2.1.3)$$

Usando as definições de \hat{a}^+ e \hat{a}^- tem-se

$$\hat{N} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{\mathbf{1}}{2} \quad (2.1.4)$$

Logo podemos escrever as relações

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad E_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.5)$$

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- = 1, \quad a^+ = (a^-)^\dagger, \quad (2.1.6)$$

$$\left[\hat{H}, \hat{a}^\pm \right]_- = 1, \quad \pm \hat{a}^\pm. \quad (2.1.7)$$

Onde adotamos $\hbar = \omega = m = 1$.

Assim o operador hamiltoniano pode ser expresso

$$\hat{H} = \frac{1}{2} [\hat{a}^-, \hat{a}^+]_+ = \frac{1}{2} (\hat{a}^+ \hat{a}^- + \hat{a}^- \hat{a}^+) = \hat{a}^+ \hat{a}^- + \frac{1}{2}. \quad (2.1.8)$$

Utilizando os operadores escadas \hat{a}^- e \hat{a}^+ podemos gerar os auto estados de número $|n\rangle$ do operador \hat{N} [21, 22, 16, 17], como segue

$$\hat{a}^- |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (2.1.9)$$

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.1.10)$$

A construção dos estados coerentes $|\alpha\rangle$, pode ser escrito como uma combinação linear dos $|n\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n(\alpha) |n\rangle. \quad (2.1.11)$$

Que satisfaz a equação de autovalor

$$\hat{a}^- |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (2.1.12)$$

Multiplicando essa equação pelo $\langle n|$, temos:

$$\langle n| \hat{a}^- |\alpha\rangle = \alpha \langle n| \alpha\rangle. \quad (2.1.13)$$

Fazendo uso das equações (2.1.6) e (2.1.10) podemos resolver o lado esquerdo da equação anterior obtendo

$$(n+1)^{\frac{1}{2}} \langle n+1| \alpha\rangle = \alpha \langle n| \alpha\rangle. \quad (2.1.14)$$

Com o uso dessa forma de recorrência podemos escrever

$$(n)^{\frac{1}{2}} \langle n | \alpha \rangle = \alpha \langle n-1 | \alpha \rangle. \quad (2.1.15)$$

Usando a expressão $\frac{(\hat{a}^+)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} |0\rangle = |n\rangle$, que representa, de modo geral, o estado fundamental do oscilador, escrevemos $\langle n |$ como

$$\langle n | = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \langle 0 | \hat{a}^n. \quad (2.1.16)$$

Substituindo a equação anterior no lado direito de (2.1.15), obtemos

$$\langle n | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \langle 0 | \alpha \rangle. \quad (2.1.17)$$

Representando a projeção $\langle n | \alpha \rangle$ por $c_n(\alpha)$, a expressão acima passa a ser escrita na forma

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} c_0(\alpha). \quad (2.1.18)$$

Segue-se daí que se o coeficiente $c_0(\alpha)$ tiver um valor fixo todos os $c_n(\alpha)$ também terão um valor fixo. Considerando $c_0(\alpha)$ uma quantidade real e positiva, pode-se determinar $|\alpha\rangle$ por meio da condição de normalização $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ [15], ou seja,

$$|c_0(\alpha)|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} = 1 \quad (2.1.19)$$

onde utilizou-se o fato conhecido

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.1.20)$$

Finalmente obtém-se que

$$c_0(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad (2.1.21)$$

Com isso o estado coerente do oscilador harmônico quântico toma a seguinte forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!^{\frac{1}{2}}} |n\rangle. \quad (2.1.22)$$

Resulta portanto que os estados coerentes obtidos através dos auto estados do operador de abaixamento (\hat{a}^-), são dados pela equação (2.1.22).

2.2 Estados coerentes obtidos através do Operador de Deslocamento atuando no Vácuo

Considerando o oscilador harmônico no estado coerente, a probabilidade deste ser encontrado no estado $|n\rangle$ é dado por

$$P_n(\alpha) = |c_n(\alpha)|^2 = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (2.2.23)$$

A equação anterior indica que a probabilidade $P_n(\alpha)$ fica expressa por uma distribuição de Poisson, com valor médio de $\langle n \rangle$ dado por $|\alpha|^2$ e substituindo (2.1.22) em (2.2.23) encontramos

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \frac{(\hat{a}^+)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha \hat{a}^+)^n}{n!} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \hat{a}^+} |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Definindo um operador deslocamento $\hat{D}(\alpha)$ por

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha \hat{a}^+}. \quad (2.2.25)$$

Tem-se por (2.2.24) e (2.2.25) que o estado coerente $|\alpha\rangle$ é dado por

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (2.2.26)$$

Mostrando que $\hat{D}(\alpha)$ pode ser interpretado como um operador que gera estado coerente $|\alpha\rangle$ ao atuar no estado de vácuo $|0\rangle$.

Para determinar explicitamente o operador $\hat{D}(\alpha)$ de uma outra mais simétrica com relação aos operadores \hat{a}^- e \hat{a}^+ , podemos utilizar a identidade abaixo

$$e^{-\alpha^* \hat{a}^-} |0\rangle = \left[1 - \alpha^* \hat{a}^- + \frac{1}{2} (\alpha^* \hat{a}^-)^2 + \dots \right] |0\rangle = |0\rangle. \quad (2.2.27)$$

Assim escrevemos

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^+} e^{-\alpha^* \hat{a}^-} |0\rangle. \quad (2.2.28)$$

Sabendo que $[a^-, a^+]_- = 1$, o valor esperado para representar o operador $\hat{D}(\alpha)$ assume a forma abaixo

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^+} e^{-\alpha^* \hat{a}^-} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}^- + \frac{1}{2}[\alpha \hat{a}^+, \alpha^* \hat{a}^-]} = e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}^-} \quad (2.2.29)$$

Onde foi usado o teorema B.C.H.(Baker-Campbell-Hausdorff) [18].

Podemos também expressar o operador deslocamento $\hat{D}(\alpha)$ expresso em (2.2.29), em termos dos operadores Hermitianos \hat{x} e \hat{p} , definidos em (2.1.2), assim obtemos

$$\hat{D}(\alpha) = e^{i(\eta \hat{x} - \mu \hat{p}_x)}. \quad (2.2.30)$$

onde foi definido

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\frac{2m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Im}g(\alpha) \\ \text{e} \\ \mu &= \left(\frac{2}{m\hbar\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Re}(\alpha). \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Para verificar se o operador $\hat{D}(\alpha)$ desempenha o papel de um operador deslocamento tomamos a relação (2.2.29), escrevendo-a da seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) &= e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}^-} \\ &= e^{\alpha \hat{a}^+} f(\hat{a}^-) \\ &= \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^+)^n f(\hat{a}^-), \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

sendo $f(\hat{a}^-)$ uma função auxiliar expressa por

$$f(\hat{a}^-) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \alpha^* \hat{a}^-}. \quad (2.2.33)$$

Dando sequência ao desenvolvimento, escrevemos o produto de operadores

$$\hat{a}^- \hat{D}(\alpha) = \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} \hat{a}^- (\hat{a}^+)^n f(\hat{a}^-). \quad (2.2.34)$$

Usando a relação de comutação, escrevemos a identidade

$$\hat{a}^- (\hat{a}^+)^n = (\hat{a}^+)^n \hat{a}^- + n(\hat{a}^+)^{n-1}, \quad (2.2.35)$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{a}^- \hat{D}(\alpha) &= \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} [(\hat{a}^+)^n \hat{a}^- + n(\hat{a}^+)^{n-1}] f(\hat{a}^-) \\
&= \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^+)^n \hat{a}^- e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \alpha^* \hat{a}^-} + \sum_n \frac{n\alpha^n}{n!} (\hat{a}^+)^{n-1} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \alpha^* \hat{a}^-} \\
&= \hat{D}(\alpha) \hat{a}^- + \sum_n \frac{\alpha^n}{(n-1)!} (\hat{a}^+)^{n-1} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} - \alpha^* \hat{a}^-} \\
&= \hat{D}(\alpha) (\hat{a}^- + \alpha).
\end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Multiplicando a equação anterior por $\hat{D}(\alpha)$ pela esquerda temos

$$\hat{D}(\alpha)^{-1} \hat{a}^- \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^- + \alpha. \tag{2.2.37}$$

Usando cálculos análogos obtemos,

$$\hat{D}(\alpha)^{-1} \hat{a}^+ \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^+ + \alpha^*. \tag{2.2.38}$$

Por esse motivo o operador $\hat{D}(\alpha)$ é chamado de operador deslocamento de Glauber [15].

