



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GIRLENE DOS SANTOS DA SILVA

**EVOLUÇÃO DO CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS: DO ENSINO
BÁSICO AO ENSINO SUPERIOR**

CUITÉ - PB
2018

GIRLENE DOS SANTOS DA SILVA

**EVOLUÇÃO DO CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS: DO ENSINO
BÁSICO AO ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientadora: Maria de Jesus Rodrigues da Silva

CUITÉ - PB

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

S586e Silva, Girlene dos Santos da.

Evolução do cálculo de áreas de figuras planas: do ensino básico ao ensino superior. / Girlene dos Santos da Silva. – Cuité: CES, 2018.

75 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2018.

Orientadora: Maria de Jesus Rodrigues da Silva.

1. Área. 2. Integral. 3. Teorema de Green. I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG

CDU 510:56

GIRLENE DOS SANTOS DA SILVA

**EVOLUÇÃO DO CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS: DO ENSINO
BÁSICO AO ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 25 de Julho de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Maria de Jesus Rodrigues da Silva -
UFCG
Orientador

Prof. Me. Edna Cordeiro de Souza - UFCG
Examinador

Prof. Dra. Glageane da Silva Souza- UFCG
Examinador

Este trabalho é dedicado à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sempre me dá forças, por cuidar de mim e de minha família, tornando-me forte em cada situação, Obrigada Deus!

A minha família: minha mãe Maria, meu pai Antônio e a todos os meus irmãos por acreditarem e confiarem em mim, por está sempre me colocando em suas orações.

A minha orientadora Maria de Jesus, por sua dedicação, organização do meu trabalho, apoio, amizade e paciência. Obrigada!

Agradeço a Edna Cordeiro e Glageane da Siva por aceitarem participar da banca e por suas contribuições no meu trabalho.

Agradeço as amigas/irmãs Vanderlúcia, Mariza e Ana maria pela amizade, carinho e cuidado. Obrigado por terem tido paciência e conviver comigo durante estes quatro anos e três meses. Amo vocês!

Agradeço a família da residência universitária, a família do curso de Licenciatura em Matemática: Jucimeri, Ismayara, Rafaela, Mônica, Gessyka, Jacilene, Valdecleia, Edmara, Gildemar, Anailde, Maria da Paz. Agradeço a Ismael Araújo pela sua amizade, por todos os seus ensinamentos e incentivo, ao meu namorado Ivo Sena, por todo o apoio, amor, carinho e amizade. Enfim, agradeço a todos vocês que estudaram junto comigo, compartilhando diversos momentos, construindo novas histórias e formando grandes amizades.

Agradeço a todos os professores do Curso de Licenciatura em Matemática por suas contribuições e ensinamentos, por serem estes mediadores de conhecimentos, e contribuírem para nossa formação acadêmica e profissional.

*"Ainda que a minha mente e o meu corpo enfraqueçam, Deus é a minha força, Ele é tudo o que eu preciso."
(Salmo 73:26)*

RESUMO

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório, onde apresentamos a evolução do cálculo de áreas de figuras planas desde o ensino fundamental até o ensino superior. O problema de calcular áreas é de interesse da humanidade desde a antiguidade quando se procurava medir e demarcar terras até os dias atuais em diversas áreas como na Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, por exemplo, e foi isso o que motivou nosso estudo. No ensino fundamental e médio já se tem noção da determinação da área de algumas figuras planas e para tal, usam-se fórmulas matemáticas. No entanto, quando se trata de figura com contornos curvos, como a delimitada por funções, não existe uma fórmula pré-definida e necessita-se de ferramentas matemáticas mais sofisticadas como o Teorema Fundamental do Cálculo, o Teorema de Fubini ou Teorema de Green. O texto, no qual apresentamos nossa pesquisa, se inicia com um breve histórico sobre a geometria e o cálculo integral, em seguida usamos a geometria plana para explicar, com certo rigor matemático, a demonstração de algumas fórmulas vistas no ensino básico. E por meio do cálculo integral e suas ferramentas tratamos de áreas de figuras com contornos curvos, as quais são estudadas no ensino superior. A presente pesquisa nos possibilitou observar que há diversos estudos voltados para o cálculo de áreas, no entanto não é muito comum trazer essa abordagem desde o ensino básico ao superior.

Palavras-chave: Área. Integral. Teorema de Green.

ABSTRACT

This work is characterized as an exploratory bibliographical research, where we present the evolution of the calculation of areas of flat figures from elementary school to higher education. The problem of calculating areas has been of interest to mankind since antiquity when it was sought to measure and demarcate lands up to the present day in several areas such as Civil Engineering, Architecture and Urbanism, for example, and this was what motivated our study. In primary and secondary education, one already has the notion of determining the area of some flat figures and for this, mathematical formulas are used. However, when it comes to a figure with curved contours, such as the one delimited by functions, there is no predefined formula and more sophisticated mathematical tools are needed such as the Fundamental Theorem of Calculus, Fubini's Theorem or Green's Theorem. The text, in which we present our research, begins with a brief history about geometry and integral calculus, then we use flat geometry to explain, with some mathematical rigor, the demonstration of some formulas seen in elementary education. And through integral calculus and its tools we deal with areas of figures with curved contours, which are studied in higher education. The present research allowed us to observe that there are several studies focused on the calculation of areas, however it is not very common to bring this approach from basic to higher education.

Keywords: Area. Integral. Green's Theorem.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	CONTEXTO HISTÓRICO	11
1.1	Figuras planas	11
1.2	Cálculo integral	12
2	ÁREA DE FIGURAS PLANAS	18
3	CÁLCULO DE ÁREA USANDO INTEGRAÇÃO	32
3.1	Integral indefinida	32
3.2	Cálculo de área e integral definida	37
3.2.1	Cálculo de áreas	45
3.3	Integral dupla	49
3.3.1	Cálculo de áreas usando integral dupla	54
4	CÁLCULO DE ÁREAS POR MEIO DO TEOREMA DE GREEN	56
4.1	Curvas	56
4.2	Campos vetoriais	59
4.3	Integrais de linhas de um campo vetorial	62
4.3.1	Integral de linha de um campo conservativo	63
4.4	Teorema de Green	64
4.4.1	O teorema de Green no cálculo de áreas	69
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	REFERÊNCIAS	74

INTRODUÇÃO

O cálculo de áreas é muito utilizado por topógrafos, geólogos e arquitetos para fazer mapeamentos e plantas, isto vem desde quando os egípcios procuravam medir e demarcar suas terras (DANTE, 2005). Problemas com o cálculo de áreas são estudados desde o ensino básico até o ensino superior e a resolução destes problemas quando se tratam de áreas de figuras planas regulares e irregulares às vezes pode ser obtida por aproximações, fazendo uso de retângulos ou de fórmulas. Quanto maior o número desses retângulos, maior a precisão da aproximação. Outra forma de resolver é usando a ideia de quadrados unitários e assim calcular a área de regiões planas com contorno regular e irregular.

Diante deste contexto, o presente trabalho objetiva abordar essa evolução, partindo de algumas figuras planas exploradas no ensino fundamental como triângulo, retângulo, trapézio e outros polígonos até regiões com fronteiras curvas, delimitadas por funções, estudadas no Ensino Superior. Nossa pesquisa está dividida em quatro capítulos, os quais passamos a descrever.

No primeiro capítulo, apresentamos um breve contexto histórico referente à geometria, quanto ao surgimento do cálculo de área de figuras planas, bem como à descoberta do cálculo integral e seus principais precursores.

No segundo, demonstramos fórmulas utilizadas para o cálculo de área de alguns polígonos regulares, os quais começam a ser estudados a partir do sexto e/ou sétimo ano do ensino fundamental.

No capítulo três, abordamos alguns conceitos e propriedades de integral com o objetivo de calcular área de figuras planas com contornos curvos, delimitadas por funções contínuas. Este conteúdo é estudado no ensino superior na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Também neste capítulo trazemos um pouco de integral dupla de funções de duas variáveis reais a valores reais, pois por meio de uma integral dupla sobre uma região do plano pode-se calcular a área dessa região.

E por fim, no capítulo quatro, focamos nosso estudo no cálculo de funções vetoriais, a fim de usar um relevante resultado, o Teorema de Green, para obter área de regiões com contornos irregulares.

1 CONTEXTO HISTÓRICO

1.1 Figuras planas

Desde a antiguidade nota-se a necessidade de medir e demarcar terras, assim não há dúvidas sobre a relevância da Geometria Euclidiana Plana na vida do ser humano. O conhecimento geométrico modificou o saber, tornando o seu estudo necessário à realização de grandes contribuições na construção civil e na distribuição de terras.

Segundo Rezende e Queiroz (2008), a palavra geometria origina-se da palavra grega *geometrein*: *geo*, que significa terra, e *metrein*, que significa medir; deste modo a geometria foi originalmente a ciência de medir terras. Esta é estudada nas escolas desde Ensino Básico e pode ser trabalhada de forma simples. É baseada no texto do matemático Euclides, *Elementos*, escrito por volta do ano 300 a.C, foi o segundo livro mais traduzido depois da Bíblia Sagrada .

A origem da geometria ainda hoje é muito discutida nos livros de História da Matemática, diante disso, Boyer (1996, p.4) relata que “afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever”. Mais adiante Boyer (1996) traz o pensamento de Heródoto e Aristóteles, estes não quiseram propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mesmo suspeitando que a geometria possuía raízes mais antigas.

A origem da geometria era discutida por Heródoto e Aristóteles da seguinte forma:

Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazes é que tinha conduzido ao estudo da geometria. (BOYER, 1996, p.4).

Podemos considerar as ideias de Heródoto e Aristóteles como duas teorias opostas pelo fato de um acreditar que a origem da geometria fosse de uma necessidade prática e outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal e ritual. As medidas e demarcações de terras eram feitas pelos geômetras egípcios, também conhecidos como “estiradores de cordas”, estes usavam as cordas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras, ou seja, os geômetras podem ser tomados como apoio de qualquer uma das duas teorias. (BOYER, 1996).

Diante deste contexto, pode-se dizer que estudo da geometria já é muito antigo, pois alguns problemas de geometria foram encontrados em papiros, dentre estes, o papiro de Rhind datado nos anos 1650 a.C.. Este contém registros sobre alguns problemas geométricos, “o

problema 51 mostra que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura, a área do trapézio é tratada de modo semelhante no problema 52” (BOYER, 1996, p.12). Segundo Garbi (2010, p.11) “os egípcios escreviam sobre papiros facilmente degradáveis, eles podem ter produzido documentos ainda mais antigos e que se perderam”.

Assim como os egípcios, os babilônicos apresentavam conhecimento sobre matemática, este conhecimento se deve ao sábio trabalho de decifrar e interpretar tábulas matemáticas, conforme Eves:

A geometria se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônicos do período 2000 a.C. e 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais de área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. (EVES, 2004, p.60).

Observe que os babilônicos e os egípcios, ambos tinham uma familiaridade com o cálculo de áreas de figuras planas, o desenvolvimento destes cálculos se estende até os dias atuais e são feitos de forma mais simples, pois no decorrer do tempo a geometria foi se aprimorando e meios mais sofisticados e simples foram criados para determinar a área destas figuras.

1.2 Cálculo integral

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral aconteceu por volta do século XVII, este século foi extremamente produtivo para o progresso da matemática, tendo em vista que alguns matemáticos, cada um ao seu tempo, desenvolveram métodos que aprimoraram o estudo e a aplicação do Cálculo em diferentes áreas do conhecimento.

A construção do conceito do Cálculo Diferencial e Integral se deu a partir de várias contribuições de alguns matemáticos, isto em diferentes épocas. Uma curiosidade que Eves (2004) relata é que o desenvolvimento histórico do cálculo sucedeu em ordem contrária a daquela vistas em textos e no meio acadêmico, ou seja, surgiu primeiro o cálculo integral e só depois de algum tempo o cálculo diferencial.

De acordo com Eves:

A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa.(2004, p.417).

Observe que Eves descreve a origem da integral por meio de problemas relacionados com áreas, volumes e comprimentos e a diferenciação através dos problemas de tangentes de curvas, além das questões de máximos e mínimos. Para Ribeiro (2015, p.2) “talvez seja por esse motivo a necessidade cotidiana da sociedade, que a integral tenha sido desenvolvida primeiramente, visto que muitas vezes era necessário calcular a área de terrenos com formas irregulares”.

Com o passar dos anos o estudo do cálculo foi se aperfeiçoando e contribuições foram feitas por alguns estudiosos, dentre eles podemos citar Eudoxo, Arquimedes, Bonaventura Cavalieri, John Wallis, Isaac Barrow, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, dentre outros.

Eudoxo

Um dos trabalhos de Eudoxo foi descobrir a teoria das proporções usadas no livro V de Os elementos de Euclides, ele também pode ter fornecido a chave para resolver o problema da comparação de configurações de curvas e retilíneas (BOYER, 1996).

Conforme Eves (2004, p.418) “os problemas da história do cálculo diziam respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos”. Muitos dos cálculos de área eram resolvidos fazendo-se uso do Método da Exaustão, o qual é creditado a Eudoxo (370 a.C.).

As contribuições de Eudoxo foram importantes na matemática, e para confirmar Boyer (1996, p.64) diz que “Eudoxo deve ser lembrado na história da matemática, não só por seu próprio trabalho, mas também pelos seus discípulos”. A tradição na Grécia era mantida e conhecimentos foram transmitidos, assim Platão aprendeu de Arquitas, Teodoro e Teatetus, a influência platônica por sua vez passou de Eudoxo aos Menaecmus e Dinóstrato, que atingiram ambos a eminência da matemática (BOYER, 1996).

Arquimedes

Nasceu provavelmente em 287 a.C. estudou por algum tempo em Alexandria, mas viveu e morreu em Siracusa. Seu pai era um astrônomo, e Arquimedes também adquiriu uma reputação em astronomia. Durante a Segunda Guerra Púnica a qual a cidade de Siracusa se viu envolvida na luta entre Roma e Cartago, Arquimedes participou dando suas contribuições, isto é, inventou engenhosas máquinas de guerra para conservar o inimigo à distância, infelizmente Siracusa caiu e Arquimedes foi morto por um soldado romano.

Arquimedes desenvolveu o Método de Equilíbrio para calcular área ou volume, a ideia fundamental do método é dada como:

Corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. (EVES, 2004, p. 422).

Em conformidade com Ribeiro (2015, p.3) “esse método chegou a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que estão presentes nos textos elementares de cálculo”.

