

MÉTODOS COMPUTACIONAIS  
DA RESPOSTA DE CIRCUITOS NÃO-LINEARES  
COM EXCITAÇÃO PERIÓDICA:  
UM ESTUDO VOLTADO PARA ANÁLISE DE  
FERRORESSONÂNCIA

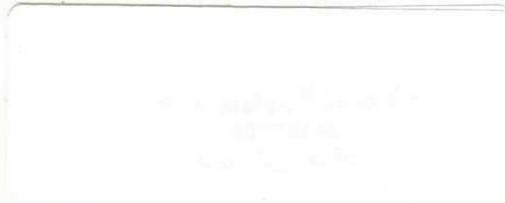
Benemar Alencar de Souza



Tese submetida ao  
Colegiado dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal da Paraíba,  
em cumprimento parcial das exigências para obtenção do título de  
Doutor em Ciência no domínio da Engenharia Elétrica.



Orientador:  
Prof. Sreeramulu Raghuram Naidu, PhD



Campina Grande, abril de 1995



© 1995, Benemar Alencar de Souza

ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Setorial do campus II da UFPb

S725m Souza, Benemar Alencar de  
Métodos computacionais da res-  
posta de circuitos não-lineares com  
excitação periódica: um estudo vol-  
tado para análise de ferroresonân-  
cia. Campina Grande: UFPb, 1995.  
118p. (Tese (Doutorado) Engenha-  
ria elétrica, UFPb).  
1. Ferroresonância - Circuitos Não-  
lineares.  
I. Título.  
CDU 621.3.8



MÉTODOS COMPUTACIONAIS DA RESPOSTA DE CIRCUITOS NÃO LINEARES  
COM EXCITAÇÃO PERIÓDICA: UM ESTUDO VOLTADO PARA A  
ANÁLISE DE FERRORESSONÂNCIA

**BENEMAR ALENCAR DE SOUZA**

Tese Aprovada em 28.04.1995

*Maria de Fátima Q.V. Turnell*  
**MARIA DE FÁTIMA QUEIROZ VIEIRA TURNELL, Ph.D., UFPB**  
Presidente da Comissão

*Sreeramulu Raghuram Naidu*  
**SREERAMULU RAGHURAM NAIDU, Ph.D., UFPB**  
Orientador

*Wellington Santos Mota*  
**WELLINGTON SANTOS MOTA, Ph.D., UFPB**  
Componente da Banca

*Washington Luiz Araujo Neves*  
**WASHINGTON LUIZ ARAUJO NEVES, Ph.D., UFPB**  
Componente da Banca

*José Pissolato Filho*  
**JOSÉ PISSOLATO FILHO, Dr.Ing., UNICAMP**  
Componente da Banca

*Yaro Burian Júnior*  
**YARO BURIAN JÚNIOR, Dr., UNICAMP**  
Componente da Banca

CAMPINA GRANDE - PB  
Abril - 1995

A Dona Lica, minha mãe,  
e a meu grande amigo 'Seu' Jucá,  
que por uma dessas coincidências da vida,  
é também meu pai.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor S. R. Naidu, pela excelente orientação;

A Fátima, que foi sempre compreensiva, por me estimular a esta realização;

Aos meus filhos, Gustavo, Catarina e Mariana, por me cederem muitas das horas que foram dedicadas a este trabalho;

eu sou profundamente grato.

## SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS .....	vii
LISTA DE FIGURAS .....	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xvii
RESUMO .....	xxi
ABSTRACT .....	xxiii
I. O FENÔMENO DA FERRORESSONÂNCIA .....	1
1.1 Revisão bibliográfica.....	2
1.2 Extensão do conceito de fasores a sinais de forma de onda não-senoidal .....	4
1.2.1 Valor eficaz de sinais com forma de onda não-senoidal.....	4
1.2.2 Potência associada a tensão e corrente não-senoidais.....	6
1.3 As soluções de um circuito ferrossonante.....	6
1.4 Casos de ferrossonância em sistemas de potência .....	12

1.4.1 Transformador de potencial ligado a uma linha desenergizada de circuito duplo .....	12
1.4.2 Energização de uma ou duas fases de um transformador em vazio.....	14
1.4.3 Desenergização de um transformador de potencial .....	14
1.4.4 Ferroressonância em sistema de distribuição.....	18
1.4.5 Derivação em linhas de circuito duplo .....	19
II. SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE CIRCUITOS NÃO-LINEARES .....	21
2.1 Um circuito não-linear para exemplificações .....	22
2.2 Método da força bruta.....	23
2.3 Método da linearização por partes .....	25
2.4 As modalidades de curva-característica.....	32
2.4.1 A conversão da curva fluxo-corrente em curva tensão-corrente eficaz.....	33
2.4.2 A conversão da curva tensão-corrente eficaz em curva fluxo-corrente.....	37
2.5 Método baseado na característica volt-ampere eficaz .....	38
2.6 O princípio do balanço de harmônicos .....	39
2.7 Método de Galerkin.....	42
2.7.1 Funções de base.....	43
2.7.2 Aproximações residuais ponderadas.....	43
2.7.3 A aproximação de Galerkin.....	45
2.7.4 Solução periódica de circuito não-linear pelo método de Galerkin.....	46
2.8 Comparação de resultados.....	57
III. O CÁLCULO DA RESPOSTA PERIÓDICA COMO UM PROBLEMA DE VALORES DE CONTORNO .....	61
3.1 A formulação do problema .....	62

3.2 A solução do problema por método de tentativas e erros.....	63
3.3 Um circuito de segunda ordem para exemplificação .....	64
3.4 O método de Newton-Raphson.....	66
3.4.1 O algoritmo do método .....	69
3.5 Solução do problema através de método de otimização.....	71
3.5.1 O algoritmo do método do gradiente.....	73
3.5.2 O método do gradiente com variação de fase.....	75
IV. UMA NOVA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DO GRADIENTE E SUA EXTENSÃO AO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON .....	77
4.1 O método da otimização restrita. ....	77
4.2 O método da otimização restrita com variação de fase .....	85
4.3 Critérios de definição da resposta periódica de circuitos não-lineares.....	88
4.4 Cálculo do jacobiano do vetor de discrepância pelo método da otimização restrita .....	92
V ANÁLISE DE FERRORESSONÂNCIA ATRAVÉS DO MÉTODO DA OTIMIZAÇÃO RESTRITA.....	95
5.1 A resposta transitória do circuito .....	96
5.2 A resposta de regime permanente.....	97
5.2.1 Determinação pelo método do gradiente.....	97
5.2.2 Determinação pelo Método de Newton-Raphson.....	100
5.3 A característica de ferroressonância de frequência fundamental.....	103
5.3.1 Determinação pelo método do gradiente .....	104
5.3.2 Determinação pelo método de Newton-Raphson .....	106
5.4 Resultados e discussão.....	108



VI. CONCLUSÃO.....115

REFERÊNCIAS.....119

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Circuito ferroressonante série e a característica $\lambda$ - $i$ do indutor não-linear.....	7
1.2	Diagrama fasorial do circuito da fig. 1.1.....	7
1.3	Solução simplificada do circuito da fig. 1.1 desprezando-se as perdas. (a) interseção das características $v - i$ do indutor e do capacitor. (b) diagramas fasoriais.....	8
1.4	Comportamento do circuito da fig. 1.1 desprezando-se as perdas; (a) efeito do aumento da tensão aplicada; (b) efeito da redução da capacitância ou da frequência.....	10
1.5	Característica tensão-corrente do capacitor , do indutor e do circuito.....	11
1.6	Característica tensão-corrente genérica do circuito ferroressonante série.....	12
1.7	Ferroressonância em um circuito duplo;(a) diagrama unifilar; (b) circuito equivalente.....	13
1.8	Sistema com condições de ferroressonância; (a) diagrama unifilar; (b) diagrama esquemático; (c) circuito equivalente.....	15
1.9	Aproximação linearizada por parte da curva característica do transformador de potencial.....	16
1.10	Tensão, fluxo e corrente no sistema da fig. 1.8 durante a ocorrência de ferroressonância.....	17
1.11	Uma situação de ferroressonância série em sistemas de distribuição.....	19
1.12	Subestação de derivação.....	20

2.1	Circuito com indutor não-linear empregado para exemplificações. ....	23
2.2	Resposta de regime permanente do circuito da fig. 2.1 obtida através do método da força bruta. ....	26
2.3	(a) Característica do elemento não-linear do circuito da fig. 2.1 e sua linearização por partes. (b) Região do vértice da aproximação linear em destaque. ....	27
2.4	Respostas do circuito da fig. 2.1 obtidas através do método da linearização por parte. (a) Com fluxo inicial nulo; (b) com fluxo inicial de -3.246 mVs (regime permanente). ....	30
2.5	(a) fluxo e corrente versus tempo e (b) curva fluxo-corrente. ....	34
2.6	Característica volt-ampere eficaz do elemento não-linear do circuito da fig. 2.1. ....	36
2.7	Características volt-ampere eficazes das partes linear e não-linear do circuito da fig. 2.1. ....	38
2.8	Resposta de regime permanente do circuito da fig. 2.1 obtida pelo método do balanço de harmônico. ....	42
2.9	Resposta de regime permanente do circuito da fig. 2.1 obtida pelo método de Galerkin. ....	51
2.10	Trajatórias no plano de fase. (a) fluxo, (b) corrente. ....	60
3.1	Circuito empregado em exemplificação. ....	65
3.2	Uma resposta de regime permanente do circuito da fig. 3.1 obtida pelo método de Newton-Raphson. ....	70
3.3	Uma resposta de regime permanente do circuito da fig. 3.1 obtida pelo método do gradiente. ....	75
4.1	Espaço de estado bidimensional. (a) Trajetória genérica; (b) trajetória fechada e simétrica correspondente a uma solução periódica de circuito bilateral. ....	89
5.1	Circuito ferroressonante série. ....	96
5.2	Característica de ferroressonância fundamental do circuito da fig. 5.1. (C = 400 pF, R = 32k). ....	109

5.3	Soluções estáveis do circuito da fig. 5.1 para uma tensão de excitação de 1000 kV; (a) com baixo nível de saturação (ponto ① da fig. 5.2); (b) com alto nível de saturação ( ponto ③ da fig. 5.2).....	110
5.4	Solução instável do circuito da fig. 5.1 para uma tensão de excitação de 1000 kV (ponto ② da fig. 5.2).....	111
5.5	Dependência da característica de ferroressonância fundamental com relação à capacitância do circuito ( $R = 32k$ ); (a) características para $C \leq 400$ pF; (b) característica para $C = 400$ nF .....	112
5.6	Dependência da característica de ferroressonância fundamental com relação à resistência série ( $C = 400$ pF).....	113
5.7	Número de iterações para se obterem os pontos indicados da curva de ferroressonância da fig. 5.2 .....	114

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\mathcal{X}, \chi$  símbolos genéricos, usado apenas nesta lista (não aparece no texto).
- $\{ \}$  nesta lista indica o conjunto de possibilidade de  $\mathcal{X}$  ou  $\chi$  (quando restrita).
- $\mathcal{X}$  amplitude da função senoinal  $\chi$ .
- $\tilde{\chi}$  valor eficaz da função periódica  $\chi$ .
- $\hat{\chi}$  valor conhecido de  $\chi$ .
- $\max(\chi)$  valor máximo de  $\chi$ ;  $\chi = \{\text{função, conjunto de valores}\}$ .
- $\min(\chi)$  valor mínimo de  $\chi$ ;  $\chi = \{\text{função, conjunto de valores}\}$ .
- $\chi^q$   $\chi$  elevado à  $q$ -ésima potência.
- $\chi^{(i)}$  valor de  $\chi$  na  $i$ -ésima iteração de um processo iterativo;  $\chi = \{\text{escalar, vetor, matriz}\}$ .
- $\boldsymbol{\chi}$  um vetor.  $\boldsymbol{\chi} = \{\text{letra minúscula em negrito}\}$ .
- $\boldsymbol{\mathcal{X}}$  uma matriz.  $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \{\text{letra maiúscula em negrito}\}$ . Fasor eficaz correspondente à função periódica  $\chi$ .  $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \{\mathbf{A}, \mathbf{I}, \mathbf{E}, \mathbf{V}, \mathbf{U}\}$ .
- $\boldsymbol{\mathcal{X}}^T$  transposta de  $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ .
- $t$  tempo.
- $\lambda$  fluxo magnético concatenado, função contínua de  $t$ .
- $\lambda_{\text{sat}}$  valor de  $\lambda$  correspondente ao joelho da curva  $\lambda-i$ .
- $\Lambda$  valor de pico de  $\lambda$ .
- $\Lambda^*$  valor especificado de  $\Lambda$ .
- $i$  corrente de magnetização, função contínua de  $t$ .
- $i_e$  corrente total do circuito.

$i_C$	corrente no capacitor.
$i_R$	corrente no resistor.
$v$	tensão de capacitor, função contínua de $t$ .
$u$	tensão do indutor.
$e$	tensão de excitação do circuito, função de $t$ .
$E$	amplitude de $e$ .
$T$	período de $e$ .
$\tau$	período de uma solução, a ser determinado.
$\omega$	$= \frac{2\pi}{T}$ , frequência angular de $e$ .
$\phi$	fase de $e$ .
$R$	resistência.
$C$	capacitância.
$L$	indutância.
$L_0$	indutância correspondente à região não-saturada da característica $\lambda-i$ .
$L_1$	indutância correspondente à região saturada da característica $\lambda-i$ .
$a, b$	parâmetros da expressão de uma função (linear ou polinomial truncada).
$n$	número de intervalos em que se divide $T$ .
$\Delta t$	$= T/n$ , duração de cada subintervalo de $T$ .
$p$	número de ordem de subintervalo de $T$ ; $p = 1, 2, \dots, n$ .
$\chi_0$	$= \chi(0)$ , valor inicial de $\chi$ ; $\chi = \{\lambda, i, v, e, x\}$ .
$\chi_p$	$= \chi(p \cdot \Delta t)$ , valor instantâneo do sinal $\chi$ em $t = p \Delta t$ ; $\chi = \{\lambda, i, v, e, x\}$ .
$x$	variável de estado não definida fisicamente.
$\mathbf{x}$	vetor de estado definido fisicamente ou não.
$\mathbf{x}_0$	vetor de estado inicial.
$\mathbf{x}_p$	vetor de estado no instante $t = p \Delta t$ .
$x_i$	$i$ -ésimo componente do vetor $\mathbf{x}$ .
$x_{i,p}$	valor de $x_i$ no instante $p \Delta t$ .
$\mathbf{e}$	vetor de discrepância.

- $\epsilon_i$   $i$ -ésima discrepância,  $i$ -ésimo componente do vetor de discrepância.
- $\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{x}}$  jacobiano do vetor de discrepância.
- $\zeta$  funcional erro.
- $Z$  funcional erro aumentada.
- $\nabla \zeta$  gradiente da funcional erro.
- $\nabla Z$  gradiente da funcional erro aumenta.
- $\mathcal{L}$  vetor de multiplicadores de Lagrange.
- $\mathcal{L}_{\alpha p}$  multiplicador de Lagrange para a  $\alpha$ -ésima restrição no instante  $p\Delta t$ .
- $\mathcal{L}_{\alpha\beta p}$  multiplicador de Lagrange na funcional  $\zeta_{\alpha}$ , para a  $\beta$ -ésima restrição no instante  $p\Delta t$ .
- $G, g$  função contínua e periódica em  $t$  de período  $T$ .
- $\gamma$  função discreta de  $t$  que congrega os valores históricos da excitação, de fluxo e de corrente.  $\gamma_p = \gamma(e_p, e_{p-1}, \lambda_p, i_p)$ .
- $f = \frac{\partial i}{\partial \lambda}$ ; derivada primeira da corrente em relação ao fluxo.
- $\sigma$  tolerância.
- $\mu$  função discreta de  $t$ , de valor nulo, exceto em um ou dois pontos específicos, onde tem valor unitário.

