UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ISMAEL ARAÚJO DA SILVA

EQUAÇÃO DE ONDA: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA DESCRIÇÃO DO MODELO OSCILATÓRIO EM UMA E DUAS DIMENSÕES

CUITÉ - PB
2018

ISMAEL ARAÚJO DA SILVA

EQUAÇÃO DE ONDA: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA DESCRIÇÃO DO MODELO OSCILATÓRIO EM UMA E DUAS DIMENSÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientadora: Maria de Jesus Rodrigues da Silva

CUITÉ - PB
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

S586e Silva, Ismael Araújo da.

Equação de onda: equações diferenciais na descrição do modelo oscilatório em uma e duas dimensões. / Ismael Araújo da Silva. – Cuité: CES, 2018.

72 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2018.

Orientadora: Maria de Jesus Rodrigues da Silva.

1. Equações diferenciais. 2. Séries. 3. Condições de fronteira. I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG CDU 51

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer as pessoas que fizeram parte da minha vida acadêmica, em especial, quero agradecer a meu irmão Maciel Araújo que me ajudou muito no início da trajetória, a minha amiga Girlene Santos que me ajudou em horas difíceis.

A os colegas da Residência, dos cursos de física e de Matemática pela boa companhia e incentivo.

A minha orientadora Prof ª. Maria de Jesus pela orientação, paciência e cobrança que desde cedo me incentivou muito.

Ao meu orientador do PIBIC Prof. Aluízio Freire pelos ensinamentos durante os dois anos de projeto.

Ao Prof. Luciano Barros por ter aceitado participar da banca examinadora.

E a todos os professores que de alguma forma contribuíram com a minha formação acadêmica, em especial a os professores, Maciel Medeiros, Célia Maria, Nilton Frazão, Vera Solange, Luando Brito, Jaqueline Lixandrão.

RESUMO

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica básica pura, de caráter exploratório onde apresentamos, por meio de exemplos físicos, uma análise nas descrições de "Ondas Mecânicas" especificamente ondas que se propagam ao longo de uma corda e de uma malha. Para cada caso, o desenvolvimento é realizado a partir do meio em que se propaga a onda. A maioria das propriedades das ondas mecânicas vale para todos os tipos de ondas, como as eletromagnéticas que estão presentes no funcionamento de várias descobertas que utilizamos em nossas vidas, a saber, a televisão, o rádio, a internet, forno de micro-ondas, telefone, entre outras. Além do mais, as ondas mecânicas aparecem em nosso dia a dia como: ondas do mar, ondas sonoras e ondas sísmicas. O texto no qual apresentamos nossa pesquisa se inicia com alguns conceitos relacionados às Equações Diferenciais, em seguida são tratados os conceitos físicos, por meio de construções e definições que partem do Movimento Harmônico Simples até chegarem às descrições de um movimento ondulatório. A partir de considerações físicas, é deduzida a equação que modela a propagação de onda ao longo de uma corda e de uma malha, caso unidimensional e bidimensional, respectivamente. Usando o método de separação de variáveis obtemos uma solução, na qual aparece um somatório de funções senoidais e quando a equação é resolvida para um problema específico, condições específicas, a soma converge para uma função que representa o movimento ondulatório deste problema. Este trabalho possibilitou um aprofundamento no conhecimento científico inerente às equações diferenciais, especialmente as equações diferenciais parciais que geralmente não são estudadas por alunos de curso de licenciatura em Matemática, além disso, pudemos analisar uma importante aplicação física de tais equações.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Séries. Condições de fronteira.

ABSTRACT

This work is characterized as a pure basic bibliographical research, of exploratory character where we present, through physical examples, an analysis in the descriptions of "Mechanical Waves" specifically waves that propagate along a rope and a mesh; for each case, the development is performed by the medium in which the wave propagates. Most of the properties of mechanical waves apply to all types of waves, such as electromagnetic waves that are present in the which we use in our lives, namely, television, radio, the internet, microwave oven, telephone, among others. Moreover, mechanical waves appear in our daily lives as: sea waves, sound waves and seismic waves. The text in which we present our research begins with some concepts Differential Equations, then the physical concepts are treated, through constructions and definitions that start from the Harmonic Movement until they reach the descriptions of an undulating movement. From physical considerations, the equation that models the wave propagation along a string and a mesh, one-dimensional and two-dimensional, respectively, is deduced. Using the method of separation of variables we obtain the solution, in which a summation of sinusoidal functions appears and when the equation is solved for a specific problem, specific conditions, the sum converges to a function that represents the undulatory movement of this problem. This work allowed a deepening in the scientific knowledge inherent to the differential equations, especially the partial differential equations that were not studied by undergraduate tudents in Mathematics, in addition, we were able to analyze an important physical application of such equations.

Keywords: Differenctial equations. Series. Boundary conditions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É notório que o nosso universo está repleto de sinais que se transmitem de um ponto a outro por algum meio, com certa velocidade, estes sinais, chamamos de ondas. As ondas podem aparecer: na superfície da água, em um efeito dominó, em uma mola em compressão ou rarefação, no movimento da corda de um violão, na propagação da luz, na transmissão de rádio e de televisão, nos terremotos, nos sons musicais e em ultrassons. (NUSSENZVEIG, 2001).

Em Londres foi inaugurada uma passarela, conhecida como “Ponte do Milénio”, que teve como objetivo facilitar o trânsito de pedestres sobre o rio Tâmisa, mas infelizmente após uma onda de pedestre a ponte começou a oscilar de tal forma que as pessoas tiveram dificuldades para se manter em pé durante a travessia. Após a inauguração da ponte em 2001, a quantidade de pessoas que utilizava a ponte por vez era pequena, mas mesmo assim as oscilações tendiam a atiçar o segundo harmônico da onda na ponte, o que ainda não ocasionava nenhum problema nas oscilações durante sua passagem. Quando então a quantidade de pedestres ultrapassou certo valor, as oscilações na ponte foram tantas que dificultaram a caminhada das pessoas. Para que os pedestres pudessem se manter em equilíbrio, os mesmos sincronizaram seus passos com o movimento da ponte, o que tornou o problema ainda mais grave. Depois da ocorrência a ponte foi fechada pelas autoridades até instalarem um sistema de amortecimento. Problemas como o da ponte do Milénio podem acontecer em estádios de futebol ou em uma pista de dança, em que as pessoas se movimentam de um lado para outro de forma sincronizada (HALLIDAY, RESNICK 2011).

As manifestações em forma de ondas que nos cercam, podem trazer benefícios ou danos. Uma vez conhecidas as propriedades do fenômeno podemos utiliza-lo a nosso favor ou nos esquivar de algum dano. Quando trabalhamos com matemática aplicada em fenômeno físico, uma das primeiras intuições é querer encontrar de alguma maneira, uma (ou mais) equação que descreva o fenômeno, no caso do movimento oscilatório é interessante conhecer uma (ou mais) equação que descreva o movimento das partículas em oscilações e, além disso, resolver a equação e interpretar fisicamente o resultado. Com o objetivo de deduzir, resolver e interpretar fisicamente o resultado da equação que modela a propagação de onda nos casos unidimensional e bidimensional, nossa pesquisa está organizada em quatro capítulos, os quais passamos a descrever.

No primeiro capítulo apresentamos conceitos de Equações Diferenciais, tais como existência de soluções, problema de valor inicial, alguns métodos de resolução para Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), conjunto fundamental de soluções e o método de separação de variáveis para Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Esses conteúdos são indispensáveis aos capítulos três e quatro.

No capítulo dois trazemos diversos conceitos físicos de um movimento oscilatório, tais como a descrição do movimento de uma partícula que se desloca de um lado para outro repetidamente, como obter as grandezas que aparecem no movimento da partícula, classificações das ondas, grandezas que aparecem em uma onda. Tais conceitos ajudam no entendimento dos resultados apresentados nos capítulos três e quatro.

No capítulo três iniciamos com a dedução da Equação de Onda (EDP) e a resolvemos para o caso unidimensional, caso em que a onda se propaga em uma corda presa nas extremidades, com uma velocidade e deflexão inicial definidas. A solução geral encontrada é fornecida em forma de série de funções trigonométricas, a qual depende de dois parâmetros. Em seguida é fornecido o valor de cada parâmetro presente na solução em função das funções que representam as condições iniciais.

Por último, no capítulo quatro, modelamos o movimento oscilatório em uma malha, que é o caso bidimensional. O modelo resulta em uma EDP com três variáveis independentes e resolvemos a equação para o caso em que a malha tem a geometria de um retângulo. A solução geral obtida é apresentada na forma do produto de duas séries de funções trigonométricas composta de dois parâmetros. Finalmente, cada parâmetro da solução geral é determinado em função de cada função que representa a deflexão inicial e a velocidade inicial.

A solução, para o modelo oscilatório em uma e duas dimensões, apresentada neste trabalho é fornecida considerando as condições iniciais como funções, essa realização possibilita aplicar a solução em diversos casos específicos. Para resolver as equações dos problemas supracitados usamos o método de separação de variáveis.

A solução geral obtida para a Equação de Onda em uma dimensão tem as características da Série de Fourier (é uma série de Fourier) e a solução geral para Equação de Onda em duas dimensões pode ser vista como uma Série de Fourier dupla. Embora não seja o foco de nosso trabalho discutir convergência dessas séries, as mesmas são convergentes quando consideramos as funções que representa as condições inicias pelo menos de classe C^2 a demonstração se encontra em (KREYSZIG, 2009).

1 EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS E PARCIAIS

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos fundamentais sobre as EDOs e EDPs que serão usados posteriormente para descrever problemas que envolvem oscilações em um meio material.

1.1 Equações diferenciais

Dada uma função $y = f(x)$, podemos calcular a sua derivada

$$\frac{dy}{dx} = f^{'}(x),$$

a qual é também uma função de x, que pode ser determinada usando métodos do cálculo diferencial. Por exemplo, sendo $y = e^{\tan(x)}$, teremos

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(x)e^{\tan(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2(x)y.$$

O problema que estamos interessados é: dado uma equação do tipo $\frac{dy}{dx} = \sec^2(x)y$, encontrar uma função $y = f(x)$ que a satisfaça.

Definição 1.1 *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de* ***equação diferencial*** *(ED).*

1.1.1 Classificação das equações diferenciais

As equações diferenciais são classificadas de acordo com o **tipo**, **ordem** e a **linearidade**.

Classificação de uma ED pelo tipo

Se uma equação diferencial é composta por somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, então esta é chamada de **Equação Diferencial Ordinária** (EDO). Uma equação diferencial que contém derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes com relação a duas ou mais variáveis independentes é chamada de **Equação Diferencial Parcial** (EDP). Observe as equações abaixo

01) $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$

02) $\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x = 0$

03) $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$

04) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. As equações 01 e 02 são exemplos de EDO e as equações 03 e 04 são exemplos de EDP.

Classificação de uma ED pela ordem

A ordem de uma equação diferencial ordinária (ou parcial) é a mesma da derivada de maior ordem que nela contem.

01) $\frac{dy}{dx} = \cos(x)$ (EDO de primeira ordem.)

02) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 0$ (EDO de terceira ordem.)

03) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ (EDP de primeira ordem.)

04) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (EDP de segunda ordem.)

Classificação de uma ED pela linearidade

Uma equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem é escrita como

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

no caso em que essa equação poder ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x),$$

a mesma será chamada de **equação linear**, que é caracterizada por duas propriedades:
i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são de primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é igual a 1.
ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

A forma geral de uma equação diferencial parcial com n variáveis independentes $x_1, x_2, ..., x_n$, de ordem k é

$$G\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0 \tag{1.1}$$

em que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ está contido em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Uma equação diferencial parcial é dita linear se é de primeiro grau na variável dependente e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação. As equações diferenciais (parcias e ordinárias) que não são lineares são chamadas **não-lineares**.

A forma mais geral de uma EDP de segunda ordem linear é

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + E\frac{\partial u}{\partial x} + F\frac{\partial u}{\partial y} + Gu + H = 0, \tag{1.2}$$

em que os coeficientes A, B, C, D, E, F, G e H são funções que dependem das variáveis x e y. A parte principal de uma EDP é a parte da equação que contem as derivadas de maior ordem, desta forma, a parte principal da equação (1.2) é

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Dentre as EDPs que são não-lineares, as que possuem parte principal linear são chamadas de **semi-lineares**.

Veja alguns exemplos:

01) $y'' - 2y' + y = 0$ (EDO linear de segunda ordem.)

02) $yy'' - 2y' = x$ (EDO não-linear de segunda ordem.)

03) $xy\frac{\partial u}{\partial x} + xu + x^2 + y^2 = 0$ (EDP linear de primeira ordem.)

04) $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})^3 = xy$ (EDP não-linear de segunda ordem.)

05) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (EDP semi-linear de segunda ordem.)

1.2 Soluções de equações diferenciais

Definição 1.2 *Uma solução para uma EDO num intervalo I é uma função definida nesse intervalo, que quando é substituída na equação a torna uma identidade.*

Neste contexto, uma solução para a EDO

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação, isto é,

$$F(x, f(x), f'(x), ..., f^n(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Uma solução de uma EDP é uma função $v = v(x_1, ..., x_n)$ que possui pelo menos k derivadas parciais e satisfaz a EDP (1.1), isto é,

$$G\left(x_1, ..., x_n, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_n}, ..., \frac{\partial^k v}{\partial x_n^k}\right) = 0$$

Exemplo 1.1 *A equação diferencial ordinária $y'' - y' + (a - a^2)y = 0$ com a valores reais, é uma equação linear e tem como solução a função $y = e^{ax}$ em $(-\infty, \infty)$.*

Para verificar isso, basta substituir a função e suas derivadas primeira e segunda na equação. Derivando a solução

$$y' = ae^{ax}, \quad y'' = a^2 e^{ax}$$

e substituindo na equação, obtemos

$$a^2 e^{ax} - ae^{ax} + (a - a^2)e^{ax} = a^2 e^{ax} - ae^{ax} + ae^{ax} - a^2 e^{ax} = 0, \qquad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

Exemplo 1.2 *A equação diferencial parcial* $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (a^2 + b^2)y = 0$ *com* a *e* b *real, é uma equação linear e tem como solução a função* $y = \cos(ax + bt)$ *para* x *e* t *em* $(-\infty, \infty)$*. Derivando* y *duas vezes com relação a* x *e a* t

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -a^2 \cos(ax + bt), \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -b^2 \cos(ax + bt)$$

e substituindo as derivadas na equação, obtemos

$$-a^2 \cos(ax + bt) - b^2 \cos(ax + bt) + a^2 \cos(ax + bt) + b^2 \cos(ax + bt) = 0.$$

Perceba que a função constante $y = 0$ também satisfaz as equações dos exemplos (1.1) e (1.2), para todo x e t reais. Uma solução para uma equação diferencial do tipo $y = 0$ em um intervalo I ou em uma região S (no caso de uma EDP), geralmente é chamada de **solução trivial**.

Definição 1.3 *Uma solução explícita de uma equação diferencial ordinária é uma função* $y = f(x)$ *definida em um domínio* I*, a qual, ao ser substituída na equação diferencial a transforma em uma identidade.*

Definição 1.4 *Uma solução implícita de uma equação diferencial ordinária é uma função* $g(x, y) = 0$*, definida para* x *em um intervalo* I *e* y *em um intervalo* L*, em que* y *depende de* x*, a qual, através de derivadas implícitas, resulta na equação diferencial inicial.*

Agora traremos alguns conhecimentos sobre as equações diferenciais ordinárias, os quais serão uteis na resolução das Equações Diferenciais Parciais apresentadas posteriormente.

1.3 Equações diferenciais ordinárias

O estudo das equações diferenciais ordinárias é de grande importância devido a existência de diversos fenômenos físicos que podem ser descritos ou aproximados por uma EDO. E também pelo fato de métodos de resolução de EDPs necessitarem da teoria das EDOs. No que segue, apresentaremos conceitos e alguns métodos de resolução para certos tipos específicos de EDOs, nos limitaremos apenas às que serão utilizadas posteriormente.

Problema de valor inicial

Para uma EDO de n-ésima ordem, o problema

$$Resolver : a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1y}}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1.3}$$

$$Sujeito \quad a : y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

em que $k_0, ..., k_{n-1}$ são constantes arbitrárias, é chamado de um **Problema de Valor Inicial (PVI)**. Os valores $y(x_0) = k_0, y'(x_0) = k_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$ são chamados de **condições iniciais**.

Teorema 1.1 (Existência de uma única solução) *Sejam $a_n(x), a_{n-1}(x), ..., a_1(x), a_0(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo I com $a_n \neq 0$, para todo $x \in I$. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o PVI (1.3) em I.*

Exemplo 1.3 *A função dada por $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução para o problema de valor inicial $y'' - 4y = 12x$, $y(0) = 4$ e $y'(0) = 1$. A equação é linear e os coeficientes da equação são contínuos em qualquer intervalo contendo $x = 0$, além disso $a_2(x) = 1 \neq 0$, assim pelo teorema (1.1) a função dada é única solução.*

Problema de valor de contorno

Um problema da forma

$$Resolver : a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{1.4}$$
$$Sujeito \quad a : y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, ..., y(x_n) = y_n$$

é chamado de **problema de valor de contorno**. Os valores especificados $y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, ..., y(x_n) = y_n$ são chamados de **condições de contorno** ou de **fronteira**. A solução do problema em questão é uma função (ou uma família de funções) que satisfaz a equação diferencial em algum intervalo I, contendo $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ e x_n, cujo o gráfico passa pelos pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})$ e (x_n, y_n).