Bonaventura Cavalieri, John Wallis e Isaac Barrow

Segundo Eves (2004, p.425) “Cavalieri nasceu em Milão no ano de 1598, tornou-se jesuado. Aos quinze anos de idade, foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte”. Produziu os chamados princípios de Cavalieri, os quais representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno.

John Wallis nasceu em 1616 e morreu em 1703, fez o uso sistemático das séries em análise, contribuindo nesse campo para abrir caminho para Isaac Newton seu contemporâneo. Também um dos primeiros a discutir as cônicas como curvas de segundo grau, em vez de considera-las como secções cônicas.

Isaac Barrow nasceu em Londres em 1630, onde começou seus estudos e completou-o em Cambridge. Estudou matemática, física, astronomia e teologia, depois de dois anos ensinando geometria no Gresham College de Londres, tornou-se o primeiro ocupante da cátedra lucasiana de Cambridge. Renunciou a cátedra, pois recebeu um convite em 1669 para se tornar o capelão de Carlos II. Para assumir sua vaga em Cambridge, ele sugeriu Isaac Newton, homem de talentos extraordinários.

Barrow faleceu em Cambridge em 1677. Seu trabalho mais importante foi o *Lectiones opticae et geometricae*.

Isaac Newton

Segundo Gardi (2010), Isaac Newton nasceu no dia de Natal de 1642, na sede de uma propriedade rural em Woolsthorpe, a 90 quilômetros de Cambridge, ao sul da Inglaterra e faleceu em Londres em 1727.

Iniciou seus estudos logo cedo, onde no começo de sua juventude desenvolveu grandes habilidades na construção de miniaturas mecânicas engenhosas. Conforme Cajori (2007, p. 265) “Em Grantham, Isaac demonstrou aptidão para invenções mecânicas, construindo um relógio - de - água, um moinho de vento, uma carroça movida pelo condutor, e outros brinquedos”. Newton começou seus estudos em uma escola do Vilarejo na cidade onde nasceu. Aos 12 anos sua mãe o matriculou numa escola pública de Grantham e aos 18 anos entrou para Trinity College, Cambridge (1660). Fez a leitura de vários livros, dentre os quais podemos citar os *Elementos* de Euclides, *La géométrie* de Descartes, a *Clavis* de Oughtred, trabalhos de Kepler e Viète e a *Aritbmetica infinitorum* de Wallis.

Após a leitura destes livros e algumas aulas que Barrow deu como “Lucassian professor”, as quais Newton assistiu depois de 1663, despertou nele a criação por sua própria matemática. E segundo Boyer (1996, p.269) “pelo fim de 1664 Newton parece ter atingido as fronteiras do conhecimento matemático e estava pronto para fazer suas próprias contribuições”.

Por volta do ano 1665 Newton começou a fazer suas primeiras descobertas, a saber,

expressar funções em termos de séries infinitas, também começou a pensar na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variáveis continuamente, ou fluentes, tais como áreas, volumes, distâncias e temperaturas. Isto aconteceu enquanto ele ainda estava estudando no Trinity Collge, mas, devido a peste o Trinity Collge foi fechado e Newton retornou a sua casa, momento no qual fez suas principais descobertas, estas são intituladas por: o teorema binomial; o cálculo; a lei da gravitação e a natureza das cores. Depois inventou o método dos fluxos que corresponde o atual cálculo diferencial (Eves, 2004).

Newton deixou grandes contribuições para matemática, Gardi afirma:

Afinal, quais foram as realizações de Newton? Na matemática suas criações mais lembradas, pela incomparável importância, foram os Cálculos Integral e Diferencial, mas ele deixou também grandes contribuições em áreas como o Cálculo Numérico, Séries Infinitas, Álgebra, estudos diversos sobre curvas, leis de potenciação (Binômio de Newton), etc. (2010, p.214).

Apesar de Newton não ter sido o primeiro a diferenciar a integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo, ele teve um legado muito importante no cálculo, onde sua descoberta constituiu na consolidação de um algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas ou transcendentais (BOYER, 1996).

Gottfried Wilhelm Leibniz

Gardi (2010) em seus estudos relata que Leibniz nasceu em Leipzig no ano de 1646 na Alemanha, e faleceu no ano 1716 em Hannover, foi uma das mais brilhantes de todos os tempos. Reconhecido posteriormente como um verdadeiro gênio universal, pela abrangência de sua cultura, Leibniz foi jurista, diplomata, estudioso da teoria política, filólogo, filósofo, historiador, lógico, geólogo, teólogo, inventor de uma máquina de calcular e matemático de altíssimo nível.

Leibniz desenvolveu seus estudos sobre o cálculo entre os anos de 1673 e 1676 (Eves 2004). Foi neste tempo que o símbolo de integral foi usado pela primeira vez, que no caso é um \int alongado, o qual deriva da primeira letra da palavra summa (soma) isto em 29 de outubro de 1675. O primeiro artigo de Leibniz sobre o cálculo diferencial apareceu por volta do ano de 1684 e muitas das regras de diferenciação que os alunos aprendem no início do curso de cálculo foram deduzidas por ele.

A descoberta do cálculo gerou grande conflito durante muitos anos na vida de Newton e Leibniz, a questão era quem descobriu o cálculo primeiro. Segundo Eves (2004) os estudos de Newton são anteriores aos de Leibniz, mesmo Leibniz tendo publicado seus resultados primeiro, a opinião generalizada que se tem hoje é que ambos criaram o cálculo, independentemente.

Depois dos estudos de Newton e Leibniz muitos outros matemáticos como L'Hospital, os irmãos Bernoulli, Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy, Weierstrass e Riemann contribuíram no aprimoramento do cálculo, de maneira que estendeu seus conceitos para funções de várias

variáveis. Esta generalização aconteceu devido a necessidade de resolver problemas em um mundo multidimensional.

Dentre os matemáticos podemos citar George Green, um matemático inglês que se dedicou nas aplicações da matemática à eletricidade e magnetismo, fluxos de fluidos e a reflexão e refração da luz e do som. A seguir descreveremos um pouco sobre a vida de Green, para isto usamos a referência Connor (2018). No decorrer do nosso trabalho mostraremos um dos resultados mais importantes do cálculo, o teorema intitulado “Teorema de Green”, o qual generaliza o Teorema Fundamental do Cálculo.

George Green

George Green nasceu no ano de 1793 em Nottingham, na Inglaterra, era o único filho de um padeiro de Nottingham também chamado George. Seu primo e cunhado, William Tomlin, escrevendo depois da morte do matemático, nos diz que com a idade de oito anos o jovem George demonstrou um grande interesse pela "matemática", de maneira que seu pai o enviou para a principal academia da cidade.

Green foi encaminhado à escola um ano após os tumultos que ocorreram na Inglaterra em setembro de 1800, quando os preços dos alimentos estavam altos e as pessoas não tinham o suficiente para comer. Isto é, ele foi para a escola de Robert Goodacre em 1801, e tinha apenas nove anos quando deixou a escola em meados do verão de 1802. Neste pouco tempo de estudo ele aprendeu toda a matemática que seus mestres puderam ensinar e foi trabalhar na padaria do pai.

O pai de Green dirigiu o negócio da padaria muito bem, de forma que ele prosperou e conseguiu comprar várias casas em Nottingham. Em 1807 comprou um terreno, no qual construiu o moinho de milho de vento, este foi o lugar onde George Green trabalhou maior parte de sua vida.

Em 1828, com a idade de trinta e cinco anos, George Green publicou o seu primeiro e mais importante trabalho: Um Ensaio sobre a Aplicação da Análise Matemática às Teorias de Eletricidade e Magnetismo. No ano de 1829 o pai de Green morreu, deixando-o livre e com recursos suficientes para arrendar o negócio da moagem e dedicar seu tempo à matemática. Assim ele dispôs de boas condições para financiar o tempo em que viveu em Cambridge. Em outubro de 1833, ingressou na faculdade de Gonville e Caius como estudante de Licenciatura, e logo foi reconhecido por sua habilidade matemática.

Após obter a graduação e com um diploma de primeira classe, Green fez suas próprias pesquisas e publicou seis artigos nos próximos dois anos. Estes incluíram dois trabalhos sobre ondas, que o levou a investigar a reflexão e refração do som e luz. Foi Green quem primeiro usou o termo "potencial" em eletricidade. Foi ele quem primeiro enunciou o princípio da conservação de energia, estudou de perto as condições para reflexão em uma interface que forneceu a primeira explicação convincente de reflexão interna total, a base de fibra óptica e, portanto,

um importante elemento nas telecomunicações. Muitos avanços na tecnologia moderna, tais como semicondutores e supercondutores, sondagem geológica e sismologia, varredura eletrônica médica, são creditados a Green.

Aos 47 anos Green voltou para Nottingham no ano de 1840, onde ficara trabalhando no moinho de seu pai e em 31 de maio de 1841 faleceu. Foi enterrado com seus pais no cemitério de Stephen em Sneinton, a apenas algumas centenas de metros do moinho onde ele trabalhou durante a maior parte de sua vida.

É notável que a matemática de Green é mais voltada para o estudo de problemas físicos, como a teoria geral do potencial, o estudo da reflexão e refração do som e da luz, dentre outros. Um dos resultados que ele provou é atualmente conhecido como o Teorema de Green, uma ferramenta muito utilizada na Matemática para o cálculo de área figuras planas limitadas e fechadas, o anúncio deste teorema pode ser encontrado em qualquer livro de cálculo ou análise de várias variáveis.

2 ÁREA DE FIGURAS PLANAS

O cálculo de área foi uma preocupação constante na história da matemática quando topógrafos, geólogos e arquitetos faziam seus mapeamentos e plantas, isto vem desde quando os egípcios procuravam medir e demarcar suas terras (Dante, 2005).

Pode-se dizer que a ideia intuitiva de área vem da ideia de medir uma ocupação de uma determinada região do plano delimitada por um contorno. Medir esta ocupação ou superfície significa obter um valor que represente uma porção do plano, para obter este valor é necessário comparar grandezas de mesma espécie, ou seja, para medir a área de uma superfície plana é preciso usar outra superfície como unidade de medida. Conforme Dante (2005), geralmente a unidade de medida utilizada é a área de uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento, denominada por região quadrada unitária.

De acordo com Machado (2012, p.111) podemos tomar como exemplo um retângulo, este "ocupa" uma região do plano com seus pontos interiores. Uma forma de medir esta ocupação é dividir os lados do retângulo em partes iguais, formando pequenos quadrados, e contar estes quadrados; o número destes seria "área" ocupada pelo retângulo.

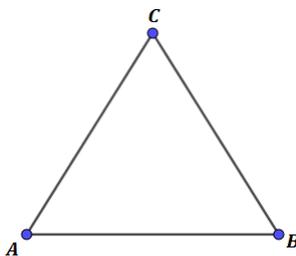
Em geral, a definição de medida de área aparece em diferentes momentos na Educação Básica, normalmente, este conteúdo começa a ser tratado no 7º ano do Ensino Fundamental, onde o aluno começa a ter a ideia do que é a medida da área, no Ensino Médio o assunto é retomado, e os discentes estudam o conceito medida de área como sendo um número associado a uma superfície, e assim trabalha com a medida da área de regiões planas com contorno regular. Neste capítulo iremos trabalhar o cálculo de áreas de figuras planas com um pouco mais de formalidade do que o visto no ensino básico.

Para mostrar a área de algumas figuras planas, destacaremos algumas definições e em seguida alguns axiomas.

Definição 2.1 *Um triângulo é a figura formada pela união de três segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} onde A , B e C são pontos não colineares. O triângulo determinado pelos pontos A , B e C será denotado por $\triangle ABC$, veja a figura 1. Assim*

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}.$$

Figura 1 – Triângulo

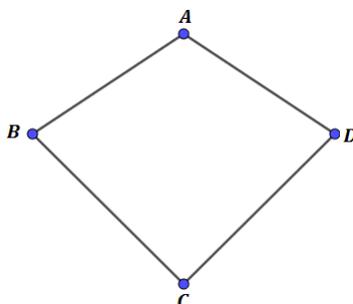


Fonte: Autoria própria

Definição 2.2 Um quadrilátero é a figura formada pela união de quatro segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} denominados lados ou arestas, onde os quatro pontos A , B , C e D , denominados vértices, não são colineares três a três. O quadrilátero determinado desta forma será denotado simplesmente $\square ABCD$, conforme figura 2:

$$\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}.$$

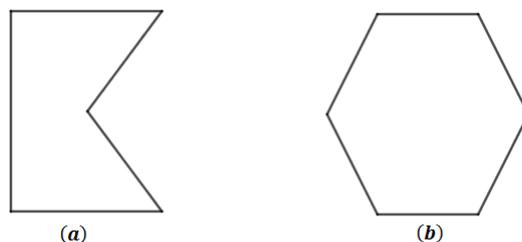
Figura 2 – Quadrilátero



Fonte: Autoria própria

Definição 2.3 Chamamos polígono a uma linha poligonal fechada sem auto-interseções, isto é, cada lado é um segmento de reta que tem apenas um ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais. Veja a figura 3:

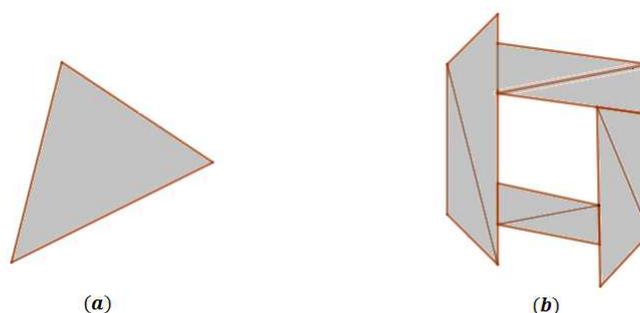
Figura 3 – Polígonos



Fonte: Autoria própria

Definição 2.4 Uma região triangular (figura 4 (a)) é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de fronteira da região triangular.

Figura 4 – Região Triangular e Região Poligonal



Fonte: Autoria própria

Definição 2.5 Uma região poligonal é a figura formada pela união de um número finito de regiões triangulares (figura 4 (b)) tais que se duas delas se interceptam, então a interseção ou é um ponto ou é um segmento. Um ponto é interior a uma região poligonal se pertence ao interior de algum dos triângulos que a compõe.

Segue os axiomas:

Axioma 1 A cada região poligonal R está associado um único número real positivo, denotado por $A(R)$, este número é a área de R .

Axioma 2 Se dois triângulos são congruentes, as regiões triangulares determinadas por eles têm a mesma área.