## RESUMO

Ferroressonância é uma oscilação não-linear que tem sido observada em sistemas elétricos de potência. Ela é uma das causas de sobretensões, de frequência harmônica ou subharmônica, fracamente amortecidas. A análise de ferroressonância é essencialmente a determinação das soluções múltiplas de regime permanente de um circuito não-linear. Uma dentre as várias soluções possíveis é a solução desejada; as outras são de natureza anormal. É possível que um circuito que esteja em operação normal passe para um estado anormal em consequência de uma operação de chaveamento. Com isso, surgem sobretensões que podem vir a danificar equipamentos, tais como pára-raios. O fenômeno da ferroressonância é estudado e as circunstâncias em que ele é observado são descritas. Métodos de determinação das respostas de regime permanente de circuitos não-lineares são revistos; inclusive, dois muito eficientes: o método do gradiente e o de Newton-Raphson. Ambos convertem o problema da determinação da resposta de regime permanente de um circuito não-linear em um problema de valores de contorno em dois pontos. Os métodos do gradiente e de Newton-Raphson são adaptados para a análise de ferroressonância. Um circuito ferroressonante típico, que é o equivalente de um transformador de potencial desconectado do barramento energizado, é estudado em detalhes. A característica de ferroressonância do circuito é determinada e as faixas de valores dos parâmetros em que há risco de ferroressonância são identificadas.



## ABSTRACT

Ferroresonance is a nonlinear oscillation that has been observed in electric power systems and is one of the sources of weakly damped overvoltages of harmonic or subharmonic frequencies. The analysis of ferroresonance is essentially the determination of the multiple steady-state solutions of a nonlinear circuit. Only one among the several possible solutions is the desired or normal solutions and the other solutions are abnormal in nature. It is possible that a switching operation could cause the circuit operating in the normal state to jump to an abnormal state and the ferroresonant overvoltages are likely to damage equipment such as surge arresters.

The phenomenon of ferroresonance has been studied and the circumstances in which it has been observed are described. The methods of determining the steady-state response of nonlinear circuits are then described. Of these methods, the gradient and Newton-Raphson schemes convert the problem of determining the steady-state response of a nonlinear circuit into a two-point boundary value problem. These techniques have been found to be very efficient.

The gradient and Newton-Raphson schemes have been adapted for the study of ferroresonance. A typical ferroresonant circuit, the equivalent of a potential transformer disconnected from the energized busbar, has been studied in detail. The ferroresonance characteristic of the circuit has been determined and the range of parameter values for which there is a risk of ferroresonance has been identified.

## Capítulo I

### O FENÔMENO DA FERRORESSONÂNCIA

Ferroressonância é uma oscilação que ocorre em circuitos elétricos contendo pelo menos um indutor de núcleo ferromagnético e um capacitor linear excitados por fonte de tensão senoidal. A oscilação pode ter a mesma frequência da fonte de excitação. Neste caso o fenômeno é chamado de ferroressonância fundamental. Também é possível que a oscilação elétrica ocorra numa frequência harmônica ou subharmônica.

Uma característica importante dos circuitos ferroressonantes é que para uma dada excitação senoidal e para certas faixas de valores de seus parâmetros, múltiplas soluções de regime permanente são possíveis. A solução que prevalece é fortemente dependente do estado inicial do circuito. A magnetização remanescente do núcleo, a tensão no instante de chaveamento e a quantidade de carga no capacitor são todas condições iniciais que determinarão a resposta de regime permanente. Mesmo com diferenças ínfimas nas condições iniciais é possível que iniciações subseqüentes de ferroressonância resulte em formas de onda muito diferentes. A resposta pode saltar de uma condição de sobretensão para outra, mais ou menos severa, espontaneamente ou devido a um transitório.

A ocorrência de ferroressonância é comum em circuitos com transformadores de potencial, embora também aconteça naqueles com transformadores de potência. De todo modo, ferroressonância pode ocorrer sempre que o núcleo magnético do transformador for excitado em série com um capacitor. Tal capacitor pode ser devido a uma linha de transmissão longa, um transformador de potencial capacitivo ou à câmara de extinção de um disjuntor.

Ferroressonância é um fenômeno perigoso que pode ter sérias consequências, se medidas preventivas não forem adotadas. Pode danificar equipamentos e comprometer gravemente a qualidade do suprimento, uma vez que pode causar sobretensões ou subtensões, com formas de onda altamente distorcidas. As tensões de ferroressonância dependem da amplitude da fonte de tensão, da capacitância e das perdas. Além disso, a característica da indutância não-linear, geralmente descrita pela curva de excitação do transformador, afeta muito as tensões de ferroressonância.

As sobretensões geradas por esse fenômeno tem um espectro de frequência com predominância entre a subharmônica de 1/3 e a 3<sup>a</sup> harmônica. Além das sobretensões, o elevado nível de corrente absorvido pelo transformador saturado pode provocar sua destruição por efeito térmico.

A análise de ferroressonância é essencialmente a determinação das várias soluções de regime permanente do circuito não-linear excitado por uma fonte senoidal. Neste capítulo se fará uma primeira análise de ferroressonância, que dá uma visão da principal característica do fenômeno: o fato de existir soluções de regime permanente múltiplas.

## **1.1 Revisão bibliográfica**

Pesquisas envolvendo ferroressonância em transformadores vem se desenvolvendo ao longo das últimas oito décadas. Segundo MORK & STUHEM (1994), o termo ferroressonância foi visto pela primeira vez na literatura no início da década de vinte (BOUCHEROT, 1920), embora artigos sobre ressonância em transformadores tivessem sido publicados bem mais cedo (BETHENOD, 1907). As primeiras análises foram feitas usando-se métodos gráficos (ODESSEY & WEBER, 1938; RUDENBER, 1950). Um trabalho detalhado e mais exato foi realizado por HAYASHI (1964) no fim da década de cinqüenta .

Numa série de artigos publicados nos anos 60, HOPKINSON (1965, 1967, 1968) relatou testes e simulações realizados para avaliar os efeitos de diferentes estratégias de chaveamento sobre a iniciação de ferroressonância em sistemas trifásicos. SMITH et al (1975) classificou os modos de ferroressonância em sistemas de distribuição com um determinado tipo de transformador, com base na amplitude e na forma de onda da tensão. GERMAY et al

(1974) fez uma revisão de ferroressonância em sistemas de alta tensão; várias circunstâncias em que o fenômeno pode ocorrer foram apresentadas nesse trabalho.

Programas de computador como o EMTP (Electromagnetic Transient Program) foram utilizados em estudos recentes de ferroressonância por ARTURI (1991), MAIRS et al (1989), MORK (1981), STUEHM et al (1989). Os modelos de sistema e de transformador adotados por esses softwares são muito melhores de que aqueles que eram disponíveis no passado, mesmo assim, não são suficientemente apropriados para a simulação plenamente satisfatória do comportamento do circuito ferroressonante.

Vários outros estudos de ferroressonância foram levados a efeito, analisando-se o circuito ferroressonante no domínio da frequência. SEMLYEN et al (1987, 1989) aplicaram o método do balanço de harmônico. AGGARWAL et al (1981) também empregaram o método do balanço de harmônico, combinado com um método analítico próprio bastante interessante mas cuja aplicabilidade é restrita, tamanho é o peso da formulação algébrica. GERMOND (1975) empregou o método de Galerkin num artigo que se tornou referência obrigatória pela clareza, objetividade e propriedade com que trata o problema da análise de ferroressonância. O método de Galerkin também foi utilizado por KIENY et al (1991). MARTI & SOUDACK (1991) fizeram um estudo de ferroressonância de frequência fundamental com base em fórmulas analíticas determinadas através do método de Ritz. Os métodos empregados pelos trabalhos a que se fez referência aqui serão revistos em profundidade no próximo capítulo.

Uma dificuldade a mais oferecida pelo circuito ferroressonante é o fato dele apresentar algumas vezes um comportamento quase-periódico. Nesse particular, KUNDERT & SORIN (1988) e GLAZIER & LIBCHABER (1988) são esclarecedores.

A teoria da bifurcação (KIENY, 1991) e dinâmica de circuitos não-lineares e caos (MORK & STUEHM, 1994; MORK, 1992) foram aplicados a estudos de ferroressonância nos últimos anos. Essa teorias não são simples, mas VERHULST (1990) e PARKER & CHUA (1989) apresentam uma introdução conceitual muito boa.

Reconhecidamente, a análise de ferroressonância em sua essência, corresponde ao problema de determinar a resposta de regime permanente de um circuito não-linear. Um circuito com propriedades que precisam ser respeitadas, mas que podem e devem ser

exploradas. A determinação da resposta periódica de circuitos não-lineares tem sido tratada como um problema de valores de contorno em dois pontos (GERALD, 1978) e resolvido por métodos de tentativa e erro (APRILLE & TRICK, 1972; COLON & TRICK, 1973; ZEIN, 1990) ou por métodos de otimização (NAKHLA & BRANIN, 1977). Estes métodos, foram aplicadas a osciladores, conversores e outros tipos de circuitos eletrônicos. Aqui, se defende a tese de que essas técnicas podem ser utilizadas com vantagens, em combinação com um procedimento de continuação apropriado, no levantamento da característica de ferroressonância. Não se encontrou indicação na literatura de que isso tenha sido feito antes. Uma divulgação de maior alcance deste trabalho, compreende três artigos, o primeiro dos quais já publicado por NAIDU & SOUZA (1992, 1993) e os outros em via de publicação (SOUZA & NAIDU, 1995; NAIDU & SOUZA, 1995).

Há todos os indícios de que a metodologia de levantamento da característica de ferroressonância desenvolvida aqui, possa ser empregada com modelos de núcleo ferromagnético que considere histerese e correntes parasitas, como o que é proposto por NAIDU (1991).

## **1.2 Extensão do conceito de fasores a sinais de forma de onda não-senoidal**

Os sinais num circuito não-linear, mesmo excitado por fonte senoidal, como os circuitos que são objeto desta tese, são em via de regra, não-senoidais. Deste modo, a análise fasorial, a rigor não se aplica. No entanto, o conceito de fasores pode ser estendido, com certo grau de aproximação, a circuitos não-lineares onde os sinais são não-senoidais (BESSONOV, 1973).

### **1.2.1 Valor eficaz de sinais com forma de onda não-senoidal**

Seja  $i$  um sinal periódico cujo valor instantâneo se expresse em termos dos componentes de Fourier da seguinte maneira:

$$i = I_0 + I_1 \text{sen}(\omega t + \theta_1) + I_2 \text{sen}(2\omega t + \theta_2) + \dots \quad (1.1)$$

Por definição o valor eficaz deste sinal é

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (1.2)$$

A partir da equação (1.1) se tem:

$$i^2 = I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2 \text{sen}^2(k\omega t + \theta_k) + \sum_{\substack{p=0 \\ q \neq 0 \\ p \neq q}}^{\infty} I_p I_q \text{sen}(p\omega t + \theta_p) \text{sen}(q\omega t + \theta_q)$$

ou simplesmente,

$$i^2 = I_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2 \quad (1.3)$$

uma vez que

$$\int_0^T \text{sen}^2(k\omega t + \theta_k) dt = \frac{T}{2} \quad (1.4a)$$

$$\int_0^T \text{sen}(p\omega t + \theta_p) \text{sen}(q\omega t + \theta_q) dt = 0 \quad (1.4b)$$

$p \neq q$

Combinando-se as equações (1.2) e (1.3) resulta

$$\bar{I} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

Desde que a amplitude de cada harmônico,  $I_k$ , é  $\sqrt{2}$  vezes o seu valor eficaz,  $\bar{I}_k$ , se tem por fim:

$$\bar{I} = \sqrt{\bar{I}_0^2 + \bar{I}_1^2 + \bar{I}_2^2 + \bar{I}_3^2 + \dots} \quad (1.5)$$

Assim, o valor eficaz de um sinal não-senoidal é a raiz quadrada da soma dos quadrados dos valores eficazes dos harmônicos individuais e do quadrado do componente D.C.. Deve-se notar que o valor eficaz de um sinal não senoidal é independente dos ângulos de fase dos harmônicos.

### 1.2.2 Potência associada a tensão e corrente não-senoidais

A potência média  $P$  em um circuito alimentado por uma tensão  $v$  e uma corrente  $i$  periódicas é:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T vi \, dt \quad (1.6)$$

Representando-se  $v$  e  $i$  por séries de Fourier se tem:

$$v = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_m \text{sen}(k\omega t + \theta_k) \quad (1.7a)$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_m \text{sen}(k\omega t + \theta_k - \phi_k) \quad (1.7b)$$

Substituindo-se as eqs. (1.7) na eq. (1.6) e levando-se em conta as eqs. (1.4) se chega a:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{V}_k \tilde{I}_k \cos \phi_k \quad (1.8)$$

Da equação (1.8) se conclui que a potência associada a cada harmônico é independente e a potência média devida a tensões e correntes não-senoidais é igual a soma das potências médias devidas aos harmônicos individuais.

### 1.3 As soluções de um circuito ferroressonante.

O circuito da figura 1.1 corresponde à bobina de um transformador, que é energizada através de uma capacitância. A característica  $\lambda-i$  do núcleo do transformador também é mostrada na figura, o que evidencia a natureza não-linear do circuito. Conforme foi discutido na seção anterior, se pode por aproximação, aplicar o conceito de fasores a esse circuito, apesar dele não ser linear. Deste modo, se constrói o diagrama fasorial que é visto na fig. 1.2, o qual se transforma num dos diagramas da fig. 1.3b ao se desprezarem as perdas no circuito. De modo geral, vale para o circuito a equação fasorial

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} + \mathbf{V}. \quad (1.9)$$

No caso das perdas não serem levadas em conta, os fasores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  estarão defasados de  $180^\circ$ . Logo,

$$\vec{U} = \vec{E} + \frac{1}{\omega C} \vec{I} \quad (1.10)$$

A equação (1.10) é representada graficamente pela fig. 1.3a, onde a curva característica V-I do indutor é superposta à reta de inclinação  $1/\omega C$  correspondente ao conjunto fonte-capacitor. Da forma como é visto na fig. 1.3a, a curva e a reta se interceptam em três pontos distintos, o que significa que há três soluções possíveis para o circuito.

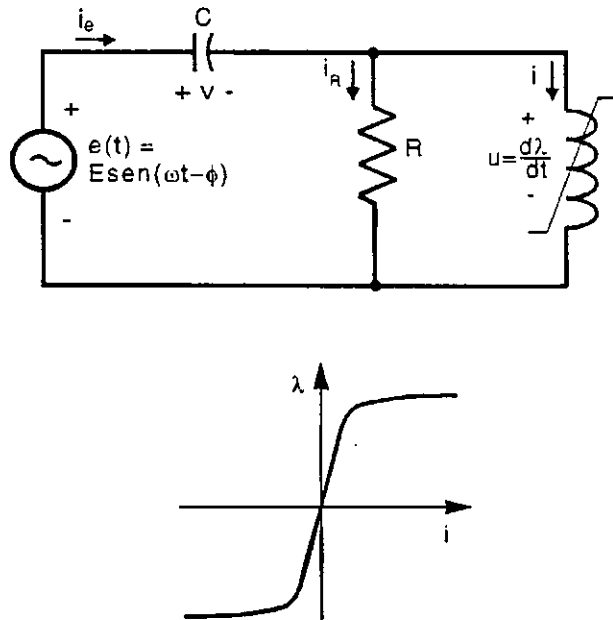


Fig. 1.1 Circuito ferroressonante série e a característica  $\lambda-i$  do indutor não-linear.