1.3.1 Equação diferencial de primeira ordem

Problema de valor inicial

No caso em que a equação diferencial é de primeira ordem, (1.3) torna-se

$$Resolver : \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.5}$$
$$Sujeito \quad a : y(x_0) = y_0$$

em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um valor real arbitrário. Neste caso estamos interessados em uma solução para a equação diferencial definida em algum intervalo I de forma que o gráfico da solução passe pelo ponto (x_0, y_0).

Teorema 1.2 (Existência de uma única solução) *Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contem o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial (1.5).*

Agora apresentaremos os métodos de solução de EDO que iremos utilizar no decorrer do trabalho.

Método de separação de variáveis

Definição 1.5 *Uma EDO de primeira ordem que possa ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada de ***separável*** *ou tem* ***variáveis separáveis****.*

Podemos escrever a equação separável como

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x), \tag{1.6}$$

se $y = f(x)$ denota uma solução para (1.6) e supondo g e h funções contínuas, então y é uma função que tem a sua primeira derivada contínua, assim

$$h\left(f(x)\right) f'(x) = g(x).$$

Integrando ambos os membros com relação a x,

$$\int h\left(f(x)\right) f'(x)dx = \int g(x)dx + c$$

em que c é uma constante arbitrária. Como $dy = f'(x)dx$, segue

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c.$$

Essa última expressão indica o procedimento do método para resolver a equação separável. O parâmetro c nos fornece uma família de soluções para a equação. Perceba que não é necessário usar duas constantes de integração no procedimento, pois integrando $h\left(f(x)\right) f'(x)dx = g(x)dx$

$$\int h(y)dy + c_1 = \int g(x)dx + c_2 \Rightarrow$$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c_2 - c_1 = \int g(x)dx + c$$

em que $c = c_2 - c_1$ ainda é uma constante arbitrária.

Exemplo 1.4 *Problemas de valores iniciais em que as equações são separáveis.*

a) Resolva $ydy = 4x(y^2+1)^{1/2}dx$, sujeito a $y(0) = 1$.

Separando a equação

$$\frac{y}{(y^2+1)^{1/2}}dy = 4xdx$$

e integrando em ambos os lados da igualdade

$$\int \frac{y}{(y^2+1)^{1/2}}dy = \int 4xdx \Rightarrow$$

$$(y^2+1)^{1/2} = 2x^2 + c,$$

o que nos fornece uma família de soluções para a EDO, usando a condição inicial $y(0) = 1$ na solução obtida, seque que

$$(1+1)^{1/2} = c \Rightarrow c = \sqrt{2}.$$

Logo

$$(y^2+1)^{1/2} = 2x^2 + \sqrt{2}$$

fornece a solução que passa no ponto $(0, 1)$.

b) Resolva $\frac{dx}{dt} = 4(x^2+1)$ sujeito a $x(\pi/4) = 1$.

Separando a equação temos

$$\frac{dx}{x^2+1} = 4dt,$$

e agora integrando

$$\arctan(x) = 4t + c,$$

obtemos uma família de soluções. Usando $x(\pi/4) = 1$

$$\arctan(1) = \pi + c \Rightarrow c = \frac{-3\pi}{4}$$

assim

$$\arctan(x) = 4t + \frac{\pi - 16}{4} \Rightarrow x(t) = \tan\left(4t + \frac{\pi - 16}{4}\right)$$

chegamos a solução que passa no ponto $(\pi/4, 1)$.

Note que no exemplo a) a solução foi posta de uma forma implícita, enquanto que no exemplo b) a solução foi fornecida de forma explícita.

1.3.2 Equações de ordem superior

Dependência e independência linear

Definição 1.6 *Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ é **linearmente dependente**(LD) em um intervalo I se existem constantes $c_1, c_2, ..., c_n$, não todas nulas, tais que*

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + ... + c_nf_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo.

Definição 1.7 *Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ é **linearmente independente** (LI) em um intervalo I se ele não é linearmente dependente no intervalo.*

No caso de duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, se elas forem linearmente dependentes em um intervalo, então existem constantes c_1 e c_2, que não são ambas nulas, tais que, para todo x no intervalo

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0,$$

dessa forma, considerando $c_1 \neq 0$, teremos

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x)$$

isto é, se duas funções são linearmente dependentes, então uma é múltipla da outra, reciprocamente se $f_1(x) = cf_2(x)$ para alguma constante c, então

$$(-1)f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para todo x em algum intervalo. Logo as funções f_1 e f_2 são LD. Portanto duas funções são linearmente independente quando nenhuma delas é múltipla da outra em um intervalo.

Wronskiano

O teorema a seguir informa como estabelecer uma condição suficiente para que um conjunto de n funções seja linearmente independente num intervalo I.

Teorema 1.3 (Critério para independência linear de funções) *Sejam $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ funções que possuem pelo menos $n-1$ derivadas. Se o determinante*

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

não for igual a zero para algum ponto do intervalo I, então as funções serão LI no intervalo.

O determinante apresentado no teorema é chamado de **Wronskiano** das funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ e denotado por $W(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$.

A definição a seguir possibilita prever o resultado de uma integral definida do produto de duas funções, em um intervalo fechado.

Definição 1.8 (Conjunto de funções ortogonais) *Dado um conjunto de funções $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3, ...\}$. Dizemos que o mesmo é ortogonal em um intervalo [a,b], se*

$$\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

Exemplo 1.5 *O conjunto*

$$A = \left\{ sen\left(\frac{\pi x}{L}\right), sen\left(\frac{2\pi x}{L}\right), sen\left(\frac{3\pi x}{L}\right), ... \right\}$$

é ortogonal no intervalo [-L,L].

Solução: Sejam $\Phi_n(x)$ e $\Phi_m(x)$, com $m \neq n$, funções quaisquer de A, daí

$$\int_{-L}^{L} \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx = \int_{-L}^{L} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx,$$

sabemos que

$$\cos\left(\frac{n\pi x + m\pi x}{L}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

e

$$\cos\left(\frac{n\pi x - m\pi x}{L}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

assim

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n\pi x - m\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x + m\pi x}{L}\right)\right],$$

segue que

$$\int_{-L}^{L} \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x - m\pi x}{L}\right)dx - \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x + m\pi x}{L}\right)dx \Rightarrow$$

$$\int_{-L}^{L} \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(n-m)\pi}\text{sen}\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L} - \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(n+m)\pi}\text{sen}\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L} \Rightarrow$$

$$\int_{-L}^{L} \Phi_n(x)\Phi_m(x)dx = \frac{L}{\pi(n-m)}\text{sen}\,[(n-m)\pi] - \frac{L}{\pi(m+n)}\text{sen}\,[(n+m)\pi] = 0,$$

pois $n-m$ e $n+m$ são números inteiros e portanto A é um conjunto ortogonal no intervalo $[-L, L]$.

Equações homogêneas

Uma equação diferencial de n-ésima ordem

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

é chamada de homogênea quando $g(x) = 0$, caso contrário a mesma é chamada **não-homogênea**.

Princípio de superposição

O próximo teorema garante que a combinação linear de duas ou mais soluções de uma equação diferencial linear homogênea é também solução.

Teorema 1.4 (Princípio da superposição) *Sejam $y_1, y_2, ..., y_k$ soluções para uma equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem, em um intervalo I. Então, a combinação linear*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ky_k(x),$$

em que $c_i, i = 1, 2, ..., k$ são constantes arbitrárias, é também uma solução para a equação no intervalo.

Demonstração. Sejam $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ soluções para

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se definimos $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ky_k(x)$, então

$$a_n(x)\left[c_1y_1^{(n)}(x) + c_2y_2^{(n)}(x) + ... + c_ky_k^{(n)}(x)\right] +$$

$$a_{n-1}(x)\left[c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + ... + c_ky_k^{(n-1)}(x)\right] + \cdots$$

$$+a_1(x)\left[c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + ... + c_ky_k'(x)\right] + a_0(x)\left[c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ky_k(x)\right] =$$

$$c_1\left[a_n(x)y_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1(x)\right] +$$

$$c_2\left[a_n(x)y_2^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2(x)\right] + ...+$$

$$c_k\left[a_n(x)y_k^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_k^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y_k' + a_0(x)y_k(x)\right] =$$

$$c_1.0 + c_2.0 + ... + c_k.0 = 0$$

■

Corolário 1.1 *Um múltiplo $y = c_1y_1(x)$ de uma solução $y_1(x)$ para uma equação diferencial linear homogênea é também solução.*

Corolário 1.2 *Uma equação diferencial linear homogênea sempre possui a solução trivial $y = 0$.*

Definição 1.9 *Qualquer conjunto $y_1, y_2, ..., y_n$ de n soluções linearmente independentes para equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem em um intervalo I é chamado de* ***conjunto fundamental de soluções*** *no intervalo.*

Definição 1.10 *Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem em um intervalo I. A* ***solução geral*** *(ou solução completa) para a equação no intervalo é dada por*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x),$$

em que os c_i, $i = 1, 2, ..., n$ são constantes arbitrárias.

Construção de uma segunda solução a partir de uma solução conhecida

Nosso objetivo aqui é encontrar uma solução $y_2(x)$ para uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem a partir de uma solução $y_1(x)$, a qual supostamente já seja conhecida. Dada a equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y = 0, \tag{1.7}$$

dividindo a equação (1.6) por $a_2(x)$, temos

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1.8}$$

em que $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$, $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ são contínuas em algum intervalo I. Suponhamos que $y_1(x)$ seja uma solução conhecida para (1.8) em I, com $y_1(x) \neq 0$ para todo x no intervalo. Definindo $y = h(x)y_1$, teremos

$$y' = hy_1' + y_1h' \text{ e } y'' = hy_1'' + 2y_1'h' + y_1h''$$

substituindo na equação (1.8)

$$h\left[y_1'' + Py_1' + Qy_1\right] + y_1h'' + (2y_1' + Py_1)h' = 0,$$

como $y_1' + Py_1' + Qy_1 = 0$, pois y_1 é solução de (1.8), segue da equação anterior que

$$y_1h'' + (2y_1' + Py_1)h' = 0,$$

fazendo $w = h' \Rightarrow w' = h''$ temos

$$y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0. \tag{1.9}$$

Note que a equação (1.9) é linear e separável, assim separando e integrando (1.9), teremos

$$\begin{gathered}
y_1\frac{dw}{dx} + 2\frac{dy_1}{dx}w + Py_1w = 0 \Rightarrow \\
\frac{dw}{w} + 2\frac{dy_1}{dx}\frac{1}{y_1}dx + Pdx = 0 \Rightarrow \\
\frac{dw}{w} + 2\frac{dy_1}{y_1} + Pdx = 0 \Rightarrow \\
\ln|w| + 2\ln|y_1| + \int Pdx = c \Rightarrow \\
\ln|wy_1^2| = -\int Pdx + c \Rightarrow \\
|wy_1^2| = e^{-\int Pdx + c} = e^c e^{-\int Pdx} \Rightarrow \\
wy_1^2 = \pm e^c e^{-\int Pdx} \Rightarrow \\
w = \frac{\pm e^c e^{-\int Pdx}}{y_1^2},
\end{gathered}$$

como $w = h'$, segue

$$h' = \frac{\pm e^c e^{-\int Pdx}}{y_1^2} \Rightarrow h = \pm e^c \int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx + c_1$$

e portanto

$$y = h(x)y_1(x) = \pm e^c y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx + c_1y_1,$$

escolhendo $c_1 = 0$ e $\pm e^c = 1$, concluímos que uma segunda solução para a equação (1.8) é

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx. \tag{1.10}$$

As funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes em qualquer intervalo I, pois $W(y_1, y_2) = e^{-\int Pdx} \neq 0$.

Exemplo 1.6 *A equação $y'' + 5y' = 0$ tem como solução $y_1 = 1$. Usando (1.10) vamos determinar uma segunda solução*

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int 5dx}}{1^2} dx = \int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{-5x},$$

dessa forma a solução geral para equação diferencial é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 + \frac{-c_2}{5} e^{-5x}.$$

Perceba que conhecendo uma solução y_1 para uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, a solução geral para esta equação é dada por

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}. \tag{1.11}$$

1.3.3 Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

A equação diferencial linear de primeira ordem $\frac{dy}{dx} + ay = 0$, em que a é uma constante, tem como solução a função exponencial $y = c_1 e^{-ax}$ em $(-\infty, \infty)$. Com isso em vista, é comum procurar determinar se soluções exponenciais existem em $(-\infty, \infty)$ para equações de ordem superior como

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1.12}$$

em que os a_i, $i = 0, 1, ..., n$ são constantes. No que segue vamos determinar a solução de uma EDO linear homogênea de segunda ordem com os coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{1.13}$$

Suponhamos uma solução da forma $y = e^{mx}$ para a equação (1.13), então $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$, substituindo na equação

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0,$$

como $e^{mx} \neq 0$ para qualquer x real, então para a função exponencial satisfazer a equação (1.13), devemos escolher um valor para m que satisfaça a equação

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{1.14}$$

A equação (1.14) é chamada de **equação auxiliar** ou **equação característica** da EDO (1.13). As raízes da equação (1.14) podem ser: raízes reais distintas, raízes reais iguais ou raízes complexas conjugadas. Analisaremos cada caso.

Caso I Raízes reais distintas.

Considerando m_1 e m_2 duas raízes reais distintas para (1.14), teremos as seguintes soluções para (1.13): $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = e^{m_2 x}$. Essas funções são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$ e portanto formam um conjunto fundamental de soluções. Desta forma

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

é a solução geral para (1.13)

Caso II Raízes reais iguais.

No caso em que $m_1 = m_2$, obtemos somente uma solução exponencial $y_1 = e^{m_1 x}$. Porém a partir de y_1 podemos obter uma segunda solução, como descrito na seção (1.3.2), por

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{-(b/a)x}}{e^{2m_1 x}} dx.$$

Da equação característica temos $m_1 = -b/2a$, pois $b^2 - 4ac = 0$. Dessa forma $2m_1 = -b/a$, e assim

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}.$$

Logo a solução geral para a equação (1.13) torna-se

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}.$$

Caso III Raízes complexas conjugadas.

Sendo m_1 e m_2 raízes complexas de (1.14) podemos escrever $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, em que α, $\beta > 0$ são valores reais e $i^2 = -1$. As soluções para (1.13) são

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \text{ e } y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

e a solução geral torna-se

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Estamos interessados em trabalhar com funções definidas apenas nos reais, desta forma usaremos a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}\,(\theta),$$

em que θ é real, de onde segue que

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\text{sen}\,(\beta x) \tag{1.15}$$

e

$$e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\text{sen}\,(\beta x) \tag{1.16}$$

onde usamos $\cos(-\beta x) = \cos(\beta x)$ e $\sin(-\beta x) = -\sin(\beta x)$. Somando e depois subtraindo as equações (1.15) e (1.16), obtemos respectivamente

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos(\beta x) \tag{1.17}$$

e

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\text{sen}\,(\beta x). \tag{1.18}$$

Como $y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ é solução para (1.13) para qualquer escolha das constantes c_1 e c_2, então fazendo $c_1 = c_2 = 1$ obtemos a solução

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} + e^{(\alpha - i\beta)x} \Rightarrow$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) \tag{1.19}$$

e fazendo $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$ teremos

$$y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} - e^{(\alpha - i\beta)x} \Rightarrow$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right). \tag{1.20}$$

Das equações de (1.17) e (1.18), as soluções (1.19) e (1.20) tornam-se

$$y_1 = 2e^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ e } y_2 = 2ie^{\alpha x}\text{sen}\,(\beta x).$$

Pelo corolário (1.1) as funções $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\text{sen}\,(\beta x)$ são soluções para a equação (1.13). E note que essas soluções são linearmente independentes no intervalo $(-\infty, \infty)$, pois $W(e^{\alpha x}\cos(\beta x),$ $e^{\alpha x}\text{sen}\,(\beta x)) \neq 0$. Assim concluímos que tais funções formam um conjunto fundamental de soluções para a EDO (1.13). Pelo princípio da superposição, a solução geral é

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1\cos(\beta x) + c_2\text{sen}\,(\beta x)\right].$$

1.4 Equações diferenciais parciais

Agora veremos o método de Separação de Variáveis para EDPs, o qual depende dos conceitos abordados sobre as equações diferenciais ordinárias.

Separação de variáveis

Esta é uma técnica que possibilita transformar uma equação diferencial parcial com n variáveis independentes em n equações diferenciais ordinárias, uma para cada variável independente. Dessa forma quando possível encontrar as soluções para as n EDOs, encontraremos a solução para a equação diferencial parcial.

O método consiste em uma tentativa de encontrar uma solução para a equação diferencial parcial na forma de um produto de n funções, em que cada uma das funções, seja apenas de uma das variáveis independentes. Com essa hipótese, substituímos a suposta solução na EDP e, se obtivermos n equações diferenciais (que podem ser resolvidas) a EDP é **separável** ou pode ser resolvida pelo **método de separação**.