Axioma 3 Se uma região R é a união de duas regiões R_1 e R_2 , tais que R_1 e R_2 se interceptam em no máximo um número finito de segmentos e pontos então

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2).$$

Axioma 4 A área de um quadrado de lado com medida l é l^2 .

Iremos demonstrar área de algumas figuras planas.

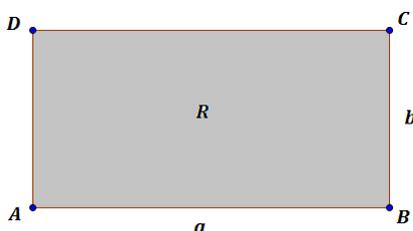
Teorema 2.1 (Área do Retângulo) A área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados não paralelos.

Demonstração. Seja $\square ABCD$ um retângulo, se $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$ com $a > b$, queremos provar que

$$R = A(\square ABCD) = a \cdot b.$$

Consideremos uma região retangular de base a e altura b (ou base b e altura a) em que a e b são números reais, como mostra a figura 5:

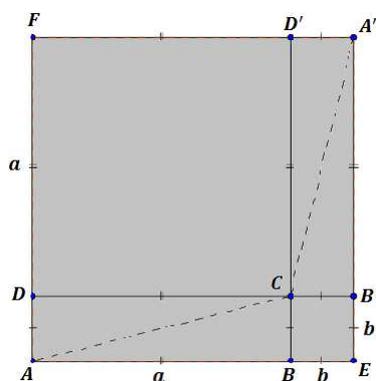
Figura 5 – Área do Retângulo



Fonte: Autoria própria

Usando axioma 4 iremos construir uma região quadrada cuja medida do lado é $a + b$, a qual contém duas cópias de R e mais duas regiões quadradas, uma cuja lado mede a e outra cujo lado mede b . Conforme a figura 6:

Figura 6 – Área do Retângulo



Fonte: Autoria própria

Ainda nesta construção, iremos traçar uma diagonal no retângulo $\square ABCD$ partindo do vértice A ao C e outra no retângulo $\square CB'A'D'$ partindo do vértice C ao A' . Obtemos respectivamente os triângulos retângulos $\triangle ABC$, $\triangle CDA$, $\triangle CB'A'$ e $\triangle A'D'C$.

Podemos notar na figura 6 que os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle CDA$, $\triangle CB'A'$ e $\triangle A'D'C$ são todos congruentes entre si. Desta forma, aplicando os axiomas 2 e 3, segue que

$$\begin{aligned} R = A(\square ABCD) &= A(\triangle ABC) + A(\triangle CDA) \\ &= A(\triangle CB'A') + A(\triangle A'D'C) \\ &= A(\square CB'A'D'). \end{aligned}$$

Daí, concluímos que os retângulos $\square ABCD$ e $\square CB'A'D'$ possuem mesma área R . Vamos calcular agora R em função de a e b . Pelo axioma 4 vem,

$$\begin{aligned} A(\square AEA'F) &= (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 \\ A(\square BEB'C) &= b \cdot b = b^2 \\ A(\square DCD'F) &= a \cdot a = a^2. \end{aligned}$$

Logo, pelo axioma 3, Obtemos

$$\begin{aligned} A(\square AEA'F) &= A(\square ABCD) + A(\square BEB'C) + A(\square CB'A'D') + A(\square DCD'F) \Rightarrow \\ (a + b)^2 &= R + b^2 + R + a^2 \Rightarrow \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= 2R + a^2 + b^2 \Rightarrow \\ 2 \cdot a \cdot b &= 2R \Rightarrow \\ a \cdot b &= R \Rightarrow R = a \cdot b. \end{aligned}$$

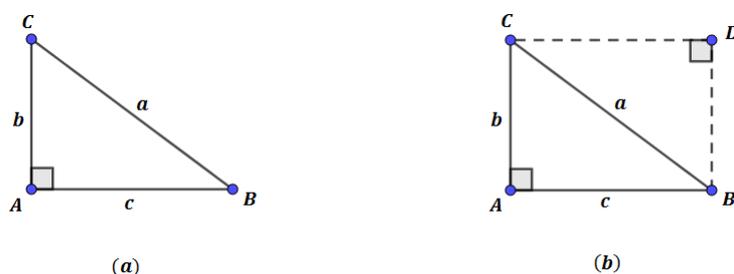


Corolário 2.1 (Área do Triângulo Retângulo) *A área de um triângulo retângulo é a metade do produto das medidas de seus catetos.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A , tomemos $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, como na figura 7 (a). Queremos provar que

$$R = A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b.$$

Figura 7 – Triângulo Retângulo e Retângulo



Fonte: Autoria própria

Passamos pelos vértices C e B , respectivamente, traçamos paralelas aos lados AB e AC . Essas retas se encontram no ponto D e fornecem o retângulo $\square ABCD$, figura 7 (b).

Pelo axioma 2, temos

$$A(\triangle ABC) = A(\triangle CDB). \quad (2.1)$$

E pelo axioma 3 segue que,

$$A(\square ABCD) = A(\triangle ABC) + A(\triangle CDB). \quad (2.2)$$

Além disso pelo teorema 2.1 temos que

$$A(\square ABCD) = c \cdot b. \quad (2.3)$$

Das equações 2.1, 2.2 e 2.3, obtemos

$$\begin{aligned} A(\square ABCD) &= A(\triangle ABC) + A(\triangle CDB) \Rightarrow \\ A(\square ABCD) &= A(\triangle ABC) + A(\triangle ABC) \Rightarrow \\ \frac{1}{2}(\square ABCD) &= A(\triangle ABC) \Rightarrow \\ \frac{1}{2}c \cdot b &= A(\triangle ABC). \end{aligned}$$

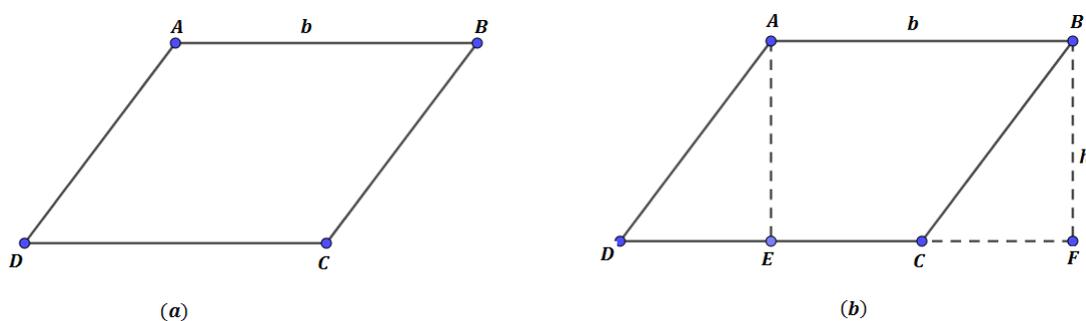


Proposição 2.1 (Área do Paralelogramo) *A área do paralelogramo é o produto do comprimento de seu lado pelo comprimento da altura relativa a este lado.*

Demonstração. Seja $\square ACBD$ um paralelogramo (figura 8 (a)), tomemos $\overline{AB} = \overline{DC} = b$ e h a altura relativa ao lado \overline{CD} . Devemos provar que

$$A(\square ABCD) = b \cdot h$$

Figura 8 – Paralelogramo



Fonte: Autoria própria

Tracemos dois segmentos \overline{AE} e \overline{BF} perpendiculares ao segmento \overline{DC} partindo de A e B , respectivamente, (figura 8 (b)).

Desta forma obtemos o retângulo cuja área é $\overline{EF} \cdot \overline{BF}$.

Note que os triângulos $\triangle AED$ e $\triangle BFC$ são congruentes, assim pelo axioma 2 e 3, temos

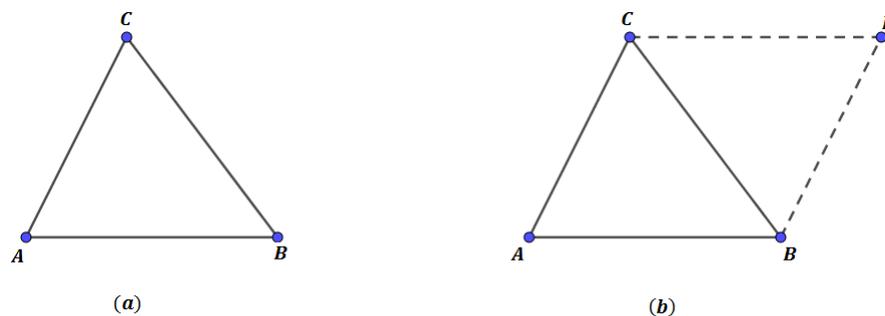
$$\begin{aligned} A(\square ABCD) &= A(\square ABCE) + A(\triangle AED) \\ &= A(\square ABCE) + A(\triangle BFC) \\ &= A(\square ABFE) \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{BF} \\ &= b \cdot h. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.2 (Área do Triângulo) *A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Demonstração. Considere um triângulo $\triangle ABC$, conforme figura 9 (a)

Figura 9 – Triângulo



Fonte: Autoria própria

Iremos traçar pelo vértice C uma reta paralela ao lado AB , e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC . Estas duas retas se interceptam em um ponto D , veja na figura 9 (b). O quadrilátero $\square ABDC$ é um paralelogramo e que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BDC$ são congruentes entre si.

Assim pelo axioma 3, temos

$$A(\square ABDC) = A(\triangle ABC) + A(\triangle BDC)$$

como $\triangle ABC = \triangle BDC$, segue que

$$2A(\triangle ABC) = A(\square ABDC)$$

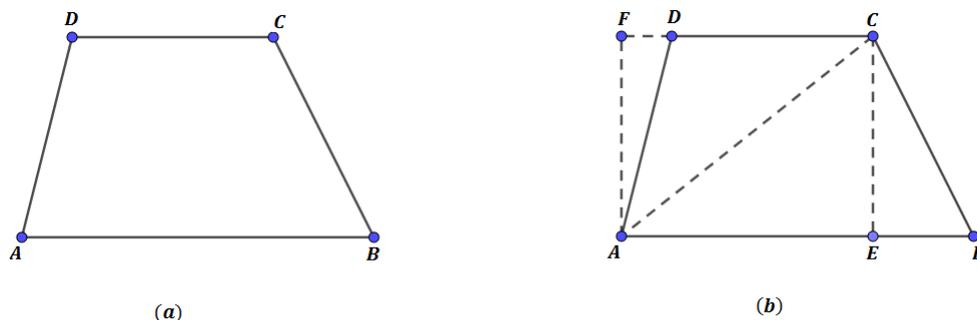
$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}A(\square ABCD).$$

Pode-se observar que se traçarmos uma reta do vértice C ao segmento \overline{AB} , obtemos exatamente a altura do paralelogramo. Assim concluímos nossa demonstração. ■

Proposição 2.3 (Área do trapézio) *A área de um trapézio é a metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

Demonstração. Seja $\square ABCD$ um trapézio, cujas bases são segmentos \overline{AB} e \overline{CD} .

Figura 10 – Trapézio



Fonte: Autoria própria

Traçaremos a partir do vértice C ao A uma reta. Obtemos os triângulos $\triangle ACB$ e $\triangle ACD$. Tomando as alturas CE do triângulo $\triangle ACB$ e AF do triângulo $\triangle ACD$, observamos que $CE = AF$, pois os lados AB e CD são paralelos, veja na figura 10 (b).

Pelo axioma 3, temos

$$A(\square ABCD) = \triangle ACB + \triangle ACD$$

Pela proposição 2.2, segue que

$$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB \cdot CE) + \frac{1}{2}(CD \cdot AF)$$

Como $CE = AF$, obtemos

$$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CE.$$

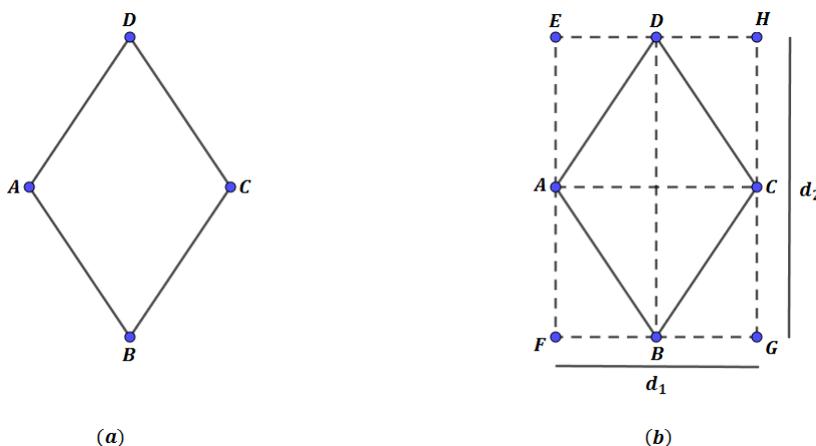
■

Proposição 2.4 (Área do Losango) *A área de um losango é a metade do produto de suas diagonais.*

Demonstração. Seja $\square ABCD$ um losango com $\overline{AC} = d_1$ e $\overline{BD} = d_2$, com \overline{AC} perpendicular a \overline{BD} , queremos mostrar que

$$A(\square ABCD) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Figura 11 – Losango



Fonte: Autoria própria

Tracemos pelos vértices B e D paralelas a \overline{AC} e pelos vértices A e C paralelas a \overline{BD} . Formamos o retângulo cuja área é o dobro da área do losango, observe isto na figura 11(a).

Pelo teorema 2.1 sabemos que a área do retângulo é o produto da base pela altura, ou seja,

$$A(\square EFGH) = d_1 \cdot d_2 = 2A(\square ABCD)$$

Logo,

$$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(d_1 \cdot d_2).$$



Definição 2.6 *Dois polígonos são ditos semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.*

Observação 2.1 *O perímetro de um círculo é dado pelo comprimento da circunferência.*

Teorema 2.2 (Área do Círculo) *Seja C um círculo de raio r . Então existe uma sequência de regiões poligonais regulares R_1, R_2, \dots , todas contidas em C , tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A(C) = \pi r^2,$$

onde A_n é a área do polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Demonstração. Consideremos uma circunferência C de raio r e centro O . E sobre C , n pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, com $n \geq 3$, formando os triângulos $\triangle A_1OA_2, \triangle A_2OA_3, \dots, \triangle A_{n-1}OA_n$.