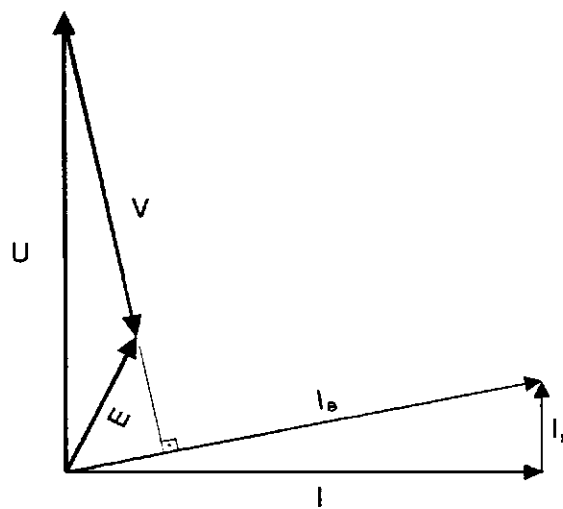
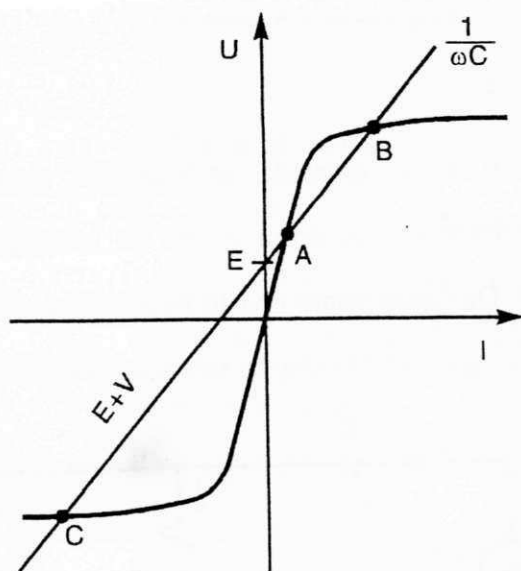
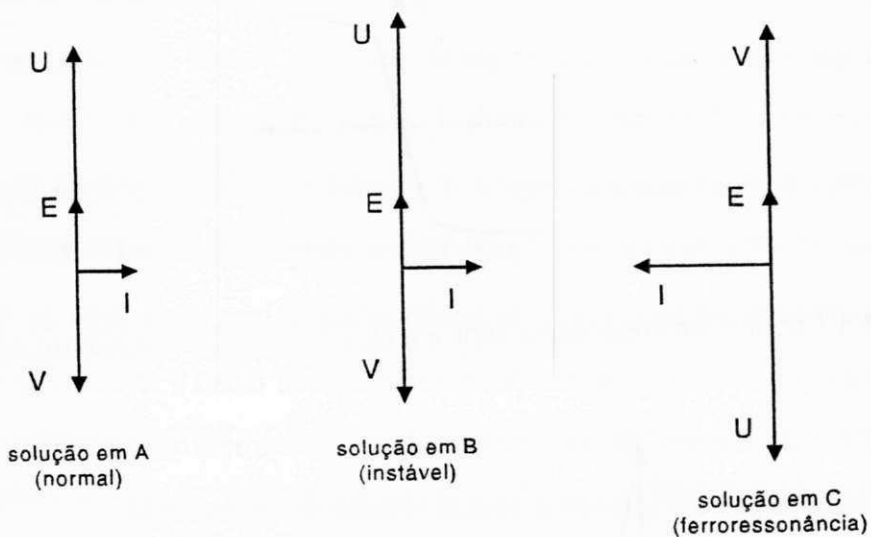


Fig. 1.2 Diagrama fasorial do circuito da fig. 1.1





(a)



(b)

Fig. 1.3 Solução simplificada do circuito da fig. 1.1 desprezando-se as perdas.  
 (a) interseção das características  $V-I$  do indutor e do capacitor.  
 (b) diagramas fasoriais.

O diagrama fasorial correspondente a cada um dos pontos de solução indicados na fig. 1.3a são mostrados na fig. 1.3b. Um pequeno aumento na tensão de excitação, repercute no gráfico como um ligeiro deslocamento da reta  $E+V$  para cima. Isso significa que os pontos de operação  $A$  e  $C$  se deslocam para cima e para direita, enquanto o ponto  $B$  se desloca ao contrário, isto é, para baixo e para esquerda. Portanto em torno das soluções  $A$  e  $C$ , um aumento da tensão de excitação tem com efeito aumento da corrente e conseqüentemente das tensões do capacitor e do indutor. Em torno da solução  $B$ , esse comportamento se inverte, isto é, se a amplitude da tensão de excitação aumenta, a corrente diminui; diminuem também as tensões do capacitor e do indutor.

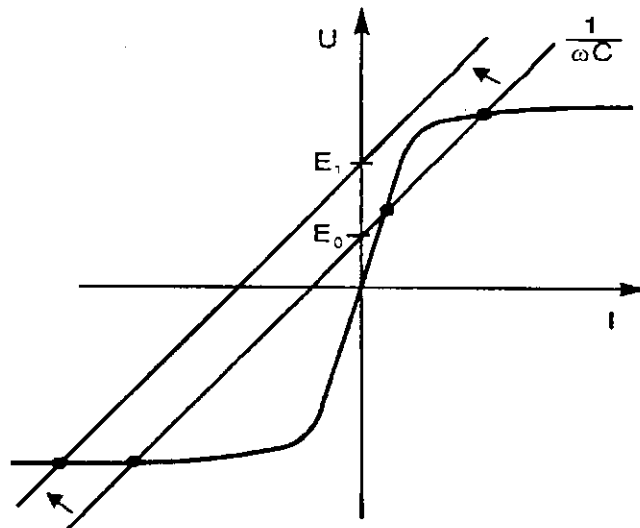
As soluções  $A$  e  $C$  são estáveis, ou seja, se o circuito está operando em regime permanente no ponto  $A$  (ou  $C$ ) e ocorre uma ligeira alteração, por exemplo, na amplitude ou na frequência da tensão de excitação, novo ponto de operação será alcançado próximo do ponto original. Isso não é o que acontece com relação à solução  $B$ ; se esta solução é alcançada, o que não é fácil, qualquer perturbação, por menor que seja, tende a levar o circuito para um ponto de operação perto de  $A$  ou de  $C$ . A solução  $B$  é instável.

No ponto de funcionamento estável  $A$  o comportamento do circuito é predominantemente indutivo ( $U > V$ ). Já no ponto  $C$  predomina o efeito capacitivo ( $V > U$ ).

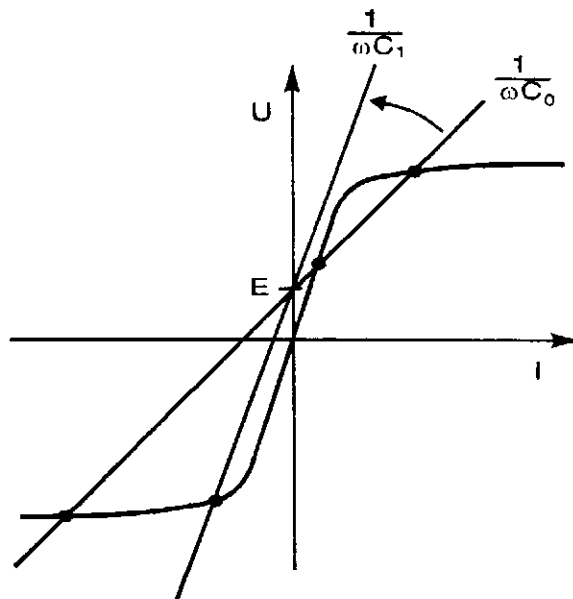
Se há um aumento progressivo da tensão aplicada, uma diminuição da frequência, ou uma redução da capacitância, o ponto de operação normal tende a se deslocar para cima até que as duas curvas deixem de se interceptar no primeiro quadrante (fig. 1.4). Nessas condições, o circuito passa a apresentar apenas solução ferroressonante.

Como já foi mencionado, a solução ferroressonante apresenta em relação à solução normal uma corrente de amplitude elevada e fase invertida. A tensão capacitiva é predominante sobre a tensão indutiva e a tensão no elemento não-linear assume valores elevados, trazendo perigo à instalação.

A análise feita aqui é simples e tem conotação apenas preliminar. Não se pode perder de vista que ela está centrada na hipótese de que seja razoável substituir correntes e tensões não-senoidais por equivalentes senoidais, da forma como se explicou na seção precedente.



(a)



(b)

Fig. 1.4 Comportamento do circuito da fig. 1.1 desprezando-se as perdas; (a) efeito do aumento da tensão aplicada; (b) efeito da redução da capacitância ou da frequência.

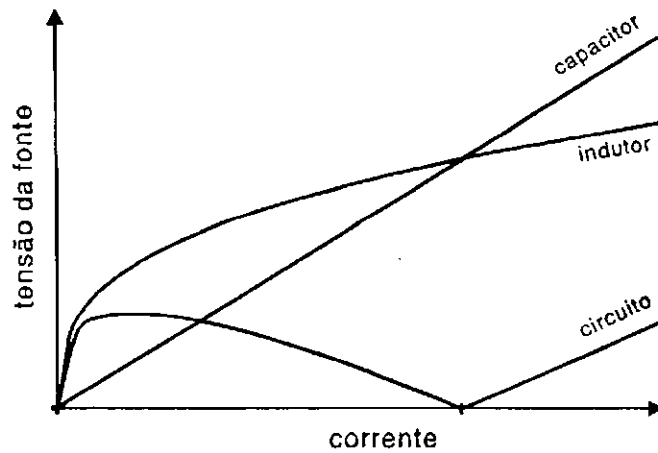


Fig. 1.5 Característica tensão-corrente do capacitor , do indutor e do circuito.

Continuando esta análise, é possível se delinear a forma da curva tensão-corrente do circuito da fig. 1.1, se a resistência é desprezada. Na fig. 1.5 aparecem as curvas tensão-corrente do indutor não-linear e do capacitor linear. Para uma dada corrente, a tensão resultante é sempre  $|U - V|$ .

A figura 1.6 é a forma mais geral da curva tensão-corrente do circuito ferroressonante série. Esta curva pode ser levantada em laboratório, ou pode ser calculada com auxílio de computador, usando diferentes métodos, conforme se discutirá nos próximos capítulos. O interesse agora é apenas entender o comportamento do circuito ferroressonante mediante a análise de sua curva tensão-corrente.

Reportando-se à fig. 1.6, suponha-se que a tensão da fonte aumente gradualmente a partir de zero. Como consequência, a corrente traçará a curva do ponto 0, através do ponto 1 até o ponto 2. Se a tensão cresce ainda mais, a corrente pula do ponto 2 para o ponto 4 e então traça o segmento 4-5. Quando a tensão é diminuída gradualmente, a corrente segue o trecho da curva 5-4-3, então outro pulo acontece do ponto 3 para o ponto 1 e a partir daí cai para o ponto 0.

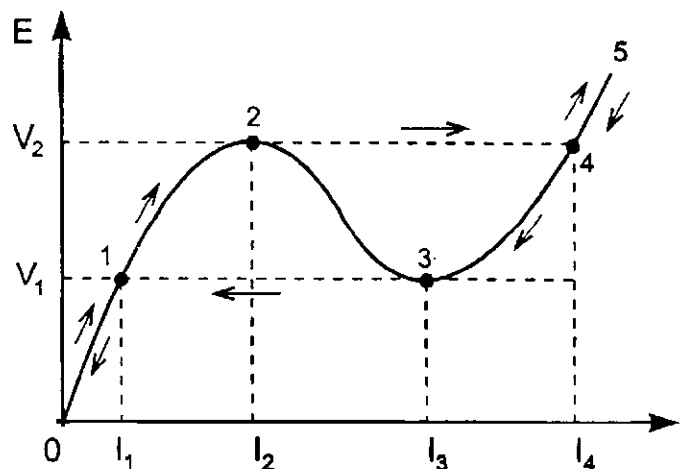


Fig. 1.6 Característica tensão-corrente genérica do circuito ferroressonante série.

#### 1.4 Casos de ferroressonância em sistemas de potência

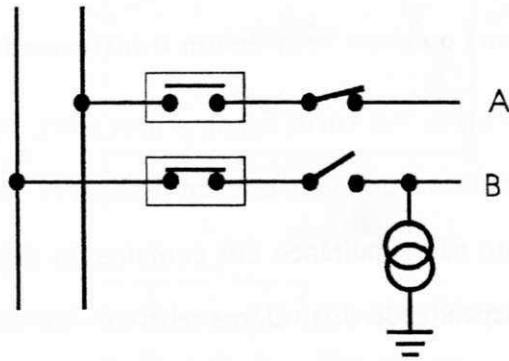
O estudo do fenômeno da ferroressonância tem sido objeto de grande interesse. Em parte, isso se deve ao emprego, nos sistemas de alta tensão, de disjuntores incluindo duas ou mais câmaras de interrupção em série. Nestes equipamentos, a repartição das tensões entre as diferentes câmaras, quando da interrupção da corrente, é assegurada através de capacitores de equalização em paralelo com as referidas câmaras.

Alguns casos de ferroressonância são descritos a seguir (GERMAY, 1974).

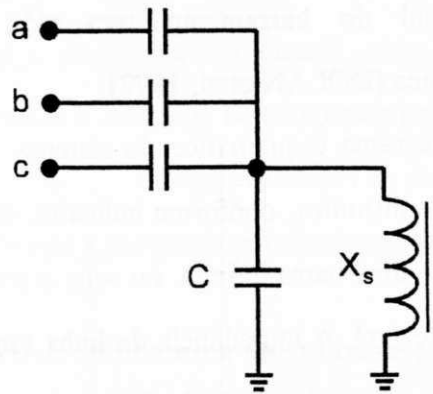
##### 1.4.1 Transformador de potencial ligado a uma linha desenergizada de circuito duplo

Considere um circuito duplo como indicado na fig. 1.7a. Seja a linha *A* de tensão nominal maior que a da linha *B*, que está desligada nas suas extremidades e a qual está ligado um transformador de potencial indutivo. Ocorre ferroressonância subharmônica neste circuito quando a linha *A* permanece energizada (DOLAN et al, 1972).

Há um acoplamento capacitivo entre as duas linhas, através do qual a linha *B* será energizada, apesar de estar desligada em seus extremos. Portanto, a indutância de magnetização do TP se energiza por uma fonte de tensão atrás de um capacitor (fig. 1.7b). Uma topologia como essa é favorável a ocorrência de ferroressonância.



(a)



(b)

Fig. 1.7 Ferroressonância em um circuito duplo;  
 (a) diagrama unifilar; (b) circuito equivalente.

Visto dos terminais do TP, a parte linear do circuito pode ser reduzida a seu equivalente de Thevenin, o qual é uma fonte de tensão em série com um capacitor (fig. 1.7b). Ferroressonância ocorre entre o capacitor e a reatância não-linear de magnetização do TP.