Exemplo 1.7 *Vamos aplicar o método na seguinte EDP*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.21}$$

Supondo uma solução do tipo $u(x,y) = X(x)Y(y)$, teremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Y(y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = X(x)\frac{\partial Y}{\partial y},$$

substituindo as derivadas na EDP (1.21)

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Y(y) = 4X(x)\frac{\partial Y}{\partial y}$$

separando a equação, isto é, colocando X e suas derivadas em um dos membros da igualdade e Y e suas derivadas no outro, temos

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\frac{1}{4X} = \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{1}{Y}$$

agora as variáveis se encontram separadas, isto é, com o lado esquerdo dependendo apenas da variável independente x e o lado direito dependendo apenas da variável independente y. Note que quando somente a variável x muda de valor, a expressão que só depende de y permanece constante, com isso conclui-se que toda a expressão de x no lado esquerdo é constante para todo x, e o mesmo ocorre para a expressão de x quando somente a variável y muda de valor, assim toda expressão de y do lado direito é constante para todo y. Dessa forma

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\frac{1}{4X} = \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{1}{Y} = k,$$

o que fornece duas EDOs

$$X'' - 4kX = 0 \tag{1.22}$$

e

$$Y' - Yk = 0 \tag{1.23}$$

Vamos usar o método de resolução descrito na seção (1.3) para EDO com coeficientes constantes nas equações (1.22) e (1.23), assim temos as respectivas equações características para as EDOs

$$m^2 - 4k = 0 \tag{1.24}$$

e

$$m - k = 0, \tag{1.25}$$

desta forma $m = \pm 2\sqrt{k}$ para equação característica (1.24) e $m = k$ para a equação (1.25), logo teremos três casos para o valor de k, a saber; $k > 0$, $k < 0$ e $k = 0$.

Caso I Se $k > 0$ façamos $k = \lambda^2$, assim as raízes para as equações características são $m = \pm 2\lambda \Rightarrow m_1 = 2\lambda$ e $m_2 = -2\lambda$ para a equação (1.24) e $m_3 = \lambda^2$ para (1.25). O que nos fornece as soluções

$$X(x) = c_1 e^{2\lambda x} + c_2 e^{-2\lambda x} \text{ e } Y(y) = c_3 e^{\lambda^2 y},$$

respectivamente para as EDOs (1.22) e (1.23). Donde uma solução particular para a EDP (1.21) é

$$u(x,y) = \left(c_1 e^{2\lambda x} + c_2 e^{-2\lambda x}\right) c_3 e^{\lambda^2 y} \Rightarrow$$

$$u(x,y) = A_1 e^{\lambda^2 y} e^{2\lambda x} + B_1 e^{\lambda^2 y} e^{-2\lambda x} \Rightarrow$$

$$u(x,y) = A_1 e^{(\lambda^2 y + 2\lambda x)} + B_1 e^{(\lambda^2 y - 2\lambda x)},$$

em que escolhemos $A_1 = c_1 c_3$ e $B_1 = c_2 c_3$.

Caso II Se $k < 0$, então façamos $k = -\lambda^2$, assim teremos $m_1 = \pm 2\lambda i$ para a equação característica (1.24) e $m_2 = -\lambda^2$ para (1.25), e as respectivas soluções para as EDOs (1.22) e (1.23) tornam-se

$$X(x) = c_4 \cos(2\lambda x) + c_5 \sin(2\lambda x) \text{ e } Y(y) = c_6 e^{-\lambda^2 y}.$$

Dessa forma uma outra solução particular para a EDP (1.21) é

$$u(x,y) = A_2 e^{-\lambda^2 y} \cos(2\lambda x) + B_2 e^{-\lambda^2 y} \sin(2\lambda x),$$

em que $A_2 = c_4 c_6$ e $B_2 = c_5 c_6$.

Caso III Se $k = 0$, teremos das EDOs (1.22) e (1.23) que

$$X'' = 0 \text{ e } Y' = 0,$$

segue por integração que

$$X' = c_7 \text{ e } Y = c_8 \Rightarrow$$
$$X = c_7 x + c_9 \text{ e } Y = c_8.$$

E uma outra solução particular para a EDP (1.21), torna-se

$$u(x,y) = A_3 x + B_3$$

em que $A_3 = c_7 c_8$ e $B_3 = c_9 c_8$.

Exemplo 1.8 *Considere a equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{1.26}$$

Nesse caso vamos supor uma solução na forma $v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Derivando esta solução com relação a x, y e z, obtemos respectivamente

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} Y(y)Z(z), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = X(x)\frac{\partial Y}{\partial y} Z(z), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = X(x)Y(y)\frac{\partial Z}{\partial z}$$

substituindo as derivadas na EDP (1.26), segue que

$$\frac{\partial X}{\partial x} Y(y)Z(z) + X(x)\frac{\partial Y}{\partial y} Z(z) = X(x)Y(y)\frac{\partial Z}{\partial z}$$

dividindo toda expressão por $X(x)Y(y)Z(z)$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial Z}{\partial z}$$

perceba que o lado direito da última expressão depende apenas da variável independente z, enquanto que o lado esquerdo depende das varáveis x e y. Dessa forma à medida que z varia o lado esquerdo permanece constante e o mesmo acontece com o lado direito quando x ou y variam. Assim

$$\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial z} = c,$$

o que fornece duas equações diferencias

$$\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = c \tag{1.27}$$

e

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial z} = c \tag{1.28}$$

a equação (1.27) pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x} = c - \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial y}$$

isto é, a equação (1.27) é uma EDP separável, e podemos ver que o lado esquerdo não depende de y e o lado direito não depende de x, assim cada lado só pode ser igual a uma constante, ou seja

$$\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x} = c - \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = b,$$

que fornece as seguintes EDOs

$$\frac{dX}{dx} = bX \tag{1.29}$$

e

$$\frac{dY}{dy} = (c-b)Y, \tag{1.30}$$

as quais podem ser resolvidas pelo método de separação de variáveis para EDOs. Separando a EDO (1.29) temos

$$\frac{dX}{X} = bdx,$$

integrando

$$\int \frac{dX}{X} = \int bdx \Rightarrow \ln|X| = bx + b_1 \Rightarrow |X| = e^{bx+b_1} = e^{bx}e^{b_1}$$

a solução para a EDO (1.29) torna-se

$$X(x) = \pm e^{b_1}e^{bx}. \tag{1.31}$$

Da EDO (1.30), teremos

$$\frac{dY}{Y} = (c-b)dy,$$

integrando

$$\int \frac{dY}{Y} = \int (c-b)dy \Rightarrow \ln|Y| = (c-b)y + c_2 \Rightarrow |Y| = e^{(c-b)y+c_1} = e^{(c-b)y}e^{c_1}$$

e a solução para EDO (1.30) é

$$Y(y) = \pm e^{c_1}e^{(c-b)y}. \tag{1.32}$$

A equação (1.28) pode ser escrita na forma

$$\frac{dZ}{dz} = cZ,$$

que também pode ser resolvida pelo método de separação de varáveis para EDOs. Integrando a equação anterior

$$\int \frac{dZ}{Z} = \int cdz \Rightarrow \ln|Z| = cz + c_2 \Rightarrow |Z| = e^{cz+c_2} = e^{cz}e^{c_2},$$

a solução da equação (1.28) resulta em

$$Z(z) = \pm e^{c_2}e^{cz}. \tag{1.33}$$

fazendo $X_0 = \pm e^{b_1}$, $Y_0 = \pm e^{c_1}$ e $Z_0 = \pm e^{c_2}$ nas soluções (1.31), (1.32) e (1.33) respectivamente, obtemos finalmente a solução geral para a EDP (1.26)

$$v(x, y, z) = X_0 e^{bx} Y_0 e^{(c-b)y} Z_0 e^{cz},$$

ou

$$v(x, y, z) = V_0 e^{bx+(c-b)y+cz},$$

em que $V_0 = X_0 Y_0 Z_0$.

A proposição a seguir é bem semelhante ao teorema da superposição para EDOs, neste apresentamos o caso de superposição de soluções de uma EDP linear homogênea de segunda ordem.

Proposição 1.1 (Princípio da superposição) *Suponha que $\{u_1, u_2, ...\}$ é um conjunto de funções de classe C^2 em Ω satisfazendo a EDP linear homogênea*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + E\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2F\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + G\frac{\partial u}{\partial x} + H\frac{\partial u}{\partial y} + I\frac{\partial u}{\partial z} + Ju = 0$$

com alguns dos coeficientes não identicamente nulos. Então, se $\{a_1, a_2, ...\}$ é uma sequência de escalares, tal que a série

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m u_m(x, y, z) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + ...$$

é convergente e tem todos os seus termos de classe C^2, u satisfaz a EDP.

Observação 1.1 *Para este caso Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^3$.*

Observação 1.2 *Na EDP os coeficientes A, B, C, D, E, F, G, H, I e J são variáveis dependentes das variáveis independentes x, y e z.*

Observação 1.3 *Na EDP*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

Observação 1.4 *A proposição vale para um caso mais geral; em que a EDP é de n-ésima ordem e neste caso $u = u(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ e $\{u_1, u_2, ...\}$ é um conjunto de funções de classe C^k com k no conjunto dos naturais e sua demonstração segue em (IÓRIO, 2007).*

Condições de contorno e iniciais

Para equações diferenciais ordinárias lineares, em sua solução geral aparecem uma ou mais constantes arbitrárias, as quais podemos determina-las impondo condições iniciais.

Podemos também obter a unicidade da solução, no caso de intervalos finitos, impondo as condições de contorno para EDOs. No caso das equações diferenciais parciais, a solução geral, quando é possível determina-la, envolve funções arbitrárias das variáveis independentes, de modo que existe um grau de generalidade muito maior com relação à forma da solução.

As condições de contorno para EDP aparecem de forma natural nos fenômenos físicos estacionários (problemas que independem do tempo) e as condições iniciais aparecem geralmente em problemas físicos dependentes do tempo, como são os casos dos problemas envolvendo transferência de calor ou massa, e problemas oscilatórios, que são fenômenos físicos que podem ser descritos por EDPs lineares dependendo de um espaço no máximo três dimensões e do tempo. Nestes problemas é conveniente separar a variável temporal t das variáveis espaciais x, y, z (nem sempre o problema é resolvido em coordenadas cartesianas). O que geralmente acorre é que os valores da solução e de suas derivadas em relação ao tempo até a ordem $k - 1$ (supondo que a EDP é de ordem k em t) são descritas no instante $t = 0$ como função de x, y, z (condições iniciais), ao mesmo tempo em que são impostas condições de contorno, para $t \geq 0$, em relação as variáveis espaciais. Tais problemas são chamados de **problemas mistos**.

Exemplos de problemas de valores de contorno

Problema 01:

Resolver:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

Sujeito a:

$$(C.C): \quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$(C.I): \quad u(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L$$

Problema 02:

Resolver:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

Sujeito a:

$$(C.C): \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=a} = 0 & , \quad 0 < y < b \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,b) = f(x) & , \quad 0 < x < a \end{cases}$$

Note que no primeiro exemplo o problema é misto, isto é, envolve simultaneamente uma condição de contorno na variável parcial x em $t > 0$ e uma condição inicial definida em um intervalo para x.

Os métodos de resolução, e as propriedades, para equações diferenciais apresentados neste capítulo, serão usados nos próximos para encontrar funções que descrevem movimentos oscilatórios, quando conhecemos a equação diferencial que os governam. As condições físicas em que o problema é apresentado, geralmente podem ser descritas por condições de contorno.

Dessa forma, nos problemas físicos que iremos trabalhar é preciso resolver problema de valor de contorno.

2 OSCILAÇÕES E ONDAS

2.1 Oscilações

As oscilações estão presentes em diversos fenômenos, seja ele natural ou causado pelo homem, nos quais os objetos se movimentam repetidamente de um lado para o outro. Como exemplos; quando um jogador rebate uma bola com um taco de beisebol, o taco pode sofrer uma oscilação suficientemente forte a ponto de machucar sua mão. Quando um vento forte perturba uma linha de transmissão de energia elétrica, a linha oscila com uma intensidade tão grande que pode gerar seu rompimento. Quando ocorre um terremoto em uma vizinhança de uma cidade, as oscilações são tão intensas que as construções podem desmoronar.

O estudo das oscilações muitas vezes torna-se necessário quando nos deparamos com fenômenos físicos que podem prejudicar ou beneficiar o homem, nos dois casos é importante conhecer as grandezas do fenômeno. A princípio mostraremos aqui um tipo básico de oscilação, conhecido como movimento harmônico simples e em seguida, por meio de um fenômeno um pouco mais geral, iremos apresentar suas grandezas matemáticas.

2.1.1 Movimento harmônico simples

Quando queremos localizar um objeto (partícula) que se encontra em movimento, faz-se necessário conhecer uma equação que melhor descreva o deslocamento de tal objeto. Como por exemplo; a equação que descreve o movimento de um corpo que se encontra em **movimento retilíneo uniforme** é

$$x(t) = x_0 + vt,$$

em que $x(t)$ representa o deslocamento, x_0 a posição inicial, v a velocidade do objeto e t o tempo.

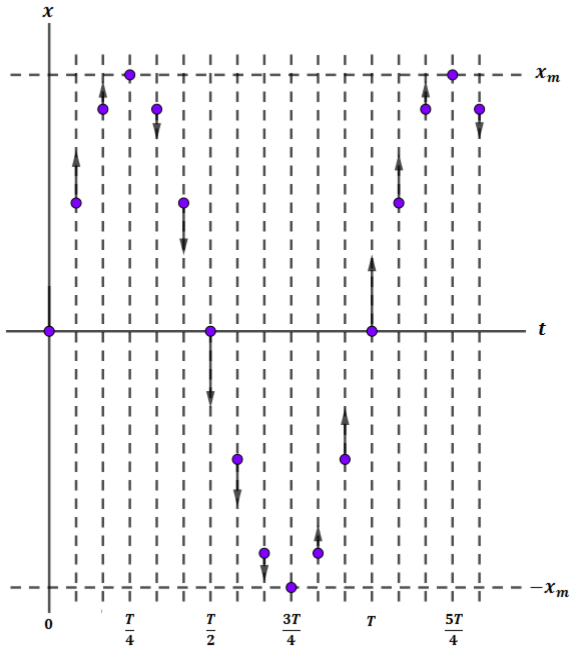
Para um objeto que se desloca em **queda livre**, com a ação da gravidade (aceleração constante), seu movimento é descrito por

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

em que $x(t)$ representa o deslocamento, x_0 a posição inicial, v_0 a velocidade inicial do objeto, g a gravidade e t o tempo.

Nosso objetivo aqui é descrever por meio de uma equação, o deslocamento de uma partícula que se encontra em um sistema oscilatório simples. Suponhamos uma sequência de "instantâneos"de um sistema oscilatório simples, no qual uma partícula se movimenta para cima e para baixo, com o movimento paralelo ao eixo x, como indica a figura (1).

Figura 1 – Instantes do movimento da partícula.



Fonte: Própria

Definição 2.1 *Em um sistema oscilatório, o número de oscilações completas por segundo é chamado de* ***frequência do movimento oscilatório*** *ou simplesmente* ***frequência****.*

O símbolo da frequência é o f e a unidade de frequência no **Sistema Internacional de Medidas** (SI) é o **Hertz**, definido como

$$1 \text{ hertz} = 1\text{Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1s^{-1}.$$

A figura (1) mostra a representação de um sistema oscilatório, destacando a sequência de "instantâneos", para o movimento de uma partícula que oscila paralelo ao eixo x (vertical) entre os extremos $-x_m$ e x_m. O comprimento dos vetores, que indicam o sentido do movimento da partícula é proporcional a sua velocidade escalar no mesmo instante da posição em destaque; por exemplo, em $t = 0$ a partícula sai do repouso e sua velocidade é nula. Se a partícula parte do repouso em x_m e nessa mesma posição é escolhido o tempo inicial como sendo $t = 0$, a partícula retornaria para x_m em $t = T$. Em que T é o período do movimento, que será definido em seguida.

Definição 2.2 *Em um sistema oscilatório simples, o tempo necessário para uma partícula percorrer uma oscilação completa (ou um* ***ciclo****) é chamado de* ***período*** *(T).*

A frequência da partícula após um período T é

$$f = \frac{1}{T}$$

ou

$$T = \frac{1}{f}. \tag{2.1}$$

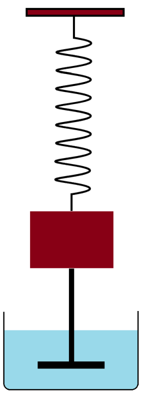
Estamos trabalhando com movimentos que se repetem a intervalos regulares, o qual é chamado de **movimento harmônico** ou **movimento periódico**. O interesse é descrever o movimento representado na figura (1). Esse tipo de movimento pode ser descrito por uma função x, que representa o deslocamento da partícula, e tem como variável independente o tempo t. Para determina-la vamos partir de um caso mais geral, em que o movimento do sistema oscilatório é reduzido por uma força externa.

2.1.2 Movimento harmônico simples amortecido

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa, dizemos que o oscilador e seu movimento são **amortecidos**. Aqui vamos apresentar este movimento por meio de um sistema massa mola com amortecimento.

Considere um bloco de massa m oscilando e preso a uma mola de constante elástica k. Em que uma barra liga o bloco a uma palheta dentro de um líquido, causando o amortecimento do movimento do bloco. Vamos considerar que as massas da barra e da palheta são desprezíveis, assim consideramos a partícula do movimento como sendo o bloco de massa, veja a figura (2).

Figura 2 – Oscilador harmônico simples amortecido.



Fonte: Própria

Vamos supor que o líquido, em que a palheta se encontra exerce uma **força de amortecimento** $\overrightarrow{F_a}$ proporcional à velocidade $\overrightarrow{v}$ do movimento, isto é

$$F_a = -bv$$

em que b é a **constante de amortecimento**, a qual depende das características tanto da palheta como do líquido. Na expressão da força de amortecimento o sinal negativo indica que a força se opõe ao movimento. Usando a lei de Hooke, a força exercida pela mola sobre o bloco é $F_m = -kx$, em que k é a constante de elasticidade da mola e x é o deslocamento do bloco em relação a posição de equilíbrio. Vamos considerar que a força gravitacional seja desprezível quando comparada com as forças F_a e F_m. Dessa forma a soma das forças do sistema é

$$F = F_a + F_m = -bv - kx,$$

aplicando a segunda lei de Newton no sistema, segue que

$$F = m.a \Rightarrow -bv - kx = m.a$$

substituindo v por dx/dt e a por d^2x/dt^2, obtemos a seguinte EDO linear homogênea de coeficientes constantes

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{2.2}$$

que pode ser resolvida pelo método descrito em (1.3.3).