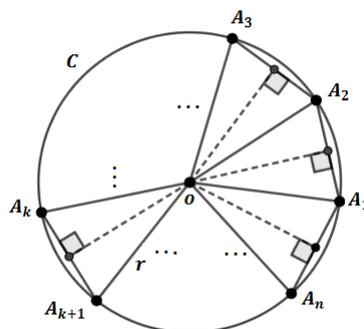
Segue que

$$A_n = A(\triangle A_1OA_2) + A(\triangle A_2OA_3) + \dots + A(\triangle A_{n-1}OA_n).$$

De forma intuitiva podemos dizer que a área do círculo é maior ou igual que A_n , isto é,

$$A(C) \geq A_n.$$

Figura 12 – Circunferência



Fonte: Autoria própria

Observemos na figura acima que o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ tem área mais "próxima" da área do círculo quando n é muito grande. Matematicamente, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A(C).$$

Vamos agora calcular a área de A_n , para isto, calcularemos a área de cada triângulo $\triangle A_kOA_{k+1}$, para $1 \leq k < n$. Fazemos $l_k = A_kA_{k+1}$, a base do triângulo e h_k a sua altura. Assim,

$$A(\triangle A_kOA_{k+1}) = \frac{1}{2}l_k h_k.$$

Consideremos $A_1A_2A_3 \dots A_n$ um polígono regular, ou seja, todos os lados do polígono terá o mesmo comprimento l . Assim $l_k = l$ e $h_k = h$. Segue que,

$$A(\triangle A_kOA_{k+1}) = \frac{1}{2}lh.$$

Logo,

$$A_n = n \frac{1}{2}lh = \frac{1}{2}(nl)h \Rightarrow A_n = \frac{1}{2}(nl)h.$$

Notemos que se $n \rightarrow \infty$ então $h \rightarrow r$ e $nl \rightarrow e$ (onde e é o comprimento da circunferência e nl o perímetro). $A(C) = \frac{1}{2}er$ é a área do círculo em função do raio e do comprimento da circunferência. Fazemos C e C' circunferências concêntricas como na figura abaixo, considere $l = A_1A_2$ e $l' = B_1B_2$ os lados dos dois polígonos ilustrados na figura. Suponhamos que os polígonos são regulares. Sejam e e e' os comprimentos de C e C' , respectivamente. Note que,

$$e \geq nl \tag{2.4}$$

e

$$e' \geq nl'. \tag{2.5}$$

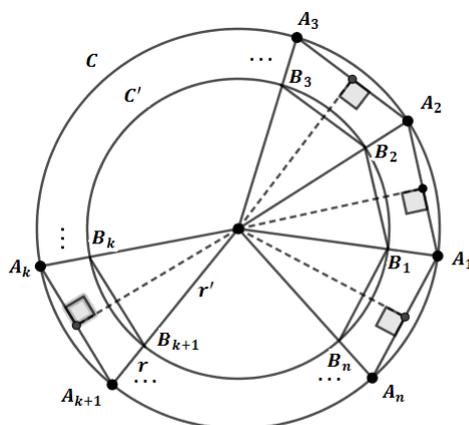
Aplicando o limite nas equações 2.4 e 2.5, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nl = e$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nl' = e'.$$

Figura 13 – Circunferência



Fonte: Autoria própria

Veja na figura acima que os raios de C e C' são $r = OA_1 = OA_2$ e $r' = OB_1 = OB_k$, para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Usando semelhanças de triângulos para $\triangle A_kOA_{k+1}$ e $\triangle B_kOB_{k+1}$, obtemos

$$\frac{A_kA_{k+1}}{B_kB_{k+1}} = \frac{OA_k}{OB_k} \Rightarrow \frac{l}{l'} = \frac{r}{r'}.$$

Em particular,

$$\frac{nl}{nl'} = \frac{2r}{2r'} = \frac{d}{d'} \Rightarrow \frac{nl}{d} = \frac{nl'}{d'} \Rightarrow$$

$$\frac{e}{d} = \frac{e'}{d'}. \tag{2.6}$$

Onde d e d' são os diâmetros das circunferências C e C' , respectivamente. Independente da circunferência, a razão do comprimento pelo seu diâmetro nos dá o valor de π . Desta forma,

observemos que da igualdade 2.6 decorre

$$\pi = \frac{e}{d'} \Rightarrow e = d\pi \Rightarrow e = 2\pi r.$$

Portanto, a área do círculo é dada por

$$A(C) = \frac{1}{2}er \Rightarrow A(C) = \frac{1}{2}(2\pi r)r \Rightarrow A(C) = \pi r^2.$$

■

A seguir traremos exemplos que fazem uso de algumas fórmulas vistas neste capítulo.

Exemplo 2.1 *Um terreno tem a forma de um trapézio de bases 20m e 14m, e altura 11m. Nesse terreno, construiu-se uma piscina retangular de 8m por 5m. No restante do terreno foram colocadas pedras minerais. Qual foi a área onde se colocou pedra?*

Solução: Temos da proposição 2.3 que a área do trapézio é a metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases. Segue que,

$$A_{\text{Trapézio}} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (20 + 14) = 187m^2.$$

calculando agora a área da piscina, usando o teorema 2.1, temos

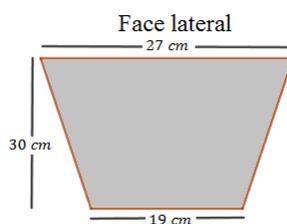
$$A_{\text{Retângulo}} = 8 \cdot 5 = 40m^2.$$

Logo, a área onde se colocou pedra é:

$$A_{\text{pedras}} = A_{\text{Trapézio}} - A_{\text{Retângulo}} = 187m^2 - 40m^2 = 147m^2. \quad (2.7)$$

Exemplo 2.2 *Uma cesta de lixo tem por faces laterais trapézios isósceles e por fundo um quadrado de 19cm de lado. Desprezando a espessura da madeira, quantos metros quadrados de madeira foram necessárias para fabricar essa cesta de lixo?*

Figura 14 – Trapézio



Fonte: Autoria própria

Solução: Usando a proposição 2.3, temos que a área das faces laterais é 4 vezes a área do trapézio representado na figura 14. Assim,

$$A_{\text{Fases laterais}} = 4 \cdot A_{\text{Trapézio}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (27 + 19) = 4 \cdot 690 = 2760 \text{cm}^2.$$

Do axioma 4, temos que a área do quadrado é o produto do comprimento de seus lados. Logo,

$$A_{\text{quadrado}} = 19 \cdot 19 = 361 \text{cm}^2.$$

Assim, a área necessária para produzir a cesta será:

$$A_{\text{cesta de lixo}} = A_{\text{Fases laterais}} + A_{\text{quadrado}} = 2760 \text{cm}^2 + 361 \text{cm}^2 = 3121 \text{cm}^2 = 31,21 \text{m}^2.$$

Neste capítulo conhecemos a área de algumas figuras planas e por meio dos exemplos 2.1 e 2.2 vimos a sua utilidade no cotidiano. No capítulo subsequente apresentaremos a Integral, abordando suas propriedades, com alguns exemplos para melhor compreensão do trabalho.

3 CÁLCULO DE ÁREA USANDO INTEGRAÇÃO

Neste capítulo abordamos algumas noções básicas de integrais indefinidas e integrais definidas, objetivando a obtenção da área de regiões do plano delimitadas por funções. Além do uso de integral “simples” também usamos integral dupla com o mesmo propósito. Para este capítulo é relevante que se tenha conhecimento de algumas definições tais como, limite, continuidade e derivada. Algumas definições a seguir são baseadas nos livros de Stewart (2012), Flemming (2006) e Thomas (2010).

3.1 Integral indefinida

Iniciaremos com a integração indefinida, que consiste no processo inverso da derivada.

Definição 3.1 *Uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva de $f(x)$ se, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $F'(x) = f(x)$.*

Exemplos:

- $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$ é uma primitiva de $f(x) = 12x^2 + 2x$ pois, $F'(x) = 12x^2 + 2x = f(x)$.
- A função $G(x) = 4x^3 + x^2 - 7$ é uma primitiva de $f(x) = 12x^2 + 2x$ pois, $G'(x) = 12x^2 + 2x = f(x)$.

Observe que $f(x)$ admite mais de uma primitiva. Veremos a seguir algumas proposições; antes porém anunciaremos o teorema do valor médio, o qual é necessário para demonstrar alguns resultados.

Teorema 3.1 (Teorema do Valor Médio) *Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Então existe um número $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A demonstração do teorema 3.1 se encontra no livro de Flemming (2006, p. 198 a 199).

Observação 3.1 *Uma função f é contínua em um ponto x_0 , quando $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Proposição 3.1 *Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.*

Demonstração. Como $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, temos $F'(x) = f(x)$. Assim,

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Portanto, $G(x)$ é uma primitiva de $f(x)$. ■

Observação 3.2 *Notemos que da proposição 3.1 segue $G(x) - F(x) = c$, isto é, duas primitivas de $f(x)$ diferem por uma constante.*

Proposição 3.2 *Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I , então f é constante em I .*

Demonstração. Sejam $x, y \in I$, com $x < y$. Já que f é contínua em I , segue que f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y) pelo teorema do valor médio, existe $z \in (x, y)$ tal que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

como $f'(z) = 0$, vem que $f(y) - f(x) = 0$ ou $f(y) = f(x)$. Como x e y são dois pontos quaisquer de I , concluímos que f é constante em I . ■

Traremos agora a definição de integral indefinida.

Definição 3.2 *Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada integral indefinida da função f e é denotada por*

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Leibniz usou $\int f(x)dx$ para representar uma primitiva qualquer de f . O símbolo \int é chamado sinal de integração, $f(x)$ função integrando, $f(x)dx$ o integrando e o símbolo de dx serve para indicar a variável de integração. O processo que permite achar a integral indefinida de uma função é chamado integração.

Temos da definição 3.2, que

- $\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow F'(x) = f(x)$.
- $\int f(x)dx$, representa uma família de funções.

Propriedades da integração

Proposição 3.3 *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e k uma constante, então:*

1. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx;$
2. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

A seguir, temos a tabela de algumas integrais imediatas:

1. $\int du = u + c;$
2. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \text{ constante } \neq (-1);$
3. $\int e^u = e^u + c;$
4. $\int \cos u du = \sin u + c;$
5. $\int \csc^2 u du = -\cot u + c;$
6. $\int \csc u \cdot \cot u = -\csc u + c;$
7. $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c;$
8. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c;$
9. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c;$
10. $\int \sin u du = -\cos u + c;$
11. $\int \sec^2 u du = \tan u + c;$
12. $\int \sec u \cdot \tan u du = \sec u + c;$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c;$
14. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcsec} u + c.$

Usando as propriedades da integral e tabela de integrais imediatas, vamos resolver alguns exemplos.

Exemplo 3.1 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$

Solução: $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \int \tan x \cdot \sec x dx = \sec x + c.$

Exemplo 3.2 $\int \left(\frac{e^t}{2} + \sqrt{t} + \frac{1}{t} \right) dt.$

Solução: $\int \left(\frac{e^t}{2} + \sqrt{t} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \int e^t dt + \int t^{1/2} dt + \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} e^t + \frac{2}{3} t^{3/2} + \ln |t| + c.$

Exemplo 3.3 $\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx.$

Solução: $\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int dx + \int x^{-2} dx = x - \frac{1}{x} + c.$

É importante sermos capazes de encontrar antiderivadas, porém as fórmulas de antiderivação não possibilita calcular integrais do tipo,

$$\int 2x(x^2 + 3)^{12} dx. \quad (3.1)$$

Uma forma de resolver esta integral é fazendo uma mudança de variável, isto acontece por meio de uma substituição simples, que será definida logo a seguir.

Método da substituição: Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponhamos que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja contida no domínio de F . Assim podemos considerar a função composta $F \circ g$.

Pela regra da cadeia, temos $[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, assim $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Daí,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c. \quad (3.2)$$

Fazendo $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$ e substituindo em (3.2) obtemos,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c.$$

Para ilustrar o uso do método, resolveremos a integral (3.1),

$$\int 2x(x^2 + 3)^{12} dx,$$

Fazendo $u = x^2 + 3$, e $du = 2x dx$, temos

$$\int 2x(x^2 + 3)^{12} dx = \int 2x u^{12} \frac{du}{2x} = \int u^{12} du = \frac{u^{13}}{13} + c.$$

Voltando a variável x , ou seja, substituindo u por $x^2 + 3$, obtemos

$$\int 2x(x^2 + 3)^{12} dx = \frac{1}{13}(x^2 + 3)^{13} + c.$$

Podemos verificar se o resultado encontrado está correto fazendo,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{13}(x^2 + 3)^{13} \right) = \frac{13}{13}(x^2 + 3)^{13-1}(x^2 + 3)' = (x^2 + 3)^{12} 2x = 2x(x^2 + 3)^{12}.$$

Note que o resultado encontrado é justamente o integrando de (3.1).

Método de integração por partes: Este método resulta da inversão da regra do produto para a diferenciação.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no intervalo I , pela regra do produto temos

$$[f(x)g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

ou

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x). \quad (3.3)$$

Integrando ambos os lados de (3.3), obtemos

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int [f(x) \cdot g(x)]' dx - \int g(x) \cdot f'(x) dx,$$

ou melhor,

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) dx. \quad (3.4)$$

A fórmula (3.4) é denominada Fórmula de Integração por Partes. Fazendo $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$ e $v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x) dx$. Podemos reescrever (3.4) com a seguinte notação,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Exemplo 3.4 usando a integração por partes, calcule: $\int t e^{4t} dt$.

Solução: Façamos $u = t \Rightarrow du = dt$ e $dv = e^{4t} dt \Rightarrow v = \int e^{4t} dt = \frac{1}{4} e^{4t}$. Aplicando a integração por partes, temos

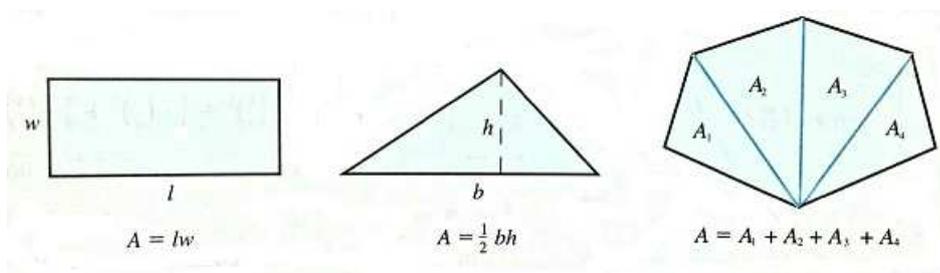
$$\int t e^{4t} dt = t \frac{1}{4} e^{4t} - \frac{1}{4} \int e^{4t} dt = t \frac{1}{4} e^{4t} - \frac{1}{16} e^{4t} + c.$$

3.2 Cálculo de área e integral definida

A necessidade de determinar a área de uma figura plana, vem desde a antiguidade. O procedimento mais usado foi o Método da Exaustão que consiste em aproximar a figura dada por meio de outras cujas áreas já são conhecidas, como exemplo podemos citar o círculo, já visto nas págs. 27 - 28.