#### **1.4.2 Energização de uma ou duas fases de um transformador em vazio**

Considere-se um transformador em vazio ligado a uma fonte de tensão trifásica. Suponha-se que uma ou duas fases do transformador estejam desligadas em consequência da queima de fusíveis, ou do fechamento não simultâneo dos contatos do disjuntor trifásico, ou da quebra de condutores de fase. Dependendo dos valores relativos das reatâncias capacitiva e indutiva, tem sido observada ferroressonância fundamental ou subharmônica (PETERSON, 1951).

#### **1.4.3 Desenergização de um transformador de potencial**

Considere a fig. 1.8a, que mostra o diagrama unifilar de um trecho de sistema de potência com condições propícias ao surgimento de ferroressonância. Em caso de desligamento do transformador de potencial do barramento tem sido observada a ocorrência de ferroressonância subharmônica (DOLAN et al, 1972).

A fig. 1.8b é um diagrama esquemático do sistema, que mostra o disjuntor da linha próximo da barra local. Esse disjuntor, conforme indicado, tem duas câmaras de extinção. A linha é alimentada a partir de uma barra infinita, ou seja, a impedância equivalente do sistema até o início da linha é desprezível. A impedância da linha também é desprezada. O disjuntor próximo da barra remota que permanece fechado foi suprimido do diagrama esquemático.

A fig. 1.8c mostra o circuito equivalente do sistema. Para efeito de simplificação, considerou-se uma única capacitância,  $C_1$ , em paralelo com as câmaras de extinção do disjuntor.  $C_2$  representa a capacitância à terra do barramento e demais equipamentos a ele conectado.

Observa-se que  $C_1$  e  $C_2$  caracterizam um divisor capacitivo que pode, sob certas condições, sobretudo se  $C_2$  é pequeno, dar lugar a ferroressonância envolvendo o transformador de potencial.

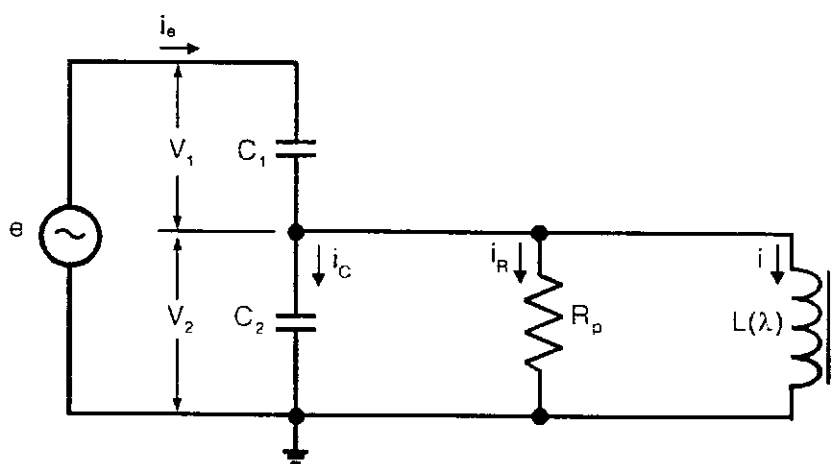
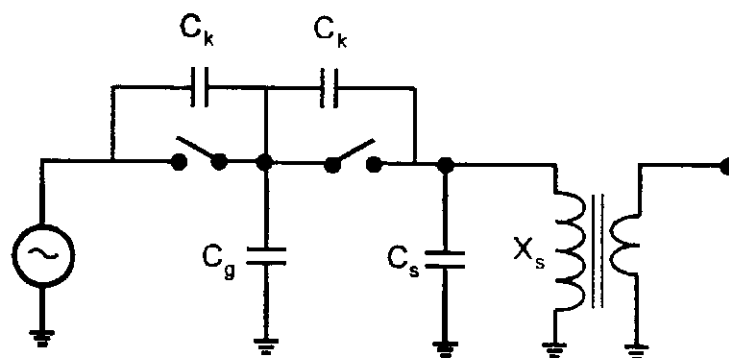
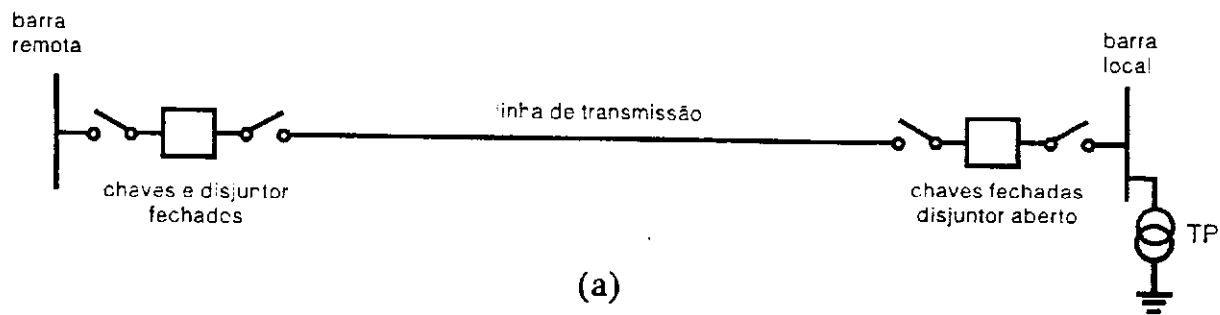


Fig. 1.8 Sistema com condições de ferroressonância; (a) diagrama unifilar; (b) diagrama esquemático; (c) circuito equivalente.



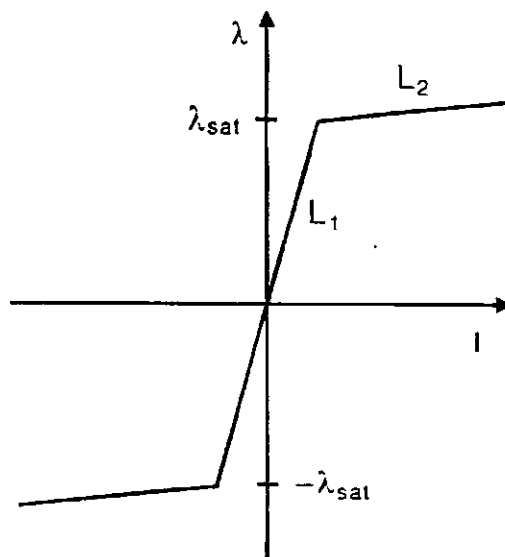


Fig. 1.9 Aproximação linearizada por parte da curva característica do transformador de potencial.

A característica não-linear do núcleo saturável do transformador (fig. 1.9) é linearizada por parte para efeito de simplificação. As perdas no núcleo, que são as predominantes, são representadas por  $R_p$ . Elas são supridas pela energia que o sistema fornece através do capacitor  $C_1$ . Em virtude da aproximação linearizada da característica  $\lambda - i$ , se pode distinguir dois períodos no desempenho do circuito: período não-saturado e período saturado. O comportamento do circuito nestes dois períodos será analisado a partir das ondas de tensão, fluxo e corrente representadas na fig. 1.10.

Período não-saturado. Seja o tempo começado a contar no instante em que o núcleo não possua magnetização. Nesse instante a tensão no capacitor  $C_2$  está em seu valor máximo e o fluxo é nulo. Havendo uma tensão aplicada nos terminais do TP, haverá um crescimento do fluxo ( $\lambda = \int u dt$ ). Enquanto o valor do fluxo for inferior ao valor do joelho da saturação,  $\lambda_{sat}$ , a indutância é muito alta ( $L_1$ ), podendo desprezar-se a corrente de excitação. Até o instante  $t_1$ , portanto, praticamente nenhuma corrente é requerida e a tensão  $u$  permanecerá constante.

Período saturado. A partir do momento em que a saturação é atingida ( $t = t_1$ ) a indutância cai drasticamente, passando para  $L_2$ , com isso ocorre um grande pulso de corrente que atinge seu valor máximo no instante  $t_2$ . Neste instante, a tensão  $u$  possui valor nulo.

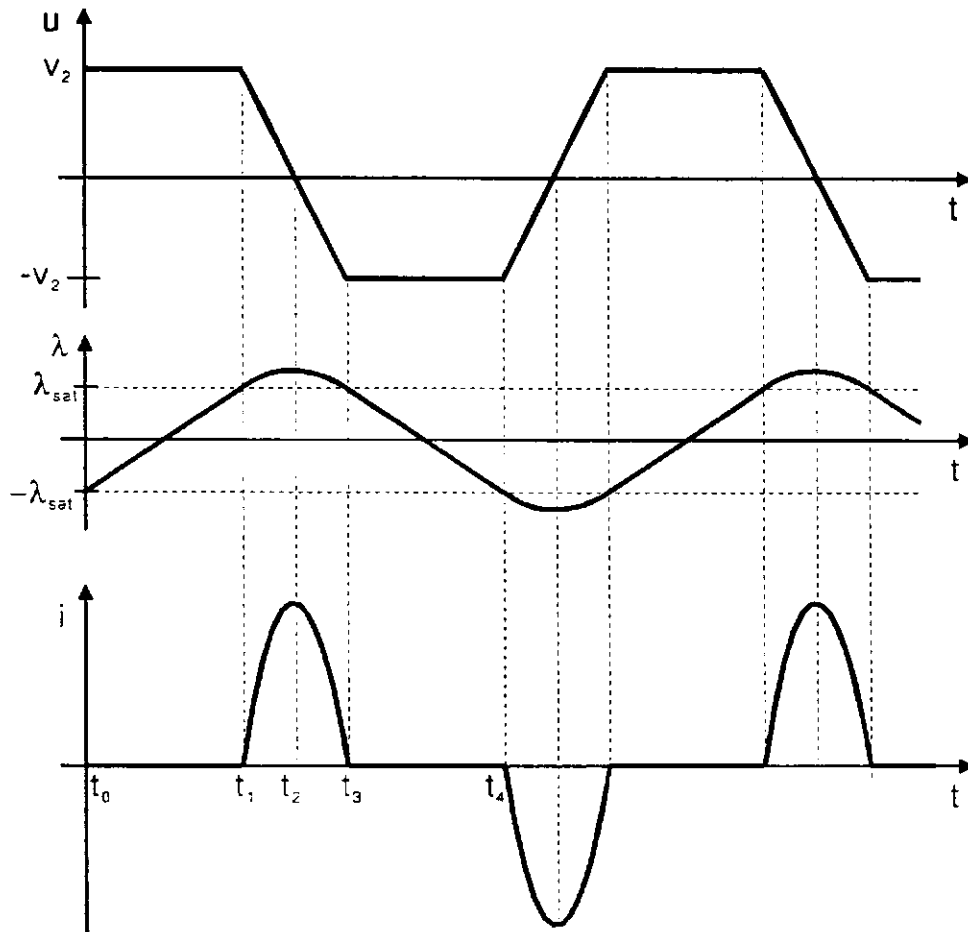


Fig. 1.10 Tensão, fluxo e corrente no sistema da fig. 1.8 durante a ocorrência de ferroressonância

Entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , portanto, toda energia armazenada no campo elétrico do capacitor é convertida em energia magnética, armazenada no campo do indutor. A partir de  $t_2$  o campo magnético entra em colapso carregando o capacitor com polaridade oposta.

No instante  $t_3$  o fluxo retorna ao valor de joelho  $\lambda_{sat}$ , a corrente praticamente cessa e o capacitor está completamente carregado com polaridade oposta. Sob a influência deste potencial negativo o fluxo decresce, passa pelo zero e então cresce com polaridade oposta,

até que no instante  $t_4$  o núcleo se satura completamente. Um pulso de corrente então flui e a tensão é novamente revertida em polaridade, repetindo-se o processo.

Uma vez iniciado, o fenômeno se mantém estável, já que a causa determinante, que é a saturação, não envolve perdas. A energia que o sistema fornece através do capacitor  $C_1$  supre as perdas por histerese.

Para que o fenômeno descrito se estabeleça, é necessário que o núcleo seja levado à saturação, o que se dá por meio de alguma sobretensão. Neste caso da fig. 1.8, o núcleo pode ser levado à saturação pela sobretensão transitória de chaveamento decorrente da abertura do disjuntor.

#### **1.4.4 Ferroressonância em sistema de distribuição**

O interesse, antigo, por estudos de ferroressonância em sistemas de distribuição, demonstrado na literatura<sup>1</sup> se explica pela maior ocorrência do fenômeno nesses sistemas. O transformador de distribuição do tipo cinco colunas, recebeu atenção a parte<sup>2</sup>. GÖNEN (1986) apresenta de modo sintético, uma série de recomendações que podem minimizar os efeitos da ferroressonância em sistemas de distribuição. Essas recomendações são baseadas em conclusões (muitas das quais, empíricas) de algumas das referências acima e de outras publicações.

Uma causa comum de ferroressonância em sistemas de distribuição é a abertura de condutores em alimentadores trifásicos com capacitores em derivação (HENDRICKSON et al, 1953). Mesmo na ausência de bancos de capacitores, pode ocorrer o fenômeno, dependendo da extensão do alimentador. É o que procura representar a fig. 1.11, onde o transformador no fim do alimentador tem o secundário em vazio ou então uma carga muito leve. A capacitância distribuída da própria da linha é representada na figura pelos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ . Em condições normais de operação, esses capacitores estão em derivação. Após a abertura do disjuntor (ou fusível, ou seccionalizadora semi-automática) ocorre uma variação

---

<sup>1</sup> HOPKINSON (1965, 1967, 1968), SMITH et al (1975), CRANN & FLICKINGER (1954), SCHULTZ (1964).

<sup>2</sup> ARTURI (1991), MAIRS et al (1989), STUEHM et al (1989), MORK (1992).

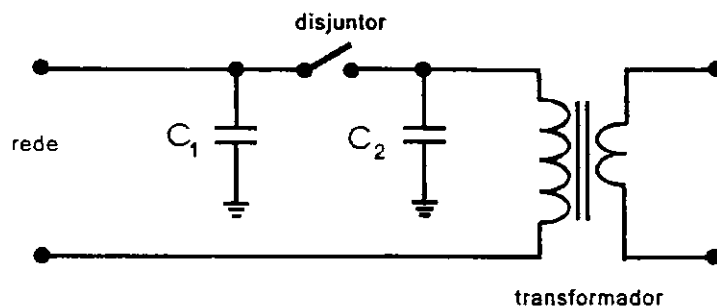


Fig. 1.11 Uma situação de ferroressonância série em sistemas de distribuição.

na configuração do circuito, com a corrente de magnetização do transformador passando a ser suprida através dos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , agora em série. Com essa nova configuração é possível o surgimento de ferroressonância.

#### 1.4.5 Derivação em linhas de circuito duplo (BORNARD, 1990)

Para criar uma nova subestação de suprimento regional, pode-se mostrar atrativo, sob o ponto de vista econômico, fazer uma derivação de linha de circuito duplo de alta tensão que eventualmente passe na vizinhança ponto onde se deseja o suprimento. O diagrama da conexão da subestação de derivação é mostrado na fig. 1.12, onde DA e DB designam os disjuntores das subestações de interconexão A e B, e DP o disjuntor da subestação de derivação P.