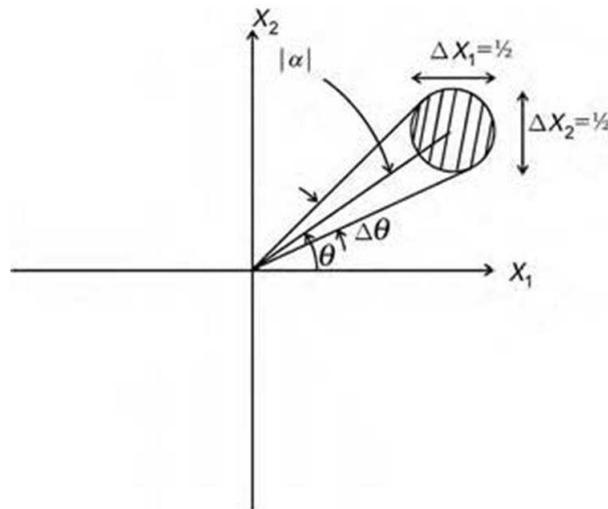


Figura 2.1: Operador Deslocamento atuando no Vácuo

2.2.1 Ortogonalidade e Completeza para os estados Coerentes

Agora veremos se os dois estados coerentes, representados abaixo por $|\alpha\rangle$ e $|\alpha'\rangle$ são ortogonais

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_m \frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} \frac{(\hat{a}^+)^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_m \frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} |m\rangle \\ \langle\alpha'| &= e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha'^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \langle 0| \frac{(\hat{a}^-)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} \sum_n \langle n| \frac{(\alpha'^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

Calculando o produto interno

$$\begin{aligned} \langle\alpha'| \alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m,n} \langle n| \frac{(\alpha'^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} |m\rangle \\ \langle\alpha'| \alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m,n} \frac{(\alpha'^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \frac{\alpha^m}{(m!)^{\frac{1}{2}}} \delta_{nm} \\ \langle\alpha'| \alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha'|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha'^*)^n \alpha^n}{n!} \\ \langle\alpha'| \alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2 - 2\alpha\alpha'^*)} \\ \langle\alpha'| \alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha - \alpha'|^2} \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

Os estados coerentes não obedecem a condição de normalização $\langle\alpha'| \alpha\rangle = \delta_{\alpha'\alpha}$ como visto na equação anterior, pois não são ortogonais, ou seja, o produto escalar entre dois estados coerentes é não nulo. Isto já era esperado, pois eles são autoestados de um operador não hermitiano, porém formam um conjunto super completo. Podemos assim expressar qualquer autoestados de um estado quântico do OHS em termos dos estados coerentes, inclusive ele próprio. [23]

A propriedade de completeza para os estados coerente pode ser obtida, fazendo:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle\alpha| d[Re(\alpha)] d[Img(\alpha)] = 1. \quad (2.2.41)$$

A expressão acima pode ser expressa de outra forma utilizando a equação (2.2.39).

$$\frac{1}{\pi} \int \int e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} |n\rangle e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_m \frac{\alpha^{*m}}{(m!)^{\frac{1}{2}}} \langle m| d[Re(\alpha)] d[Img(\alpha)] = 1. \quad (2.2.42)$$

Através do uso de coordenadas polares no plano complexo, utilizando $\alpha = r^{i\theta}$, e escrevendo $d[Re(\alpha)]d[Img(\alpha)] = d^2\alpha = r dr d\theta$, obtemos:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} \frac{|n\rangle \langle m|}{(n!)^{\frac{1}{2}}(m!)^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{m+n+1} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta. \quad (2.2.43)$$

Utilizando o valor fornecido pela integral sobre a parte angular $2\pi\delta_{nm}$, escrevemos:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2n} 2r dr, \quad (2.2.44)$$

fazendo $\rho = r^2$; temos $d\rho = 2r dr$, e assim

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty e^{-\rho} \rho^n d\rho, \quad (2.2.45)$$

na expressão acima o valor da integral é $n!$

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_n |n\rangle \langle n| = 1. \quad (2.2.46)$$

Dessa forma mostramos a relação de completeza para os estados coerentes.

2.3 Os estados coerentes como estados quase clássicos.

Os estados coerentes também pode ser representados como estados de incerteza mínima.

Com a representação de coordenada os estados coerentes são funções gaussianas [20] e, conseqüentemente, satisfazem a relação de incerteza mínima de Heisenberg.

Para calcular o valor esperado $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$, expressaremos \hat{x} e \hat{p}_x em termos dos operadores escada

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}^- + \hat{a}^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \\ \hat{p}_x &= -i \left(\frac{m\hbar\omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}^- - \hat{a}^+) = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+). \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

Realizando as devidas substituições, encontramos

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle_\alpha &= \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \langle \alpha | \hat{a}^- + \hat{a}^+ | \alpha \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{1}{2}} [\langle \alpha | \hat{a}^- | \alpha \rangle + \langle \alpha | \hat{a}^+ | \alpha \rangle]. \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

Lembrando que $(\hat{a}^- |\alpha\rangle)^\dagger = (\langle\alpha| \hat{a}^+) = \alpha^* \langle\alpha|$, temos

$$\begin{aligned}\langle\hat{x}\rangle_\alpha &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha + \alpha^*) = \left(\frac{2\hbar}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Re}(\alpha) \\ \langle\hat{p}_x\rangle_\alpha &= \langle\alpha|\hat{p}_x|\alpha\rangle = -i\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \langle\alpha|\hat{a}^- - \hat{a}^+|\alpha\rangle \\ &= -i\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (\alpha - \alpha^*) = (2m\hbar\omega)^{\frac{1}{2}} \text{Im}g(\alpha).\end{aligned}\quad (2.3.49)$$

Os resultados seguintes são obtidos através de cálculos semelhantes

$$\begin{aligned}\langle\hat{x}^2\rangle_\alpha &= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) [1 + (\alpha + \alpha^*)^2] \\ \langle\hat{p}_x^2\rangle_\alpha &= \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right) [1 - (\alpha - \alpha^*)^2].\end{aligned}\quad (2.3.50)$$

Utilizando a definição de norma expressa por $\langle\Psi|\Psi\rangle = \int \langle\Psi|\Psi\rangle dx = \int |\Psi(x)|^2 dx$ e sabendo que operador \hat{x} é diagonal em sua própria representação, o elemento de matriz $\langle x'|\hat{x}|x\rangle$ somente não é nulo para $x = x'$, [15] temos:

$$\langle x'|\hat{x}|x\rangle = x\delta(x' - x).\quad (2.3.51)$$

E utilizando as equações anteriores escrevemos

$$\begin{aligned}(\Delta\hat{x})_\alpha &= [\langle\hat{x}^2\rangle_\alpha - \langle\hat{x}\rangle_\alpha^2]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\Delta\hat{p}_x)_\alpha &= [\langle\hat{p}_x^2\rangle_\alpha - \langle\hat{p}_x\rangle_\alpha^2]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (2.3.52)$$

Portanto tem-se a relação de incerteza

$$\Delta\hat{x} = \Delta\hat{p}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} = \Delta\hat{x}\Delta\hat{p}_x = \frac{\hbar}{2}\quad (2.3.53)$$

Observe que $\Delta\hat{x}$ e $\Delta\hat{p}_x$ não são dependentes do tempo, então o pacote de onda retém um pacote de onda mínimo por todo o tempo, assim os estados coerentes correspondem a um pacote de onda de dispersão mínima. Vale salientar que os estados de mínima dispersão que não satisfazem as condições $\Delta\hat{x}$ e $\Delta\hat{p}_x$ se chamam estados comprimidos. Tal singularidade representada graficamente pela figura 2.2, em que (a) representa o

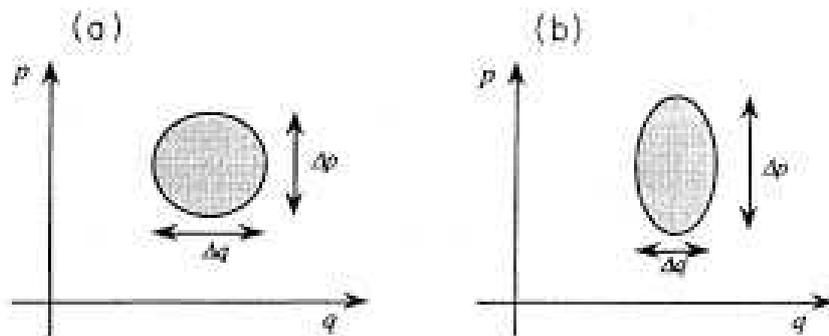


Figura 2.2: Imagem da relação de incerteza dos estados Coerentes [14].

círculo de incerteza para o estado usual do campo coerente e (b) representa a elipse de incerteza para os estados comprimidos [14].

Nieto e Simmons [24] mostraram que as três definições nem sempre levam aos mesmos estados coerentes. Estas definições só produzem estados coerentes equivalentes para o OHS.

Capítulo 3

Estados Coerentes via Álgebra de Wigner-Heisenberg

3.1 Estados coerentes de Wigner-Heisenberg

Em 1990, Jayaraman-Rodrigues[25] mostraram a utilidade do método algébrico de Wigner-Heisenberg (WH)[26, 27, 28, 29] para resolver problemas espectrais de potenciais em conexões com osciladores. Estes potenciais aparecem embutidos no setor bosônico do Hamiltoniano de Wigner [30]. A essência desta técnica de operador está numa super-realização dos elementos da álgebra WH, na qual os operadores escada do espectro do Hamiltoniano de Wigner são realizados em termos de coordenadas bosônicas e fermiônicas [30].

Neste capítulo, segundo[25], apresenta-se um formalismo para construção dos os estados coerentes para potenciais que permitem em conexão com osciladores.