A equação característica da EDO (2.2) é

$$mr^2 + br + k = 0, \tag{2.3}$$

considerando que a força de amortecimento do sistema é pequena quando comparada à força que faz o sistema oscilar, isto é, que a constante de amortecimento b seja pequena quando comparada a constante de elasticidade da mola k, de forma que $b^2 < 4mk$, teremos as raízes complexas conjugadas

$$r_1 = \frac{-b}{2m} + i\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$$

e

$$r_2 = \frac{-b}{2m} - i\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m},$$

para (2.3). Donde a solução geral para (2.2) é

$$x(t) = e^{-bt/2m}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t\right) + c_2 \text{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t\right)\right], \tag{2.4}$$

definindo ϕ tal que $\cos\phi = c_1/A$ e $\text{sen}\,\phi = -c_2/A$ em que A é uma constante não nula onde $c_1^2 = A^2\cos^2\phi$, $c_2^2 = A^2\text{sen}^2\phi$ e $c_1^2 + c_2^2 = A^2$, teremos

$$x(t) = Ae^{-bt/2m}\left[\cos\phi\cos\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t\right) - \text{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t\right)\sin\phi\right],$$

completando o cosseno da soma, temos

$$x(t) = Ae^{-bt/2m}\cos\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right).$$

Logo a equação (2.4) torna-se

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega t + \phi) \tag{2.5}$$

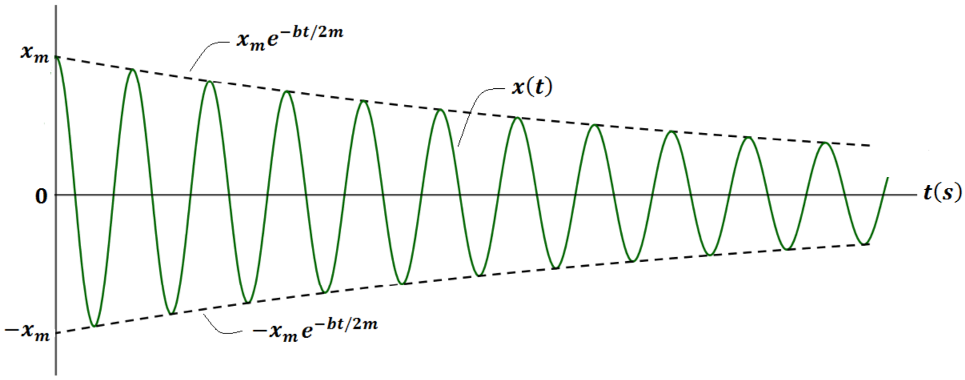
em que $x_m = A$ e

$$\omega = \frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m} = \sqrt{\frac{4km}{4m^2} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \tag{2.6}$$

Na equação (2.5) $x_m e^{-bt/2m}$ representa o deslocamento máximo da partícula em um dos sentidos, denominada amplitude do movimento e ω é a frequência angular do oscilador amortecido. O gráfico (3) mostra a descriçao do movimento oscilatório do bloco com amortecimento, obtido da equação (2.5).

Figura 3 – Movimento harmônico simples amortecido.



Fonte: Própria

Se $b = 0$ (isto é, o sistema oscilatório não tem amortecimento) então a equação (2.5) se reduz a

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi), \tag{2.7}$$

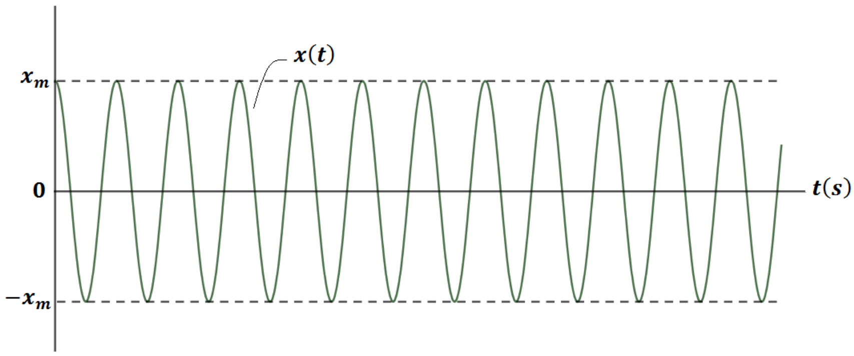
que descreve o movimento harmônico sem amortecimento, e a equação (2.6)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.8}$$

resulta na frequência angular de um oscilador harmônico não-amortecido, o gráfico (4) mostra a descrição da partícula livre de amortecimento .

A equação (2.7) descreve o movimento oscilatório da partícula apresentado na figura (1), vamos fazer uma análise desse movimento destacando as grandezas que caracterizam o movimento.

Figura 4 – Movimento harmônico simples livre de amortecimento.



Fonte: Própria

Na equação (2.7) $x_m > 0$ é a amplitude do movimento, o índice m indica o seu valor máximo e como a função $cosseno$ varia entre -1 e 1, então o deslocamento $x(t)$ varia entre $-x_m$ e x_m. A expressão $(\omega t + \phi)$ é chamada de **fase** do movimento, uma grandeza que depende do tempo; ϕ é chamada de **constante de fase** e ω é a **frequência angular** do movimento. Esse movimento é chamado de **Movimento Harmônico Simples** (MHS), o que significa que o movimento é periódico e é representado por uma função senoidal que depende do tempo. O valor de $x(t)$ se repete após o período da oscilação, isto é, $x(t) = x(t + T)$, para qualquer valor de t. Considerando $\phi = 0$

$$x_m \cos(\omega t) = x_m \cos\left[\omega(t + T)\right] \Rightarrow$$

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega t + \omega T),$$

na primeira repetição do movimento teremos

$$\omega t + \omega T = \omega t + 2\pi \Rightarrow$$

$$\omega T = 2\pi,$$

e da equação (2.1)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \tag{2.9}$$

Velocidade do movimento harmônico simples

A velocidade de uma partícula que se desloca no movimento harmônico simples é a taxa de variação de sua posição com relação ao tempo, ou seja

$$v(t) = \frac{d}{dt}\left[x(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[x_m \cos(\omega t + \phi)\right],$$

que resulta em

$$v(t) = -\omega x_m \text{sen}\,(\omega t + \phi), \tag{2.10}$$

em que ωx_m é denominada **amplitude da velocidade**.

Aceleração do movimento harmônico simples

A aceleração do movimento harmônico simples é a taxa de variação da velocidade do movimento com relação ao tempo. Uma vez conhecida a equação da velocidade $v(t)$, podemos determinar a aceleração do movimento

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left[v(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[-\omega x_m \text{sen}\,(\omega t + \phi)\right],$$

desta forma a equação da aceleração é

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi), \tag{2.11}$$

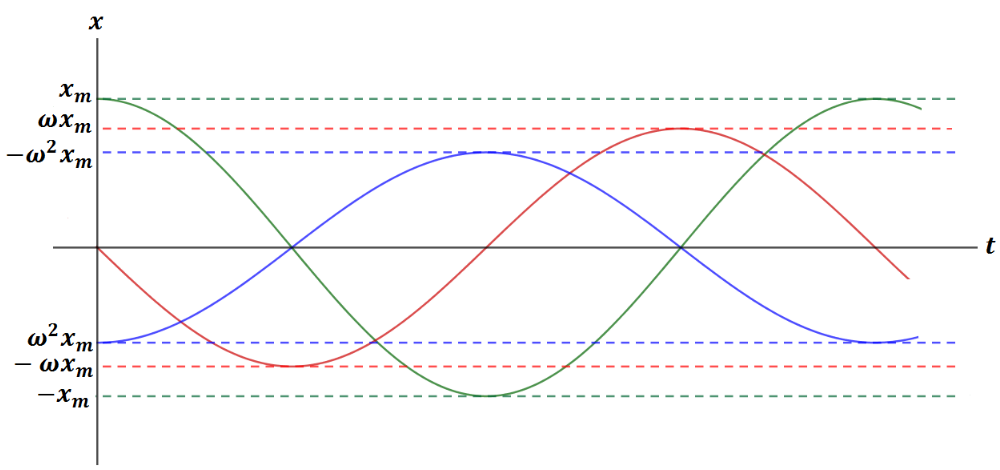
em que $\omega^2 x_m$ é denominada de **amplitude da aceleração**.

Das equações (2.7) e (2.11) podemos notar que existe uma relação entre o deslocamento da partícula e sua aceleração, podemos dizer que: a aceleração é proporcional ao negativo do deslocamento, e as duas grandezas estão relacionadas pelo quadrado da frequência angular

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \tag{2.12}$$

Na figura (5) pode-se ver os gráficos de $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ no caso em que consideramos $\phi = 0$.

Figura 5 – Superposição de $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.



Fonte: Própria

Quando a partícula toca o eixo t, o módulo de sua velocidade é máxima enquanto sua aceleração é nula e quando a partícula se encontra em algum dos extremos $-x_m$ ou x_m sua velocidade é nula e o módulo de sua aceleração é máxima.

Força de um movimento harmônico simples

Uma vez conhecendo a aceleração de um movimento, podemos usar a segunda lei de Newton para determinar a força que deve agir sobre a partícula para que ela adquira essa aceleração. Da segunda lei de Newton

$$F = m.a,$$

em que F é a força que age sobre o sistema, m é a massa do corpo e a é a aceleração do sistema. Como no (MHS) $a = -\omega^2 x$, então

$$F = -(m\omega^2)x, \tag{2.13}$$

essa equação mostra que no (MHS) a força restauradora é proporcional ao deslocamento. No caso do **sistema massa mola** a equação (2.13) é a expressão matemática da Lei de Hooke, em que a constante de proporcionalidade (ou constante elástica) é $m\omega^2$. Assim o movimento harmônico simples também pode ser definido como sendo o movimento executado por uma partícula, sujeito a uma força proporcional ao deslocamento da partícula e de sinal oposto.

Energia do movimento harmônico simples

A energia de um sistema é uma grandeza escalar, que está associada ao estado de um ou mais objetos do sistema; se um (ou mais) objetos do sistema entram em movimento por causa de alguma força, então sua energia varia. Aqui apresentaremos três tipos de energia que estão associadas ao movimento do sistema oscilatório, são elas: **energia cinética**, **energia potencial elástica** e **energia mecânica**.

Definição 2.3 (Energia cinética) *A energia K que está diretamente relacionada ao estado de movimento de um objeto de massa m e velocidade v, dada por*

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \tag{2.14}$$

*é chamada de **energia cinética**.*

Definição 2.4 (Energia potencial elástica) *A energia U, associada ao estado de compressão ou distensão de um objeto elástico é chamada de energia potencial elástica. No caso de uma mola, com constante de elasticidade k, que exerce uma força elástica F quando sua extremidade sofre um deslocamento x, a energia potencial elástica é dada por*

$$U = \frac{1}{2}kx^2, \tag{2.15}$$

Definição 2.5 (Energia mecânica) *A soma da energia cinética K com a energia potencial U de um sistema*

$$E = K + U \tag{2.16}$$

*é chamada de **energia mecânica**.*

Uma propriedade fascinante do nosso universo é o fato de que a energia pode se transformar de uma forma para outra, e pode ser transferida de um objeto para outro, com a quantidade total de energia sempre a mesma, quando isso ocorre, dizemos que a energia é **conservada**.

Definição 2.6 (Sistema conservativo) *Em um sistema produzido por forças, quando a soma da energia cinética K com a energia potencial U se encontra constante para todo estado do sistema, dizemos que esse sistema é **conservativo**, caso contrário o sistema **não** é conservativo.*

Da definição (2.6) e da equação (2.16) podemos dizer que um sistema é conservativo quando sua energia mecânica é sempre constante. Agora vamos aplicar esses conceitos de energia ao movimento harmônico simples.

Para determinar a energia mecânica do (M.H.S), faz-se necessário conhecer a velocidade em que o sistema se desloca. Desta forma, derivando a equação (2.5) teremos

$$v(t) = x'(t) = -x_m e^{-\frac{bt}{2m}} \left[\frac{b}{2m} \cos(\omega t + \phi) + \omega \text{sen}\,(\omega t + \phi) \right],$$

elevando ao quadrado a velocidade do movimento

$$v^2 = x_m^2 e^{-\frac{bt}{m}} \left[\frac{b^2}{4m^2} \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{b\omega}{m} \cos(\omega t + \phi) \text{sen}\,(\omega t + \phi) + \omega^2 \text{sen}^2(\omega t + \phi) \right],$$

e usando a equação (2.14) temos a expressão para a energia cinética do oscilador amortecido

$$K(t) = \frac{1}{2} x_m^2 e^{-\frac{bt}{m}} \left[\frac{b^2}{4m} \cos^2(\omega t + \phi) + b\omega \cos(\omega t + \phi) \text{sen}\,(\omega t + \phi) + \omega^2 m \text{sen}^2(\omega t + \phi) \right]. \tag{2.17}$$

A energia potencial elástica do (M.H.S) pode ser calculada combinando as equações (2.5) e (2.15)

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-\frac{bt}{m}} \cos^2(\omega t + \phi),$$

sabendo da equação (2.6) que

$$k = \frac{b^2}{4m} + \omega^2 m$$

concluímos que

$$U(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{4m} + \omega^2 m \right) x_m^2 e^{-\frac{bt}{m}} \cos^2(\omega t + \phi). \tag{2.18}$$

Somando as energias cinética e potencial elástica, apresentadas nas equações (2.17) e (2.18), teremos

$$E(t) = K(t) + U(t) \Rightarrow$$

$$E(t) = \tfrac{1}{2} x_m^2 e^{-\frac{bt}{m}} \left[\tfrac{b^2}{4m} \cos^2(\omega t + \phi) + b\omega \cos(\omega t + \phi) \text{sen}\,(\omega t + \phi) + \omega^2 m \text{sen}^2(\omega t + \phi) \right] +$$
$$\tfrac{1}{2} x_m^2 \left(\tfrac{b^2}{4m} + \omega^2 m \right) e^{-\frac{bt}{m}} \cos^2(\omega t + \phi),$$

organizando os termos e usando a relação $\cos^2(\omega t+\phi)+\text{sen}^2(\omega t+\phi)=1$, segue que

$$E(t)=\frac{1}{2}x_m^2 e^{-\frac{bt}{m}}\left[\left(\frac{b^2}{4m}+\frac{b^2}{4m}\right)\cos^2(\omega t+\phi)+b\omega\cos(\omega t+\phi)\text{sen}\,(\omega t+\phi)+\omega^2 m\right]\Rightarrow$$

$$E(t)=\frac{1}{2}x_m^2 e^{-\frac{bt}{m}}\left[\frac{b^2}{2m}\cos^2(\omega t+\phi)+b\omega\cos(\omega t+\phi)\text{sen}\,(\omega t+\phi)+\omega^2 m\right]. \tag{2.19}$$

A equação (2.19) mostra a expressão da energia mecânica para o movimento harmônico simples amortecido, pode-se perceber que a medida que t aumenta $E(t)$ se aproxima de zero, anulando o movimento. Neste caso, dizemos que o sistema não é conservativo.

Considerando $b=0$ (caso em que o sistema não é amortecido) a equação (2.19) resulta em

$$E(t)=\frac{1}{2}x_m^2\omega^2 m=\frac{1}{2}x_m^2 k=\frac{1}{2}kx_m^2\Rightarrow$$

$$E(t)=\frac{1}{2}kx_m^2, \tag{2.20}$$

em que usamos $\omega^2 m=k$ da equação (2.7). Note que a equação (2.20) é uma expressão constante para $E(t)$ para todo t. Desta forma, conclui-se que em um sistema oscilatório simples livre de amortecimento, suas energias (energia cinética e energia potencial elástica) se conservam, ou seja, o sistema é conservativo. E neste caso a massa oscila indefinidamente, sem nenhuma perda na amplitude das oscilações.

2.2 Ondas

Quando uma pessoa se encontra assistindo televisão, o som da TV se propaga no formato de uma onda esférica, possibilitando o indivíduo a ouvi-lo e a imagem na tela da televisão se propaga na forma de uma onda luminosa até a pessoa. Além disso as ondas também têm uma grande aplicação na medicina para diagnosticar fraturas, tumores ou males, em aparelhos de raio-x, de ultrassom e de ressonância.

Definição 2.7 (Onda) *Toda perturbação de um meio que se propaga de um ponto a outro, com velocidade definida, sem transportar matéria, é chamado de* ***onda****.*

As ondas podem ter três classificações diferentes, de acordo com sua origem e natureza.

2.2.1 Classificação de Ondas

1. Ondas mecânicas: As ondas mecânicas possuem duas características que as destacam: são governadas pelas leis de Newton e existem apenas em meio material, como a água, o ar e as rochas. São exemplos desse tipo de onda, as ondas do mar; as ondas sonoras e as ondas sísmicas.

2. Ondas eletromagnéticas: Uma característica importante desse tipo de onda é que não precisam de um meio material para existir. Como por exemplo a luz, a luz ultravioleta, as ondas de rádio e de televisão, as micro-ondas, os raios X (raio Roentgen) e as ondas de radar.