Nesse tipo de conexão pode surgir, durante condições anormais de operação ou falhas de equipamento, problemas de ferroressonância. Quando DA e DB estão abertos nas três fases e DP está fechado em pelo menos uma das fases, pode aparecer ferroressonância devido ao acoplamento com o segundo circuito que permanece em serviço. Desse modo, pode haver sobretensão, o que requer uma ação muito rápida para evitar danos a equipamentos, especialmente pára-raios. Também pode haver a saturação do núcleo ferromagnético do transformador, causando danos devido ao aumento de temperatura, no caso do fenômeno

durar vários minutos. Dependendo da sequência de abertura dos pólos do disjuntor é possível estados de ferroressonância fundamental, com fortes distorções das ondas, ou estados de ferroressonância subharmônica de 1/3.

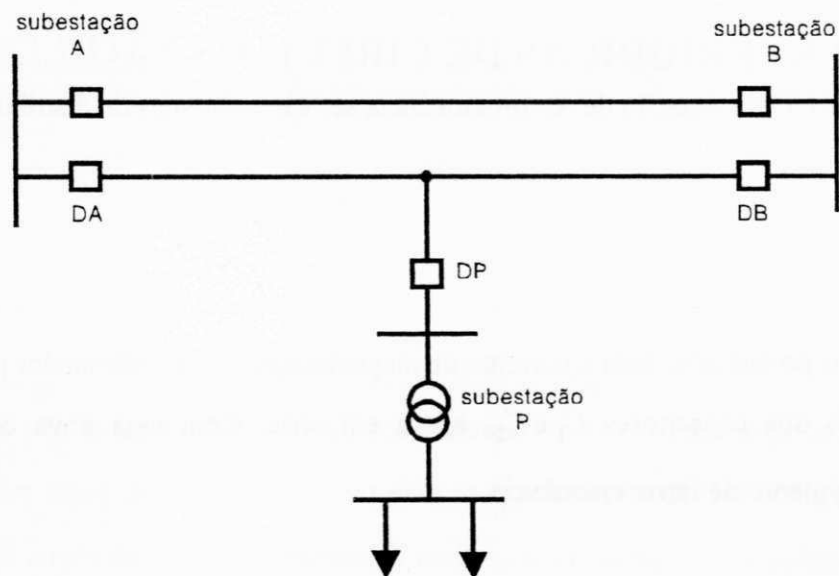


Fig. 1.12 Subestação de derivação.

## Capítulo II

### SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE CIRCUITOS NÃO-LINEARES

O interesse em compreender o comportamento dos circuitos não-lineares não é de hoje; há décadas vem surgindo métodos voltados para esse fim. Evidentemente, esses métodos foram de certa forma, influenciados pelos recursos para implementação disponíveis na época de suas concepções. Assim, os primeiros, eram métodos gráficos, ou analíticos bastante simples. Durante anos foi dada ênfase a análise de circuitos não-lineares através de simulação, do TNA (Transient Network Analyser) (HOPKINSON, 1967, 1968) e empregando-se computadores analógicos. Com o advento e difusão do computador digital, algoritmos elaborados com base em métodos numéricos sistematicamente mais sofisticados, puderam ser implementados. Assim, os circuitos passaram a ser analisados com mais realismo.

As correntes, tensões e fluxo magnéticos em circuitos não-lineares com excitação senoidal são não-senoidais em diferentes graus. As relações numéricas para tais circuitos demanda muito mais tempo para serem levantadas que para circuitos lineares. Os fenômenos não-lineares são mais difíceis de analisar.

Dentre os vários tipos de circuitos não-lineares, o interesse desta tese se concentra naqueles alimentados por sinais senoidais e em que o elemento não-linear é um indutor. Circuitos assim, estão sujeitos a muitos eventos físicos que não ocorrem em circuitos lineares, tais como (BESSONOV, 1973):

1. Fortes oscilações contendo harmônicos que não estão presentes no sinal de entrada. Em circuitos lineares, tais oscilações só ocorrem se os respectivos harmônicos estiverem presentes na onda de entrada.
2. Ocorrência de oscilações subharmônicas (ondas cujas frequências são submúltiplos inteiros da frequência fundamental). As oscilações subharmônicas mais comuns são as de frequências  $\omega/2$ ,  $\omega/3$  e  $\omega/5$ , onde  $\omega$  é a frequência de excitação.
3. Operação em duas ou mais regiões distintas ou estados estáveis. Isto se aplica inclusive ao circuito ferroressonante discutido no capítulo anterior.
4. Automodulação. Isto é uma variação periódica ou quase periódica da amplitude da corrente ou da tensão em um circuito não-linear sem um estímulo externo tal como um sinal modulador de baixa frequência.
5. Ocorrência de catástrofe (CHUA & LIN, 1975; CHUA et al, 1992). Esse fenômeno consiste no circuito, quando em regime periódico ou quase periódico, passar "espontaneamente" para um estado caótico. A transição inversa, do estado caótico para o estado periódico, também é possível.

Há uma variedade de métodos mediante os quais se podem determinar as respostas de regime permanente de circuitos não-lineares. Os principais deles serão tratados neste e no próximo capítulo e se aplicarão a um mesmo circuito simples.

## 2.1 Um circuito não-linear para exemplificações

O circuito não-linear da fig. 2.1 será empregado na sequência de exemplos que ilustrarão os métodos de determinação de soluções periódicas abordados. Não se concebe um circuito mais simples que esse: um indutor não-linear em série com um resistor e alimentado por uma fonte senoidal. Ele foi escolhido a propósito de se evitar complicações algébricas que eventualmente, pudessem comprometer a completa clareza dos princípios dos métodos.

Os parâmetros do circuito da fig. 2.1 são:  $R = 4,8 \Omega$ ;  $E = 1,5 \text{ V}$ ;  $\omega = 120 \pi \text{ rd/s}$ . Para o fluxo em volt-segundo e a corrente em ampere, a característica do elemento não-linear se expressa por:

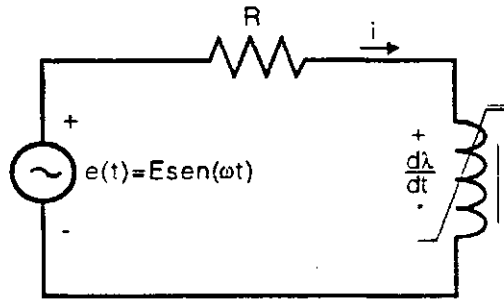


Fig. 2.1 Circuito com indutor não-linear empregado para exemplificações.

$$i = i(\lambda) = 3,12\lambda + 2,15 \cdot 10^{21} \lambda^9; R = 4,8 \Omega; E = 1,5 \text{ V}; \omega = 120\pi \text{ rd/s};$$

$$i(\lambda) = 3,12\lambda + 2,15 \cdot 10^{21} \lambda^9. \quad (2.1)$$

O circuito é regido pela equação diferencial não-linear:

$$\frac{d\lambda}{dt} = E \text{ sen } \omega t - Ri(\lambda) \quad (2.2)$$

## 2.2 Método da força bruta

Considere-se o sistema de equações diferenciais não-linear:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t), \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{G}$  são vetores de ordem  $n$ ;  $\mathbf{G}$  é uma função periódica em  $t$  de período  $T$ , é contínua em  $t$ , e  $\mathbf{x}$  tem primeira derivada parcial com relação a  $t$  contínua para todo  $\mathbf{x}$  e  $-\infty < t < \infty$ . Em regime permanente, a solução periódica deve satisfazer às condições de contorno

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(T), \quad (2.4)$$

e

$$\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0) = \int_0^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \mathbf{x}_0, \quad (2.5)$$

onde  $T$  é o período do sinal de entrada e  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ . A solução dessa equação pode ser encontrada aplicando-se o algoritmo de integração do ponto fixo:



$$\mathbf{x}_0^{i+1} = \mathbf{x}[(i+1)T] = \int_0^{(i+1)T} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \mathbf{x}_0^0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.6a)$$

Essa integração deve ser repetida até que

$$\| \mathbf{x}_0^{i+1} - \mathbf{x}_0^i \| < \varepsilon, \quad (2.6b)$$

onde  $\varepsilon$  é um número positivo arbitrariamente pequeno.

Nota-se que as eqs. (2.6) dizem simplesmente que integrando-se a eq. (2.3) por um número de períodos suficiente para que a resposta transitória se torne desprezível se chega à resposta de regime permanente. Isso é justamente o método da força bruta, com base no qual se procura encontrar a resposta de regime permanente empregando-se um programa de cálculo de transitórios como o EMTP.

Em princípio a solução periódica de qualquer circuito poderia ser determinada integrando-se suas equações em passos de tempo sucessivos até que os transitórios se extinguissem. Contudo, para circuitos com constantes de tempo muito pequenas comparadas com o período dos sinais, pode ser necessária a integração de até centenas de períodos para que a resposta transitória se extinga, o que torna o método computacionalmente inviável.

A inviabilidade do método da força bruta também ocorre para circuitos governados por sistemas de equações com autovalores de ordens de grandeza bastante diferentes. Nesses casos, o período de transitório requer grande esforço computacional, por que o passo de integração deve ser suficientemente pequeno para traçar com precisão os componentes de transitório correspondentes aos autovalores pequenos enquanto o tempo de simulação total deve ser bastante alto para cobrir os componentes correspondentes aos autovalores maiores.

### Exemplo 2.1

Determinar a solução periódica do circuito da fig. 2.1 empregando o método da força bruta.

Conforme é estabelecido na eq. (2.6a), o método da força bruta é fundamentalmente um método de integração. Para conduzir o processo por via numérica, deve-se deliberar o

número  $n$  de passos de integração por período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Com isso se define o tamanho do passo de integração  $T/n$ . Adotando-se a notação

$$x\left(p \cdot \frac{T}{n}\right) = x_p$$

e aplicando-se a regra trapezoidal de integração a equação diferencial do circuito (eq. (2.2)) se transforma na seguinte equação algébrica:

$$\lambda_p + \alpha i_p + \gamma = 0 \quad (2.7)$$

onde

$$\alpha = \frac{R\pi}{\omega n},$$

$$i_p = i(\lambda_p) = 3.12\lambda_p + 2.15 \cdot 10^{21} \lambda_p^9,$$

$$e \quad \gamma = \hat{e}_p - \hat{e}_{p-1} - \lambda_{p-1} + a i_{p-1} \quad (2.8)$$

congrega o valor atual da fonte e os valores históricos de fluxo e corrente. Na eq. (2.8),

$$\hat{e}_p = E \cos\left(\frac{2\pi}{n} p\right).$$

Partindo-se da condição inicial  $\lambda(0) = 0$  e tomando-se  $n = 128$ , se consegue a resposta de regime permanente, que é mostrada na fig. 2.2, em apenas 3 períodos, com discrepância entre os valores no início e no fim do período das variáveis de estado, inferior a 0,001%.

### 2.3 Método da linearização por partes

O método da linearização por parte da curva característica do elemento não-linear, como o próprio nome diz, consiste em se aproximar a curva por segmentos de retas. Basicamente, por esse método, o problema de se determinar a solução periódica de um sistema de equações diferenciais não-lineares é transformado em se encontrar tal solução para um sistema de equações diferenciais lineares. Os passos básicos desse método são:

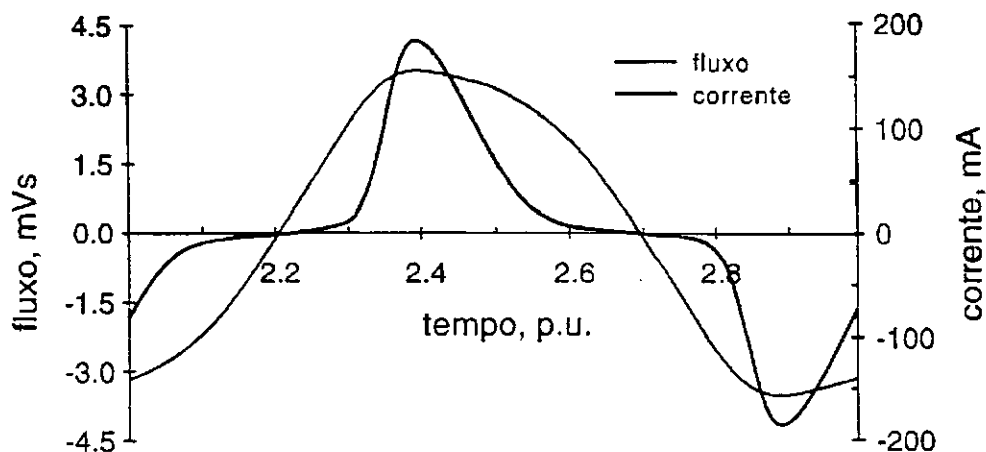


Fig. 2.2 Resposta de regime permanente do circuito da fig. 2.1 obtida através do método da força bruta.

1. A curva característica tensão-corrente, ou fluxo-corrente instantânea do elemento não linear é aproximada por segmentos de reta.
2. Para cada segmento de reta uma equação linear é escrita e substituída nas equações diferenciais não-lineares, as quais são reduzidas a equações diferenciais lineares. Para cada equação não-linear haverá tantas equações lineares quanto forem os segmentos de reta que substituem a curva característica do elemento não-linear.
3. As equações lineares são resolvidas. Para cada segmento haverá uma solução separada, com suas próprias constantes de integração.
4. Uma solução completa é obtida juntando-se as soluções individuais das equações lineares mediante o ajuste apropriado das constantes de integração em cada transição (coincidência de solução para segmentos de reta adjacentes).

### Exemplo 2.2

Determinar a solução de regime permanente do circuito da fig. 2.1 empregando o método da linearização por parte.