No capítulo 2 apresentamos e demonstramos as fórmulas do cálculo de área de algumas figuras planas, a exemplo da área de um retângulo, de um triângulo e de um polígono, conforme figura 15.

Figura 15 – Algumas figuras planas

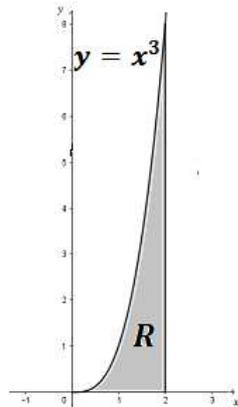


Fonte: STEWART, James. (2008).

Para encontrar a área A de uma região R com lados curvos, iremos aproximá-la por polígonos cujas áreas já são conhecidas. Particularmente, iremos calcular a área de uma região R limitada pelo gráfico de função contínua $y = f(x)$, com $f(x) \geq 0$, pelo eixo x e por duas retas verticais $x = a$ e $x = b$ como ilustração e em seguida uma função qualquer e retas verticais quaisquer.

Exemplo 3.5 Consideremos a região limitada por $f(x) = x^3$, pelo eixo x e por duas retas verticais $x = 0$ e $x = 2$, conforme figura 16.

Figura 16 – Área sob a curva $y = x^3$

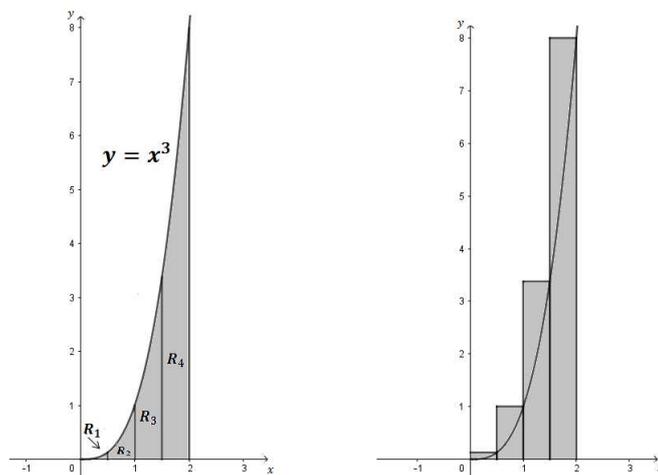


Fonte: Autoria própria

Solução:

Para solução do problema, consideremos R dividida em quatro faixas R_1, R_2, R_3 e R_4 , traçando retas verticais $x = \frac{1}{2}, x = 1$ e $x = \frac{3}{2}$. Veja na figura 17.

Figura 17 – R dividida em quatro faixas e valores de f nos extremos direitos.



Fonte: Autoria própria

Note que podemos aproximar cada faixa por um retângulo com altura igual ao lado direito da faixa e a base igual a largura da faixa. Desta forma, as alturas são os valores de $f(x) = x^3$ nos extremos direitos dos subintervalos $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$, $[1, 3/2]$ e $[3/2, 2]$.

Perceba que os retângulos tem largura $1/2$ e alturas $(1/2)^3, 1, (3/2)^3$ e 2^3 . Se denomi-

tenhamos S_4 como a soma das áreas desses retângulos, Obtemos

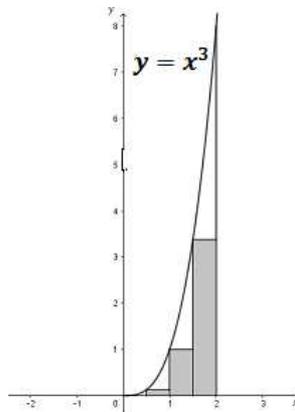
$$S_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}2^3 = 6,25.$$

temos que a área A de R é menor que S_4 , portanto

$$A < 6,25.$$

De forma análoga podemos estimar a área de R , usando os retângulos menores, suas alturas serão os valores de f nos extremos esquerdos dos subintervalos. Veja figura 18:

Figura 18 – valores de f nos extremos esquerdos



Fonte: Autoria própria

Observemos que a área do retângulo contido no intervalo $[0, 1/2]$ é desprezível, pois sua altura é zero.

A soma das áreas dos retângulos inscritos na figura é aproximadamente,

$$S'_4 = \frac{1}{2}0^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}1^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 2,25.$$

Notemos que a área de R é maior que S'_4 , assim temos estimativas inferior e superior para A :

$$2,25 < A < 6,25.$$

Este processo de calcular a área da região R com certo número de faixas pode acontecer para um número maior.

Dividindo a região R em oito faixas de mesma largura e fazendo os devidos cálculos, obtemos as áreas dos retângulos que estão nos extremos esquerdos $S'_8 = 3,06$ e nos extremos direitos $S_8 = 5,06$. E obtemos

$$3,06 < A < 5,06.$$

Uma resposta para a área de R é que está entre 3,06 e 5,06. Fazendo este mesmo procedimento que foi visto até agora, podemos obter melhores aproximações para a área de R , veja a tabela abaixo:

Tabela 1 – Valores para a área da região R

n	S'_n	S_n
10	3,24	4,84
20	3,61	4,41
30	3,74	4,27
50	3,84	4,16
80	3,9	4,1
100	3,92	4,08
1000	3,99	4,01

Fonte: Autoria própria

Onde n é o número de retângulos no qual as alturas são encontradas com extremos esquerdos S'_n ou com extremos direitos S_n . De acordo com a tabela 1, note que usando 80 faixas a área está entre 3,9 e 4,1 e com 1000 está entre 3,99 e 4,01. Fazendo a média aritmética desses dois últimos números, temos $A = 4$. Assim a medida que aumentamos n , S_n se aproxima de 4.

Exemplo 3.6 Para a região R do exemplo 3.5, mostre que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tende a 4, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 4.$$

Solução: Seja S_n a soma das áreas dos n retângulos na figura. Cada retângulo tem uma largura $\frac{2}{n}$, e as alturas são $\left(\frac{2}{n}\right)^3, \left(\frac{4}{n}\right)^3, \left(\frac{6}{n}\right)^3, \dots, \left(\frac{2n}{n}\right)^3$. Assim,

$$S_n = \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{2}{n} \left(\frac{4}{n}\right)^3 + \frac{2}{n} \left(\frac{6}{n}\right)^3 + \dots + \frac{2}{n} \left(\frac{2n}{n}\right)^3 = \frac{2}{n} \frac{2^3}{n^3} [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3].$$

Usando a fórmula para a soma dos cubos dos n primeiros termos positivos, temos

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2,$$

vem,

$$S_n = \frac{2}{n} \frac{8}{n^3} \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 = \frac{16}{n^4} \left(\frac{n^2 + n}{2} \right)^2 = \frac{16}{n^4} \left(\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \right) = 4 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Aplicando o limite em S_n , quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

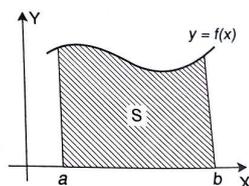
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2} \right) = 4.$$

De modo análogo temos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = 4.$$

Consideremos o problema de definir a área de uma região plana S delimitada pelo gráfico de uma função contínua f (com $f(x) \geq 0$), pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x . Para isso usaremos a ideia do exemplo anterior. veja a figura 19:

Figura 19 – Área sob $y = f(x)$



Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2006).

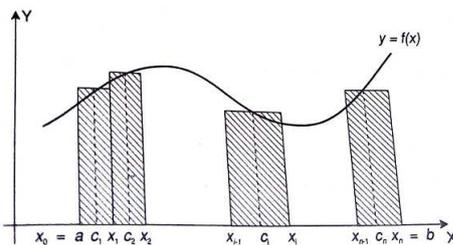
Para definir a área da região S , faremos uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, dividiremos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Seja $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Em cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, escolheremos um ponto qualquer $C_i \in [x_{i-1}, x_i]$, construiremos um retângulo de base Δx_i e altura $f(C_i)$. Veja a figura 20:

Figura 20 – Área sob $y = f(x)$ com partições no intervalo $[a, b]$



Fonte: Autoria própria

Assim, a soma das áreas dos n retângulos que representamos por S_n é da forma,

$$S_n = f(C_1)\Delta x_1 + f(C_2)\Delta x_2 + \dots + f(C_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(C_i)\Delta x_i.$$

Esta soma é denominada a Soma de Riemann da função $f(x)$.

Notemos também que a medida que n aumenta e cada Δx_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, torna-se muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se da área de S .

Diante do estudado até então, segue a definição:

Definição 3.3 *Seja $y = f(x)$ uma função contínua, não negativa em $[a, b]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de a até b é definida por*

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(C_i) \Delta x_i,$$

onde para cada $i = 1, 2, \dots, n$, C_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Definição 3.4 *Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. A integral definida de f de a até b , denotada*

$$\int_a^b f(x) dx,$$

é dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(C_i) \Delta x_i,$$

desde que o limite do segundo membro exista.

A notação para a integral definida foi introduzida pelo Matemático Gottfried Wilhelm Leibniz. Para Boyer (1996, p.277) "Leibniz sempre teve uma percepção aguda da importância de boas notações como a ajuda ao pensamento, e sua escolha no caso do cálculo foi particularmente feliz".

Assim esta notação $\int_a^b f(x) dx$ pode ser lida como "integral de a até b de f de $x dx$ ". os números a e b são chamados limite inferior de integração e limite superior de integração, respectivamente. Temos que f é a função integrando, \int é o sinal de integral e o símbolo dx indica que x é a variável de integração. Desta forma se f é integrável em $[a, b]$, podemos escrever

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds.$$

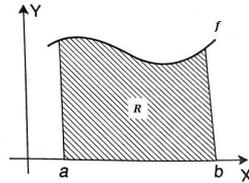
A variável x na integral pode ser representada por qualquer símbolo, ela é a que chamamos de uma varável "muda".

Note que quando a $f(x)$ é contínua e $f(x) \geq 0$ no intervalo $[a, b]$ a definição da integral definida coincide com a definição de área da região limitada por $x = a$, $x = b$ e $y = f(x)$. Dessa forma,

$$A(R) = \int_a^b f(x) dx,$$

é a área da região R .

Figura 21 – Área sob f



Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2006).

Definição 3.5 Consideremos f integrável no intervalo $[a, b]$.

1. Se $a > b$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx,$$

se a integral à direita existir.

2. Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Teorema 3.2 Se f é contínua sobre $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Propriedades da integral definida

A seguir enumeramos algumas propriedades, cujas demonstrações podem ser encontradas no livro de Flemming (2006).

Sejam f e g funções integráveis no intervalo $[a, b]$, e k um número real arbitrário. Segue as propriedades:

$$1. \int_a^b f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

$$2. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. Se $a < c < b$ e f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, então é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Se f é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

5. Se f e g são integrais em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

6. Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Proposição 3.4 *Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto c entre a e b tal que,*

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c).$$

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) relaciona o cálculo diferencial e o cálculo integral, isto por meio das operações de derivação e integração. Permite conhecer uma primitiva de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e calcular a sua integral definida, $\int_a^b f(t)dt$.

Teorema 3.3 [TFC - parte I] *Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e $g'(x) = f(x)$.

[TFC - parte II] *Se f for contínua em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. [TFC - parte I] Pela definição da derivada, sabemos que

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Mas, $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ e $g(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$, segue que

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Usando a propriedade 3, temos

$$\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \Rightarrow \\ g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Sendo f contínua em $[x, x+h]$, segue da proposição 3.4 que existe um ponto \bar{x} entre x e $x+h$ tal que,

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = (x+h-x)f(\bar{x}) = f(\bar{x})h.$$

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{f(\bar{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{x})$$

Como \bar{x} está entre x e $x+h$, segue que $\bar{x} \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$. Como f é contínua, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} f(\bar{x}) = f(x).$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x),$$

Ou seja, $g'(x) = f(x)$. ■

Demonstração. [TFC - parte II] Seja $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, com $a \leq x \leq b$. Pelo TFC parte I, temos que g é antiderivada de f , isto é, $g'(x) = f(x)$. Sabemos pela proposição 3.1 que se F for qualquer outra antiderivada de f em $[a, b]$, então $F(x) = g(x) + C$, com C constante real. Deste modo, temos

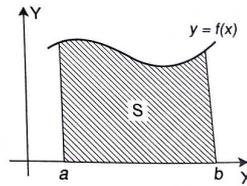
$$F(b) - F(a) = [g(b) + c] - [g(a) + c] = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt. \quad \blacksquare$$

3.2.1 Cálculo de áreas

Vimos no capítulo 1 como calcular área de algumas figuras como triângulos, retângulos e outras regiões poligonais, além da área do círculo. Nesta seção, fazendo uso de integrais definidas, estudaremos como calcular área de algumas regiões planas com contornos curvos. Desta forma, apresentaremos quatro casos mais frequentes deste tipo de região.

Caso I: Região delimitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x , onde f é contínua e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, conforme a figura abaixo :

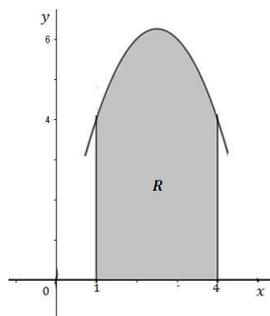
Figura 22 – Região do caso I



Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2006).

Exemplo 3.7 Determinar a área limitada pela curva $y = -x^2 + 5x$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$.

Solução: Fazendo o esboço da região, temos

Figura 23 – Área sob o gráfico de $y = -x^2 + 5x$.

Fonte: Autoria própria

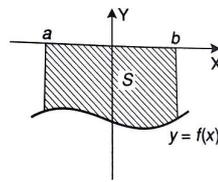
Assim, a área da região limitada por $y = -x^2 + 5x$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$ será:

$$A(R) = \int_1^4 (-x^2 + 5x) dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \Big|_1^4 = \frac{99}{6} = \left(-\frac{64}{3} + \frac{80}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\right) = \frac{99}{6} \text{ u.a.}$$

Onde *u.a* significa unidade de área.

Caso II: Região delimitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo x , onde f é contínua e $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, como na figura abaixo

Figura 24 – Região do caso II

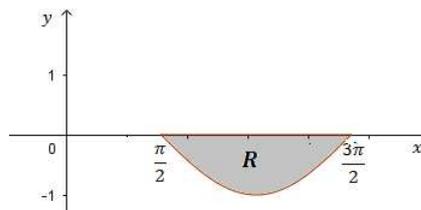


Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2006).