Utilizando o sistema de unidades atômica ($m = c = \hbar = \omega = 1$), uma super-realização da álgebra WH é alcançada com os operadores escada mutuamente adjuntos definidos por:

$$\hat{a}^{\pm} \left(\frac{c}{2} \right) = \frac{\Sigma_1}{\sqrt{2}} \left\{ \pm \frac{d}{dx} \mp \frac{c}{2x} \Sigma_3 - x \right\} = \left\{ \hat{a}^{\mp} \left(\frac{c}{2} \right) \right\}^{\dagger}. \quad (3.1.1)$$

O Hamiltoniano de Wigner [30] de espectro não degenerado e dado por

$$\begin{aligned} H\left(\frac{c}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left[\hat{a}^-\left(\frac{c}{2}\right), \hat{a}^+\left(\frac{c}{2}\right) \right]_+ = \hat{a}^\pm\left(\frac{c}{2}\right) \hat{a}^\mp\left(\frac{c}{2}\right) \mp \frac{1}{2} \Sigma_3 (\Sigma_3 + c) = \\ &= \begin{bmatrix} H_-\left(\frac{c}{2} - 1\right) & 0 \\ 0 & H_+\left(\frac{c}{2} - 1\right) = H_-\left(\frac{c}{2}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

cujo setor bosônico é o Hamiltoniano de um potencial harmônico mais uma barreira centrífuga, a saber,

$$H_-\left(\frac{c}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{c}{2} - 1\right) \frac{c}{2} \right\}. \quad (3.1.3)$$

Facilmente pode ser verificado que a partir da relação de escada da álgebra WH,

$$\left[H\left(\frac{c}{2}\right), \hat{a}^\pm\left(\frac{c}{2}\right) \right]_- = \pm \hat{a}^\pm\left(\frac{c}{2}\right), \quad (3.1.4)$$

podemos derivar uma relação de comutação generalizada,

$$\left[\hat{a}^-\left(\frac{c}{2}\right), \hat{a}^+\left(\frac{c}{2}\right) \right]_- = 1 + c\Sigma_3. \quad (3.1.5)$$

E das propriedades das matrizes de Pauli, $\Sigma_i (i = 1, 2, 3)$, obtemos

$$\left[\Sigma_3, \hat{a}^\pm\left(\frac{c}{2}\right) \right]_+ = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\Sigma_3, H\left(\frac{c}{2}\right) \right]_- = 0. \quad (3.1.6)$$

As equações (3.1.2) e (3.1.4) juntamente com as equações derivadas (3.1.5) e (3.1.6), constituem a álgebra WH, o qual é também denominada de álgebra parabosônica com um grau de liberdade.

De (3.1.5), vemos que a ação dos operadores escada sobre os autoestados de Wigner tem o efeito de aumentar ou abaixar os quanta em uma unidade:

$$\hat{a}^\pm\left(\frac{c}{2}\right) \left| \Psi^{(n)}\left(\frac{c}{2}\right) \right\rangle = d_n^\pm \left| \Psi^{(n\pm 1)}\left(\frac{c}{2}\right) \right\rangle. \quad (3.1.7)$$

Sabendo que $\left| \Psi^{(n)}\left(\frac{c}{2}\right) \right\rangle$ são autofunções do setor bosônico do Hamiltoniano de Wigner (verificar 3.1.10). Usando (3.1.7) e a equação de autovalor para o Hamiltoniano de Wigner dada por (3.1.2), podemos facilmente calcular as constantes d_n^\pm . De fato para

o parâmetro constante, $c > 0$, da álgebra WH, obtemos:

$$\begin{aligned} |d_{n=2m}^-|^2 &= \left\langle \Psi^{(n=2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \left| \hat{a}^+ \left(\frac{c}{2} \right) \hat{a}^- \left(\frac{c}{2} \right) \right| \Psi^{(n=2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \Psi^{(n=2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \left| H \left(\frac{c}{2} \right) - \frac{1}{2} (1 + c\Sigma_3) \right| \Psi^{(n=2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle = 2m. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

De (3.1.8) obtém-se $d_{n=2m}^-$, e analogamente podemos obter as outras constantes $d_{n=2m+1}^-$, $d_{n=2m}^+$ e $d_{n=2m+1}^+$. De modo que a equação (3.1.8), torna-se

$$\begin{aligned} \hat{a}^+ \left(\frac{c}{2} \right) \left| \Psi^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle &= \sqrt{1 + c + 2m} \left| \Psi^{(2m+1)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle \\ \hat{a}^+ \left| \Psi^{(2m+1)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle &= \sqrt{2(m+1)} \left| \Psi^{(2m+2)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle \\ \hat{a}^- \left(\frac{c}{2} \right) \left| \Psi^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle &= \sqrt{2m} \left| \Psi^{(2m-1)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle \\ \hat{a}^- \left(\frac{c}{2} \right) \left| \Psi^{(2m+1)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle &= \sqrt{1 + c + 2m} \left| \Psi^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

As equações que constituem a equação (3.1.9) estão de pleno acordo com aquelas obtidas por Sharma, Mehta e Sudarshan[31] (1978). Elas foram utilizadas para deduzir os estados coerentes para-bose (ou Wigner). Note que a ação dos operadores escada (\hat{a}^+ , \hat{a}^-) sobre a base $\left\{ \left| \Psi^{(n)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle \right\}$, produz a inversão do autoespaço associado aos quanta pares ou ímpares, e vice-versa. Como esperaríamos, pois tais operadores são definidas sob multiplicação de matriz de Pauli, Σ_1 . A seguir calcularemos os estados coerentes para o setor bosônico do Hamiltoniano de Wigner, $H_- \left(\frac{c}{2} - 1 \right)$.

As autofunções e os autovalores de energia para $H_- \left(\frac{c}{2} - 1 \right)$ pertencem ao autoespaço aos quanta pares:

$$H_- \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \left| \Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle = E_-^m \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \left| \Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle, \quad (3.1.10)$$

$$E_-^m \left(\frac{c}{2} - 1 \right) = E^0 \left(\frac{c}{2} \right) 2m = \frac{1}{2}(1 + c) + 2m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.1.11)$$

$$\left| \Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle = \left| \Psi_1^{(2m)} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle \propto \left\{ \hat{B}^+ \left(\frac{c}{2} \right) \right\}^m \left| \Psi_-^{(0)} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle, \quad (3.1.12)$$

$$\left[H_- \left(\frac{c}{2} - 1 \right), \hat{B}^\pm \left(\frac{c}{2} \right) \right]_- = \pm 2\hat{B}^\pm \left(\frac{c}{2} \right). \quad (3.1.13)$$

Sendo os operadores escada, $\hat{B}^\pm \left(\frac{c}{2} \right)$, mutualmente adjuntos e realizados por operadores diferenciais de segunda ordem, obtidos a partir da relação escada da álgebra

WH:

$$\hat{B}^+ \left(\frac{c}{2} \right) = \hat{A}^+ \left(\frac{c}{2} \right) \hat{A}^+ \left(-\frac{c}{2} \right) = \left\{ \hat{B}^- \left(\frac{c}{2} \right) \right\}^\dagger, \quad (3.1.14)$$

onde

$$\hat{A}^\pm \left(\mp \frac{c}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \pm \frac{d}{dx} \mp \frac{c}{2} - x \right\} = \left(\hat{A}^\mp \left(\frac{c}{2} \right) \right)^\dagger. \quad (3.1.15)$$

Enquanto que um operador escada de Wigner aumenta ou diminui os quanta em uma unidade, um operador escada do setor bosônico desloca os quanta em duas unidades:

$$\hat{B}^\pm \left(\frac{c}{2} \right) \left| \Psi_-^m \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle = b_m^\pm \left| \Psi_-^{m\pm 1} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle = b_m^\pm \left| \Psi_-^{2m-2} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle. \quad (3.1.16)$$

De (3.1.9), obtemos os seguintes projetores:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2m(c-1+2m)} \frac{1}{2} (1 + \Sigma_3) \left| \Psi^{n=2m-2} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle \\ &= \hat{B}^- \left(\frac{c}{2} \right) \frac{1}{2} (1 + \Sigma_3) \left| \Psi^{n=2m} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(m+1)(2m+c+1)} \frac{1}{2} (1 + \Sigma_3) \left| \Psi^{n=2m+2} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle \\ &= \hat{B}^+ \left(\frac{c}{2} \right) \frac{1}{2} (1 + \Sigma_3) \left| \Psi^{n=2m} \left(\frac{c}{2} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Por conseguinte, a equação (3.1.16), torna-se:

$$\hat{B}^- \left(\frac{c}{2} \right) \left| \Psi_-^m \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle = \{2m(2m+c-1)\}^{\frac{1}{2}} \left| \Psi^{m-1} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle, \quad (3.1.19)$$

$$\hat{B}^+ \left(\frac{c}{2} \right) \left| \Psi_-^m \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle = \{2(m+1)(2m+c+1)\}^{\frac{1}{2}} \left| \Psi^{m+1} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle. \quad (3.1.20)$$

O termo de potencial no setor bosônico do Hamiltoniano de Wigner, é equivalente a um oscilador harmônico na presença de uma barreira centrífuga:

$$V_- \left(\frac{c}{2} - 1 \right) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \frac{c}{2}. \quad (3.1.21)$$