3. Ondas de matéria: As ondas de matéria estão associadas a elétrons, prótons e outras partículas elementares, e mesmo a átomos e moléculas. Essas ondas ganham esse nome porque normalmente é pensado nessas partículas como elementos básicos da matéria.

A maior parte dos conceitos abordados neste capítulo, se plicam a todos os tipos de onda, mas vamos apresentar apenas problemas que envolvem ondas mecânicas.

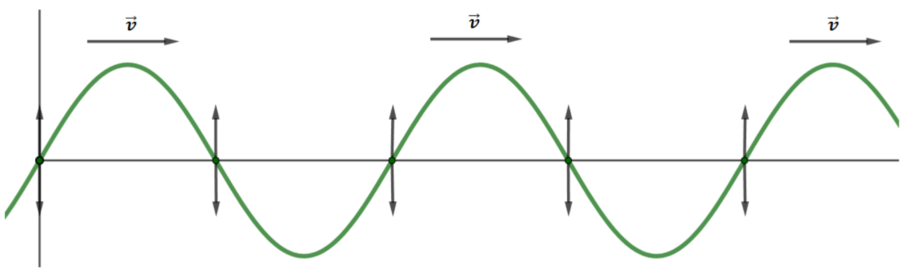
Ondas transversais e longitudinais

Vamos exemplificar o conceito de onda transversal apresentando uma das mais simples ondas mecânicas, a onda que se propaga em uma corda esticada.

Consideremos uma sacudida de leve, realizada na ponta de uma corda esticada, com a forma de um pulso que se propaga ao longo da corda. A tensão da corda é o que ocasiona o seu movimento. Quando a ponta da corda é puxada para cima ela puxa para cima a sua parte vizinha através da tensão que existe entre elas. Quando a parte vizinha da ponta da corda se move para cima puxa para cima a parte seguinte da corda (a outra parte vizinha) e assim por diante. Logo em seguida a extremidade da corda é puxada para baixo (realizando a sacudida). Enquanto as outras partes da corda estão se deslocando para cima, num certo momento começam a serem puxadas de volta para baixo pelas partes vizinhas, que se encontram em movimento descendente.

A sacudida realizada na corda resulta numa distorção da forma da corda (ou pulso) que se propaga ao longo da corda com uma velocidade v. Se a corda tiver a sua extremidade deslocada para cima e para baixo continuamente, em um movimento harmônico simples, uma onda contínua se propagará ao longo da corda com velocidade v, como mostra a figura (6).

Figura 6 – Movimento ondulatório da corda.



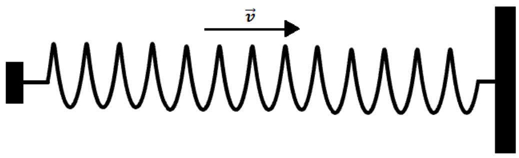
Fonte: Própria

Observando o movimento de um elemento da corda que oscila para cima e para baixo, por causa da passagem da onda, percebemos que os deslocamentos dos elementos da corda são sempre perpendiculares a direção de propagação da onda. Esse movimento é chamado de

transversal e dizemos que a onda que se propaga em uma corda é uma **onda transversal**.

Se o movimento das partículas de um meio em que se propaga uma onda ocorre para frente para trás ao longo da direção de propagação, então teremos uma **onda longitudinal**. Como é o exemplo de uma mola tensa em movimento oscilatório, em que as espirais da mola tem suas vibrações paralelas a direção em que há perturbação ao longo da mola, observe a figura (7).

Figura 7 – Propagação de onda longitudinal.



Fonte: Própria

Existem casos de ondas que são transversais e longitudinais, como é o caso de uma onda na superfície da água, em que as partículas de água se movem tanto para frente e para trás como também para cima e para baixo, formando trajetórias elípticas a medida que as ondas se deslocam.

As ondas transversais e longitudinais, as quais se propagam de um lugar para outro, são chamadas de **ondas progressivas**.

2.2.2 Grandezas das ondas

Comprimento de onda e frequência

Vamos considerar uma onda que se propaga em uma corda "ideal"na qual não existem forças de atrito, e nenhuma outra força que possa reduzir a amplitude do movimento da onda enquanto ela se propaga. Para que seja possível trabalhar com as propriedades da onda, é necessário conhecer uma função que descreva seu movimento, isto é, uma função do tipo $y = h(x,t)$, onde y é o deslocamento transversal de um elemento da corda que se localiza na posição x e h é uma função do tempo t e da posição x. Toda onda que tem uma forma senoidal, como é o caso da onda que se propaga no movimento harmônio simples, em uma corda, como está representado na figura (6), poderá ser descrita tomando h como uma das funções trigonométricas seno ou cosseno, aqui adotaremos a função seno. Dessa forma, para uma onda que se propaga numa corda "ideal", no sentido positivo do eixo horizontal, seu deslocamento y situado numa posição x para um certo instante t é dado por

$$y(x,t) = y_m \text{sen}\,(kx - \omega t), \tag{2.21}$$

em que $y(x,t)$ é o deslocamento de uma partícula x num instante t, y_m é a amplitude do movimento (são iguais para todos os pontos x da onda), $\sin(kx - \omega t)$ é chamado de fator oscilatório, em que $(kx - \omega t)$ é a fase do movimento, k é número de onda e ω é a frequência angular.

Definição 2.8 *A distância, paralela a direção de propagação da onda, entre repetições da forma de onda é chamado de* ***comprimento de onda*** λ.

Se fizermos $t = 0$ em (2.21), obtemos a equação $y(x, 0)$ que descreve a posição inicial de uma partícula qualquer da onda

$$y(x, 0) = y_m \text{sen}\,(kx). \tag{2.22}$$

Pela definição (2.8) os deslocamentos y nos pontos $x = x_1$ e $x = x_1 + \lambda$ tem valores iguais, isto é, y é o mesmo nas duas extremidades do comprimento de onda, dessa forma

$$y(x_1, 0) = y(x_1 + \lambda, 0) \Rightarrow y_m \text{sen}\,(kx_1) = y_m \text{sen}\,(k(x_1 + \lambda)) \Rightarrow \text{sen}\,(kx_1) = \text{sen}\,(kx_1 + k\lambda),$$

na primeira repetição do seno teremos $k\lambda = 2\pi$ ou

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{2.23}$$

o número de ondas k. Sua unidade no (SI) é o radiano por metro, ou m^{-1}.

Fazendo $x = 0$ em (2.21), obtemos o deslocamento $y(0, t)$ da partícula que oscila em função do tempo passando pela origem

$$y(0, t) = -y_m \text{sen}\,(\omega t), \tag{2.24}$$

como a onda se movimenta em (MHS), da definição (2.1) teremos que após um intervalo de tempo T (período) o valor de $y(0, t)$ irá se repetir para todo t, isto é

$$y(0, t) = y(0, t + T) \Rightarrow -y_m \text{sen}\,(\omega t) = -y_m \text{sen}\,(\omega t + T) \Rightarrow \text{sen}\,(\omega t) = \text{sen}\,(\omega t + T)$$

Logo, $\omega t = 2\pi$, ou

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.25}$$

a unidade da frequência angular ω no (SI) é o radiano por segundo. A frequência f de uma onda está relacionada com a frequência angular por

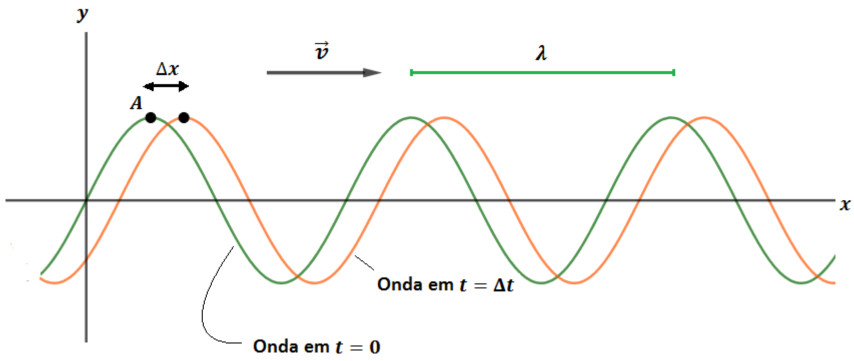
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2.26}$$

e assim como no oscilador harmônico simples, sua unidade de frequência no (SI) é medido em herts.

Velocidade de uma onda progressiva

A velocidade $\overrightarrow{v}$ da onda é a velocidade de propagação (vamos supor no sentido positivo de x) que pode ser determinada calculando dx/dt ou $\Delta x/\Delta t$.

Figura 8 – Onda transversal, destacando os pontos em $t = 0$ e $t = \Delta t$.



Fonte: Própria

Considere dois instantâneos de uma onda, como mostra a figura (19), separados por um pequeno intervalo de tempo e sua forma de onda se desloca Δx na direção positiva durante um intervalo Δt. Quando a onda se move, cada ponto da forma conserva seu deslocamento y.

Se os pontos da onda conservam seus deslocamentos quando se movem, a fase da equação (2.21) que descreve o deslocamento permanece constante, isto é,

$$kx - \omega t = constante \tag{2.27}$$

mesmo com o argumento constante, tanto x como t continuam variando. Encontraremos uma expressão para v da onda, derivando a equação (2.27) com relação ao tempo t,

$$k\frac{dx}{dt} - \omega \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k},$$

usando as equações (2.23), (2.25) e (2.26)

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \tag{2.28}$$

A igualdade $v = \lambda/T$ nos diz que a velocidade da onda é igual a um comprimento de onda por período.

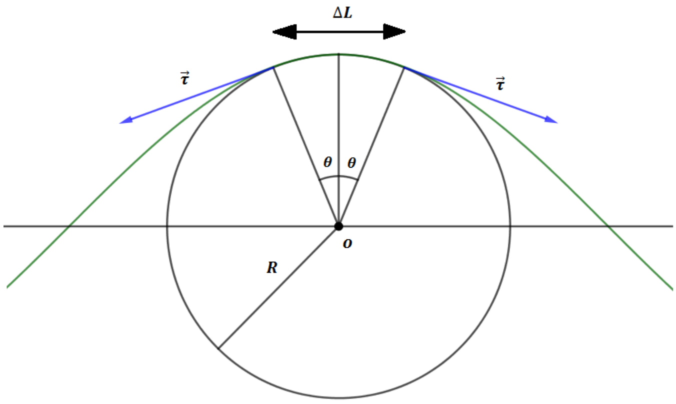
Velocidade da onda que se propaga em uma corda esticada

A velocidade da onda depende das propriedades do meio em que a mesma se propaga, isto é, a densidade do meio material em que ela oscila e a força de tração são quem vão fornecer um valor para velocidade da onda.

Consideremos um pulso simétrico que se propaga da esquerda para direita com velocidade v como mostra a figura (9).

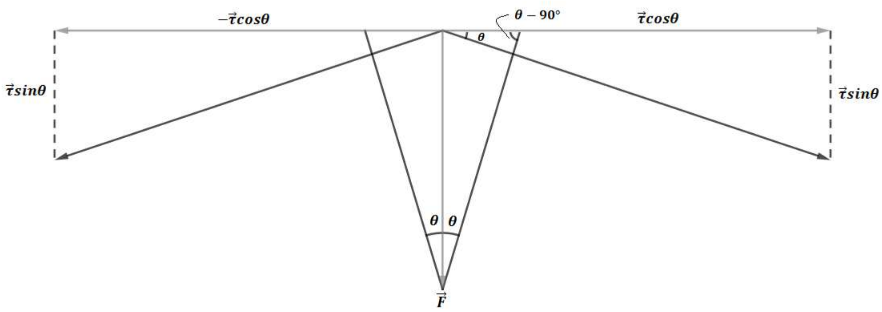
O pulso se propaga com uma tensão τ na corda esticada, que puxa tangencialmente o pequeno elemento ΔL nas duas extremidades da corda. O deslocamento ΔL forma um arco de

Figura 9 – Pulso simétrico em que a corda se move da esquerda para direita.



Fonte: Própria

Figura 10 – Decomposição das forças que agem na porção ΔL.



Fonte: Própria

círculo de raio R e subtende um ângulo igual a 2θ no centro do círculo. Podemos decompor as forças em ΔL como mostra a figura (10).

As componentes horizontais das forças tangentes a ΔL se cancelam e as componentes verticais resultam em uma força $\overrightarrow{F}$, dada por

$$F = \tau \sin\theta + \tau \sin\theta = 2(\tau \sin\theta).$$

Considerando $\theta \approx 0$, teremos $\sin\theta = \theta$, isso nos dar $F = \tau(2\theta)$. E como o comprimento de uma circunferência vale $2\pi R$, segue por regra de três que $\Delta L = 2\theta R$, assim

$$F = \frac{\tau \Delta L}{R}. \tag{2.29}$$

A massa específica do elemento ΔL da corda é dado por

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta L} \Rightarrow \Delta m = \mu \Delta L, \tag{2.30}$$

em que μ é a massa específica linear da corda e Δm é a massa do comprimento ΔL. O elemento ΔL se encontra em um arco de circulo, assim ele possui uma aceleração em direção ao centro do círculo, dada por

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{2.31}$$

Aplicando a segunda lei de Newton em ΔL, obtemos

$$F = \Delta m.a,$$

agora combinando as equações (2.29), (2.30) e (2.31), teremos

$$\tau \frac{\Delta L}{R} = (\mu \Delta L)\frac{v^2}{R} \Rightarrow \tau = \mu v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{\tau}{\mu}$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \tag{2.32}$$

A equação (2.32) nos diz que a velocidade de uma onda que se propaga em uma corda ideal esticada, depende apenas da tensão da corda e de sua massa específica linear.

No próximo capítulo apresentaremos a dedução do modelo matemático que descreve o deslocamento das partículas que se encontram em uma onda estacionária (onda que se propaga em uma corda com as extremidades presas).

3 EQUAÇÃO DA ONDA EM UMA DIMENSÃO (MODELO DA CORDA VIBRATÓRIA)

Neste capítulo apresentamos a equação diferencial e sua solução, que descreve o movimento de uma onda estacionária encontrada em uma corda esticada e presa em suas extremidades (como a corda de um violão). Tal equação também modela a onda que se propaga ao longo de uma corda apresentada na figura (6).

Consideremos uma corda, de comprimento L, que se encontra esticada horizontalmente por uma força T e fixada nas extremidades $x = 0$ e $x = L$, então esticando a corda em $t = 0$ e soltando, deixando-a vibrar obtemos um movimento oscilatório de um conjunto de partículas (pontos) que se encontram na corda. Nosso objetivo é determinar as vibrações da corda em todos os pontos de $x \in [0, L]$ em qualquer instante $t > 0$, para isso faremos as seguintes suposições físicas:

i) A corda é homogênea e perfeitamente flexível. Como mostra a figura (14).

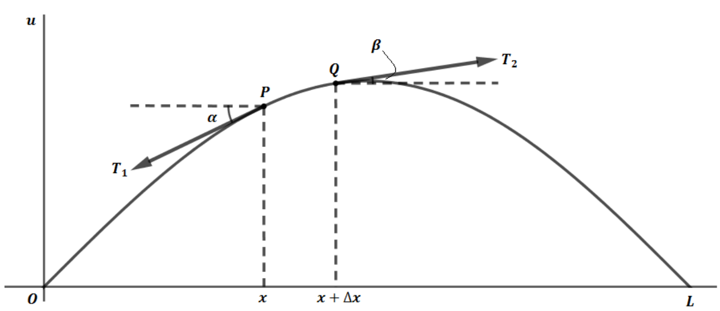
ii) Os deslocamentos são pequenos, quando comparados a L.

iii) A tensão T tangente à corda tem o mesmo valor, e a inclinação é pequena, em todos os pontos da corda.

iv) A força da gravidade e nenhuma outra força externa interfere nas vibrações da corda.

Após a perturbação realizada na corda, a mesma se encontra em vibração, em que cada ponto x se desloca verticalmente. Consideremos as forças atuando numa pequena porção da corda, veja a figura (14). E sejam T_1 e T_2 as tensões nas extremidades P e Q desta porção.