Exemplo 3.8 Encontre a área da região limitada pela curva $y = \cos x$, com $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

Solução: Fazendo o esboço da região, temos

Figura 25 – Área de sobre $y = \cos x$.



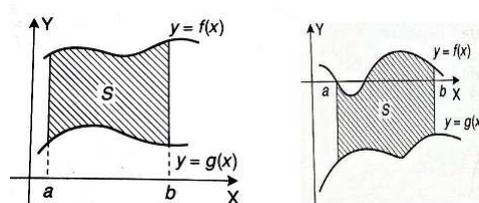
Fonte: Autoria própria

Logo,

$$A(R) = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx \right| = \left| \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right| = | -1 - 1 | = 2 \text{ u.a.}$$

Caso III: Região delimitada pelos gráficos das funções contínuas f e g , pelas retas $x = a$, $x = b$, onde $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, como nas figura abaixo

Figura 26 – Região do caso III



Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2006).

Assim,

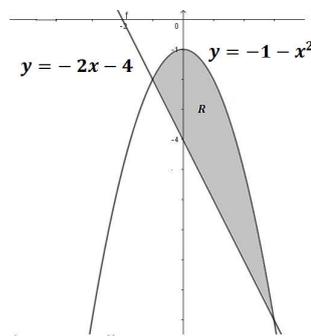
$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx,$$

independente das funções serem positivas ou negativas.

Exemplo 3.9 Encontre a área da região delimitada pelas curvas $y = -1 - x^2$, e $y = -2x - 4$.

Solução: Fazendo o esboço da região R , temos

Figura 27 – Área limitada pelas curvas $y = -1 - x^2$, e $y = -2x - 4$.



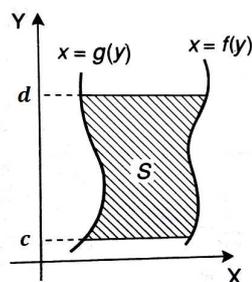
Fonte: Autoria própria

Assim, a área da região R será:

$$A(R) = \int_{-1}^3 [(-1 - x^2) - (-2x - 4)]dx = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \Big|_{-1}^3 = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

Caso IV: Região delimitada pelos gráficos das funções contínuas $x = f(y)$ e $x = g(y)$, pelas retas $y = c$, $y = d$, onde $f(y) \geq g(y)$, para todo $x \in [c, d]$, veja figura 28:

Figura 28 – Região do caso IV



Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2006).

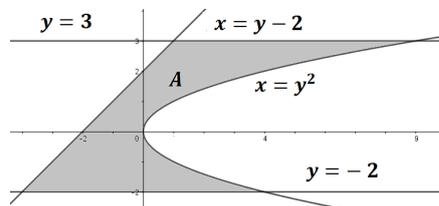
Deste modo,

$$A = \int_c^d f(y)dy - \int_c^d g(y)dy = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy.$$

Exemplo 3.10 Encontre a área da região limitada pelas curvas $x = y^2$, $x = y - 2$, $y = -2$ e $y = 3$.

Solução: As curvas $y = 3$ e $x = y^2$ se interceptam no ponto $(9, 3)$ e $y = -2$ e $x = y^2$ no ponto $(4, -2)$. Observe figura 29:

Figura 29 – Área limitada pelas curvas $x = y^2$, $x = y - 2$, $y = -2$ e $y = 3$.



Fonte: Autoria própria

Segue que,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^3 [y^2 - (y - 2)]dy = \int_{-2}^3 (y^2 - y + 2)dy \\ &= \left. \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right|_{-2}^3 \\ &= \frac{21}{2} + \frac{26}{3} = \frac{115}{6} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

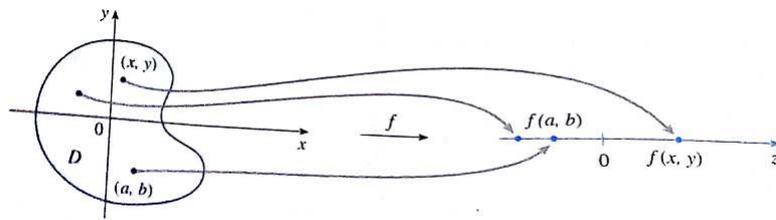
Observação 3.3 Uma região como a descrita no caso III é chamada região do tipo I e no caso IV uma região do tipo II.

3.3 Integral dupla

Trabalharemos, nesta seção, com funções de duas variáveis reais a valores reais e abordaremos algumas definições e propriedades da integral dupla. Antes definiremos funções de duas variáveis e sua continuidade.

Definição 3.6 (Funções de duas Variáveis) Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D , um único valor real denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o domínio de f e sua imagem, o conjunto de valores possíveis de f , ou seja, $\{f(x, y); (x, y) \in D\}$.

Figura 30 – Funções de duas variáveis



Fonte: STEWART, James. (2007).

Denotaremos $z = f(x, y)$, onde z é variável dependente e x e y são variáveis independentes.

Definição 3.7 Uma função f de duas variáveis é dita contínua em (a, b) se

- $f(x, y)$ existir em (a, b) ;
- O limite de $f(x, y)$ deve existir nesse ponto.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

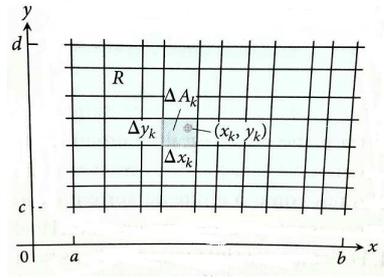
Dizemos que f é contínua em D se for contínua em todo ponto (a, b) de D

Agora mostraremos como integrar uma função contínua $f(x, y)$ sobre uma região limitada no plano xy . Existe semelhança entre integrais duplas e integrais "simples" para função de uma única variável. Integrais duplas e simples são ambas definidas pela Soma de Riemann, ambas podem ser calculadas usando o Teorema Fundamental do Cálculo, sendo que na integral dupla é preciso aplicá-lo duas vezes. Vale destacar que na integral simples o domínio de integração é um intervalo $[a, b]$ e numa integral dupla é uma região R no plano.

Integrais duplas sobre retângulos

Suponhamos que $f(x, y)$ seja definida em uma região retangular R dada por $R : \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Imaginemos R uma região coberta por uma rede de retas paralelas aos eixos x e y . Veja figura

Figura 31 – Grade retangular particionando a região R em pequenos retângulos de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$.



Fonte: THOMAS, George B. (2009).

Observe que estas retas dividem R em pequenos retângulos de área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Estas áreas podem ser numeradas por alguma ordem $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$. Assim escolhemos um ponto (x_k, y_k) em cada retângulo ΔA_k e formamos a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k. \quad (3.5)$$

Sendo f contínua em \mathbb{R} , à medida que aumentamos o número de retas paralelas ao eixo x e y , reduzimos a largura da rede e tanto Δx quanto Δy tendem a zero, dessa maneira as somas na equação aproximam-se para um limite denominado de integral dupla de f em \mathbb{R} , denotada por

$$\iint_R f(x, y) dA \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x, y) dx dy$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k \quad (3.6)$$

O limite na equação 3.6 é independente da ordem na qual as áreas ΔA_k são numeradas e independentes da escolha do ponto (x_k, y_k) dentro de cada ΔA_k .

Propriedades de integrais duplas

Suponhamos que todas as integrais existam.

1. Múltiplo Constante:

$$\iint_R k f(x, y) dA = k \iint_R f(x, y) dA, \text{ para todo } k.$$

2. Soma e Diferença:

$$\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA.$$

3. Dominação:

$$\text{a) } \iint_R f(x, y) dA \geq 0 \text{ se } f(x, y) \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } \iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA, \text{ se } f(x, y) \geq g(x, y) \text{ em } \mathbb{R}.$$

4. Aditividade:

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA,$$

se R for a união de dois retângulos não sobrepostos R_1 e R_2 .

Teorema de Fubini

O teorema de Fubini permite relacionar a integral no \mathbb{R}^2 com a integral em \mathbb{R} . Este teorema foi publicado em 1907 e diz que a integral dupla de qualquer função contínua sobre um retângulo pode ser calculada como uma integral iterada em qualquer ordem de integração.

Observação 3.4 A integral iterada significa que primeiro integramos em relação a y de c a d e depois em relação a x de a até b , ou vice-versa. Entenderemos melhor no teorema que segue.

Teorema 3.4 (teorema de Fubini - primeira forma) Se $f(x, y)$ for contínua na região retangular R , $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Exemplo 3.11 Calcule o valor da integral dupla $\iint_R (4 - y^2) dA$, onde $R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

Solução: Utilizando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \iint_R (4 - y^2) dA &= \int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2) dy dx && (3.7) \\ &= \int_0^3 \left(4y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^3 \left(8 - \frac{8}{3} \right) dx \\ &= \left(8x - \frac{8x}{3} \right) \Big|_0^3 \\ &= \left(24 - \frac{24}{3} \right) = 16. \end{aligned}$$

Integrais duplas sobre regiões não retangulares limitadas

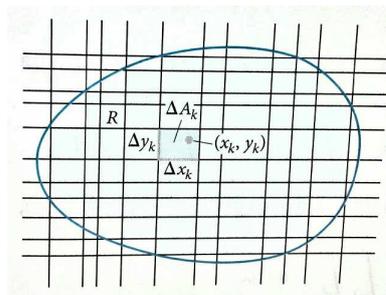
Podemos definir a integral dupla de uma função $f(x, y)$, sobre uma região não retangular limitada de forma semelhante a que definimos para uma região retangular.

Imaginemos agora uma região R sendo coberta por uma grade retangular. De modo que a soma parcial dos pequenos retângulos de área $\Delta A = \Delta x \Delta y$ estejam inteiramente dentro da região sombreada \bar{R} , Escolheremos um ponto (x_k, y_k) em cada retângulo e faremos a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k. \tag{3.8}$$

A única diferença entre a soma 3.5 e 3.8 para regiões retangulares é que agora as áreas ΔA_k podem não cobrir totalmente R .

Figura 32 – Região R coberta por uma grade retangular



Fonte: THOMAS, George B. (2009).

Observe que, à medida em que a malha da grade retangular diminui, o número de termos S_n aumenta, pois os retângulos ficarão cada vez menores e, como consequência, a área da região \bar{R} se aproximará cada vez mais da região R . Sendo f uma função contínua e o contorno da região R formado por um número finito de gráficos de funções contínuas de x e / ou y , a soma dos termos S_n terão limite ao passo que as normas das partições que estabelece a grade retangular se aproximam de zero independentemente. Chamamos este limite de integral dupla de f em R .

Observação 3.5 *As integrais duplas de funções contínuas de regiões não retangulares, tem as mesmas propriedades que integrais sobre regiões retangulares.*

Teorema 3.5 (Teorema de Fubini (Forma mais geral)) *Seja $f(x, y)$ contínua em uma região R .*

1. *Se R for definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, com g_1 e g_2 contínuas em $[a, b]$, então*

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} f(x, y) dy dx.$$

2. Se R for definida por $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, com h_1 e h_2 contínuas em $[c, d]$, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1}^{h_2} f(x, y) dx dy.$$

Exemplo 3.12 Calcule a integral dupla dada por $\iint_D x \cos y dA$, onde D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$.

Solução:

Usando Fubini, vem

$$\begin{aligned} \iint_D x \cos y dA &= \int_0^1 \int_0^{x^2} x \cos y dy dx = \int_0^1 x \sin y \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 x \sin x^2 dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \cos 1 + \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1). \end{aligned}$$

3.3.1 Cálculo de áreas usando integral dupla

Vimos anteriormente a definição de integrais duplas sobre regiões não retangulares limitadas, as somas parciais eram dadas por

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$

Fazendo $f(x, y) = 1$, as somas S_n se reduzem

$$S_n = \sum_{k=1}^n \Delta A_k.$$

Conforme Δx e Δy se aproximam de zero, a cobertura de ΔA_k , com $k \in \{1, \dots, n\}$, torna-se mais completa, e R é definida como o limite

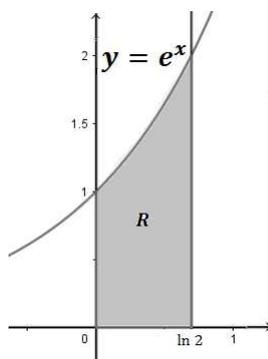
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \iint_R dA.$$

Definição 3.8 A área de uma região plana R fechada e limitada é:

$$A = \iint_R dA.$$

Exemplo 3.13 Esboce a região limitada pela curva $y = e^x$ e as retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = \ln 2$. E calcule a área da região como uma integral dupla iterada.

Solução: Esboçando a região R , temos

Figura 33 – Região R limitada por $y = e^x$ e as retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = \ln 2$ 

Fonte: Autoria própria

Segue que,

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} 1 dy dx = \int_0^{\ln 2} y \Big|_0^{e^x} dx = \int_0^{\ln 2} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1. \text{ u.a}$$

4 CÁLCULO DE ÁREAS POR MEIO DO TEOREMA DE GREEN

Neste capítulo objetivamos usar um relevante resultado do cálculo vetorial, teorema de Green, para obter a área de algumas regiões com contornos irregulares. Para isso, precisamos fazer um breve estudo sobre curvas, campo vetorial e integrais de linhas.

4.1 Curvas

Sejam

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t) \quad (4.1)$$

funções contínuas de uma variável t , com $t \in [a, b]$. definiremos curva como o conjunto de todos os pontos (x, y, z) determinados por 4.1. Essas equações são chamadas equações paramétricas da curva e t o parâmetro, este não representa necessariamente o tempo, poderíamos assim usar outra letra para representar o parâmetro em vez de t .

Observação 4.1 *Se as funções $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções constantes a curva degenera - se num ponto, isto pode acontecer no \mathbb{R}^3 e também no \mathbb{R}^2 .*

Vejamos alguns exemplos:

1. A equação vetorial $r(t) = ti + (t + 2)j + (2t + 1)k$ representa uma reta, cujas equações paramétricas são $x(t) = t; y(t) = t + 2; z(t) = 2t + 1$.
2. A equações paramétricas $x(t) = t + 1, y(t) = t^2 + 4$ e $z(t) = 2$ representam uma curva no espaço denominada parábola, a equação vetorial correspondente é $r(t) = (t + 1)i + (t^2 + 4)j + 2k$ com $-\infty \leq t \leq \infty$.
3. A equação $r(t) = ti + 4 \cos tj + 9 \sin tk, t \geq 0$, representa uma hélice circular, as equações correspondentes a esta equação vetorial são $x(t) = t, y(t) = 4 \cos t, e z(t) = 9 \sin t, t \geq 0$.