Os estados coerentes canônicos (ECC) de $V_- \left(\frac{c}{2} - 1 \right)$ são definidos por:

$$\hat{B}^- \left(\frac{c}{2} \right) \left| \xi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle = \xi \left| \xi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle, \quad (3.1.22)$$

onde o autovetor ξ pode ser complexo, pois o operador quadrático, $\hat{B}^- \left(\frac{c}{2}\right)$, não é hermitiano. Fazendo uma expansão dos ECC, $\left|\xi \left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\rangle$, na base de autoestados do auto espaço do setor bosônico,

$$\left|\xi, \frac{c}{2} - 1\right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} q_m \left|\Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\rangle, \quad (3.1.23)$$

a equação (3.1.22) torna-se:

$$\begin{aligned} \hat{B}^- \left(\frac{c}{2}\right) \left|\xi, \frac{c}{2} - 1\right\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} q_{m+1} \{2(m+1)(2m+c-1)\}^{\frac{1}{2}} \left|\Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \xi q_m \left|\Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\rangle. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Assim obtemos o seguinte conjunto de relações de recorrências:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\xi}{\sqrt{2(2+c-1)}} q_0 \\ q_2 &= \frac{\xi}{\sqrt{4(4+c-1)}} q_1 = \frac{\xi}{2\sqrt{(3+c)}} q_1 = \frac{\xi^2}{2\sqrt{2(3+c)(1+c)}} q_0 \\ q_3 &= \frac{\xi}{\sqrt{6(6+c-1)}} q_2 = \frac{\xi}{\sqrt{6(5+c)}} q_2 = \dots \\ &\vdots \\ q_m &= \xi^m \left\{ \frac{\Gamma(m + \frac{c}{2}) \Gamma(c)}{m! \Gamma(2m+c) \Gamma(\frac{c}{2})} \right\}^{\frac{1}{2}} q_0, \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

onde Γ é a função Gama ordinária. De (3.1.25) em (3.1.23) e da condição de normalização,

$$\left\langle \xi, \frac{c}{2} - 1 \left| \xi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle = 1 \quad (3.1.26)$$

obtemos os ECC normalizadas, a saber,

$$\left|\xi, \frac{c}{2} - 1\right\rangle = \{F(|\xi|^2)\}^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(m + \frac{c}{2})}{m! \Gamma(2m+c)} \right\}^{\frac{1}{2}} \xi^m \left|\Psi_-^{(m)} \left(\frac{c}{2} - 1\right)\right\rangle \quad (3.1.27)$$

onde a função $F(x)$, é dada por,

$$F(x) = \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(m + \frac{c}{2}) \Gamma(c)}{m! \Gamma(2m+c) \Gamma(\frac{c}{2})} (|x|)^m \quad (3.1.28)$$

Agora, considerando o produto escalar entre dois ECC do setor bosônico do Hamiltoniano de Wigner, obtemos:

$$\left\langle \xi, \frac{c}{2} - 1 \middle| \xi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle = \left\{ F(|\xi|^2, \frac{c}{2} - 1) F(|\xi'|^2, \frac{c}{2} - 1) \right\}^{-\frac{1}{2}} F(\xi^* \xi, \frac{c}{2} - 1) \quad (3.1.29)$$

Isto nos assegura que dois ECC associados a autovalores diferentes são não ortogonais. No entanto, podemos ainda expandir um autoestado arbitrário do espaço de Hilbert em uma base ECC, $\left\{ \left| \xi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle \right\}$. Subconjuntos desses estados são completos, e o conjunto total dos ECC não é linearmente independente, de modo que as ECC são super-completos. Esta "supercompleteza" é evidenciada pelo seguinte operador identidade,

$$\frac{1}{\pi} \int \left| \xi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle \left\langle \xi, \frac{c}{2} - 1 \middle| S(|\xi|^2) d^2 \xi = \mathbf{1}, \quad (3.1.30)$$

onde,

$$S(|\xi|^2) = \frac{\Gamma(2m + c) \Gamma(\frac{c}{2})}{\Gamma(m + \frac{c}{2}) \Gamma(c)} F(|\xi|^2) e^{-|\xi|^2} \quad (3.1.31)$$

A expansão do autoestado arbitrário, $\left| \Phi \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle$ numa base constituída pelos ECC é alcançada através do operador identidade, dado pela equação (3.1.30), a saber:

$$\left| \Phi \left(\frac{c}{2} - 1 \right) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int G(\xi^*) S(|\chi|^2) \left| \xi, \frac{c}{2} - 1 \right\rangle d^2 \xi, \quad (3.1.32)$$

onde,

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left\{ \frac{\Gamma(m + \frac{c}{2}) \Gamma(c)}{m! \Gamma(2m + c) \Gamma(\frac{c}{2})} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1.33)$$

é uma função analítica inteira em z .

Capítulo 4

Espectro do Sistema de Celka e Hussin via álgebra de WH

Celka e Hussin[32] adequaram o formalismo usual da Mecânica Quântica supersimétrica unidimensional (SUSI-1D) para sistemas tridimensionais(SUSI-3D). Na sua construção, introduziram o hamiltoniano H_{CH} associado ao superpotencial $W(r)$, envolvendo termos de potenciais mistos (spin-órbita e centrífugo). Este sistema havia sido discutido anteriormente por por Ui [33], Ui e Takedda[34] e Balantekin[35] (ver também Beckers et al.[36, 37]). No entanto, os níveis de energia como dados por Celka e Hussin seguindo o desenvolvimento de Wybourne [38] (ver também Lanik [39]) não são completos, como será mostrado aqui.

Nesses capítulo, utilizado a análise fundamentada na conexão da álgebra WH com o hamiltoniano H_{CH} , deduzimos o espectro completo e as autofunções de energia para esse oscilador. Especificamente demonstraremos, com a ajuda de uma transformação unitária sobre H_{CH} , como a supersimetria do hamiltoniano transformada, H_{CH} , pode ser efetuada em termos de operadores de carga que têm uma íntima conexão com os operadores escada da álgebra WH. Demonstraremos o desenvolvimento de grande utilidade de conexão mencionada acima de (\tilde{H}_{HC}) com um hamiltoniano de Wigner para a resolução espectral de H_{CH} . Determinaremos, de modo mais fácil e sem ambiguidade, o espectro completo e as autofunções de energia: primeiro, para o hamiltoniano de

Wigner e, por conseguinte, H_{CH} original, via a transformação unitária inversa citada acima.

4.1 Hamiltoniano de Wigner 3D com o Hamiltoniano de Celka-Hussin

O hamiltoniano H_{CH} original é definido supersimetricamente em termos de operadores de carga \tilde{Q}_\pm envolvendo o superpotencial $W(r)$ como segue:

$$W(r) = \omega r + \frac{\lambda}{r}, \quad (\lambda - \text{real e arbitrário}), \quad (4.1.1)$$

$$\tilde{Q}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{P} \mp i\vec{\nabla}W) \cdot \Sigma_\pm \vec{\sigma} \quad (4.1.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma_\pm(\vec{\sigma} \cdot \vec{P} - i\omega r\sigma_r - i\frac{\lambda}{r}\sigma_r) \quad (4.1.3)$$

$$= \pm i\Sigma_\pm \tilde{a}^\mp, \quad (4.1.4)$$

Sendo $\pm\Sigma_\pm = \Sigma_1 \pm i\Sigma_2$

$$\tilde{a}^\mp = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_r \left\{ \mp \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \pm \frac{1}{r}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) - \omega r - \frac{\lambda}{r} \right\} = (\tilde{a}^\pm)^\dagger \quad (4.1.5)$$

$$(\tilde{Q}_+)^2 = (\tilde{Q}_-)^2 = 0, \quad [H_{HC}, \tilde{Q}_\pm]_\pm = 0 \quad (4.1.6)$$

$$H_{CH} = [\tilde{Q}_+, \tilde{Q}_-]_+ = \begin{pmatrix} \tilde{a}^- \tilde{a}^+ & 0 \\ 0 & \tilde{a}^+ \tilde{a}^- \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

$$H_{CH} = \begin{pmatrix} H_{HC}^+(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \lambda; \omega) & 0 \\ 0 & H_{HC}^-(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \lambda; \omega) \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

onde

$$\begin{aligned} H_{HC}^+(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \lambda; \omega) = & \\ & + \frac{1}{2} \left\{ - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + r^2 \omega^2 + \frac{1}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \lambda) (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \lambda + 1) \right\} \\ & + \omega (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{2} + \lambda) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\begin{aligned}
H_{HC}^- (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \lambda; \omega) = & \\
+ \frac{1}{2} \left\{ - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + r^2 \omega^2 + \frac{1}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \lambda) (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - \lambda + 1) \right\} & \\
- \omega (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{2} - \lambda) & \quad (4.1.10)
\end{aligned}$$

É útil ressaltar que, $\vec{\sigma} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ e $\sum_i (i = 1, 2, 3)$ são dois conjuntos mutuamente comutantes de matrizes de Pauli, representando, respectivamente, os graus de liberdade de spin $-\frac{1}{2}$ e das coordenadas fermiônicas da teoria. Agora, observamos que, em virtude de

$$[\sigma_r, \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1]_+ = 0 \quad (4.1.11)$$

a transformação unitária

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_r \end{pmatrix} \quad (4.1.12)$$

sobre H_{HC} de (4.1.7) nos dá

$$H_{CH} \rightarrow U H_{CH} U^{-1} = \tilde{H}_{CH} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_{HC}^+ & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{HC}^- \end{pmatrix} \quad (4.1.13)$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{H}_{HC}^+(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \lambda; \omega) & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{HC}^+(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \lambda + 1; \omega) - 2\omega \end{pmatrix}, \quad (4.1.14)$$

$$= H_W(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \lambda + 1) + \omega \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \lambda + \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \lambda + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.1.15)$$

onde o hamiltoniano de Wigner, H_W , é definido por uma soma direta, com $\lambda = |\lambda| \geq 0$, dada por

$$H_W(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) = \begin{pmatrix} H_{W(+)}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + |\lambda|) & 0 \\ 0 & H_{W(+)}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + |\lambda| + \mathbf{1}) \end{pmatrix} \quad (4.1.16)$$

onde

$$\begin{aligned}
H_{W(+)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + |\lambda|) & \\
= \frac{1}{2} \left\{ - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)^2 + \omega^2 r^2 + \frac{1}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + |\lambda|) (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + |\lambda| + \mathbf{1}) \right\} & \quad (4.1.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_{W(+)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + |\lambda| + 1) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)^2 + \omega^2 r^2 + \frac{1}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + |\lambda| + \mathbf{1}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + |\lambda| + 2) \right\} \quad (4.1.18)
\end{aligned}$$