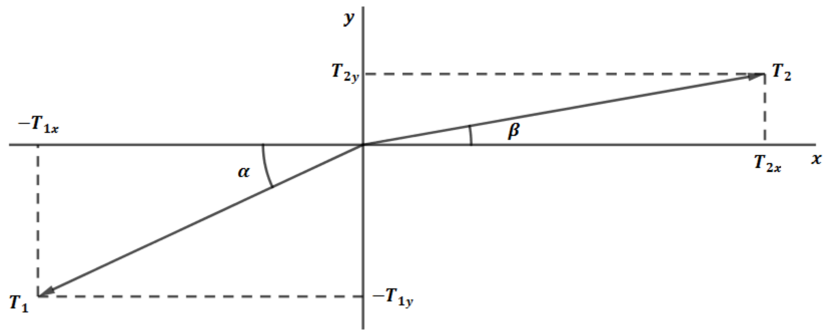
Figura 11 – Corda esticada



Fonte: Própria

Fazendo a decomposição da forças:

Figura 12 – Decomposição das forças na porção



Fonte: Própria

Na horizontal as forças são decompostas da seguinte forma (veja a figura 12)

$$\cos(\alpha) = \frac{T_{1x}}{T_1}, \quad \cos(\beta) = \frac{T_{2x}}{T_2}.$$

Como na horizontal não há deslocamento de massa na corda, temos $T_{1x} = T_{2x} = T$, o que nos fornece

$$T_1 \cos(\alpha) = T_2 \cos(\beta) = T. \tag{3.1}$$

Na vertical podemos relacionar as forças da seguinte maneira

$$T_{1y} = T_1 \text{sen}\,(\alpha) \text{ e } T_{2y} = T_2 \text{sen}\,(\beta).$$

O somatório das forças na vertical fornece

$$\sum F_y = T_{2y} - T_{1y} = T_2 \text{sen}\,(\beta) - T_1 \text{sen}\,(\alpha),$$

em que o sinal negativo aparece em T_{1y} por que consideramos as forças que atuam para baixo como sendo negativas e positivas as que atuam para cima. Aplicando a segunda lei de Newton, a resultante dessas duas forças é igual a massa $\rho\Delta x$ da porção multiplicada pela a aceleração $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ do deslocamento, calculada em algum ponto entre x e $x + \Delta x$, em que ρ é massa por unidade de comprimento da corda e Δx é o comprimento da porção, assim

$$T_2 \text{sen}\,(\beta) - T_1 \text{sen}\,(\alpha) = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.2}$$

dividindo (3.2) por $T_1 \cos(\alpha)$ e usando (3.1)

$$\frac{T_2 \text{sen}\,(\beta)}{T_2 \cos(\beta)} - \frac{T_1 \text{sen}\,(\alpha)}{T_1 \cos(\alpha)} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\tan(\beta) - \tan(\alpha) = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.3}$$

donde $\tan(\alpha)$ e $\tan(\beta)$ são as inclinações da corda em x e $x + \Delta x$, respectivamente, isto é

$$\tan(\alpha) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x, \quad \tan(\beta) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

assim, dividindo (3.3) por Δx e usando as expressões anteriores, segue que

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Sendo o comprimento da porção na corda uma grandeza infinito-decimal, isto é $\Delta x \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Da equação (2.32) temos $v^2 = T/\rho$, que substituído na equação anterior, resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.4}$$

A equação (3.4) é chamada **Equação de Onda**, é uma EDP linear de segunda ordem de coeficientes constantes.

Condições de contorno e iniciais

Como a corda está presa nas extremidades $x = 0$ e $x = L$, então não há vibrações nestes pontos. O que nos dar as seguintes condições de contorno

$$(a) \quad u(0,t) = 0 \qquad\qquad (b) \quad u(L,t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

As condições (a) e (b) indicam que os pontos, nos extremos da corda de comprimento L, não sofrem deflexões mesmo após a realização da perturbação. A forma do movimento da onda irá depender de sua deflexão inicial $f(x)$ e de sua velocidade inicial que também é uma função de x. Teremos assim as seguintes condições iniciais

$$c) \quad u(x,0) = f(x) \qquad\qquad d) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad (0 \leq x \leq L).$$

As funções $f(x)$ e $g(x)$ são dadas, em que $f(x)$ é de classe C^2 e $g(x)$ é de classe C^1. Dessa forma, para este modelo ondulatório, o problema consiste em resolver a equação (3.4) sujeito as condições (a), (b), (c) e (d).

Solução da equação de onda

Para resolver a equação (3.4), podemos aplicar o método de separação de varáveis para EDP, veja o exemplo (1.7). Suponhamos uma solução para (3.4) do tipo $u(x,t) = F(x)G(t)$, calculando $\partial^2 u/\partial x^2$ e $\partial^2 u/\partial t^2$, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}G(t), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\frac{\partial^2 G}{\partial t^2},$$

substituindo as expressões das derivadas na equação (3.4)

$$F(x)\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}G(t),$$

dividindo a expressão anterior por $v^2F(x)G(t) \neq 0$, segue que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\frac{1}{G(t)v^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{1}{F(x)}.$$

Agora a equação se encontra separada, isto é, com suas variáveis separadas. Como visto no exemplo (1.7), teremos

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\frac{1}{G(t)v^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{1}{F(x)} = \lambda,$$

em que λ é uma constante arbitrária, com isso teremos duas EDOs

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \lambda v^2 G(t) = 0 \tag{3.5}$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \lambda F(x) = 0. \tag{3.6}$$

As equações (3.5) e (3.6) são lineares, homogêneas de coeficientes constantes e podem ser resolvidas pelo método descrito na seção (1.3). Assim as respectivas equações características para (3.5) e (3.6) são

$$m^2 - \lambda v^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{\lambda v^2}$$

e

$$m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Teremos três casos para os valores de λ a serem analizados:

- Se $\lambda = 0$, de (3.6) segue que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow F(x) = a_1x + b_1$$

logo

$$u(x,t) = (a_1x + b_1)G(t).$$

Usando a condição de contorno $a)$

$$u(0,t) = b_1G(t) = 0 \Rightarrow b_1 = 0,$$

pois $G(t) \neq 0$, assim para este caso resta $u(x,t) = a_1xG(t)$, agora usando a condição $b)$

$$u(L,t) = a_1LG(t) \Rightarrow a_1 = 0,$$

pois $LG(t) \neq 0$. Portanto, para $\lambda = 0$ teremos $u(x,t) = 0$ uma solução trivial que não tem intepretação física para descrever o movimento da corda, logo não temos interesse.

• Se $\lambda > 0$ obtemos a seguinte solução para (3.6)

$$F(x) = A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

assim,

$$u(x,t) = \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) G(t)$$

usando a condição de contorno $a)$

$$u(0,t) = (A_1 + B_1)G(t) = 0 \Rightarrow A_1 = -B_1,$$

usando $b)$

$$u(L,t) = \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) G(t) = 0,$$

com $A_1 = -B_1$, segue da expressão anterior que

$$A_1 e^{\sqrt{\lambda}L} - A_1 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \Rightarrow A_1 \left(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \Rightarrow A_1 = 0,$$

pois se

$$\left(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = -\sqrt{\lambda}L \Rightarrow 2\sqrt{\lambda}L = 0,$$

mas como $2\sqrt{\lambda}L \neq 0$, então $A_1 = -B_1 = 0$, donde

$$u(x,t) = \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) G(t) = 0.$$

Novamente obtemos somente a solução trivial.

• Se $\lambda < 0$, façamos $\lambda = -p^2$, logo as soluções das equações (3.5) e (3.6) são respectivamente

$$F(x) = A\cos(px) + B\text{sen}\,(px)$$

e

$$G(t) = D\cos(pvt) + E\text{sen}\,(pvt)$$

em que a solução particular para (3.4), torna-se

$$u(x,t) = F(x)G(t) = [A\cos(px) + B\text{sen}\,(px)]\,[D\cos(pvt) + E\text{sen}\,(pvt)]\,,$$

onde A, B, D e E são constantes. Usando as condições de contorno $a)$, $b)$ e sabendo que $G(t) \neq 0$, segue que

$$u(0,t) = A\,[D\cos(pvt) + E\text{sen}\,(pvt)] = 0 \Rightarrow AG(t) = 0 \Rightarrow A = 0$$

e

$$u(L,t) = B\text{sen}\,(pL)G(t) = 0 \Rightarrow B\text{sen}\,(pL) = 0,$$

observe que $B \neq 0$, pois caso contrário teríamos $F(x) = 0$, assim

$$\text{sen}\,(pL) = 0 \Rightarrow pL = n\pi \Rightarrow p = \frac{n\pi}{L},$$

em que n é um número natural $(1, 2, 3, ...)$. Dessa forma para cada valor de n teremos uma solução para (3.4) satisfazendo as condições $a)$ e $b)$, dada por

$$u_n(x,t) = B_n\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[D_n\cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + E_n\text{sen}\,\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right] \Rightarrow$$

$$u_n(x,t) = \left[F_n\cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + H_n\text{sen}\,\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right]\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.7}$$

em que $F_n = B_nD_n$ e $H_n = B_nE_n$.

As funções $u_1, u_2, ...$ são chamadas de autofunções e os valores $\frac{v\pi}{L}, \frac{2v\pi}{L}, \frac{3v\pi}{L}, ...$ são chamados de autovalores de uma corda vibrante. As autofunções formam um conjunto fundamental de soluções para (3.4), como a equação de onda é linear e homogênea, teremos da proposição (1.1) a seguinte solução geral para (3.4)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[F_n\cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + H_n\text{sen}\,\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right]\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{3.8}$$

Por enquanto a solução (3.8) para a Equação de Onda, satisfaz apenas as condições de contorno, agora iremos aplicar as condições iniciais em (3.8) para determinar as constantes F_n e H_n. Usando a condição $c)$, teremos

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x),$$

multiplicando toda a expressão por $\sin\,(m\pi x/L)$, sendo m um número inteiro

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = f(x)\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{L}x\right),$$

aplicando a integral de $-L$ a L em ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$\int_{-L}^{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty} F_n\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\right]dx = \int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx,$$

supondo que seja possível integrar os dois membros da igualdade de $-L$ a L, isto é, estendendo uma meia escala de $-L$ a 0 e nesses cálculos $x \in [-L, L]$, assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n\int_{-L}^{L}\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx,$$

o conjunto dessas funções $seno$ são ortogonais no intervalo simétrico de $-L$ a L, logo pela definição (1.8) teremos que o lado esquerdo da expressão vale zero quando $m \neq n$ (veja o exemplo 1.5) e para $m = n$

$$F_n \int_{-L}^{L} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \Rightarrow$$

$$F_n \int_{-L}^{L} \text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \Rightarrow$$

$$F_n \int_{-L}^{L} \frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)}{2} dx = \int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \Rightarrow$$

$$F_n \left(\frac{2L}{2} - \frac{L}{2n\pi}\text{sen}\,(2n\pi)\right) = \int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

sendo $\text{sen}\,(2n\pi) = 0$, segue que

$$F_n L = \int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \Rightarrow$$

$$F_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

para $F_n \neq 0$, $f(x)\text{sen}\,(n\pi x/L)$ é uma função par, desta forma segue por propriedade de função par que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

logo

$$F_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \tag{3.9}$$

Derivando (3.8) com relação a t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-F_n\frac{vn\pi}{L}\text{sen}\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + H_n\frac{vn\pi}{L}\cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right]\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Usando a condição inicial $d)$ (Velocidade inicial)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n\frac{vn\pi}{L}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x),$$

multiplicando os dois membros da igualdade por $\sin(m\pi x/L)$, integrando de $-L$ a L e supondo que todas as funções da expressão são integráveis no intervalo, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n\frac{vn\pi}{L}\int_{-L}^{L}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_{-L}^{L} g(x)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx,$$

as integrais do lado esquerdo valem zero quando $m \neq n$ e para $m = n$

$$H_n \frac{vn\pi}{L} \int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \int_{-L}^{L} g(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \Rightarrow$$

$$H_n \frac{vn\pi}{L} \int_{-L}^{L} \frac{1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)}{2} dx = \int_{-L}^{L} g(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \Rightarrow$$

$$H_n \frac{vn\pi}{2L} \int_{-L}^{L} dx = \int_{-L}^{L} g(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

pois $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx = 0$, assim

$$H_n \frac{vn\pi}{2L}(2L) = \int_{-L}^{L} g(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \Rightarrow$$

$$H_n = \frac{1}{vn\pi} \int_{-L}^{L} g(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

para $H_n \neq 0$, teremos que $g(x)\sin(n\pi x/L)$ é uma função par, logo

$$H_n = \frac{2}{vn\pi} \int_{0}^{L} g(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \tag{3.10}$$

Portanto a solução que descreve o movimento da onda é a equação (3.8) com os coeficientes determinados por (3.9) e (3.10).

Análise da solução

Da solução (3.7), teremos

$$u_n(x,t) = C_n \left[\frac{F_n}{C_n} \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + \frac{H_n}{C_n} \text{sen}\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right] \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

definindo ϕ_n de forma que $\text{sen}\,\phi_n = F_n/C_n$ e $\cos\phi_n = H_n/C_n \Rightarrow F_n^2 + H_n^2 = C_n^2$ com $n = 1, 2, 3, ...$, assim

$$u_n(x,t) = C_n \left[\text{sen}\,\phi_n \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) + \cos\phi_n \text{sen}\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)\right] \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

completando o seno da soma

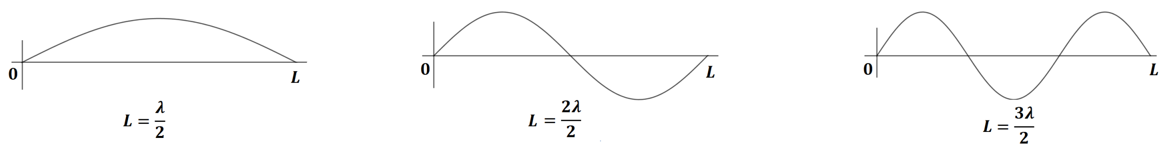
$$u_n(x,t) = C_n \text{sen}\left(\frac{vn\pi}{L}t + \phi_n\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

As funções u_n formam um conjunto de ondas estacionárias, as quais são formadas por sen $(n\pi x/L)$ com amplitude $C_n\text{sen}\,(vn\pi t/L + \phi_n)$ que varia com o tempo. Para cada valor de n teremos um onda estacionária como mostra na figura (13).

A medida que n varia a quantidade de ondas aumenta, com isso teremos a sequência:

$$L = \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1,$$

Figura 13 – Onda estacionária



Fonte: Própria

$$L = \frac{2\lambda}{2}, \quad n = 2,$$
$$L = \frac{3\lambda}{2}, \quad n = 3,$$
$$L = \frac{4\lambda}{2}, \quad n = 4,$$

generalizando, teremos

$$L = \frac{n\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}. \tag{3.11}$$

Em um valor fixo para n, a solução $u_n(x,t)$ representa um movimento harmônico simples com amplitude $C_n\text{sen}\,(vn\pi t/L + \phi_n)$ e como a frequência é dada por $f = v/\lambda$ segue da equação (3.11) que

$$f_n = \frac{v}{2L/n} = \frac{nv}{2L} \Rightarrow f_n = \frac{vn}{2L}.$$

Assim concluímos que cada ponto de uma onda estacionária vibra com amplitudes diferente, mas com a mesma frequência f_n.

Quando $n = 1$, iremos ter

$$u_1(x,t) = C_1\text{sen}\left(\frac{v\pi}{L}t + \phi_1\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right),$$

em que $C_1^2 = F_1^2 + H_1^2$,

$$F_1 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

e

$$H_1 = \frac{2}{\pi v}\int_0^L g(x)\text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

u_1 é chamado de primeira onda estacionária, primeiro modo normal ou primeiro modo fundamental de vibrações. Da mesma forma u_2 e u_3 são chamados de segunda e terceira onda estacionária, respectivamente.

Aplicação: Considere uma corda elástica de comprimento π presa nas extremidades e vibrando em um plano vertical. Determine o deslocamento $u(x,t)$ da corda em que $v^2 = 1$, $f(x) = 0$ e $g(x) = \text{sen}\,(x)$.

Solução: Como $f(x) = 0$, $g(x) = \text{sen}\,(x)$ e $v^2 = 1$, então $F_n = 0$ e

$$H_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \text{sen}\,(x)\text{sen}\,(nx)dx.$$

Para $n \neq 0$, teremos do cosseno da soma que

$$\text{sen}\,(x)\text{sen}\,(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(x - nx) - \cos(x + nx)\right],$$

segue que

$$H_n = \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \left[\cos(x - nx) - \cos(x + nx)\right] dx$$

$$H_n = \frac{1}{\pi n} \left[\frac{\text{sen}\,(x - nx)}{1 - n} - \frac{\text{sen}\,(x + nx)}{1 + n}\right]_0^\pi$$

$$H_n = \frac{1}{\pi n} \left[\frac{\text{sen}\,(\pi - n\pi)}{1 - n} - \frac{\text{sen}\,(\pi + n\pi)}{1 + n}\right] = 0,$$

pois $1 - n$ e $1 + n$ são números inteiros.