Definição 4.1 *Uma curva plana é uma curva que está contida em um plano no espaço, caso não seja plana, é chamada reversa .*

Note que as curvas dos exemplos 1 e 2 são planas e 3 é uma curva reversa.

Parametrização de algumas curvas

- Reta

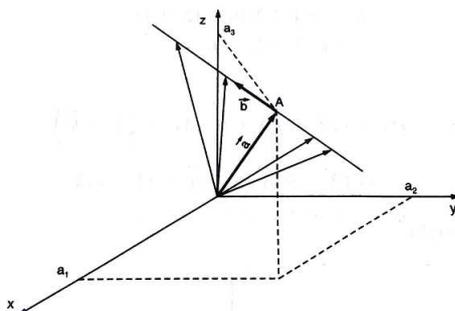
A equação $r(t) = a + tb$ é chamada equação vetorial da reta, e pode ser utilizada para uma reta qualquer. Onde a e b são vetores constantes e t é um parâmetro real.

Considerando o ponto $P(a_1, a_2, a_3)$ que coincide com as componentes do vetor a e seja $b = (b_1, b_2, b_3)$ um vetor, temos

$$r(t) = (a_1 + tb_1)i + (a_2 + tb_2)j + (a_3 + tb_3)k \quad (4.2)$$

Daí, $x(t) = a_1 + tb_1$, $y(t) = a_2 + tb_2$ e $z(t) = a_3 + tb_3$ são equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $P(a_1, a_2, a_3)$ e tem direção do vetor $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Figura 34 – Representação geométrica da equação da reta.



Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2007).

- Circunferência

A equação vetorial de uma circunferência no plano xy , centrada na origem e raio $a > 0$ (figura 35 (a)), é dada por

$$r(t) = a \cos t i + a \sin t j, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4.3)$$

As equações paramétricas de 4.3 são $x(t) = a \cos t$ e $y(t) = a \sin t$.

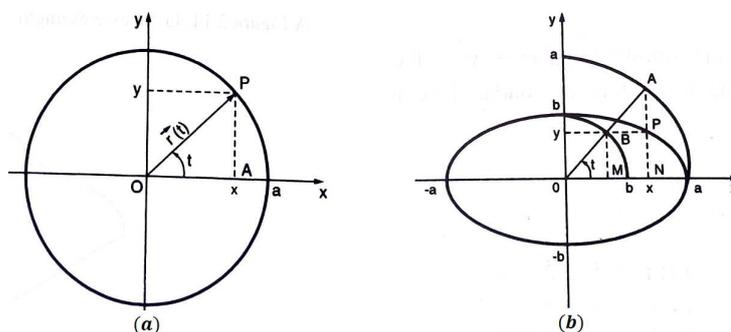
- Elipse

A equação vetorial de uma elipse, no plano xy , com centro na origem e eixos nas direções dos eixos x e y (figura 35 (b)), é dada por

$$r(t) = a \cos t i + b \sin t j, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4.4)$$

Observação 4.2 *Curvas com equações da forma $y = f(x)$, com as quais estamos mais acostumados pois são gráficos de funções, podem ser parametrizadas de um modo mais simples. Tomando-se x como parâmetro, temos $x = t$ e $y = f(t)$.*

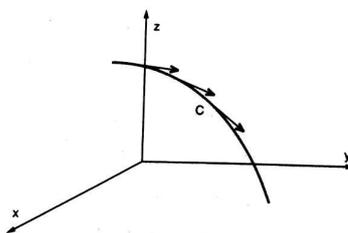
Figura 35 – Parametrização da circunferência e da elipse.



Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2007).

Definição 4.2 Uma curva c é dita suave ou regular quando a função vetorial $r(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, tem derivada contínua $r'(t)$ e $r'(t) \neq 0$. Geometricamente, significa que a curva não possui pontos angulosos. Veja figura abaixo.

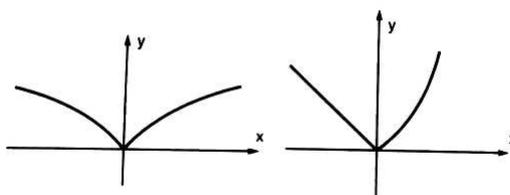
Figura 36 – Representação de uma curva suave.



Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2007).

Observação 4.3 Uma curva que pode ser dividida num número finito de curvas suaves, é dita suave por partes.

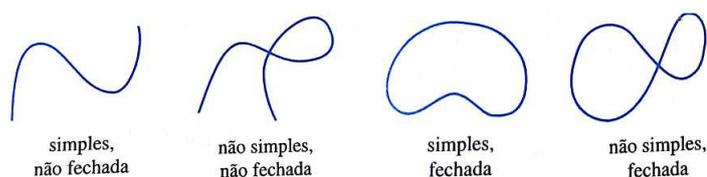
Figura 37 – Representação de uma curva suave por partes.



Fonte: FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. (2007).

Observação 4.4 Uma curva é fechada quando dado $t \in [a, b]$, temos $r(a) = r(b)$. É simples quando cada ponto da curva corresponde um único valor do parâmetro t , exceto $t = a$ e $t = b$, ou seja, a curva não se autointercepta.

Figura 38 – Tipos de curvas.



Fonte: STEWART, James. (2007).

Definição 4.3 Uma região simplesmente conexa D (D é domínio no \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3), tal que toda curva simples fechada em D contorna somente pontos que estão em D .

Em uma região simplesmente conexa não há buracos, e a região também não pode ser constituída de pedaços separados.

4.2 Campos vetoriais

Nesta seção, iremos definir campo vetorial, conceito necessário à integral de linha.

Definição 4.4 Seja D um conjunto em \mathbb{R}^2 uma região plana. Um campo vetorial sobre \mathbb{R}^2 é uma função F que associa a cada ponto (x, y) um vetor $F(x, y)$.

Definição 4.5 Seja E um subconjunto do \mathbb{R}^3 . Um campo vetorial sobre o \mathbb{R}^3 é uma função F que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $F(x, y, z)$.

Exemplo 4.1 Seja $F(x, y) = -xi - yj$. F define um campo vetorial sobre o \mathbb{R}^2 .

Solução: Vamos descrever F desenhando alguns de seus vetores $F(x, y)$.

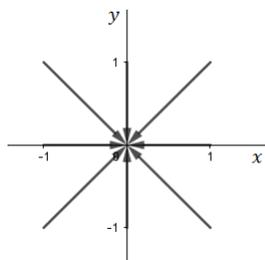
Para fazermos a representação geométrica de um campo, tomamos alguns pontos $P \in D$ e desenhamos o vetor $F(P)$ como uma seta com a origem em P (transladada paralelamente da origem para P).

Tabela 2 – Alguns vetores de $F(x, y)$.

x	$f(x, y) = -xi - yj$
(1, 0)	(-1, 0)
(-1, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(-1, -1)
(0, 1)	(0, -1)
(0, -1)	(0, 1)
(-1, -1)	(1, 1)
(1, -1)	(-1, 1)
(-1, 1)	(1, -1)

Fonte: Autoria própria

Figura 39 – Campo vetorial.



Fonte: Autoria própria

Campos gradiente

Definição 4.6 Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função tal que as derivadas parciais existam e A é um conjunto aberto, então o gradiente de f , denotado por $\text{grad}(f)$ ou ∇f , será definido por

$$\nabla f = \text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Exemplo 4.2 Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = 4x^2 - 3xy + y^2$.

Solução: Temos, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x - 3y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x + 2y$.

Logo, $\nabla f = (8x - 3y)i + (-3x + 2y)j$.

Definição 4.7 Um campo vetorial F é dito conservativo se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função f tal que $F = \nabla f$. Nessa situação f é denominada Função Potencial de F .

Exemplo 4.3 O campo vetorial F dado por $F(x, y, z) = (10xz + y \sin(xy))i + x \sin(xy)j + 5x^2k$, é conservativo pois, se definimos $f(x, y, z) = 5x^2z - \cos(xy)$, temos

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

$$\nabla f = (10xz + y \sin(xy))i + x \sin(xy)j + 5x^2k = F(x, y, z).$$

Ou seja,

$$\nabla f = F(x, y, z).$$

Rotacional de um campo

Definição 4.8 Seja $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ um campo vetorial definido num domínio D , com as derivadas parciais de P , Q e R contínuas em D . O rotacional de f , denotado por $\text{rot} f$ é dado por

$$\text{rot} f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\text{rot} f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k. \quad (4.5)$$

Observação 4.5 Para o resultado de 4.5, utilizamos o operador diferencial ∇ ("nabla" ou "del"), com

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Este, quando operado sobre uma função escalar, produz o gradiente de f , isto é,

$$\nabla = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Observação 4.6 Podemos dizer que o aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo quando é conexo por caminhos e toda curva fechada contínua em A pode ser "deformada por continuidade" a um ponto de A , sem sair de A .

Teorema 4.1 Seja $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($n = 2, 3$) um campo vetorial de classe C^1 no aberto Ω . Se Ω for simplesmente conexo e $\text{rot} f = 0$, então F será conservativo.

Exemplo 4.4 $\Omega = \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ não é simplesmente conexo.

Exemplo 4.5 $\Omega = \mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)$ é simplesmente conexo.

4.3 Integrais de linhas de um campo vetorial

As integrais de Linha foram desenvolvidas no início do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluídos, forças eletricidade e magnetismo. Nesta seção estudaremos as integrais de Linhas de Campos Vetoriais e de início traremos o conceito físico de trabalho.

Definição 4.9 *Sejam $c : \gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$ e F um campo de forças $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ contínuo sobre c . O trabalho realizado por F para deslocar uma partícula ao longo de c , é definido como*

$$\tau = \int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Definição 4.10 *Dado um campo vetorial contínuo qualquer $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω aberto, uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ de classe C^1 . Definiremos a integral de Linha ou curvilínea de F sobre γ por*

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

quando a integral a direita existe.

Quando a curva c é suave por partes, definimos

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma,$$

como a soma das integrais sobre cada parte suave da curva.

Observemos que se F tem componentes P, Q e R e $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$, temos

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)] dt. \tag{4.6}$$

A equação 4.6 nos sugere a notação:

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dz}{dt}] dt.$$

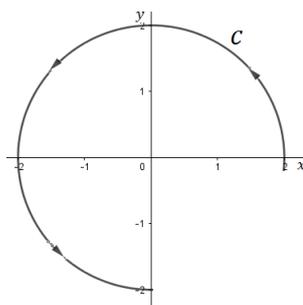
Observação 4.7 *Se $-c$ representa a curva c orientada no sentido oposto (do ponto inicial B para o ponto final A), então temos*

$$\int_{-c} f(x, y) dx = - \int_c f(x, y) dx.$$

Exemplo 4.6 $F(x, y) = (x - y)i + xyj$, c é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido anti-horário de $(2, 0)$ a $(0, -2)$.

Solução: Fazendo o esboço da curva, temos

Figura 40 – Esboço da curva.



Fonte: Autoria própria

parametrizando c , temos $x = 2 \cos t$ e $y = 2 \sin t$, com $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$. Assim, $r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ e $r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$, segue que,

$$\begin{aligned} \int_c F \cdot dr &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (2 \cos t - 2 \sin t, 2 \cos t 2 \sin t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (-4 \cos t \sin t + 4 \sin^2 t + 8 \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \underbrace{-4 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos t \sin t dt}_I + \underbrace{4 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 t dt}_{II} + \underbrace{8 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt}_{III} \\ &= -2 + 3\pi + \frac{8}{3} = 3\pi + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Para resolver I e III usamos o método da substituição simples e para II usamos identidade trigonométrica.

4.3.1 Integral de linha de um campo conservativo

Pelo TFC se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua e se $\varphi[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma primitiva de $f(\varphi' = f)$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \varphi'(x) dx = \varphi(a) - \varphi(b).$$

Este resultado pode ser generalizado pelo seguinte teorema:

Teorema 4.2 Se $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ for um campo vetorial contínuo e conservativo, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função potencial para F ($\nabla\varphi = F$) e se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ for uma curva de classe C^1 , com $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$, então

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\gamma} \nabla\varphi d\gamma = \varphi(a) - \varphi(b).$$

Observação 4.8 O teorema 4.2 vale para γ de classe C^1 e, vale também se γ for de classe C^1 por partes.

Observação 4.9 Se φ é uma função de duas variáveis e c uma curva plana com início em $A(x_1, y_1)$ e término em $B(x_2, y_2)$, o teorema 4.2 fica

$$\int_c F dr = \int_c \nabla\varphi dr = \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1).$$

Note que o valor da integral de linha de F não depende da curva que liga A e B , tal valor depende apenas dos pontos A e B .

Observação 4.10 Dado γ uma curva fechada ($\gamma(a) = \gamma(b)$), usaremos a notação $\oint_{\gamma} F \cdot d\gamma$ para indicar a integral de linha de F sobre γ . Assim,

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\gamma = 0$$

4.4 Teorema de Green

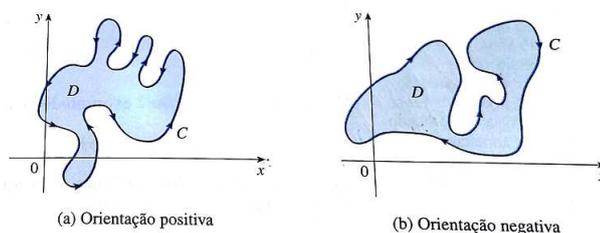
Este teorema expressa uma integral de linha em torno de uma curva fechada no plano, como uma integral dupla sobre uma região limitada pela curva. O nome Teorema de Green é uma homenagem ao Matemático e Físico Inglês George Green (1793 - 1841), que introduziu o teorema em um trabalho escrito sobre aplicações de Matemática à Eletricidade e Magnetismo.

Uma das hipóteses deste teorema é considerar uma curva fechada simples orientada positivamente, ser orientada positivamente se refere a percorrer c no sentido anti - horário apenas uma vez. Assim se c for dado como uma função vetorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região D está à esquerda quando o ponto $r(t)$ percorrer c .

Teorema 4.3 (Teorema de Green) Seja c uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por c . se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então

$$\int_c P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (4.7)$$

Figura 41 – Orientação de curva.



Fonte: STEWART, James. (2007).