Note que é suficiente considerar somente λ positivo, isto é, $\lambda = |\lambda| \geq 0$ como temos assumido em (4.1.16). Para o caso de $\lambda = -|\lambda|$, o tratamento segue-se de modo análogo a partir da conexão unitária

$$\begin{aligned}
& \sigma_r \quad H_W(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1 + |\lambda|) \sigma_r \\
&= \begin{pmatrix} H_{W+}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - |\lambda| + \mathbf{1}) & 0 \\ 0 & H_{W+}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - |\lambda|) \end{pmatrix} \\
&= \Sigma_1 \begin{pmatrix} H_{W+}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - |\lambda|) \sigma_r & 0 \\ 0 & H_{W+}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - |\lambda| + \mathbf{1}) \end{pmatrix} \Sigma_1 \\
&+ \Sigma_1 H_W(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - |\lambda| + \mathbf{1}) \Sigma_1 \quad (4.1.19)
\end{aligned}$$

As super-realizações dos operadores escada mutuamente adjuntos, \hat{a}^\pm , para o hamiltoniano de Wigner $H_W(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - |\lambda| + \mathbf{1})$ de (4.1.16) e (4.1.17) são dadas por:

$$\hat{a}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \pm \Sigma_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \right) \mp \frac{1}{r} \Sigma_1 \Sigma_3 (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} - |\lambda| + \mathbf{1}) - \Sigma_1 \omega r \right\} = (\hat{a}^\mp)^\dagger \quad (4.1.20)$$

os quais satisfazem todas as relações algébricas da álgebra WH:

$$H_W = \frac{1}{2} [\hat{a}^-, \hat{a}^+]_+ \quad (4.1.21)$$

$$= \hat{a}^+ \hat{a}^- + \frac{\omega}{2} \left\{ 1 + 2(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \Sigma_3 \right\} \quad (4.1.22)$$

$$= \hat{a}^- \hat{a}^+ - \frac{\omega}{2} \left\{ 1 + 2(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \Sigma_3 \right\}, \quad (4.1.23)$$

$$[H_W, \hat{a}^\mp]_- = \mp \omega \hat{a}^\mp, \quad (4.1.24)$$

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- = \omega [1 + 2(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \Sigma_3], \quad (4.1.25)$$

$$[\Sigma_3, \hat{a}^\mp]_+ = 0 \rightarrow [\Sigma_3, H_W]_- = 0 \quad (4.1.26)$$

Note que o operador $(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|)$ comuta com todos os elementos fundamentais, \hat{a}^\pm e H_W , da álgebra WH e por isso será substituído por seus autovalores $(l + 1 + |\lambda|)$ e $(-l - 1 + |\lambda|)$, quando atuamos nos respectivos auto-espacos de suas auto-funções $y_+(\theta, \varphi)$ e $y_-(\theta, \varphi)$. Tais autofunções são as mesmas (Harmônicos esféricos com spin) definidas por Jayaraman e Rodrigues [25], com sendo o número quântico de momento angular orbital. Utilizando a equação 4.1.25, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma_3}{2} [\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- &= \omega \left\{ \frac{\Sigma_3}{2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda| \right\} \\ &= \omega \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \frac{3}{2} + |\lambda| & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \frac{1}{2} + |\lambda| \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Como esta relação substituída em (4.1.15), juntamente como (4.1.21) e (4.1.25) obtemos, para \tilde{H}_{CH} , a seguinte expressão (Note que $\lambda = |\lambda| \geq 0$):

$$\tilde{H}_{CH} = UH_{CH}U^\dagger = H_W(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) + \frac{\Sigma_3}{2}[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- \quad (4.1.28)$$

$$= \frac{1}{2}[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_+ + \frac{\Sigma_3}{2}[\hat{a}^-, \hat{a}^+]_- \quad (4.1.29)$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \Sigma_3) \hat{a}^-, \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \Sigma_3) \hat{a}^+ \right]_+ \quad (4.1.30)$$

$$= [\hat{Q}_-, \hat{Q}_+]_+, \quad (4.1.31)$$

em que os operadores de carga mutualmente adjuntos adquirem novas expressões nesta representação transformada.

$$\hat{Q}_- = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \Sigma_3) \hat{a}^-, \quad \hat{Q}_+ = (\hat{Q}_-)^\dagger = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \Sigma_3) \hat{a}^+. \quad (4.1.32)$$

O conteúdo das equações (4.1.28) e (4.1.32) completa a nossa afirmação sobre a conexão entre o hamiltoniano supersimétrico de Celka-Hussin, H_{CH} , e o hamiltoniano de Wigner associado.

Celka e Hussin [32] obtiveram os seguintes níveis de energia para H_{CH}^+ e H_{CH}^- de (4.1.8), que emergem adotando-se o desenvolvimento de Wybourne [38], Lanik [39]:

$$(E_{CH}^+)^m_{l;j=l+\frac{1}{2}} = 2\omega(m + j + \lambda + 1), \quad (4.1.33)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_{CH}^-)^m)_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}} = 2\omega(m + j + \lambda + 1), \quad (4.1.34)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_{CH}^+)^m)_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}} = 2\omega(m + 1), \quad (4.1.35)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_{CH}^-)^m)_{l; j=l+\frac{1}{2}} = 2\omega m, \quad (4.1.36)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$.

Mostraremos na próxima seção, que o espectro de energia acima de H_{CH} dado Celka e Hussin [32] não está completo. Determinamos, de modo explícito, o espectro de energia completo deste hamiltoniano, baseado em sua conexão com o hamiltoniano de Wigner via equações (4.1.14), (4.1.27) e (4.1.28).

4.2 O espectro de Energia Completo de H_{CH} a partir da conexão com o Hamiltoniano-Wigner

A resolução do espectro de H_W , equação (4.1.16), é realizada seguindo os passos de Jayaraman e Rodrigues para o caso do oscilador isotrópico 3D [25], com a simples substituição de $\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1 + |\lambda|$ por $\pm(l + 1) + |\lambda|$, nos auto-espacos $y_{\pm}(\theta, \varphi)$ deste operador, juntamente com o requerimento de normalizabilidade para determinarmos a função de onda do estado fundamental e a subsequente construção das funções de onda dos estados excitados $[\Psi^{(r)}]_{l; j=l+\frac{1}{2}}^n; [\Psi_W^{(r)}]_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^n$ pela ação do operador escada dado em (4.1.24) e, assim, obtendo o espectro de energia completo, $[E_W]_{l; j=l+\frac{1}{2}}^{(m)}; [E_W]_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(m)}$. As funções de onda desses estados excitados pertencem ao caso(i) (caso(ii)), abaixo com $y_+(\theta, \varphi)(y_-(\theta, \varphi))$ na parte angular-spin. Como a

análise deste problema de autovalor é semelhante aquela de exposição detalhada apresentada por Jayaraman e Rodrigues 1990 [25] para o caso do oscilador isotrópico 3D, daremos aqui apenas os resultados finais:

Caso(i)

$$[\psi_W(r, \theta, \varphi)]_{l;j=l+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} R_{1+}^n(r) \\ R_{2+}^n(r) \end{pmatrix} y_+(\theta, \varphi), \quad (4.2.37)$$

onde foi utilizada a associação

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda| \rightarrow l + 1 + \lambda, \quad (4.2.38)$$

$$[\psi_W(r, \theta, \varphi)]_{l;j=l+\frac{1}{2}}^n \propto r^{l+\lambda} \exp\left(-\frac{\omega}{2}r^2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_+(\theta, \varphi), \quad (4.2.39)$$

para Σ_3 -paridade par,

$$(E_W)_{l;j=l+\frac{1}{2}}^{(0)} = \omega\left(l + |\lambda| + \frac{3}{2}\right) = \omega(j + |\lambda| + 1), \quad (4.2.40)$$

onde $(j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_W)_{l;j=l+\frac{1}{2}}^{(n)} = (E_W)_{l;j=l+\frac{1}{2}}^{(0)} + n\omega = \omega(j + |\lambda| + 1 + n), \quad (4.2.41)$$

onde $(n = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_W)_{l;j=l+\frac{1}{2}}^{(2m)} = \omega(j + |\lambda| + 1 + 2m), \quad (4.2.42)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_W)_{l;j=l+\frac{1}{2}}^{(2m+1)} = \omega(j + |\lambda| + 2 + 2m), \quad (4.2.43)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$\begin{aligned} [\psi_W(r, \vartheta, \varphi)]_{l;j=l+\frac{1}{2}}^n &\propto (\hat{a}^+)^n [\psi_W]_{l;j=l+\frac{1}{2}}^{(0)} \\ &\propto r^{l+|\lambda|} \exp\left(-\frac{\omega}{2}\omega r^2\right) L_m^{(l+|\lambda|+\frac{1}{2})}(r^2) y_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

para $n = 2m$, Σ_3 -paridade par,

$$\begin{aligned} [\psi_W(r, \vartheta, \varphi)]_{l;j=l+\frac{1}{2}}^n &\propto (a^+)^n [\psi_W]_{l;j=l+\frac{1}{2}}^{(0)} \\ &\propto r^{l+|\lambda|+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega r^2\right) L_m^{(l+|\lambda|+\frac{3}{2})}(r^2) y_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

para $n=2m$, Σ_3 -paridade ímpar.