Se $n = 1$, teremos

$$H_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2}dx$$

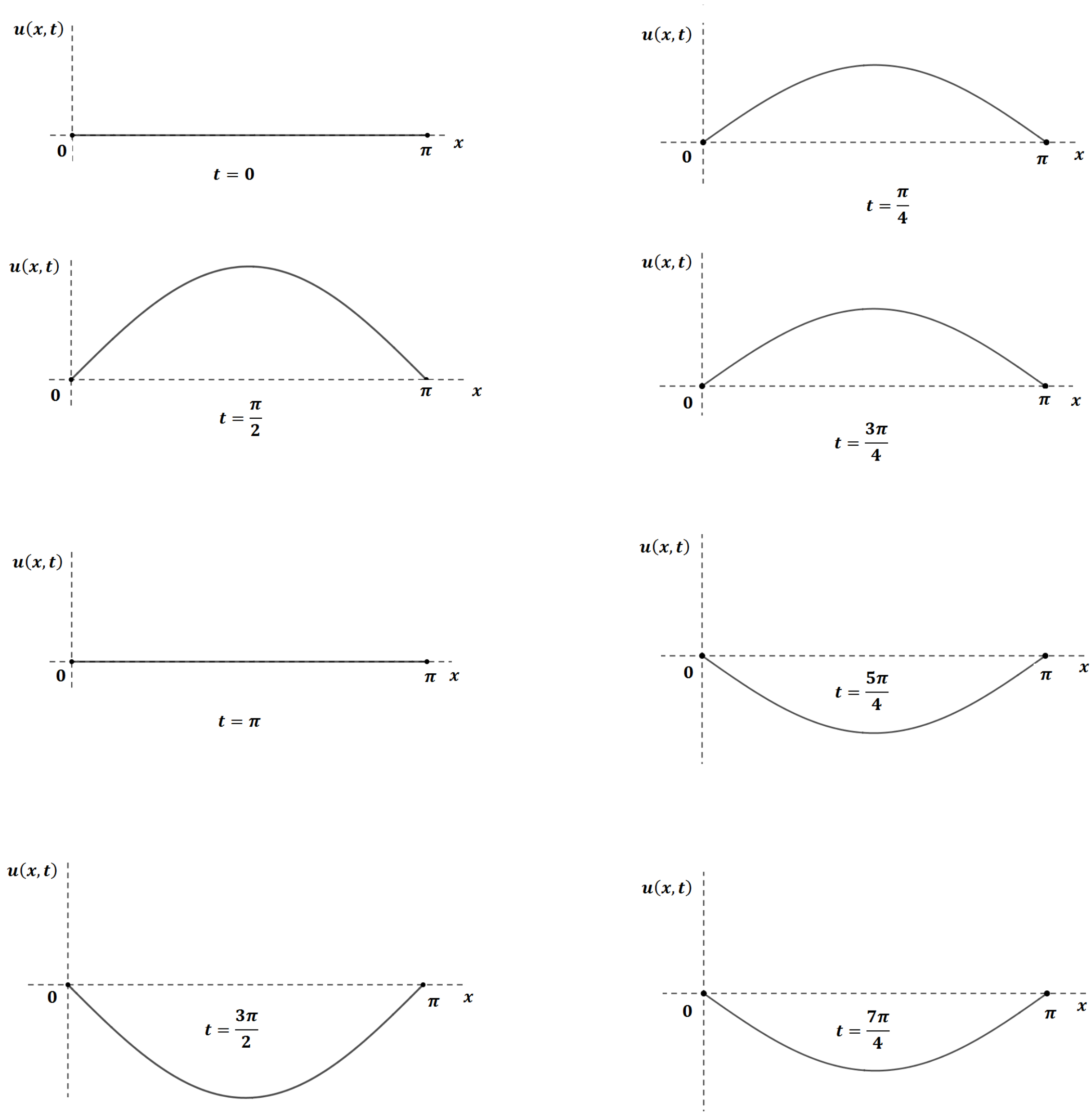
$$H_n = \left(x - \frac{\text{sen}\,(2x)}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\pi = 1$$

portanto o deslocamento da corda é

$$u(x, t) = \text{sen}\,(x)\text{sen}\,(t) \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0.$$

O gráfico da solução pode ser visto na Figura (14) para tempos específicos do movimento da corda

Figura 14 – Onda estacionária.



Fonte: Própria

4 EQUAÇÃO DA ONDA EM DUAS DIMENSÕES (MODELO DA MEMBRANA ELÁSTICA)

Neste capítulo abordamos a representação de um movimento oscilatório em duas dimensões (em uma malha retangular), a qual representa um deslocamento u qualquer do movimento oscilatório de uma posição (x, y) da malha em um instante t, partiremos de uma partição retangular com dimensões infinitesimais. Considere uma malha de couro completamente esticada e que a mesma sofre uma perturbação entrando em movimento oscilatório. Semelhante ao caso da onda em uma dimensão, iremos determinar o modelo da membrana elástica, isto é, deduzir matematicamente a equação que descreve o fenômeno oscilatório em uma malha esticada e em seguida encontrar a solução da equação para o caso em que a malha tem um formato retangular. Para essa realização faremos as seguintes suposições físicas:

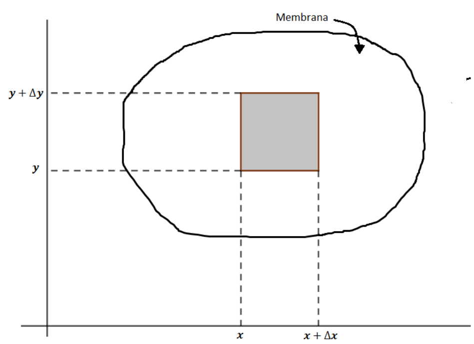
i) A membrana (couro) é considerada homogênea, perfeitamente flexível e não oferece nenhuma resistência quando perturbada.

ii) A força de tensão, por unidade de comprimento, T tem o mesmo valor em todos os pontos da membrana e não muda de valor durante o movimento.

iii) A membrana tem sua deflexão pequena, quando comparada com o seu tamanho, e os ângulos de inclinação formados pelo movimento são pequenos.

A força que atua sobre a membrana (considerando que as demais forças não interferem no movimento) é a tensão T, fornecida por unidade de comprimento.

Figura 15 – Porção retangular contida na malha.

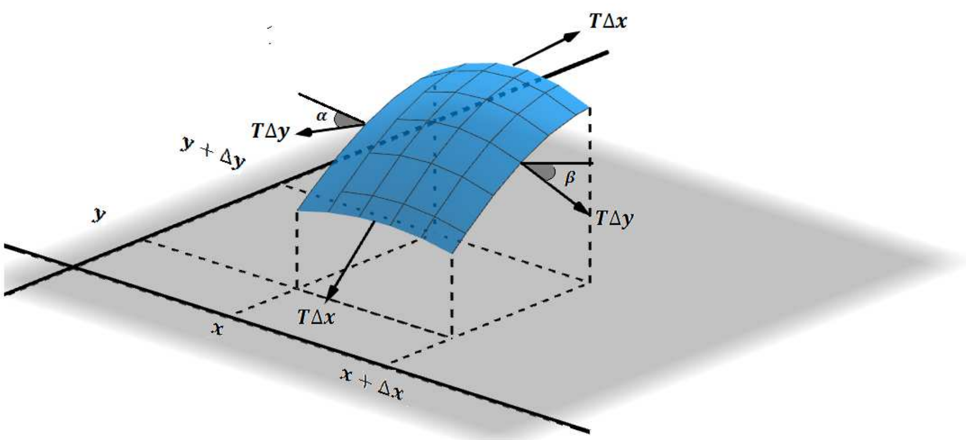


Fonte: Própria

Destacando uma porção retangular contida na membrana (como mostra a figura 15) e considerando que, a mesma, as deflexões da membrana e o ângulo de inclinação são valores muito pequenos, as dimensões da porção tornam-se aproximadamente Δx e Δy, assim a tensão da porção no lado de comprimento Δx é $T\Delta x$ e no lado medindo Δy é $T\Delta y$.

Como a membrana é perfeitamente flexível, as forças $T\Delta x$ e $T\Delta y$ são tangentes à mesma a cada instante do movimento, veja a figura (16).

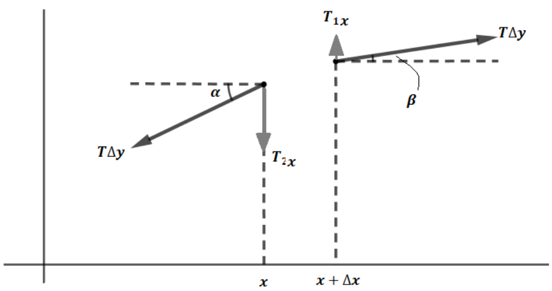
Figura 16 – Partição da malha vibratória



Fonte: Própria

Da figura (16) podemos decompor as forças na direção de x como mostra a figura (17).

Figura 17 – Decomposição das forças verticais em x.



Fonte: Própria

Decomposição:

$$\text{sen}\,(\beta) = \frac{T_{1x}}{T\Delta y} \Rightarrow T_{1x} = T\Delta y \text{sen}\,(\beta)$$

e

$$\text{sen}\,(\alpha) = \frac{T_{2x}}{T\Delta y} \Rightarrow T_{2x} = T\Delta y \text{sen}\,(\alpha),$$

em que α e β são os ângulos de inclinação. Como $\alpha, \beta \approx 0$, então $\text{sen}\,(\alpha) \approx \tan(\alpha)$ e $\text{sen}\,(\beta) \approx \tan(\beta)$, assim a resultante das forças na direção de x é

$$\sum T_x = T_{1x} - T_{2x} = T\Delta y \text{sen}\,(\beta) - T\Delta y \text{sen}\,(\alpha) = T\Delta y\,[\text{sen}\,(\beta) - \text{sen}\,(\alpha)] \Rightarrow$$

$$\sum T_x = T\Delta y\,[\tan(\beta) - \tan(\alpha)]\,,$$

onde $\tan(\beta)$ e $\tan(\alpha)$ são as inclinações nos pontos $x + \Delta x$ e x, com $y \leq y_1, y_2 \leq y + \Delta y$, teremos

$$\sum T_y = T\Delta y \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)\right]. \tag{4.1}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos o somatório das forças na direção de y, dado por

$$\sum T_y = T\Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)\right], \tag{4.2}$$

em que $x \leq x_1, x_2 \leq x + \Delta x$. O somatório das forças decompostas tanto em x como em y na direção paralela ao plano xy valem zero, pois a malha não sofre nenhum deslocamento nesta direção.

Aplicando a segunda lei de Newton na porção de dimensões Δx e Δy, teremos que a soma das forças de (4.1) e (4.2) é igual a massa da porção Δm vezes a aceleração $\partial^2 u/\partial t^2$, logo

$$T\Delta y \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)\right] + T\Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)\right] = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

A densidade do retângulo é $\rho = \Delta m/\Delta A = \Delta m/\Delta x \Delta y$ (massa/área)$\Rightarrow$ $\Delta m = \Delta x \Delta y \rho$, substituindo na equação anterior, obtemos

$$\rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)\right] + T\Delta x \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)\right],$$

multiplicando toda expressão por $1/(\rho \Delta x \Delta y)$, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(x_1, y + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y)}{\Delta y}\right],$$

considerando a porção retangular infinito-decimal, isto é, $\Delta x, \Delta y \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

No capítulo 2, a velocidade v da onda em uma dimensão (ao longo de uma corda) é dada por $\sqrt{T/\rho}$. No caso da membrana (duas dimensões) não é diferente, pois o modelo funciona como duas oscilações unidimensionais, dessa forma a velocidade de propagação da malha é

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

logo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{4.3}$$

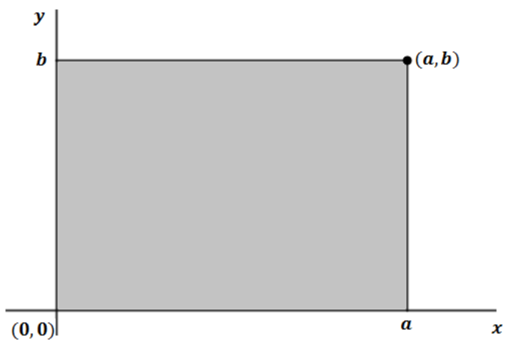
A equação (4.3) é a equação de onda em duas dimensões, em que $u(x, y, t)$ representa o deslocamento vertical de um ponto (x, y) no interior da malha no instante $t > 0$.

Condições de contorno e iniciais

Durante todo movimento as extremidades da malha se encontram presas, isto é, $u = 0$ no contorno e como a geometria considerada é um retângulo, como mostra a figura (18), então teremos as seguintes condições de contorno

$$u(x, 0, t) = 0 \quad com \quad 0 \leq x \leq a, \tag{4.4}$$
$$u(0, y, t) = 0 \quad com \quad 0 \leq y \leq b, \tag{4.5}$$
$$u(a, y, t) = 0 \quad com \quad 0 \leq y \leq b, \tag{4.6}$$
$$u(x, b, t) = 0 \quad com \quad 0 \leq x \leq a. \tag{4.7}$$

Figura 18 – Malha retangular presa nos extremos



Fonte: Própria

No início do movimento, teremos uma posição e uma velocidade inicial, ambas as condições podem ser escritas de uma forma mais geral como funções de x e y

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \tag{4.8}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(x, y). \tag{4.9}$$

As funções das condições (4.8) e (4.9) são dadas e exigimos que g seja de classe C^1 e f seja de classe C^2. Dessa forma o problema de valor de contorno consiste em resolver a equação (4.3) satisfazendo as condições de contorno (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) e as condições iniciais (4.8), (4.9). Tal solução representa a descrição do movimento da malha nas condições supostas.

Solução da equação de onda em duas dimensões

Vamos resolver a equação (4.3) usando o método apresentado na seção (1.4), (veja o exemplos 1.7). Suponha uma solução para (4.3) da forma $u(x,y,t) = F(x,y).G(t)$, derivando duas vezes com relação a t, x e y, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x,y)\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)G(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)G(t),$$

substituindo as derivadas em (4.3), segue que

$$F(x,y)\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = v^2\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)G(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)G(t)\right],$$

dividindo toda expressão por $v^2 F(x,y)G(t) \neq 0$

$$\frac{1}{v^2 G(t)}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{1}{F(x,y)}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)\right], \tag{4.10}$$

como o lado esquerdo depende somente da variável t e o lado direito da expressão é independente de t, então a medida que t varia a expressão à direita permanece constante. De (4.10), teremos

$$\frac{1}{v^2 G(t)}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{1}{F(x,y)}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)\right] = q$$

em que q é uma contante. Dessa forma obtemos duas equações diferenciais

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - qv^2 G(t) = 0 \tag{4.11}$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) - qF(x,y) = 0. \tag{4.12}$$

Inicialmente iremos resolver a equação (4.12) usando o método de separação para EDP. Supondo $F(x,y) = M(x)N(y)$ uma solução para (4.12), teremos

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}N(y) + M(x)\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - qM(x)N(y) = 0$$

dividindo toda expressão anterior por $M(x)N(y) \neq 0$, segue

$$\frac{1}{M(x)}\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{1}{N(y)}\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - q = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{M(x)}\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\frac{1}{N(y)}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - qN(y)\right).$$

Agora a equação se encontra separada, com o lado esquerdo dependendo apenas da variável x e o lado direito dependendo somente de y, assim

$$\frac{1}{M(x)}\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\frac{1}{N(y)}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - qN(y)\right) = r$$

em que r é uma constante, com isso obtemos duas EDOs lineares de coeficientes constantes

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - rM(x) = 0 \tag{4.13}$$

e

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - (q-r)N(y) = 0, \tag{4.14}$$

segue que $m^2 - r = 0$ e $m^2 - (q-r) = 0$ são as equação auxiliares das EDOs (4.13) e (4.14), respectivamente. Para obter as soluções das equações (4.13) e (4.14), de forma que tenhamos uma solução significativa para o problema, faremos uma análise para o valor de r.

- Se $r > 0$ obtemos a seguinte solução para (4.13)

$$M(x) = A_1 e^{\sqrt{r}x} + B_1 e^{-\sqrt{r}x}$$

donde

$$u(x,y,t) = \left(A_1 e^{\sqrt{r}x} + B_1 e^{-\sqrt{r}x}\right) N(y)G(t). \tag{4.15}$$

Aplicando as condições de contorno (4.5) e (4.6) em (4.15) e sabendo que $N(y)G(t) \neq 0$, obtemos

$$u(0,y,t) = (A_1 + B_1)N(y)G(t) = 0 \Rightarrow A_1 = -B_1$$

e

$$u(a,y,t) = \left(A_1 e^{\sqrt{r}a} + B_1 e^{-\sqrt{r}a}\right) N(y)G(t) = 0,$$

logo das últimas expressões

$$A_1 e^{\sqrt{r}a} - A_1 e^{-\sqrt{r}a} = 0 \Rightarrow A_1 \left(e^{\sqrt{r}a} - e^{-\sqrt{r}a}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$A_1 = 0$$

pois

$$\sqrt{r}a \neq -\sqrt{r}a,$$

assim $A_1 = -B_1 = 0$, o que nos fornece de (4.15) a solução trivial

$$u(x,y,t) = 0$$

para (4.3).

- Se $r = 0$, obtemos para (4.13) a solução

$$M(x) = k_1 x + k_2$$

em que k_1 e k_2 são constantes, daí

$$u(x,y,t) = (k_1 x + k_2)N(y)G(t). \tag{4.16}$$

Aplicando a condição (4.5) em (4.16), obtemos

$$u(0, y, t) = k_2 N(y)G(t) = 0 \Rightarrow k_2 = 0,$$

usando (4.6) em (4.16)

$$u(a, y, t) = k_1 a N(y)G(t) = 0 \Rightarrow k_1 = 0,$$

o que resulta novamente na solução trivial

$$u(x, y, t) = 0$$

para (4.3).

• Se $r < 0$, façamos $r = -k^2$, logo a solução para (4.13), torna-se

$$M(x) = A_2 \cos(kx) + B_2 \text{sen}\,(kx). \tag{4.17}$$

Da equação auxiliar de (4.14) teremos $m = \pm\sqrt{q + k^2}$. Agora analisaremos os possíveis valores de $q + k^2$ e descartaremos aqueles que fornece soluções triviais para (4.3).

• Para $q + k^2 > 0$, a solução para (4.14) resulta em

$$N(y) = A_3 e^{\sqrt{q+k^2}y} + B_3 e^{-\sqrt{q+k^2}y}.$$

Assim a solução para (4.3) é

$$u(x, y, t) = M(x)\left(A_3 e^{\sqrt{q+k^2}y} + B_3 e^{-\sqrt{q+k^2}y}\right) G(t). \tag{4.18}$$

Aplicando a condição (4.4) em (4.18)

$$u(x, 0, t) = M(x)(A_3 + B_3)G(t) = 0 \Rightarrow A_3 = -B_3,$$

agora aplicando (4.7) em (4.18) e usando $A_3 = -B_3$

$$u(x, b, t) = M(x)\left(A_3 e^{\sqrt{q+k^2}b} - A_3 e^{-\sqrt{q+k^2}b}\right) G(t) = 0 \Rightarrow$$

$$A_3\left(e^{\sqrt{q+k^2}b} - e^{-\sqrt{q+k^2}b}\right) = 0 \Rightarrow A_3 = 0,$$

pois $q + k^2 \neq 0$, assim obtemos $u(x, y, t) = 0$ para este caso.