A característica do elemento não-linear (eq. 2.1) é aproximada por segmentos de reta conforme se vê na fig. 2.3a. Uma parte dessa figura de grande significado, em torno do vértice da aproximação linear, é vista ampliada na fig. 2.3b. Com essa aproximação linear por parte, a

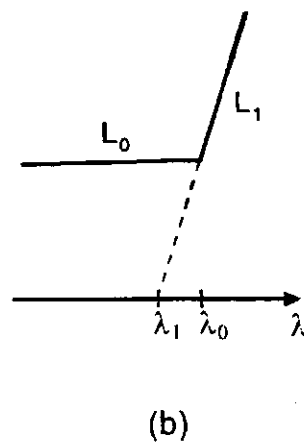
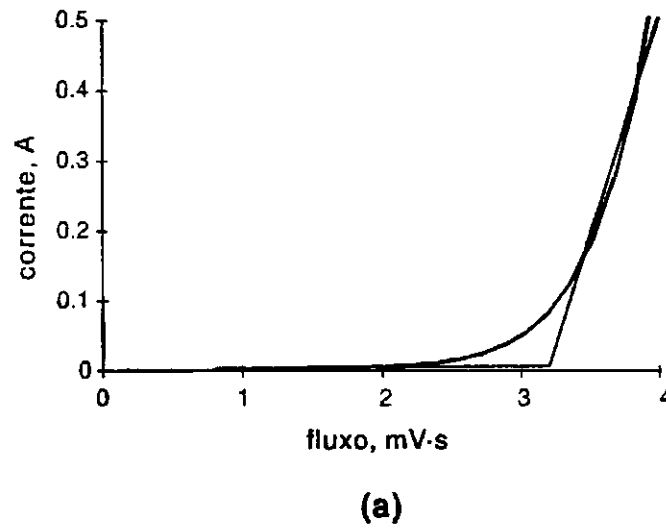


Fig. 2.3 (a) Característica do elemento não-linear do circuito da fig. 2.1 e sua linearização por partes. (b) Região do vértice da aproximação linear em destaque.

corrente no circuito passa a se expressar analiticamente em função do fluxo, do seguinte modo:

$$i(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - \lambda_1) / L_1, & \text{para } \lambda > \lambda_0 \\ \lambda / L_0, & \text{para } -\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \\ (\lambda + \lambda_1) / L_1, & \text{para } \lambda < -\lambda_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

onde

$$\lambda_1 = \lambda_0 \left( 1 - \frac{L_1}{L_0} \right). \quad (2.10)$$

Em conformidade com as figs. 2.3 e a eq. (2.10), os valores dos parâmetros nas eqs. (2.9) são:

$$L_0 = 320 \text{ mH}$$

$$L_1 = 1,6 \text{ mH}$$

$$\lambda_0 = 3,2 \text{ mVs}$$

$$\lambda_1 = 3,184 \text{ mVs}$$

Levando-se em conta as eqs. (2.9), a eq. (2.2) que governa o circuito, se desdobra em três equações diferenciais lineares (justamente o número de partes em que a curva característica foi linearizada):

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{R}{L_1} \lambda + E \text{ sen } \omega t + \frac{R}{L_1} \lambda_1, \quad \lambda > \lambda_0 \quad (2.11a)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{R}{L_0} \lambda + E \text{ sen } \omega t, \quad -\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad (2.11b)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{R}{L_1} \lambda + E \text{ sen } \omega t - \frac{R}{L_1} \lambda_1, \quad \lambda < -\lambda_0 \quad (2.11c)$$

As equações (2.11) podem ser reescritas na forma:

$$\frac{d\lambda}{dt} + a\lambda = g(t) \quad (2.12)$$

onde

$$g(t) = E \text{ sen } \omega t + ab \quad (2.13)$$

e

$$\begin{aligned}
a = R/L_1 \quad e \quad b = \lambda_1, & \quad \text{para } \lambda > \lambda_0 \\
a = R/L_0 \quad e \quad b = 0, & \quad \text{para } -\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \\
a = R/L_1 \quad e \quad b = -\lambda_1, & \quad \text{para } \lambda < -\lambda_0
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

Os valores numéricos de  $a$  e  $b$  são portanto:

para	$a$	$b$
$\lambda > \lambda_0$	$3000 \text{ s}^{-1}$	$3,184 \text{ mVs}$
$-\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0$	$15 \text{ s}^{-1}$	$0$
$\lambda < -\lambda_0$	$3000 \text{ s}^{-1}$	$-3,184 \text{ mVs}$

A solução da eq. (2.12) é simples (BOYCE, 1977):

$$\lambda(t) = e^{-at} \int e^{at} g(t) dt + ce^{-at}
\tag{2.15}$$

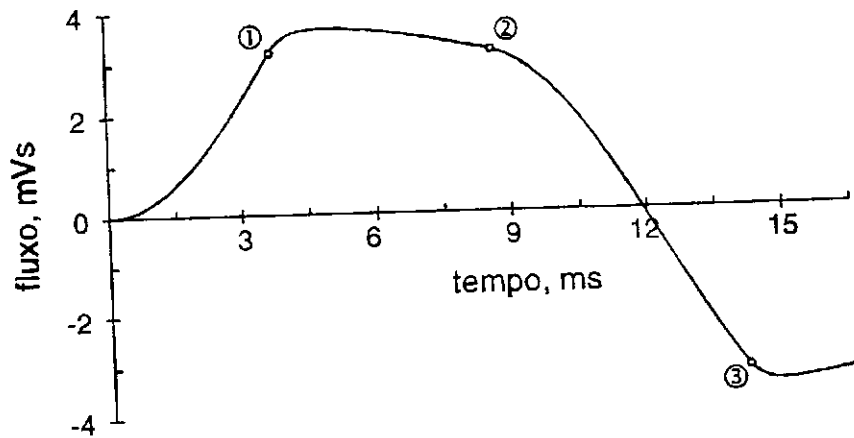
onde  $c$  é uma constante de integração. Para a função  $g(t)$  dada pela eq. (2.13) em particular, essa solução é

$$\lambda(t) = \frac{E}{a^2 + \omega^2} (a \text{ sen } \omega t - \omega \text{ cos } \omega t) + b + ce^{-at}
\tag{2.16}$$

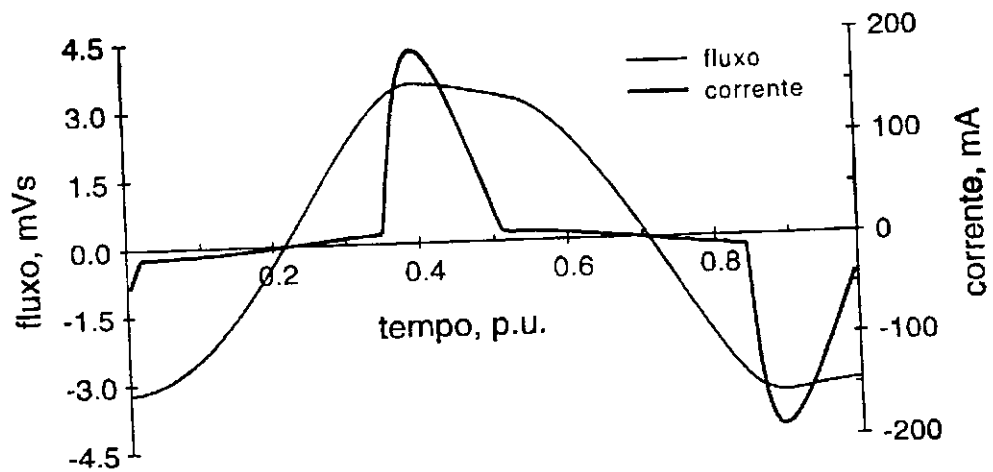
Os parâmetros  $a$  e  $b$  estão definidos. Já os valores de  $c$ , devem ser tais que  $\lambda(t)$  seja contínua. Para determiná-los se estima o fluxo inicial. Com esta estimativa e os valores correspondentes dos parâmetros  $a$  e  $b$ , se calcula  $c$  através da eq. (2.16). Este valor permanecerá válido até o instante em que o fluxo seja  $+\lambda_0$  ou  $-\lambda_0$ , dependendo do caso. Neste instante, os parâmetros  $a$  e  $b$  mudam. O valor de  $c$  deve ser recalculado.

Considerando-se o indutor inicialmente desmagnetizado, isto é estimando-se  $\lambda(0) = 0$ , se conseguiu a resposta mostrada na fig. 2.4a, que evidentemente não é de regime permanente. Os pontos em que o fluxo muda de condição, de normal para saturado ou vice-versa são indicados na figura. Os instantes correspondentes e os valores de  $c$  são:

ponto	tempo, ms	c, mVs
		3.973
①	3.687	-2.910·10 <sup>4</sup>
②	8.500	-0.8426
③	14.21	1.372·10 <sup>18</sup>



(a)



(b)

Fig. 2.4 Respostas do circuito da fig. 2.1 obtidas através do método da linearização por parte. (a) Com fluxo inicial nulo; (b) com fluxo inicial de -3.246 mVs (regime permanente).

Procedendo de algum modo que se explica no próximo capítulo, se chega à condição inicial ( $\lambda(0) = -3.246$  mVs) para a qual a resposta é a de regime permanente. Na fig. 2.4b o tempo está expresso em por-unidade com base no do período, isto é,  $T = 1$  p.u. = 16,67 ms.

Chua<sup>1</sup> é um entusiasta do modelo linear por partes. Seu principal argumento é que esse modelo fornece fórmulas analíticas exatas, válidas em cada região linear. Assim a precisão da solução fica dependente somente de erros de arredondamento que ocorrem nos instantes correspondentes às fronteiras de região linear; isto é, no caso do exemplo 2.2, quando  $t$  é tal que  $\lambda(t) = \pm\lambda_0$ . Sem dúvida, isso contrasta com os métodos baseados em fórmulas de integração numérica, os quais sempre envolvem erros de arredondamento e de truncamento local. O que se pode questionar, é a qualidade da aproximação linear por parte, que é menor no joelho da curva-característica (fig. 2.3a). Até que ponto isso tem repercussão sobre a solução obtida? É verdade que o número de partes em que se dá a linearização pode ser aumentado. Embora isso melhore o modelo, complica e reduz a precisão do processo de solução.

FELDMAN & CAPPABIANCA (1978) avaliaram a precisão do método de linearização por parte ao aplicarem-no a um circuito de grande interesse prático. Esse circuito, cujo elemento não-linear era um transformador de núcleo saturável, foi reduzido a um equivalente RLC série, o que não evitou uma formulação matemática carregada. Respaldados em resultados de laboratório, concluíram que o modelo linear por parte tem precisão satisfatória para aquele tipo de aplicação.

A equação (2.12) pode ser estendida a circuitos de segunda ordem. Para um circuito contendo um indutor não-linear mais um capacitor e resistores lineares se tem (CHUA et al, 1992):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{A}\lambda = \mathbf{g}(t) \quad (2.17)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda \\ v \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

---

<sup>1</sup> CHUA & LIN (1975), CHUA et al (1992).



é o vetor de estado e

$$\mathbf{g} = \mathbf{d} E \operatorname{sen} \omega t + \mathbf{A} \mathbf{b}. \quad (2.19)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  e o vetor  $\mathbf{d}$  são funções da topologia e dos parâmetros do circuito, e

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= [\lambda_1, 0]^T, & \text{para } \lambda > \lambda_0 \\ \mathbf{b} &= [0, 0], & \text{para } -\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \\ \mathbf{b} &= [-\lambda_1, 0]^T, & \text{para } \lambda < -\lambda_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

A solução da equação (2.17) que satisfaz à condição inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  no tempo  $t_0$  é

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s(t) + e^{-\mathbf{A}(t-t_0)} [\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_s(t_0)] \quad (2.21)$$

onde

$$\mathbf{x}_s(t) = [\mathbf{I} + (\mathbf{A} / \omega)^2]^{-1} [\mathbf{A} \operatorname{sen} \omega t - \mathbf{I} \omega \operatorname{cos} \omega t] \frac{E}{\omega^2} \mathbf{d} + \mathbf{b} \quad (2.22)$$

é a solução de regime permanente do circuito linear correspondente.  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de mesma dimensão que a matriz  $\mathbf{A}$ , nesse caso,  $2 \times 2$ .

#### 2.4 As modalidades de curva-característica

A forma polinomial  $i = a\lambda + b\lambda^q$  com  $q$  inteiro e ímpar, é uma maneira comum de se aproximar características não-lineares obtidas por experimento. Essa função, por ter simetria ímpar, pode se ajustar à curva experimental. SEMLYEN et al (1987) recomendam para um bom ajuste que se observe o seguinte:

- O coeficiente  $a$  corresponde à inclinação inicial;
- O expoente  $q$  é uma medida de agudez do joelho;
- Depois de  $a$  e  $q$  terem sido escolhidos, o coeficiente  $b$  deve ser definido de modo que a curva passe pelo ponto limite do trecho da curva, que se quer aproximar.

Nem sempre uma característica não-linear é dada em termos de valores instantâneos, como aconteceu na seção 2.1. Curvas de saturação de transformador são dadas usualmente pelo fabricante, na forma tensão versus corrente eficazes.

Dependendo da natureza do estudo e do método empregado pode haver necessidade de converter a curva-característica de uma modalidade noutra. Isto é fácil, se a resistência dos enrolamentos, a histerese e as correntes parasitas são ignoradas. Com a suposição de que a resistência dos enrolamentos é desprezível, se pode considerar que o fluxo varie no tempo senoidalmente com frequência fundamental, do mesmo modo que a tensão que normalmente é aplicada aos terminais do elemento por ocasião do levantamento de sua característica. A substituição do valor eficaz da tensão,  $\tilde{V}$ , pelo valor correspondente de fluxo,  $\lambda$ , é, portanto, uma mera mudança de escala:  $\lambda = \sqrt{2}\tilde{V}/\omega$ . A conversão de valores de corrente até o limite da região linear é igualmente simples. A partir daí, o processo de conversão deve ser recursivo, como descrevem DOMMEL et al (1986).

#### 2.4.1 A conversão da curva fluxo-corrente em curva tensão-corrente eficaz

Esse processo consiste, evidentemente, em tomar um conjunto de pontos  $(\lambda_k, i_k)$  da curva  $\lambda - i$  dispostos adequadamente e em número suficiente para representá-la, e então encontrar os pontos  $(\tilde{V}_k, \tilde{I}_k)$  correspondentes da curva  $\tilde{V}_k - \tilde{I}_k$ .

Além de se supor que o fluxo seja senoidal, suponha-se também que os valores conhecidos,  $\lambda_k, i_k$ , sejam justamente valores de pico (fig. 2.5a), de modo que

$$\lambda(t) = \lambda_k \text{ sen } \omega t \quad (2.23)$$

e

$$v(t) = \frac{d\lambda}{dt} = \omega \lambda_k \text{ cos } \omega t \quad (2.24)$$

Portanto, o valor eficaz da tensão é

$$\tilde{V} = \frac{\omega \lambda_k}{\sqrt{2}} \quad (2.25)$$

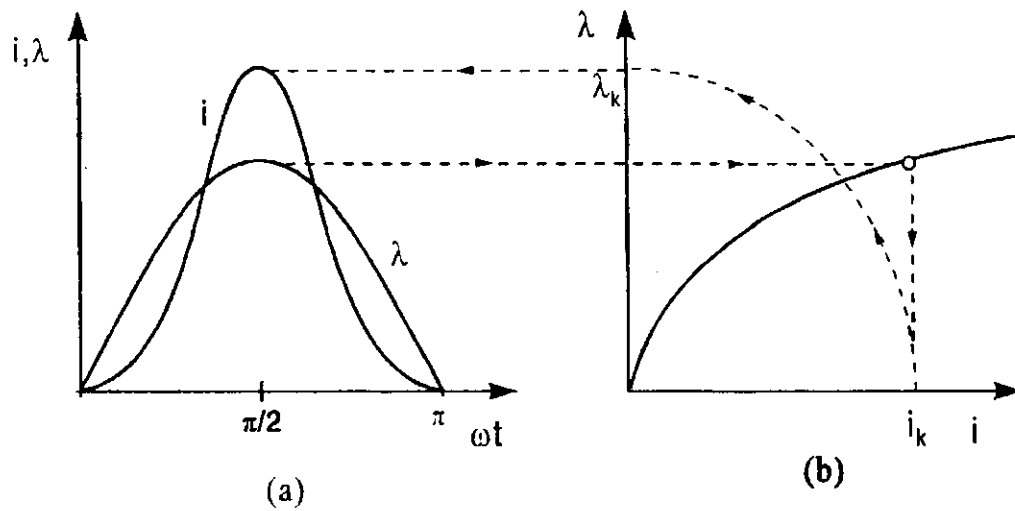


Fig. 2.5 (a) fluxo e corrente versus tempo e (b) curva fluxo-corrente.

Para a corrente, que não é senoidal, se deve recorrer à própria definição de valor eficaz. Tirando-se proveito da simetria, se estabelece a seguinte equação:

$$\tilde{I}_k^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} i^2 d(\omega t). \quad (2.26)$$

A integração indicada na eq. (2.26) pode ser efetuada em  $n$  passos, empregando-se a regra do trapézio. Desse modo se chega à seguinte expressão:

$$\tilde{I}_k = \sqrt{\frac{i_k}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} i^2 \left(\frac{\pi}{2n} p\right)} \quad (2.27)$$

onde os termos do somatório são conhecidos através da curva  $\lambda-i$ , a partir do fluxo em cada instante, que se supõe dado pela eq. (2.23).