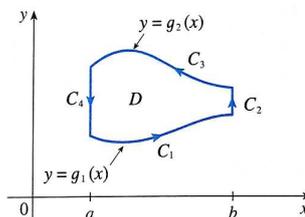
Demonstração. Note que o teorema de Green estará provado se mostrarmos

$$\int_c P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \tag{4.8}$$

$$\int_c Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \tag{4.9}$$

Vamos provar a equação 4.8 exprimindo D como uma região do tipo I,

Figura 42 – Região do tipo I.



Fonte: STEWART, James. (2007)

$D = \{(x, y); a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, onde $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são funções contínuas.

Calculando o lado esquerdo da equação 4.8, vem

$$\int_c P(x, y) dx = \int_{c_1} P(x, y) dx + \int_{c_2} P(x, y) dx + \int_{c_3} P(x, y) dx + \int_{c_4} P(x, y) dx.$$

Em c_1 , tomamos como parâmetro $x = t$ e escrevemos as equações paramétricas como $x = t$ e $y = g(t)$, com $a \leq t \leq b$. Assim,

$$\int_{c_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(t, g(t)) dt.$$

Em c_2 , tomamos $x = b$ e $y = t$, $g_1(x) \leq t \leq g_2(x)$. Daí,

$$\int_{c_2} P(x, y) dx = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P(b, t) dt = 0.$$

Como $x = b$ é constante segue que $\frac{dx}{dt} = 0$. Observe que para c_4 , temos a mesma situação da curva c_2 , isto é,

$$\int_{c_4} P(x, y)dx = 0.$$

Agora vamos encontrar uma parametrização para c_3 . Note que c_3 vai da direita para esquerda, mas $-c_3$ vai da esquerda para direita. Assim podemos escrever as equações paramétricas de $-c_3$ como $x = t$ e $y = g_2(t)$, $a \leq t \leq b$. Logo,

$$\int_{c_3} P(x, y)dx = - \int_{-c_3} P(x, y)dx = \int_a^b (t, g_2(t))dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_c P(x, y)dx &= \int_a^b (t, g_1(t))dt + 0 - \int_a^b (t, g_2(t))dt + 0 \Rightarrow \\ \int_c P(x, y)dx &= \int_a^b (t, g_1(t))dt - \int_a^b (t, g_2(t))dt \Rightarrow \\ \int_c P(x, y)dx &= \int_a^b [(t, g_1(t)) - (t, g_2(t))]dt. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora, calculando a integral dupla do lado direito da equação 4.8, vem

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx.$$

Segue que,

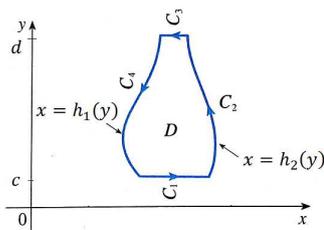
$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b [P(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x))] dx. \tag{4.11}$$

Comparando as equações 4.10 e 4.11, obtemos

$$\int_c P(x, y) dA = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Agora vamos provar a equação 4.9. Expressindo D como uma região do tipo II, temos

Figura 43 – Região do tipo II.



Fonte: STEWART, James. (2007).

$D = \{(x, y); c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, onde $h_1(y)$ e $h_2(y)$ são funções contínuas. Resolvendo o lado esquerdo da equação 4.9, temos

$$\int_c Q(x, y)dy = \int_{c_1} Q(x, y)dy + \int_{c_2} Q(x, y)dy + \int_{c_3} Q(x, y)dy + \int_{c_4} Q(x, y)dy.$$

Tomamos em c_1 , $x = t$ e $y = c$, com $h_1(y) \leq t \leq h_2(y)$. Assim,

$$\int_{c_1} Q(x, y)dy = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} (t, c)dt = 0,$$

como $y(t) = 0$, segue que $\frac{dy}{dt} = 0$. Da mesma forma, temos

$$\int_{c_3} Q(x, y)dy = 0.$$

Vamos agora encontrar uma parametrização para c_4 . Fazamos $y = t$ e $x = h_1(t)$, $c \leq t \leq d$. Observe que c_4 está orientada sentido contrário a curva c_2 , mas $-c_4$ tem mesmo sentido de c_2 . Assim podemos fazer,

$$\int_{c_4} Q(x, y)dy = - \int_{c_4} Q(x, y)dy = - \int_c^d (h_1(t), t)dt.$$

Para c_2 , tomamos $y = t$ e $x = h_2(t)$, $c \leq t \leq d$.

$$\int_{c_2} Q(x, y)dy = \int_c^d (h_2(t), t)dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_c Q(x, y)dy &= 0 + \int_c^d (h_2(t), t)dt + 0 - \int_c^d (h_1(t), t)dt \Rightarrow \\ \int_c Q(x, y)dy &= \int_c^d (h_2(t), t)dt - \int_c^d (h_1(t), t)dt \Rightarrow \\ \int_c Q(x, y)dy &= \int_c^d [(h_2(t), t) - (h_1(t), t)]dt. \end{aligned} \tag{4.12}$$

calculando o lado direito da equação 4.9, temos

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d Q(x, y) \Big|_{h_2(y)}^{h_1(y)} dy \Rightarrow \\ \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)]dy. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Comparando 4.14 com 4.13, obtemos

$$\int_c Q(x, y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA.$$

Logo, somando as equações 4.8 e 4.9, obtemos

$$\int_c Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

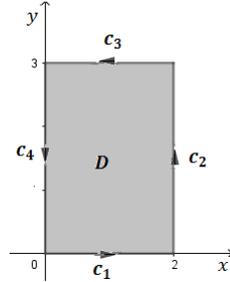


Usaremos o teorema de Green para calcular alguns exemplos de integrais de linhas.

Exemplo 4.7 $\int_c xy^2 dx + x^3 dy$, c é o retângulo com vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$ e $(0, 3)$.

Solução: Inicialmente vamos fazer o esboço da região D , delimitada pela curva C .

Figura 44 – Região D , delimitada por C



Fonte: Autoria própria

Observe que a curva está orientada positivamente, dessa forma podemos aplicar o Teorema de Green. Fazendo, $P(x, y) = xy^2$ e $Q(x, y) = x^3$, temos $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$, segue que,

$$\int_c xy^2 dx + x^3 dy = \int_0^3 \int_0^2 (3x^2 - 2xy) dx dy = \int_0^3 (x^3 - x^2 y) \Big|_0^2 dy = \int_0^3 (8 - 4y) dy \Rightarrow$$

$$\int_c xy^2 dx + x^3 dy = 8y - 2y^2 \Big|_0^3 = 24 - 18 = 6$$

Logo,

$$\int_c xy^2 dx + x^3 dy = 6.$$

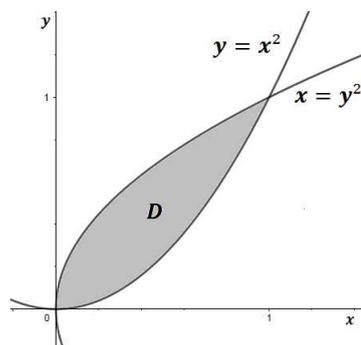
Exemplo 4.8 $\int_c (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$, c é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$, orientada positivamente.

Solução: Primeiramente vamos fazer o esboço da região D (figura 45), delimitada por c .

Fazendo $P(x, y) = y + e^{\sqrt{x}}$ e $Q(x, y) = 2x + \cos y^2$, temos $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$. assim.

$$\int_c (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy = \iint_D (2 - 1) dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^1 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \Rightarrow$$

$$\int_c (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2) dx = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Figura 45 – Região D , delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Fonte: Autoria própria

Observe que as integrais dos exemplos 4.6 e 4.7 poderiam ser calculadas pelos métodos usuais, o que envolveria um extenso processo, o que pode ser evitado usando o Teorema de Green para resolver a integral de Linha sobre uma curva c , de modo que c limita uma região D , a qual as condições do Teorema de Green são satisfeitas.

4.4.1 O teorema de Green no cálculo de áreas

Traremos a seguir um resultado que é a consequência do Teorema de Green, fornece um método útil para o cálculo da área de uma região limitada por uma curva suave simples e fechada.

Teorema 4.4 *Se D for uma região tendo por fronteira uma curva fechada simples e seccionalmente suave, e A unidades de área de D , então*

$$A = \frac{1}{2} \int_c xdy - ydx. \quad (4.14)$$

Demonstração. Pelo Teorema de Green, podemos demonstrar 4.14, fazendo $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ e $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$. Temos

$$\begin{aligned} \int_c -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}ydy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) dA \\ &= \iint_D \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dA \\ &= \iint_D dA. \end{aligned}$$

Como $\iint_D dA$ é a medida da área de D , logo

$$\frac{1}{2} \int_c xdy - ydx = A.$$



Vamos resolver alguns exemplos usando o teorema 4.4 para as áreas das regiões limitadas pelas curvas nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.9 A elipse $r(t) = (a \cos t)i + (b \sin t)j$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução: Vamos utilizar o teorema 4.4 para resolver o exemplo, temos $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$, assim $dx = -a \sin t dt$ e $dy = b \cos t dt$. Segue que,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \cdot b \cos t dt - b \sin t \cdot (-a \sin t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt \\ &= \frac{1}{2} ab t \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} ab \cdot 2\pi - \frac{1}{2} ab \cdot 0 = \pi ab \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Exemplo 4.10 A circunferência $r(t) = (a \cos t)i + (a \sin t)j$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução: Fazendo $x = a \cos t$ e $y = a \sin t$, temos $dx = -a \sin t dt$ e $dy = a \cos t dt$. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot a \cos t dt - a \sin t \cdot (-a \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1}] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 t \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} a^2 \cdot 2\pi = \pi a^2 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Exemplo 4.11 Calcule a área da região limitada pela curva $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução: Temos, $x = a \cos^3 t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t$ e $y = a \sin^3 t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_c x dy - y dx = \int_0^{2\pi} a \cos^3 t 3a \sin^2 t \cos t dt + a \sin^3 t 3a \cos^2 t \sin t dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (3a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^2 t \sin^2 t dt \\
 &= 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t \cos t \sin t dt.
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Usando a identidade trigonométrica $\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$, temos

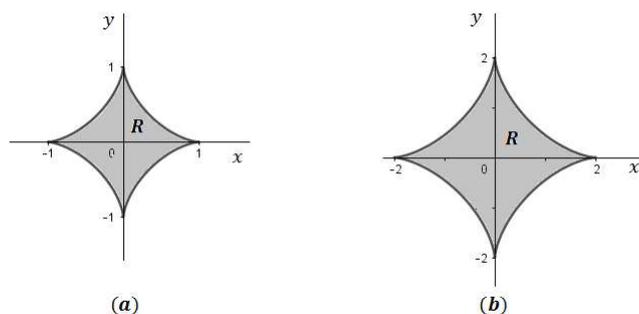
$$\cos t \sin t = \frac{\sin(2t)}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{(\sin(2t))^2}{4} dt \\
 &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt \\
 &= \left(\frac{1}{2}t - \frac{\sin(4t)}{8} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2}{8} \pi \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

Se por exemplo $a = 1$, temos a região representada pela figura 46 (a), cuja área da hipocicloide é dada por $A(R) = \frac{3\pi}{8}$ u.a. Para $a = 2$, temos a área representada na figura 46 (b), com $A(R) = \frac{12\pi}{8}$ u.a .

Figura 46 – Região D , delimitada pela curva $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.



Como podemos observar o teorema de Green é um dos mais importantes resultados do Cálculo Vetorial, é relevante para o cálculo de áreas de figuras planas e estabelece uma relação entre integrais de linha e integrais dupla, em algumas situações, o Teorema de Green transforma o cálculo de uma integral de linha complicada no de uma integral dupla mais simples, facilita o cálculo de áreas regiões "deformadas".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término deste trabalho pudemos perceber que há diversos estudos voltados para o cálculo de áreas, mas não é muito comum trazer essa abordagem desde o ensino básico até o superior. Devido a essa carência, resolvemos explicar demonstrações de algumas fórmulas usadas para o cálculo de área de figuras planas, estudadas no ensino básico, e apresentar algumas ferramentas matemáticas necessárias ao cálculo de área de regiões com contornos curvos, estudados no ensino superior.

Desde antiguidade o homem necessitava determinar áreas de superfícies planas, seja objetivando a plantação ou construção de moradias. E nos dias atuais este problema continua sendo de interesse de matemáticos, além de diversos profissionais como engenheiros, topógrafos e arquitetos, por exemplo. Isto evidencia a relevância do tema.

Este trabalho possibilitou além de verificar a forma como este conteúdo, área, é tratado durante o ensino básico até o ensino superior; aprofundar conhecimentos relacionados ao tema. Apresentamos as áreas de algumas figuras planas, obtendo suas respectivas fórmulas; a integral definida que é usada para calcular áreas delimitadas por curvas e o Teorema de Green, que é muito útil na determinação da área de regiões limitadas por uma curva seccionalmente suave, simples e fechada. Uma sugestão para estudos posteriores é analisar a relação existente entre o Teorema de Green e o planímetro, um instrumento que calcula área de figuras planas apenas se movendo sobre o contorno da curva fechada.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Loão Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 10 ed. Fortaleza: Printed in Brazil, 2013.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 7 ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BOYER, Carl. Benjamin. **História da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Dante**. 1 ed. Vol. único. São Paulo: Ática, 2005.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8 ed. Vol. 9. São Paulo: Atual, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, São Paulo: UNICAMP, 2004.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo A: Funções, limite, derivação e integração**. 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. 2 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo C: Funções vetoriais, integrais curvilíneas, integrais de superfície**. Florianópolis: UFSC, 1992.

GARDI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. 5 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

MACHADO, P. F. **Fundamentos da Geometria Plana**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. George Green. **Mac Tutor History of Mathematics archive**. 2018. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>>. Acesso em: 15 de julho de 2018.

RESENDE, Eliane Quelo Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim. **Geometria Euclidiana plana e construções geométricas**. 2. ed. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008.

RIBEIRO, Taís Alves Silva. **Cálculo Diferencial e Integral: abordagem histórica**. Jornada Científica, [S.l.], v.1, n.2, out. 2016. ISSN 2447-2581. Disponível em:

<<http://revista.unisal.br/lo/index.php/revistajornada/article/view/482>>. Acesso em: 02 maio 2018.

STEWART, James. **Cálculo**. 5 ed, vol. 1. São Paulo: Thosom Learning, 2007.

STEWART, James. **Cálculo**. 5 ed, vol. 2. São Paulo: Thosom Learning, 2007.

WIER, Maurice D.; HASS, Joel; GIORDIANO; Frank R. **Cálculo George B. Thomas**. 11 ed, vol. 2. São Paulo: Addison Wesley, 2009.