Caso(ii)

$$[\psi_W(r, \vartheta, \varphi)]_{l+1;j=(l+1)+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} R_{1-}^n(r) \\ R_{2-}^n(r) \end{pmatrix} y_-(\theta, \varphi), \quad (4.2.46)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda| \rightarrow -(l+1) + \lambda, \quad (4.2.47)$$

Subcaso(ii,l)

$$|\lambda| \geq l + 2 = j + \frac{3}{2} \quad (4.2.48)$$

$$[\Psi_W(r, \vartheta, \varphi)]_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^n \propto \begin{pmatrix} r^{\lambda-l-2} \exp(-\frac{\omega}{2}r^2) \\ 0 \end{pmatrix} y_-(\theta, \varphi), \quad (4.2.49)$$

para paridade Σ_3 -paridade par,

$$(E_W)_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(0)} = \omega(|\lambda| - l - 2 + \frac{3}{2}) = \omega(|\lambda| - j), \quad (4.2.50)$$

onde $(j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_W)_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(n)} = \omega(|\lambda| - j) + n\omega, \quad (4.2.51)$$

onde $(n = 0, 1, 2, \dots, j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_W)_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(2m)} = \omega\{(|\lambda| - j) + 2m\}, \quad (4.2.52)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots, j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_W)_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(2m+1)} = \omega\{(|\lambda| - j) + 2m + 1\}, \quad (4.2.53)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots, j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$

$$\begin{aligned} & [\psi_W(r, \theta, \varphi)]_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^n \propto (\hat{a}^+)^n [\psi_W(r, \theta, \varphi)]_{l; j=l+\frac{1}{2}}^{(0)} \\ & \propto r^{|\lambda|-l-2} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega r^2\right) L_m^{(|\lambda|-l-\frac{3}{2})}(r^2) y_-(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

para $n = 2m$, Σ_3 -paridade par,

$$\begin{aligned} & [\psi_W(r, \vartheta, \varphi)]_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^n \propto (\hat{a}^+)^n [\psi_W(r, \vartheta, \varphi)]_{l; j=l+\frac{1}{2}}^{(0)} \\ & \propto r^{|\lambda|-l-2} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega r^2\right) L_m^{(|\lambda|-l-\frac{1}{2})}(r^2) y_-(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

para $n = 2m + 1$, Σ_3 -paridade ímpar.

Subcaso (ii,2): $|\lambda| < l = j - \frac{1}{2}$

$$[\Psi_W(r, \vartheta, \varphi)]_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^n \propto \begin{pmatrix} 0 \\ r^{\lambda-l} \exp(-\frac{\omega}{2}r^2) \end{pmatrix} y_-(\vartheta, \varphi), \quad (4.2.56)$$

para Σ_3 -paridade ímpar,

$$(E_W)_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(0)} = \omega(l + \frac{3}{2}|\lambda| + 1) = \omega(j - |\lambda| + 1), \quad (4.2.57)$$

onde $(j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_W)_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(n)} = \omega(j - |\lambda| + 1 + n), \quad (4.2.58)$$

onde $(n = 0, 1, 2, \dots, j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_W)_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(2m)} = \omega(j - |\lambda| + 1 + 2m), \quad (4.2.59)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots, j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$(E_W)_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(2m+1)} = \omega(j - |\lambda| + 2 + 2m), \quad (4.2.60)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots, j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$

$$\begin{aligned} & [\psi_W(r, \theta, \varphi)]_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^n \propto (\hat{a}^+)^n [\psi_W(r, \theta, \varphi)]_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(0)} \\ & \propto r^{l-|\lambda|-l} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega r^2\right) L_m^{(l-|\lambda|+\frac{3}{2})}(r^2) y_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.61)$$

para $n = 2m+1$, Σ_3 -paridade par,

$$[\psi_W(r, \theta, \varphi)]_{l+1; j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(n)} \propto r^{l-|\lambda|} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega r^2\right) L_m^{(l-|\lambda|+\frac{1}{2})}(r^2) y_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.62)$$

para $n = 2m$, Σ_3 -paridade ímpar.

Agora, utilizando as equações (4.1.14), (4.1.15) e (4.1.27) que conectam \tilde{H}_{CH} e H_W , é obviamente visto que as autofunções dos estados excitados de \hat{H}_{CH} são idênticas aquelas de H_W , por causa das comutatividades mútuas de Σ_3 , $(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1)$ e H . Então, substituindo na equação (4.1.15) [considerada juntamente com (4.1.27)] o espectro de energia $[E_W]^n$ para H_W com as substituições, $(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) \rightarrow l + 1$, correspondentes aos casos apropriados caso(i) e os subcasos(ii.1,2), discutidos acima com a devida atenção para as paridades - Σ_3 das funções de onda de Wigner dos estados fundamentais, e as correspondências corretas dos n -ésimos estados excitados dos setores de hamiltonianos e \tilde{H}_{CH}^- com os quanta pares e ímpares dos estados excitados de H_W , obtemos de modo direto os espectros de \tilde{E}_{CH}^+ e \tilde{E}_{CH}^- como dados por:

Caso (i):

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{CH}^+] &= (E_W)_{l; j=l+\frac{1}{2}}^{(n=2m)} + \omega \left\{ \frac{\Sigma_3}{2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda| \right\} |_{\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} \rightarrow l+1, \Sigma_3 \rightarrow 1} \\ &= \omega(j + |\lambda| + 1 + 2m) + \omega \left(\frac{1}{2} + l + 1 + |\lambda| \right) \\ &= 2\omega(j + 1 + |\lambda| + m), \end{aligned} \quad (4.2.63)$$

onde $(m = 0, 1, 2 \dots ; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$,

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_{CH}^-]^{(m)} &= (E_W)_{l; j=l+\frac{1}{2}}^{(n=2m+1)} + \omega \left\{ \frac{\Sigma_3}{2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda| \right\} |_{\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} \rightarrow l+1, \Sigma_3 \rightarrow -1} \\ &= \omega(j + |\lambda| + 2m + 1) + \omega \left(-\frac{1}{2} + l + 1 + |\lambda| \right) \\ &= 2\omega(j + 1 + |\lambda| + m), \end{aligned} \quad (4.2.64)$$

Subcaso (ii.1): $|\lambda| \geq l + 2$

$$\begin{aligned}
[\tilde{E}_{CH}^+]_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(m)} &= (E_W)_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(n=2m)} + \omega \left\{ \frac{\Sigma_3}{2} + \vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda| \right\}_{\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} \rightarrow -(l+1), \Sigma_3 \rightarrow 1} \\
&= \omega(|\lambda| - j + 2m) + \omega \left(\frac{1}{2} - l - 1 + |\lambda| \right) \\
&= 2\omega(|\lambda| - j + m),
\end{aligned} \tag{4.2.65}$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots)$,

$$\begin{aligned}
[\tilde{E}_{CH}^-]_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(m)} &= (E_W)_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{n=2m+1} + \omega \left\{ \frac{\Sigma_3}{2} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1}) + |\lambda| \right\}_{\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} \rightarrow -(l+1), \Sigma_3 \rightarrow -1} \\
&= \omega(|\lambda| - j + 2m + 1) + \omega \left(-\frac{1}{2} + l - 1 + |\lambda| \right) \\
&= 2\omega(|\lambda| - j + m)
\end{aligned} \tag{4.2.66}$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots)$,

Subcaso (ii.2): $|\lambda| \leq l = j - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
[\tilde{E}_{CH}^+]_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(m)} &= (E_W)_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(n=2m+1)} + \omega \left\{ \frac{\Sigma_3}{2} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1}) + |\lambda| \right\}_{\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} \rightarrow -(l+1), \Sigma_3 \rightarrow 1} \\
&= \omega(j - |\lambda| + 2 + 2m) + \omega \left(-\frac{1}{2} - l - 1 - |\lambda| \right) \\
&= 2\omega(m + 1),
\end{aligned} \tag{4.2.67}$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots)$,

$$\begin{aligned}
[\tilde{E}_{CH}^-]_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(m)} &= (E_W)_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(n=2m)} + \omega \left\{ \frac{\Sigma_3}{2} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1}) + |\lambda| \right\}_{\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} \rightarrow -(l+1), \Sigma_3 \rightarrow 1} \\
&= \omega(j - |\lambda| + 2m) + \omega \left(-\frac{1}{2} - l - 1 - |\lambda| \right) \\
&= 2\omega m,
\end{aligned} \tag{4.2.68}$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots)$,

É óbvio que o espectro de autovalores do hamiltoniano original H_{CH} , equação (4.1.7), é o mesmo de \tilde{H}_{CH} , pois esses dois hamiltonianos estão relacionados pela transformação unitária U , equações (4.1.12-4.1.15). Entretanto, o operador σ_r envolvido em U afeta as partes angulares $y_{\pm}(\theta, \varphi)$, convertendo-as em $y_{\mp}(\theta, \varphi)$ (ver equações) 4.1.14

e 4.1.15, obtemos as igualdades (suprimindo os argumentos):

$$H_{CH}^+ = \tilde{H}_{CH}^+, \quad H_{CH}^- = \sigma_r \tilde{H}_{CH}^- \sigma_r \quad (4.2.69)$$

Portanto as autofunções de H_{CH}^+ são as mesmas de \tilde{H}_{CH}^+ , as quais, por sua vez, são as mesmas do setor bosônico de H_W (como já foram justificadas na discussão abaixo da equação (4.2.45) e são, assim, dadas pelas equações (4.2.59) e (4.2.60) pertencente ao caso (i), equação (4.2.55) pertencente ao subcaso (ii.1) e a equação (4.2.61) pertencente ao subcaso (ii.2) sem colocar a parte espinorial fermiônica, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. No caso de H_{CH}^- , suas autofunções, devido a relação (4.2.69), são dadas por aquelas de \tilde{H}_{CH}^- ou igual por aqueles do setor fermiônico do H_W com diferença de que y_{\pm} das mesmas serão substituídas por y_{\mp} e omitindo-se a parte espinorial fermiônica $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dessas autofunções: a saber, pela equação (4.2.45) com $y_+ \rightarrow y_-$ para o caso (i) e pela equação (4.2.55)(4.2.62) com $y_- \rightarrow y_+$, para o subcaso (ii.1)(ii.2).