No caso da característica fluxo-corrente ser um polinômio, uma conversão completamente analítica é possível, já que se pode dispor diretamente da corrente como função do tempo. Se

$$i(\lambda) = a\lambda + b\lambda^q, \quad (2.28)$$

com  $a$  e  $b$  reais e  $q$  inteiro ímpar, todos conhecidos, então, levando-se em conta as eqs. (2.23) e (2.25), se encontra:

$$i(t) = a \frac{\sqrt{2}\bar{V}}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + b \left( \frac{\sqrt{2}\bar{V}}{\omega} \right)^q \operatorname{sen}^q \omega t \quad (2.29)$$

A potência de seno que aparece na eq. (2.29) pode ser substituída por uma soma de senos de ângulos múltiplos, uma vez que (SPIEGEL, 1979):

$$\operatorname{sen}^{2m-1} A = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m-2}} \left\{ \operatorname{sen}(2m-1)A - \binom{2m-1}{1} \operatorname{sen}(2m-3)A + \dots \right. \\ \left. \dots (-1)^{m-1} \binom{2m-1}{m-1} \operatorname{sen} A \right\} \quad (2.30)$$

onde  $m$  é um inteiro positivo. A partir daí, fica fácil determinar o valor eficaz da corrente. Basta utilizar a eq. (1.5).

### Exemplo 2.3

Levantar a curva tensão-corrente eficaz do elemento não-linear cuja característica  $\lambda-i$  é dada pela eq. (2.1).

Comparando-se as equações (2.1) e (2.28) se identificam:

$$a = 3,12 \text{ H}^{-1},$$

$$b = 2,15 \cdot 10^{21} \text{ H}^{-1} \text{Wb}^{-8} \text{ e}$$

$$q = 9.$$

Como  $\omega = 120\pi$ , então a eq. (2.29) nesse caso é:

$$i(t) = \alpha \bar{V} \operatorname{sen} \omega t + \beta \bar{V}^9 \operatorname{sen}^9 \omega t \quad (2.31)$$

onde

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}a}{\omega} = 0,011704 \text{ AV}^{-1}$$

e

$$i(t) = \left( \alpha + \frac{63\beta\bar{V}^8}{128} \right) \bar{V} \sin \omega t + \frac{\beta\bar{V}^9}{256} \{-84 \sin 3\omega t + 36 \sin 5\omega t - 9 \sin 7\omega t + \sin 9\omega t\} \quad (2.32)$$

que é uma expressão da corrente em termos de seus componentes harmônicos. Logo, como foi mostrado na seção 1.1, o valor eficaz da corrente é

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_j I_j^2},$$

com  $j = 1, 3, 5, 7, 9$ ; e sendo  $I_j$  a amplitude do  $j$ -ésimo harmônico, estabelecido na eq. (2.32) em função do valor eficaz da tensão .

A curva volt-ampere eficaz foi assim levantada e é apresentada na fig. 2.6. Por enquanto, os pontos destacados devem ser desconsiderados, pois só importarão mais tarde.

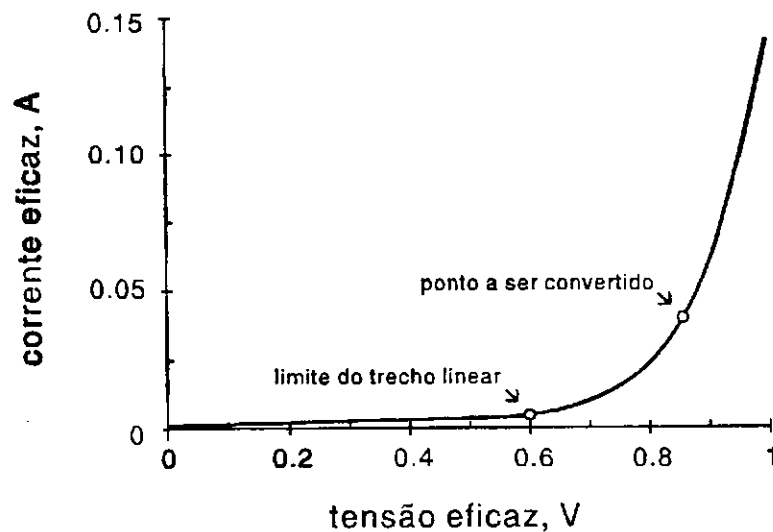


Fig. 2.6 Característica volt-ampere eficaz do elemento não-linear do circuito da fig. 2.1.

#### 2.4.2 A conversão da curva tensão-corrente eficaz em curva fluxo-corrente

Neste caso o interesse se inverte. Conhecendo-se um ponto  $(\tilde{V}_k, \tilde{I}_k)$  da curva  $\tilde{V} - \tilde{I}$ , se quer determinar o correspondente  $(v_k, i_k)$  da curva  $v - i$ . Todas as hipóteses de antes se mantêm, de modo que as eqs. (2.25) e (2.27) continuam válidas. Reorganizadas, elas tornam-se:

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{2}\tilde{V}}{\omega} \quad (2.33)$$

$$i_k = 2n\tilde{I}_k^2 - 2 \sum_{p=1}^{n-1} i^2 \left(\frac{\pi}{2n}p\right) \quad (2.34)$$

A equação (2.34) é de fato uma fórmula de recorrência, pela qual se pode determinar um ponto da curva  $\lambda-i$  quando pontos anteriores já foram determinados. Note-se que os termos do somatório fazem parte do trecho já levantado da nova curva.

#### Exemplo 2.4

Determinar o ponto da curva  $\lambda-i$  que corresponde ao *ponto a ser convertido* da fig. 2.6, cujas coordenadas são:

$$\tilde{V}_k = 0,86135 \text{ V}$$

$$\tilde{I}_k = 0,04102 \text{ A}$$

De acordo com a equação (2.33),

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{2}}{120\pi} \cdot 0,86135 \cdot 10^3 = 3,231 \text{ mVs.}$$

O problema mesmo é determinar a corrente. Para resolvê-lo, se empregou o processo recursivo estabelecido pela eq. (2.34). Utilizando-se  $n = 100$ , e 10 pontos intermediários equidistantes entre o limite do trecho linear (0,6; 0,00613) e o ponto a ser convertido, encontrou-se  $i_k = 79,785 \text{ mA}$ .

## 2.5 Método baseado na característica volt-ampere eficaz

Este é um método gráfico, baseado nas curvas volt-ampere eficazes dos elementos não-lineares, as quais podem ser obtidas por cálculo ou experimentalmente, como se viu na seção anterior. Sua vantagem está na facilidade que oferece para se analisar algumas propriedades dos circuitos não-lineares. No capítulo I, o método foi de grande utilidade ao se introduzir o fenômeno da ferroressonância.

A aplicabilidade desse método é limitada a estudos qualitativos ou quantitativos de pouca precisão. Por ser gráfico e estar centrado na substituição de sinais não-senoidais por equivalentes senoidais, não se podem esperar resultados com boa precisão.

### Exemplo 2.5

Determinar a resposta de regime permanente do circuito da fig. 2.1 empregando a característica volt-ampere eficaz.

Na fig. 2.7 as características volt-ampere do elemento não-linear e da parte linear do circuito (no caso, fonte-resistor) se sobrepõem. A solução procurada corresponde ao ponto de interseção, que tem como coordenadas os seguintes valores eficazes:

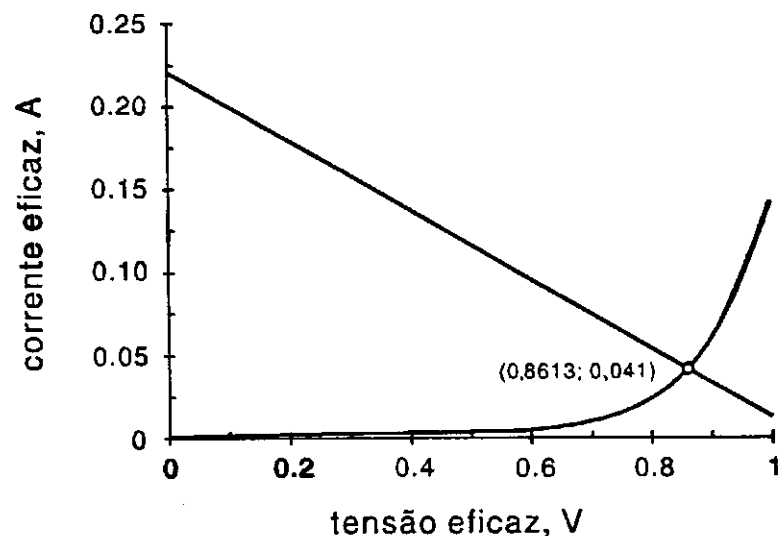


Fig. 2.7 Características volt-ampere eficazes das partes linear e não-linear do circuito da fig. 2.1.

$$\tilde{V} = 0,86135 \text{ V}$$

$$\tilde{I} = 0,04102 \text{ A}$$

aos quais correspondem os seguintes valores de pico determinados no exemplo 2.4:

$$\Lambda = 3,231 \text{ mVs}$$

$$I = 79,785 \text{ mA.}$$

## 2.6 Método do balanço de harmônicos

No método do balanço de harmônicos (SENLYEN & RAJAKOVIC, 1989; AGGARWAL et al, 1981), cada variável de estado é representada por uma série de Fourier. A solução presumida é substituída na equação diferencial do circuito. O sistema de equações algébricas não-lineares é formado e deve ser resolvido para se determinarem as amplitudes e as fases dos harmônicos.

De modo mais detalhado, este método consta dos seguintes passos:

1. O circuito que está sendo analisado é descrito por um sistema de equações diferenciais.
2. As curvas características dos elementos não-lineares são expressas analiticamente (geralmente por funções polinomiais) e então substituídas nas equações diferenciais do circuito.
3. A solução para as grandezas desconhecidas é apresentada como uma expansão de Fourier contendo a fundamental e um ou alguns harmônicos, que a prior se acreditam ser significativos. A solução esperada é substituída nas equações simultâneas.

Com a substituição que é feita no passo 3 é possível quebrar as equações simultâneas em várias equações algébricas que descrevem as amplitudes da fundamental e dos harmônicos e suas fases.

No caso geral, o número mínimo de equações algébricas é duas vezes o número de harmônicos envolvidos, pois a equação que descreve cada harmônico é desdobrada em duas. Uma equação sendo para os termos em seno, outro para os termos em cosseno.



As equações algébricas não-lineares são resolvidas simultaneamente. Há dificuldade para a solução, pelo fato de que cada equação algébrica contém todas as incógnitas. Deste modo, freqüentemente é feito uso de aproximações sucessivas.

Esta técnica não é adequada para sistemas de ordem elevada, onde o número de variáveis a serem ajustadas torna-se alto. Além disto, há o risco de algum harmônico importante não ser incluído na solução presumida.

### Exemplo 2.6

Determinar a resposta de regime permanente do circuito da fig. 2.1 empregando o método do balanço de harmônico.

Admita-se que o fluxo magnético seja senoidal,

$$\lambda = \Lambda \text{ sen } u \quad (2.35)$$

onde

$$u = \omega t + \theta.$$

Levando-se a eq. (2.35) à eq. (2.1) resulta:

$$i(u) = a\Lambda \text{ sen } u + b\Lambda^9 \text{ sen}^9 u \quad (2.36)$$

Mas pela eq. (2.30) particularizada para  $m = 5$ ,

$$\text{sen}^9 u = \frac{1}{256} \{126 \text{ sen } u - 84 \text{ sen } 3u + 36 \text{ sen } 5u - 9 \text{ sen } 7u + \text{sen } 9u\}. \quad (2.37)$$

Logo,

$$i(u) = \left\{ a\Lambda + b\Lambda^9 \frac{126}{256} \right\} \text{ sen } u + \gamma \quad (2.38a)$$

onde

$$\gamma = \frac{b\Lambda^9}{256} \{ -84 \text{ sen } 3u + 36 \text{ sen } 5u - 9 \text{ sen } 7u + \text{sen } 9u \} \quad (2.38b)$$

é uma soma ponderada de harmônicos, que não entram no balanço.

A equação diferencial do circuito em termos da nova variável independente,  $u$ , é

$$\omega \frac{d\lambda}{du} + Ri(u) = E \text{ sen}(u - \theta) \quad (2.39)$$

e tem a seguinte versão algébrica:

$$\left( Ra \Lambda + Rb \frac{126}{256} \Lambda^9 \right) \text{sen } u + (\omega \Lambda) \text{cos } u + R\gamma = (E \text{cos } \theta) \text{sen } u - (E \text{sen } \theta) \text{cos } u \quad (2.40)$$

A equação (2.40) pode se desdobrar em duas, uma relacionando os coeficientes de seno, outra os coeficientes de cosseno:

$$\omega \Lambda = -E \text{sen } \theta$$

$$Ra \Lambda + Rb \frac{126}{256} \Lambda^9 = E \text{cos } \theta$$

ou alternativamente,

$$(\omega^2 + R^2 a^2) \Lambda^2 + R^2 b^2 \frac{63}{128} \Lambda^{18} = E^2 \quad (2.41a)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left( -\frac{\omega/R}{a + b \frac{126}{256} \Lambda^8} \right) \quad (2.41b)$$

A solução das equações (2.41) são  $\Lambda = 3,579$  mVs e  $\theta = -69,34^\circ$ . Uma vez calculados esses parâmetros, o fluxo de regime permanente em função do tempo passa a ser conhecido (eq. 2.35), e por conseguinte, a corrente de regime permanente em função do tempo. Essas funções foram avaliadas para um período completo e são apresentadas na fig. 2.8.

As equações (2.38) ostentam uma propriedade do circuito não-linear que fora citada no início do capítulo: a corrente possui harmônicos superiores, embora a tensão de excitação seja uma senóide pura e o fluxo magnético tenha sido considerado assim.

O problema que acabou de ser resolvido, foi simples, pelo fato do fluxo ter sido considerado perfeitamente senoidal. Bastaria se admitir a existência do terceiro harmônico do fluxo, para que o método do balanço de harmônico, na versão analítica, como foi aplicado, tivesse se tornado praticamente proibitivo.

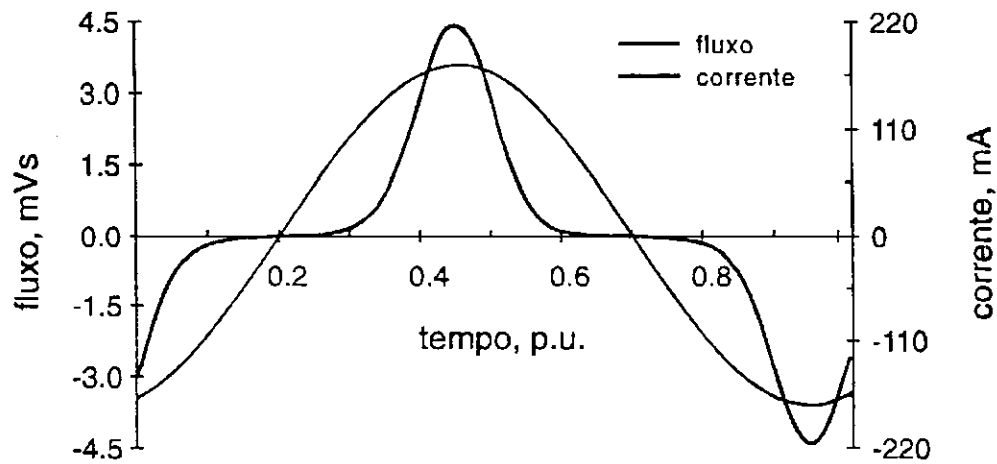


Fig 2.8 Resposta de regime permanente do circuito da fig. 2.1 obtida pelo método do balanço de harmônico.