• Se $q + k^2 = 0$ de (4.14), teremos

$$\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow N(y) = c_1 y + c_2,$$

assim

$$u(x, y, t) = M(x)(c_1 y + c_2)G(t). \tag{4.19}$$

Aplicando (4.4) em (4.19)

$$u(x,0,t) = M(x)c_2G(t) = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$

e (4.7) em (4.19)

$$u(x,b,t) = M(x)(c_1b + c_2)G(t) = 0 \Rightarrow c_1b + c_2 = 0$$

com $c_2 = 0$, logo $c_1 = 0$ e portanto $u(x,y,t) = 0$.

• Sendo $q + k^2 < 0 \Rightarrow q < -k^2 \Rightarrow q < 0$, fazendo $q = -\delta^2$, a solução para (4.14) torna-se

$$N(y) = C_2 \cos\left(\sqrt{\delta^2 - k^2}y\right) + D_2 \text{sen}\left(\sqrt{\delta^2 - k^2}y\right) \tag{4.20}$$

de (4.17) e (4.20) a solução de (4.12) fica

$$u(x,y,t) = [A_2\cos(kx) + B_2\text{sen}\,(kx)]\left[C_2\cos\left(\sqrt{\delta^2 - k^2}y\right) + D_2\text{sen}\left(\sqrt{\delta^2 - k^2}y\right)\right]G(t) \tag{4.21}$$

usando a condição (4.5) em (4.21), teremos

$$u(0,y,t) = A_2N(y)G(t) \Rightarrow A_2 = 0,$$

aplicando (4.6) e usando $A_2 = 0$

$$u(a,y,t) = B_2\text{sen}\,(ka)N(y)G(t) = 0 \Rightarrow B_2\text{sen}\,(ka) = 0$$

consideramos $B_2 \neq 0$, pois caso contrário teríamos a solução trivial para (4.3), segue que

$$\text{sen}\,(ka) = 0 \Rightarrow ka = m\pi \Rightarrow$$

$$k = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 1, 2, 3, ... \tag{4.22}$$

Aplicando a condição (4.4) em (4.21)

$$u(x,0,t) = M(x)C_2G(t) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

agora aplicando (4.7) em (4.21) e usando $C_2 = 0$, segue

$$u(x,b,t) = M(x)D_2\text{sen}\left(\sqrt{\delta^2 - k^2}b\right)G(t) = 0 \Rightarrow D_2\text{sen}\left(\sqrt{\delta^2 - k^2}b\right) = 0$$

supondo $D_2 \neq 0$, teremos

$$\text{sen}\left(\sqrt{\delta^2 - k^2}b\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\delta^2 - k^2}b = n\pi \Rightarrow$$

$$\sqrt{\delta^2 - k^2} = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3... \tag{4.23}$$

Tendo em vista ainda determinar uma expressão $G(t)$, a solução para (4.3) satisfazendo as condições de contorno (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7) é

$$u_{mn}(x,y,t) = B_m D_n \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)G(t).$$

Lembrando que $q = -\delta^2$, a equação (4.11) torna-se

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \delta^2 v^2 G(t) = 0$$

e sua equação auxiliar $m^2 + \delta^2 v^2 = 0$, assim a solução de (4.11) é

$$G(t) = E_2\cos(\delta v t) + F_2 \text{sen}\,(\delta v t), \tag{4.24}$$

de (4.23) podemos explicitar o valor de δ

$$\sqrt{\delta^2 - k^2} = \frac{n\pi}{b} \Rightarrow \delta^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k^2,$$

usando (4.22) na expressão anterior

$$\delta^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \Rightarrow$$

$$\delta = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

usando a expressão anterior na equação (4.24) obtemos a seguinte solução para (4.3)

$$u_{mn}(x,y,t) = \left[G_{mn}\cos\left(v\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}t\right) + H_{mn}\text{sen}\left(v\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}t\right)\right]$$

$$\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \tag{4.25}$$

A solução (4.25) satisfaz as condições de contorno para cada valor de m, n natural, isto quer dizer que o conjunto u_{mn} com $1 \leq m, n < \infty$ é um conjunto fundamental de soluções, usando a proposição (1.1) podemos escrever a solução geral de (4.3) como

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[G_{mn}\cos\left(v\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}t\right) + H_{mn}\sin\left(v\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}t\right)\right]$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{4.26}$$

aplicando a condição inicial (4.8) em (4.26), teremos

$$u(x,y,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} G_{mn}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = f(x,y) \tag{4.27}$$

fazendo
$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{4.28}$$
em (4.27) obtemos
$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m(y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = f(x,y), \tag{4.29}$$
multiplicando a igualdade anterior por $\sin(m_1\pi x/a)$, segue
$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m(y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{m_1\pi}{a}x\right) = f(x,y)\text{sen}\left(\frac{m_1\pi}{a}x\right).$$
Embora nossa malha tenha dimensões de tamanho a e b fazemos aqui a construção de uma meia escala nas direções de x e y, isto é, $-a \le x \le a$ e $-b \le y \le b$, assim integrando a expressão anterior de $-a$ a a e supondo que todas as funções da série são integráveis no intervalo
$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m(y)\int_{-a}^{a}\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{m_1\pi}{a}x\right)dx = \int_{-a}^{a} f(x,y)\text{sen}\left(\frac{m_1\pi}{a}x\right)dx.$$
Pelo exemplo (1.5) a integral do lado esquerdo resulta em zero para $m \neq 0$ e para $m = m_1$
$$K_m(y)\int_{-a}^{a}\text{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx = \int_{-a}^{a} f(x,y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx \Rightarrow$$
$$K_m(y)\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\left(\frac{2m\pi}{a}x\right)}{2}dx = \int_{-a}^{a} f(x,y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx \Rightarrow$$
$$K_m(y)\left[\frac{1}{2}x - \frac{a}{4m\pi}\text{sen}\left(\frac{2m\pi}{a}x\right)\right]_{-a}^{a} = \int_{-a}^{a} f(x,y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx,$$
sendo $\text{sen}\,(2m\pi) = 0$, segue que
$$K_m(y)\frac{2a}{2} = K_m(y)a = \int_{-a}^{a} f(x,y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx \Rightarrow$$
$$K_m(y) = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x,y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx,$$
para $K_m(y) \neq 0$, teremos que $f(x,y)\text{sen}\,(m\pi x/a)$ é uma função par, assim
$$K_m(y) = \frac{2}{a}\int_{0}^{a} f(x,y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx. \tag{4.30}$$
Multiplicando (4.28) por $\sin(n_1\pi y/b)$ e integrando de $-b$ a b
$$\int_{-b}^{b} K_m(y)\text{sen}\left(\frac{n_1\pi}{b}y\right)dy = \int_{-b}^{b}\sum_{n=1}^{\infty} G_{mn}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{n_1\pi}{b}y\right)dy,$$

supondo que todas as funções do segundo membro são integráveis de $-b$ a b, assim as integrais em que $n \neq n_1$ valem zero. Para $n = n_1$

$$\int_{-b}^{b} K_m(y)\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy = G_{mn}\int_{-b}^{b}\text{sen}^2\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy = G_{mn}\int_{-b}^{b}\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi}{b}y\right)}{2}dy \Rightarrow$$

$$\int_{-b}^{b} K_m(y)\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy = G_{mn}\left[\frac{1}{2}y - \frac{b}{4n\pi}\text{sen}\,\left(\frac{2n\pi}{b}y\right)\right]_{-b}^{b} = \frac{G_{mn}}{2}(b+b) = G_{mn}b \Rightarrow$$

$$G_{mn} = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} K_m(y)\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy.$$

Para $G_{mn} \neq 0$, temos que $K_m\text{sen}\,(n\pi y/b)$ é uma função par, assim segue que

$$G_{mn} = \frac{2}{b}\int_{0}^{b} K_m(y)\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy. \tag{4.31}$$

de (4.28) e (4.31), obtemos

$$G_{mn} = \frac{2}{b}\int_{0}^{b}\left[\frac{2}{a}\int_{0}^{a} f(x,y)\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx\right]\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy \Rightarrow$$

$$G_{mn} = \frac{4}{ab}\int_{0}^{b}\int_{0}^{a} f(x,y)\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{b}\right)dxdy. \tag{4.32}$$

Derivando (4.26) com relação a t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\left[-G_{mn}\upsilon\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\text{sen}\,\left(\upsilon\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}t\right) + H_{mn}\upsilon\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\cos\left(\upsilon\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}t\right)\right],$$

aplicando a condição (4.9)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} H_{mn}\upsilon\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = g(x,y).$$

Fazendo

$$L_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn}\upsilon\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\text{sen}\,\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

segue que

$$\sum_{m=1}^{\infty} L_m(y)\text{sen}\,\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = g(x,y),$$

com o procedimento análogo ao realizado em (4.29), teremos da expressão anterior

$$L_m(y) = \frac{2}{a}\int_0^a g(x,y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx. \tag{4.33}$$

E o análogo a (4.28) de

$$L_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn}v\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

obtemos

$$H_{mn}v\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} = \frac{2}{b}\int_0^b L_m(y)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy \tag{4.34}$$

de (4.33) e (4.34), teremos

$$H_{mn}v\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} = \frac{2}{b}\int_0^b\left[\frac{2}{a}\int_0^a g(x,y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx\right]\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy \Rightarrow$$

$$H_{mn} = \frac{4}{abv\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dxdy \tag{4.35}$$

Portanto a solução da equação (4.3) satisfazendo as condições de contorno e as condições iniciais é (4.25) com os coeficientes determinados por (4.32) e (4.35).

Problema: Encontre a deflexão de uma membrana com lados medindo a e b e $v^2 = 1$, em que sua deflexão inicial é

$$f(x,y) = \text{sen}\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{3\pi y}{b}\right)$$

e a velocidade inicial é nula.

Solução: Como a membrana tem velocidade inicial nula, de (4.25) a deflexão da membrana é

$$u_{mn}(x,y,t) = G_{mn}\cos\left(v\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}t\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

em que, de (4.32), temos

$$G_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a \text{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{4\pi}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dxdy \Rightarrow$$

$$G_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b \text{sen}\left(\frac{4\pi}{b}y\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy\int_0^a \text{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{m\pi}{b}x\right)dx.$$

As integrais em que $m \neq 3$ e $n \neq 4$ resultam em zero e para $m = 3$ e $n = 4$, teremos

$$G_{34} = \frac{4}{ab}\int_0^b \text{sen}^2\left(\frac{4\pi}{b}y\right)dy\int_0^a \text{sen}^2\left(\frac{3\pi}{a}x\right)dx \Rightarrow$$

$$G_{34}=\frac{4}{ab}\int_0^b\frac{1-\cos\left(\frac{8\pi}{b}y\right)}{2}dy\int_0^a\frac{1-\cos\left(\frac{6\pi}{a}x\right)}{2}dx\Rightarrow$$

$$G_{34}=\frac{4}{ab}\left[\frac{1}{2}y-\frac{b}{16\pi}\text{sen}\left(\frac{8\pi}{b}y\right)\right]\Big|_0^b\left[\frac{1}{2}x-\frac{a}{12\pi}\text{sen}\left(\frac{6\pi}{a}x\right)\right]\Big|_0^a\Rightarrow$$

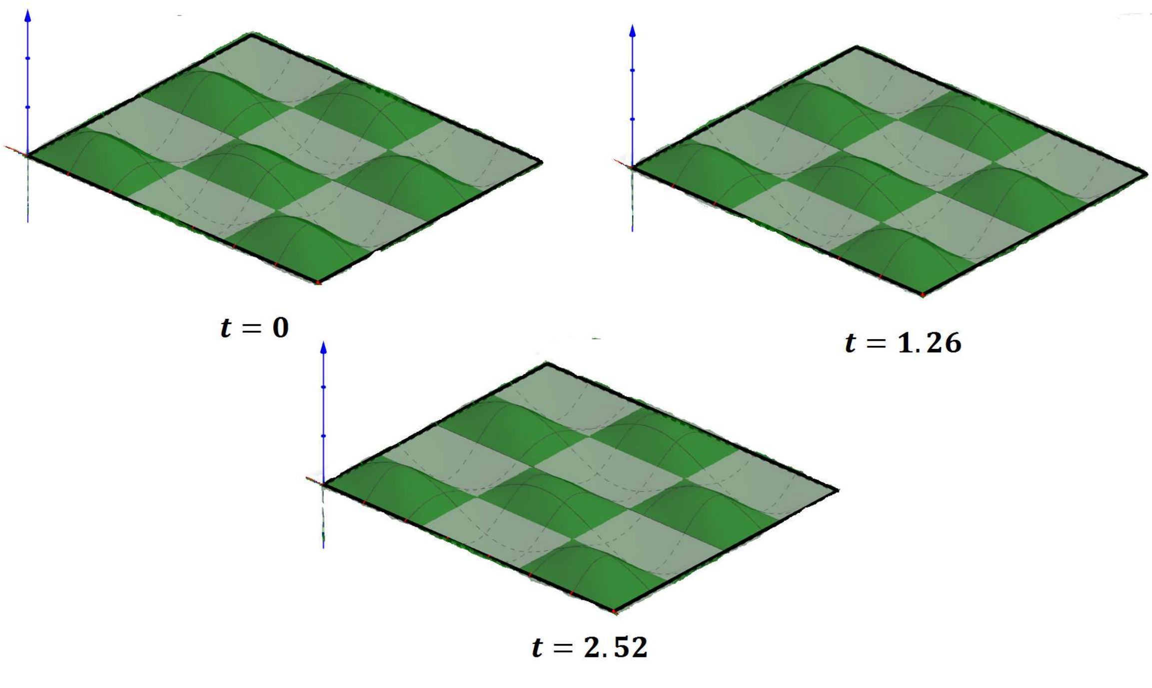
$$G_{34}=\frac{4}{ab}\cdot\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{2}a=1.$$

Assim, a deflexão da malha é

$$u(x,y,t)=\cos\left(\pi\sqrt{\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}}t\right)\text{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x\right)\text{sen}\left(\frac{4\pi}{b}y\right)\quad 0\leq x\leq a,\quad 0\leq y\leq b\quad t\geq 0.$$

Veja o gráfico da solução na Figura (19) para três tempos específicos das vibrações da malha

Figura 19 – Vibrações da malha retangular.



Fonte: Própria

A solução obtida para a Equação de Onda em duas dimensões nos permite determinar a descrição do movimento oscilatório em uma malha, em que a descrição do modelo pode ser representada por alguma (ou algumas) das soluções presentes na série. Além disso, podemos considerar uma outra geometria para a membrana, isto é, podemos obter a solução com outra configuração se considerarmos uma outra condição de contorno para a malha.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os fenômenos oscilatórios apresentados neste trabalho são governados pelas leis de Newton, as quais permitem representar uma descrição para tais fenômenos por meio de equações diferenciais. A equação que descreve o modelo ondulatório tem um grau de generalidade bem maior quando não falamos de condições de contorno, essas condições quando definidas classificam o fenômeno quanto a sua geometria. Em nossa pesquisa priorizamos o estudo do modelo oscilatório em uma e duas dimensões, no caso unidimensional tratamos do modelo que descreve o movimento de uma onda estacionária encontrada em uma corda esticada e presa em suas extremidades. E no caso bidimensional, o movimento oscilatório em uma membrana elástica, também presa em suas extremidades. Para cada caso abordamos a dedução do modelo matemático que o representa, a solução e interpretação física do resultado, além de trazer um problema relacionado.

A realização desta pesquisa possibilitou um aprofundamento no conhecimento científico inerente às equações diferenciais, especialmente as equações diferenciais parciais que geralmente não são estudadas por alunos de curso de licenciatura em Matemática. Além disso, pudemos analisar uma importante aplicação física de tais equações. Neste sentido, a relevância desse trabalho deve-se ao fato de trazer uma abordagem de conhecimentos estudados na física e associá-los na descrição matemática de modelos oscilatórios, que estão tão presentes em nossas vidas e na natureza.

A equação diferencial apresentada para descrever as vibrações da membrana, pode ser resolvida para uma condição de contorno circular, isto é, podemos considerar uma membrana com o formato circular, como a de um tambor. Para tal realização seria necessário conhecermos os conceitos e resultados das equações de Bessel, essa seria uma sugestão para pesquisas futuras sobre o assunto.

REFERÊNCIAS

BUTKOV, Eugene; CARVALHO, João., **Física Matemática**. Rio de Janeiro, Travessa do Ouvidor, 1968.

FUKE, Luiz; KAZUHITO, Yamamoto., **Física para Ensino Méio** .1ª ed. São Paulo, Saraiva, 2010.

HALLIDAY, David et al., **Fundamentos de Física**. 8ª ed. Rio de Janeiro, LTC, 2011.

IÓRIO, Valéria., **EDP**: Um Curso de Graduação. 2ª ed. Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universitária 2007.

MACHADO, Kleber., **Equações Diferenciais Aplicadas à Física**.3ª ed. Ponta Grossa, UEPG, 2004.

NUSSENZVEIG, Herch., **Um Curso de Física Básica** Fluídos Oscilações e Ondas Calor . 4ª ed. São Paulo, Blucher, (2002).

KREYSZIG,Erwin; PONTES, Luís., **Matemática Superior Para Engenharia**. 9ª ed. Rio de Janeiro, LTC, 2013.

ZILL, Dennis; CULLEN, Michael., **Equações Diferenciais**. 3ª ed. São Paulo, Pioneira Makron Books, 2001.