Sobretudo, as mudanças de $y_{\mp} \rightarrow y_{\pm}$, na construção das autofunções de H_{CH}^- , partindo das mesmas de \tilde{H}_{CH}^- , nos levam as mudanças correspondentes nas qualificações dos subscritos em $[E_{CH}^-]^{(m)}$ extraídas dos respectivos níveis $[\tilde{E}_{CH}^-]^{(m)}$ de (4.2.64), (4.2.65) e (4.2.66), enquanto $[E_{CH}^+]^{(m)}$ mantém os mesmos subscritos de $[\tilde{E}_{CH}^+]^{(m)}$ de (4.2.63), (4.2.65) e (4.2.67). Com essas observações, os espectros de energia completos E_{CH}^+ e E_{CH}^- , dos hamiltonianos dos respectivos setores, H_{CH}^+ e H_{CH}^- , de H_{CH} de (4.1.7) são determinadas por.

Caso(i):

$$[E_{CH}^+]_{l;j=l+\frac{1}{2}}^{(m)} = 2\omega(m + j + |\lambda| + 1), \quad (4.2.70)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$;

$$[E_{CH}^-]_{l;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(m)} = 2\omega(|j| + j + m + 1), \quad (4.2.71)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots; j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$.

Caso(ii):

Subcaso(ii.2) $|\lambda| \leq l = j - \frac{1}{2}$

$$[E_{CH}^+]_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(m)} = 2\omega(m+1), \quad (4.2.72)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots)$;

$$[E_{CH}^-]_{l+1;j=l+\frac{1}{2}}^{(m)} = 2\omega m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.2.73)$$

Subcaso(ii.1): $|\lambda| \leq l + 2 = j + \frac{3}{2}$

$$[E_{CH}^+]_{l+1;j=(l+1)-\frac{1}{2}}^{(m)} = 2\omega(|\lambda| - j + m), \quad (4.2.74)$$

$$[E^-]_{l;j=l+\frac{1}{2}}^{(m)} = 2\omega(|j| - |j| + m), \quad (4.2.75)$$

onde $(m = 0, 1, 2, \dots)$;

Comparando o espectro de energia dado pelas equações (4.2.70-4.2.75) para H_{CH} , onde $\lambda = |\lambda| \geq 0$, com aquele determinado por Celka e Hussin e dado pelas equações (4.1.33-4.1.36), é claro que a parte do espectro de energia pertencente ao subcaso (ii-1) acima, dado pelas equações (4.2.74) e (4.2.75) não está contido nas equações (4.1.33-4.1.36). Isto completa a prova da afirmação feita por nós sobre o aspecto incompleto do espectro de energia do modelo hamiltoniano supersimétrico investigado por H_{CH} dado por Celka e Hussin [32].

Do espectro, completo (4.2.70-4.2.75), do modelo Hamiltoniano SUSI 3D, H_{CH} de (4.1.7), determinado por nós, juntamente com os estudos dos aspectos SUSI quebrada e não-quebrada, é fácil concluir que somente para o subcaso (ii.2) existem soluções singletas de energia nula para o estado fundamental. A energia dupla positiva, associadas aos estados de momento angular j na combinação $j = l + \frac{1}{2}$ do hamiltoniano do setor fermiônico e, portanto, a SUSI do modelo hamiltoniano H_{CH} em 3D, não é quebrada para esses estados pertencentes ao subcaso (ii.2). Em contraste, a SUSI deste modelo está quebrada nos demais casos, caso(i) subcaso (ii-1), os quais não contém soluções singletas de energia zero associadas aos estados fundamentais com j fixo.

Note que para o caso especial $|\lambda| = 0$, o subcaso (ii.1) não existe devido ao fato de que a condição $0 \geq l + 2$ não pode ser satisfeita para qualquer $l = 0, 1, 2, \dots$. Para este caso, o espectro de energia é dado pelas equações (4.2.70-4.2.73) colocando-se $|\lambda| = 0$ e está de acordo com os resultados obtidos por Ui e Takeda [34], Ui [33] e também por Balantekin [35], os quais consideram somente o modelo hamiltoniano SUSI do oscilador harmônico e isotrópico em 3D. Para o caso $|\lambda| = \frac{1}{2}$, o subcaso (ii-1) também não existe pela mesma razão anterior, isto é, a condição $\frac{1}{2} \geq l + 2$ não pode ser satisfeita para qualquer $l = 0, 1, 2, \dots$. Nesse caso, obviamente, nosso espectro dado pelas equações (4.2.70-4.2.73), corresponde ao segundo modelo hamiltoniano SUSI 3D do Balantekin [35], porém este autor considerou somente o espectro pertencente ao caso (i), equações (4.2.61-4.2.62), nos seus estudos deste modelo. [Note-se também que o Balantekin [35] considerou o caso $|\lambda| = \frac{1}{2}$. Mas, a correspondência dessas duas discussões é facilmente estabelecida via a transformação unitária (4.1.12-4.1.15), conectando as duas descrições com sinais opostos de λ .]

Capítulo 5

Estados Coerentes Canônico para o oscilador SUSY de Celka-Hussin

Neste capítulo utilizaremos a álgebra de Wigner-Heisenberg em conexão com o oscilador de Celka- Hussin para construirmos os estados coerentes para o oscilador SUSY de Celka-Hussin.

Sabendo que autofunções do operador matricial $(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|)$ são os harmônicos esféricos de spin. Pode-se mostrar que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|)$ comuta com todos os elementos da álgebra WH 3D, associada ao oscilador generalizado de Celka-Hussin. Então, seus autovalores vão rotular as representações irredutíveis que varrem os auto-espacos de $H(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|)$, para um valor fixo do momento angular total, $j = l + \frac{1}{2} = (l+1) - \frac{1}{2}$.

Os autovetores da partícula de Wigner no auto-espaco apropriado, com a associação

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \rightarrow (l + 1 + |\lambda|), \quad (5.0.1)$$

formam um conjunto completo associado aos quanta pares ou ímpares, satisfazendo a seguinte equação de autovalor:

$$H(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \left| nl \frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle = E^n(l + 1) \left| nl \frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle. \quad (5.0.2)$$

Neste auto-espço da álgebra WH, obtemos as seguintes realizações para o operador de aniquilação dos quanta do super-oscilador de Wigner:

$$\begin{aligned} \hat{a}^- (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \left| (2m+1)l\frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle &= \\ &= \{2(m+j+1+|\lambda|)\}^{\frac{1}{2}} \left| (2m)l\frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.0.3)$$

$$\hat{a}^- (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \left| (2m)l\frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle = \{2m\}^{\frac{1}{2}} \left| (2m-1)l\frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle, \quad (5.0.4)$$

A projeção do comutador

$$\left[H(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|), \left\{ a^\pm(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \right\}^2 \right]_- = \pm 2\hat{a}^\pm, \quad (5.0.5)$$

no auto-espço associado aos quanta pares, nos dá os operadores escada esféricos do oscilador generalizado isotrópico 3D de spin $\frac{1}{2}$, $\hat{B}^\pm(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|)$, o qual torna-se

$$\begin{aligned} \hat{B}^+(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) &= \hat{A}^+(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|)\hat{A}^+[-(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|)] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)^2 - 2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L})(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) - 3 \right\}, \end{aligned} \quad (5.0.6)$$

onde

$$\hat{A}^\pm \left[\mp(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \pm \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \mp \frac{1}{r}(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) - r \right\}. \quad (5.0.7)$$

É óbvio que $\hat{B}^-(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) = \left\{ \hat{B}^+(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \right\}^\dagger$.

A partir destas equações vemos que os operadores quadráticos, $\hat{B}^\pm(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|)$, mutuamente adjuntos são os operadores escada do oscilador harmônico isotrópico 3D, pois eles satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$\left[\hat{H}_-(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|), \hat{B}^\pm(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \right]_- = \pm 2\hat{B}^\pm(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|). \quad (5.0.8)$$

Logo, quando estes operadores atuarem no auto-espço gerado pelos quanta pares, obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{B}^- (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \left| ml\frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle &= \\ &= 2 \{m(m+j+|\lambda|)\}^{\frac{1}{2}} \left| (m-1)l\frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.0.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}^+ (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) \left| ml \frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle = \\ = 2 \{(m+1)(m+j+1+|\lambda|)\}^{\frac{1}{2}} \left| (m+1)l \frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.0.10)$$

Propriedades semelhantes se verificam também no auto-espaço pertencente aos quanta ímpares.

Os auto-estados esféricos do operador de aniquilação, $\hat{B}^-(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|)$, estão associados ao autovalor complexo, τ . Eles são exatamente os ECC do oscilador generalizado harmônico isotrópico 3D de spin $\frac{1}{2}$. Em plena analogia com a abordagem do oscilador harmônico, obtemos o ECC normalizados como uma expansão na base ortonormal, $\{|ml \frac{1}{2}; \lambda, jm_j\rangle\}$, ou seja, a partir da equação de autovalor

$$B^-(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \mathbf{1} + |\lambda|) |\tau, j\rangle = \tau |\tau, j\rangle \quad (5.0.11)$$

obtemos

$$|\tau, j\rangle = \left\{ \frac{2^j}{|\tau|} I_j(|\tau|) \right\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{\tau}{2})^m}{m! \Gamma(m+j+1+|\lambda|)^{\frac{1}{2}}} \left| ml \frac{1}{2}; \lambda, jm_j \right\rangle, \quad (5.0.12)$$

onde I_j são as funções de Bessel modificadas. A propriedade de não ortogonalidade é evidenciada abaixo pelo o produto escalar entre dois ECC associados a autovalores distintos,

$$\langle |\beta, j| \tau, j \rangle = \{g(|\beta|) g(|\tau|)\}^{-\frac{1}{2}} g \left[(|\tau^* \beta|)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (5.0.13)$$

onde

$$g(|\tau|) \Gamma(j+1+|\lambda|) {}_0F_1(j+1+|\lambda|; \frac{|\tau|^2}{2}), \quad (5.0.14)$$

onde ${}_0F_1$ são as funções hipergeométricas confluentes. Estes estados coerentes canônicos esféricos são "supercompletos". E vale a pena salientar que este prefixo de super não tem nada haver com os estados supercoerentes investigados por Jayaraman e Rodrigues [40], empregado nesta seção, se refere ao fato de que podemos expandir quaisquer estados em termos de uma base de qualquer estado, inclusive de uma base constituída deles mesmos.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, utilizamos a álgebra de WH para determinamos os estados coerentes para o H_W , posteriormente resolvemos completamente as autofunções e os autovalores de energia do modelo hamiltoniano supersimétrico (SUSI) 3D, baseando-se na sua conexão com o sistema de Wigner associado. Ressaltamos a grande utilidade da álgebra WH como uma técnica de operador para resolução espectral. A grande vantagem desta técnica algébrica desenvolvida aqui, em que definimos os operadores escada apropriados para o sistema em consideração, é que a expressão para a energia do sistema é dada sem ambiguidade e não envolve raiz quadrada em nenhum estágio. Em contraste, a expressão $E^{(m)} = 2m + 1 + \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 + 2m}$, ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) usada por Celka e Hussin [32], para os autovalores da energia de um sistema de oscilador radial em 3D, sujeito ao potencial não harmônico, $\frac{a}{r^2}$, $a > 0$, seguindo o desenvolvimento de Wybourne [38] (ver também Lanik [39]), envolve uma raiz quadrada; precisamente, é no tratamento do caso (ii), (capítulo 4) que os autores Celka e Hussin têm errado, pois para esse caso eles não consideraram devidamente as duas possibilidades de sinais suportados pelas auto-soluções de energia correspondentes que satisfazem as condições de admissibilidade. E, por isto, chegaram somente a uma parte pertencente ao subcaso(ii.2), do espectro omitindo totalmente a outra parte pertencente ao subcaso (ii.1), do espectro.

Com a obtenção completa do espectro de H_{CH} , nossa discussão sobre os aspectos da quebra de SUSI deste modelo 3D também fica completa. Da nossa análise, elucidamos a supersimetria deste modelo em termos de novos operadores de carga que tem o mesmo tipo de conexão íntima com os novos operadores escada da álgebra WH, discutido no capítulo 3 para os osciladores H_W . Assim temos desenvolvido um procedimento uniforme estabelecendo a conexão da álgebra SUSI e da álgebra WH para sistemas de osciladores. Acreditamos que uma análise tão detalhada e uniforme como foi feita por nós estabelecendo tal conexão ainda não foi abordada na literatura.

Para finalizar, no capítulo 5, calculamos sem grandes dificuldades os estados coerentes para o H_{CH} , utilizando a conexão da álgebra de WH com a Oscilador 3D de Celka-Hussin.

Bibliografia

- [1] Glauber R. G., Coherent and incoherent states of the radiation, *Phys. Rev.*, 1963, V. 131, N 6, 2766-2788.
- [2] Luiz Davidovich, Introdução à Eletrônica Quântica, II Escola de Verão Jorge André Swieca, seção de Óptica Quântica e Óptica Não-Linear, realizada em São Carlos-SP, 1990.
- [3] Schrödinger E., Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, *Naturwissenschaften*, 1935, V.23, 807-812, 823-828, 844-949; reprintend in English in *Quantum Theory and Measurement*, Editors J.A. Wheeler and W.H. Zurek, Princeton, 1983.
- [4] J. R. Klauder, *Ann. Phys.* 11, 123, 1960.
- [5] Glauber, R. J., 1963a, *Phys. Rev. Lett.* 10, 277.
- [6] Glauber, R. J., 1963b, *Phys. Rev.* 130, 2529.
- [7] Sudarshan, E. C. G., 1963, *Phys. Rev. Lett.* 10, 277.
- [8] Klauder, J. R., 1963, *J. Math. Phys.* 4, 1055 (Part I); 1058 (Part II).
- [9] Perelomov A.M., Coherent states for arbitrary Lie groups, *Commun. Math. Phys.*, 1972, V.26, 222-236.
- [10] Gilmore, R., 1972, *Ann. Phys. (NY)* 74, 391.
- [11] Gilmore, R., 1974a, *Rev. Mev. de Fisica* 23, 142.

- [12] Gilmore, R., 1974b, Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications (Wiley, New York).
- [13] Gilmore, R., 1974c, J. Math. Phys. 15, 2090.
- [14] Zhang, W.M., Feng, D.H., Gilmore, R.: Coherent states, theory and some applications. Rev. Mod. Phys. 62, 867 –927, 1990.
- [15] W. W. Filho, Mecânica Quântica. UFG, Goiás 2008.
- [16] R. L. Liboff, Introductory Quantum Mechanics, Addison Wesley, 2nd edition, 1992.
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshits; Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory (3rd ed.). London: Pergamon, 1977. ISBN 0-08-020940-8 Vol. 3 of the Course of Theoretical Physics.
- [18] W. H. Louisell. Quantum Statistical Properties of radiation. John Wiley. New York, 1973.
- [19] J. R. Klauder, B. S. Skagerstam Coherent States Applications in Physics and Mathematical Physics, World Scientific, Singapore, 1985.
- [20] P. M. Matheus e K. Venkatesan, A Text Book of Quantum Mechanics, Tata McGraw. Hill, New Delhi 1987.
- [21] I. Infeld e T. E. Hell, Rev. Mod. Phys., 23, 21, (1950) .
- [22] S. Gasiorowicz, Quantum Physics, John Wiley & Sons, New York (1974).
- [23] M. J. R. Pinheiro, Mecânica Quântica: Desenvolvimento Contemporâneo com Aplicações, LTC, 2011.
- [24] M. M. Nieto and L. M. Simmons, Jr. , Phys. Rev. D20, 1332, (1979).
- [25] J. Jayaraman and R. de Lima Rodrigues, J. Phis. A: Math. Gen. 23, 3123 (1990).

- [26] H.S. Green, Phys. Rev.90, 270 (1953);
- [27] A.J. Macfarlane J. Math. Phys. 35, 1054 (1994).
- [28] L. O’Raifeartaigh and C. Ryan, Proc. R. Irish Acad. A62, 93 (1963).
- [29] D.G. Boulware and S. Deser, Il Nuovo Cimento 230XXX 230 (1963).
- [30] E. P., Phis. Rev. 77, 711 (1950).
- [31] J. K. Sharma, C. L. Mehta, and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. 19, 2089 (1978); N. Mukunda, E. C. G. Sudarshan, J. K. Sharma and C. L. Mehta, J. Math. Phys. 21, 2386 (1980); J. K. Sharma, C. L. Mehta, N. Mukunda and E. C. G. Sudarshan, ibid. 22, 78 (1981).
- [32] P. Celka and Hussin, Mod. Phys. Lett. A2, 391 (1987).
- [33] H. Ui, Prog. Theor. Phys. 72, 813 (1984).
- [34] H. Ui and G. Takeda, Prog. Theor. Phys. 72, 266 (1984).
- [35] A. B. Balantekin, Ann. Phys, (N. Y.) 164, 277 (1985).
- [36] J. Beckers, D. Dehin and V Hussin, J. Phys. A: Math. Gen. 20, 1137 (1987).
- [37] J, Beckers, and N. Debergh, "On a parastatistical hydrogen atom and its supersymmetric properties", Liège preprint 1992.
- [38] B. G. Wybourne, Classical Groups for Physicists (John Wiley, 1974).
- [39] Lanik, J Nucl. Phys. B5, 523 (1968).
- [40] R. de Lima Rodrigues, A. N. Vaidya e J. Jayaraman, quatro trabalhos, no formato de mini-artigo, sobre os Estados Coerentes via as álgebras de Wigner-Heisenberg e supersimetria em mecânica quântica publicados em formato de mini-artigo

nos proceedings do XII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos,
Caxambu-MG, setembro de 1991.