SEMLYEN et al (1987) abordam uma versão do balanço de harmônico que emprega transformada rápida de Fourier, e assim viabiliza sua aplicação mais genérica. Contudo, o esforço computacional requerido nessa versão numérica é muito alto, notadamente para circuitos maiores ou quando são vários os harmônicos superiores considerados.

## 2.7 Método de Galerkin

Os métodos baseados em aproximações residuais ponderadas são abundantes na literatura sobre ferroressonância, como o método do balanço de harmônico (SEMLYEN, 1987, 1989; JASSENS et al , 1991), o método de Ritz (KIENY et al, 1991) e o método de Galerkin (AGGARWAL et al, 1981; GERMOND, 1975). O método de Galerkin (do qual o método do balanço de harmônico, de fato é um caso particular) é um método analítico cujo objetivo é encontrar uma solução aproximada para um sistema de equações diferenciais. O problema da aproximação residual ponderada, com ênfase ao método de Galerkin, será matéria das próximas seções.

### 2.7.1 Funções de base

Suponha-se que se deseje aproximar uma função dada  $\phi$  numa região  $\Omega$ , contornada por uma curva fechada  $\Gamma$ . Em problemas envolvendo equações diferenciais, é necessário encontrar a solução satisfazendo certas condições de contorno. Assim se tentará inicialmente conseguir aproximações que sejam exatamente iguais aos valores especificados de  $\phi$  na curva de contorno  $\Gamma$ . Se alguma função  $\psi$  que assuma os mesmos valores que  $\phi$  em  $\Gamma$  pode ser encontrada, isto é,  $\psi|_{\Gamma} = \phi|_{\Gamma}$ , e se um conjunto de funções independentes  $\{N_m; m = 1, 2, 3, \dots\}$  é introduzido de tal modo que  $N_m|_{\Gamma} = 0$  para todo  $m$ , então em todos os pontos de  $\Omega$  se poderá aproximar  $\phi$  por:

$$\phi \cong \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (2.42)$$

onde  $a_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) são alguns parâmetros a serem calculados de tal modo que se obtenha um ajuste de boa qualidade. Funções deste tipo são freqüentemente referenciadas como *funções de forma* ou *funções de base*. A maneira como  $\psi$  e o conjunto de funções de base foram definidos garante que esta aproximação tem a propriedade de que  $\hat{\phi}|_{\Gamma} = \phi|_{\Gamma}$  quaisquer que sejam os valores de  $a_m$ . Evidentemente, o conjunto de funções de base deve ser escolhido de modo que ocorra melhoria da aproximação com aumento do número  $M$  de tais funções. Uma condição óbvia para essa convergência da aproximação é que o conjunto de funções de base seja tal que a combinação  $\psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m$  possa representar adequadamente qualquer função  $\phi$ , satisfazendo  $\psi|_{\Gamma} = \phi|_{\Gamma}$  quando  $M \rightarrow \infty$ .

### 2.7.2 Aproximações residuais ponderadas

Um método geral para determinar as constantes nas aproximações formuladas conforme a eq. (2.42) será desenvolvido agora. Para começar, define-se o erro, ou *resíduo*, como

$$R_{\Omega} = \phi - \hat{\phi} \quad (2.43)$$

Nota-se que  $R_\Omega$  é função da posição em  $\Omega$ . Numa tentativa de reduzir de alguma maneira esse erro em toda a extensão da região  $\Omega$ , se pode exigir que um número apropriado de integrais do erro em  $\Omega$ , ponderadas de diferentes maneiras, sejam zero, isto é, se tentará fazer

$$\int_{\Omega} W_l(\phi - \hat{\phi}) d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = 0; \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (2.44)$$

Aqui  $\{W_l; l = 1, 2, 3, \dots\}$  é um conjunto de *funções de peso* independentes. O critério de convergência geral, que estabelece que  $\hat{\phi} \rightarrow \phi$  quando  $M \rightarrow \infty$ , pode se apresentar de forma alternativa, exigindo-se que a eq. (2.44) seja satisfeita para todo  $l$  quando  $M \rightarrow \infty$ . Prontamente se pode verificar que isso só é verdade se  $R_\Omega \rightarrow 0$  em todos os pontos do domínio, como requerido.

Substituindo  $\hat{\phi}$  na eq. (2.44) pela eq. (2.42), se chega a um conjunto de equações lineares simultâneas, tendo como incógnitas os coeficientes  $a_m$ , o qual pode ser escrito de uma forma completamente geral como

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.45)$$

onde

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_M) \quad (2.46a)$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega \quad 1 \leq l, m \leq M \quad (2.46b)$$

$$f_l = \int_{\Omega} W_l(\phi - \psi) d\Omega, \quad 1 \leq l \leq M \quad (2.46c)$$

Assim, quando uma função a ser aproximada é dada, a eq. (2.45) deve ser resolvida para se obterem os coeficientes na aproximação (eq. (2.42)), tendo sido primeiro determinada a função  $\psi$  e escolhidas as funções de base e de peso adequadas.

Vários tipos de conjuntos de função de peso  $\{W_l; l = 1, 2, \dots\}$ , podem ser usados na prática (ZIENKIEWICZ & MORGAN, 1983), cada qual levando a um método de *aproximação residual ponderada* diferente, como por exemplo, o *método da colocação de pontos*, o *método da colocação do subdomínio* e o *método de Galerkin*. Esse último é freqüentemente empregado em estudos de ferroressonância (AGGARWAL et al, 1981; GERMOND, 1975) e será abordado a seguir.

### 2.7.3 A aproximação de Galerkin

No método de Galerkin se escolhe como funções de peso as próprias funções de base, isto é

$$W_l = N_l, \quad (2.47)$$

em vez de procurar por um novo conjunto de funções. Neste caso a matriz  $\mathbf{K}$  e o vetor  $\mathbf{f}$  da eq. (2.45) têm como elementos típicos:

$$K_{lm} = \int_{\Omega} N_l N_m d\Omega \quad (2.48a)$$

$$f_l = \int_{\Omega} N_l (\phi - \psi) dx \quad (2.48b)$$

A vantagem computacional do método é que a matriz  $\mathbf{K}$  é simétrica.

Para aproximar uma função  $\phi(x)$  num intervalo  $0 \leq x \leq L_x$  pelo método de Galerkin, se pode tomar diferentes conjuntos de funções de base, como por exemplo:

$$\{N_m = x^m (L_x - x)\} \quad (2.49)$$

ou

$$\{N_m = \text{sen}(m\pi x / L_x)\} \quad (2.50)$$

onde  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Caso se escolha o conjunto (2.50), os elementos da matriz  $\mathbf{K}$  e do vetor  $\mathbf{f}$  na eq. (2.45) são:

$$K_{lm} = \int_0^{L_x} \text{sen} \frac{l\pi x}{L_x} \text{sen} \frac{m\pi x}{L_x} dx \quad (2.51a)$$

$$f_l = \int_0^{L_x} (\phi - \psi) \text{sen} \frac{l\pi x}{L_x} dx \quad (2.51b)$$

Efetuada a integração indicada na eq. (2.51a) se chega a:

$$K_{lm} = \begin{cases} L_x / 2, & l = m \\ 0, & l \neq m \end{cases} \quad (2.52)$$

e neste caso o sistema de equações (2.45) tem a forma particularmente simples de um sistema diagonal, resultando imediatamente na solução:

$$a_m = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} (\phi - \psi) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L_x} dx; \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (2.53)$$

A simplicidade das equações produzidas pela aproximação de Galerkin nesse caso particular se deve à propriedade da *ortogonalidade* das funções de base que foram usadas, resultando em

$$\int_{\Omega} N_l N_m d\Omega = 0, \quad l \neq m \quad (2.54)$$

Esta característica dos elementos do conjunto das funções de base é particularmente útil.

A representação por série de senos de Fourier pode ser entendida como uma aproximação residual ponderada de Galerkin. Basta notar que a expressão dos coeficientes  $a_m$  da aproximação de Galerkin dada pela eq. (2.53), é idêntica à expressão dos coeficientes da representação de uma função por série de Fourier.

#### 2.7.4 Solução periódica de circuito não-linear pelo método de Galerkin

Uma outra maneira de resolver o problema do exemplo 2.5, mais flexível que o método do balanço de harmônico (seção 2.6) se apresenta a seguir.

Em vez de se expressar apenas o fluxo magnético, expressa-se também a corrente como uma série de Fourier com coeficientes a se determinarem. Admita-se que só os  $m$  primeiros harmônicos ímpares consecutivos do fluxo sejam significativos (o componente fundamental é o primeiro harmônico):

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} = & \Lambda_1 \operatorname{sen} u + \Lambda_2 \cos u + \Lambda_3 \operatorname{sen} 3u + \Lambda_4 \cos 3u + \dots \\ & \dots + \Lambda_{2m-1} \operatorname{sen}(2m-1)u + \Lambda_{2m} \cos(2m-1)u \end{aligned}$$

ou,

$$\bar{\lambda} = \sum_{p=1}^m \Lambda_{2p-1} \operatorname{sen}(2p-1)u + \Lambda_{2p} \cos(2p-1)u \quad (2.55)$$

Dada a característica do elemento não-linear e a forma do fluxo pressuposto, a corrente não deve ter harmônico pares. Portanto,

$$\bar{i} = \Delta\bar{i} + \sum_{p=1}^m I_{2p-1} \sin(2p-1)u + I_{2p} \cos(2p-1)u \quad (2.56a)$$

sendo

$$\Delta\bar{i} = \sum_{p=m+1}^{\infty} I_{2p-1} \sin(2p-1)u + I_{2p} \cos(2p-1)u \quad (2.56b)$$

A partir da equação diferencial do circuito define-se o residual:

$$\varepsilon = \omega \frac{d\bar{\lambda}}{du} + R\bar{i} - E \sin u, \quad (2.57)$$

que é um funcional de  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{i}$ .  $\varepsilon$  será mínimo quando a solução assumida,  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{i}$ , estiver o mais próximo possível da solução exata,  $\lambda$  e  $i$ , do sistema formado pelas eqs. (2.1) e (2.2).

Derivando-se a eq. (2.55) e em seguida substituindo-a juntamente com a eq. (2.56a) na eq. (2.57) resulta:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \Delta\varepsilon + \sum_{p=1}^m \{ -(2p-1)\omega\Lambda_{2p} + RI_{2p-1} - F_{2p-1} \} \sin(2p-1)u + \\ + \{ (2p-1)\omega\Lambda_{2p-1} + RI_{2p} \} \cos(2p-1)u \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde,

$$F_{2p-1} = \begin{cases} E, & \text{para } p = 1 \\ 0, & \text{para } p \neq 1 \end{cases} \quad (2.59)$$

e  $\Delta\varepsilon = R\Delta\bar{i}$  é um valor incremental que não é nulo por conta do fluxo haver se expandido em série de Fourier truncada. Desprezar  $\Delta\varepsilon$  não deve ter grande repercussão, de modo que a eq. (2.58) pode se expressar assim:



$$\varepsilon = \sum_{p=1}^m E_{2p-1} \sin(2p-1)u + E_{2p} \cos(2p-1)u \quad (2.60)$$

onde

$$E_{2p-1} = -(2p-1)\omega\Lambda_{2p} + RI_{2p-1} - F_{2p-1} \quad (2.61a)$$

$$E_{2p} = (2p-1)\omega\Lambda_{2p-1} + RI_{2p} \quad (2.61b)$$

para  $p = 1, 2, \dots, m$ .

Os coeficientes de Fourier da corrente que aparecem na eqs. (2.61) devem ser calculados a partir de suas próprias definições:

$$I_{2p-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{i} \sin(2p-1)u \, du, \quad (2.62a)$$

$$I_{2p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{i} \cos(2p-1)u \, du; \quad (2.62b)$$

sendo  $\bar{i}$  determinado pela eq. (2.1), fazendo-se  $\lambda = \bar{\lambda}$ .

A forma matricial do sistema de equações algébricas não-lineares (2.61) é

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{\Lambda}) \quad (2.63)$$

onde  $\mathbf{\Lambda}$  é o vetor de dimensão  $2m$  dos coeficientes de Fourier do fluxo. Os valores desses coeficientes, para os quais o residual é mínimo podem ser calculados pelo método de Newton-Raphson:

$$\mathbf{\Lambda}^{(k+1)} = \mathbf{\Lambda}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{E}^{(k)} \quad (2.64)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o Jacobiano de  $\mathbf{H}$ .

O procedimento para se determinar a resposta de regime permanente pelo método de Galerkin, com as considerações feitas acima compreende basicamente o seguinte:

1. Escolher uma estimativa inicial dos coeficientes de Fourier do fluxo magnético, que se quer determinar.
2. Calcular e armazenar os valores de  $i$  e  $di/d\lambda$  em  $n$  pontos especificados do período, isto é, em  $u = 0, \Delta u, 2\Delta u, \dots, 2\pi$ ;  $\Delta u = 2\pi/n$ .
3. Calcular  $I_{2p-1}$  e  $I_{2p}$  (eqs. (2.62)), por integração numérica.
4. Calcular os coeficientes atuais do residual (eq. (2.63)) e se forem suficientemente pequenos, isto é, se  $\|\mathbf{E}\| < \sigma$ , parar.
5. Calcular o Jacobiano atual.
6. Corrigir o valor atual de  $\Lambda$ , empregando a eq. (2.64) e voltar para o passo 2.

### Exemplo 2.7

Determinar a resposta de regime permanente do circuito da fig. 2.1 empregando o método de Galerkin.

Considere que o fluxo seja constituído de fundamental mais terceiro harmônico. Isto significa particularizar o desenvolvimento anterior para  $m=2$ :

$$\bar{\lambda} = \Lambda_1 \sin u + \Lambda_2 \cos u + \Lambda_3 \sin 3u + \Lambda_4 \cos 3u$$

A característica não linear é dada pela eq. 2.1:

$$\bar{i} = a\bar{\lambda} + b\bar{\lambda}^9$$

logo,

$$\frac{d\bar{i}}{d\lambda} = a + 9b\bar{\lambda}^8 \quad (2.65)$$

Neste caso o residual é

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\omega\Lambda_2 + RI_1 - E \\ \omega\Lambda_1 + RI_2 \\ -3\omega\Lambda_4 + RI_3 \\ 3\omega\Lambda_3 + RI_4 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

e seu Jacobiano, uma matriz 4x4 cujos elementos tem as expressões seguintes, obtidas fazendo-se uso da regra de Chain e da regra de Leibnitz da derivação de integrais:

$$\frac{\partial E_i}{\partial \Lambda_j} = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} (a + 9b\bar{\lambda}^8) f_i f_j du + \gamma_{ij}. \quad (2.67)$$

Na eq. (2.67),

$$f_\alpha = \begin{cases} \text{sen } \alpha u, & \alpha = 2p - 1 \\ \text{cos } \alpha u, & \alpha = 2p \end{cases} \quad p = 1, 2 \quad (2.68)$$

e  $\gamma$  é uma matriz de mesma dimensão que o Jacobiano, em que só não são nulos os seguintes elementos:

$$\gamma_{21} = \gamma_{12} = \omega$$

$$\gamma_{43} = \gamma_{34} = 3\omega$$

Fazendo-se a estimativa inicial da solução

$$\Lambda^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^t,$$

ou seja,

$$\bar{\lambda}^{(0)} = 0$$

$$\bar{i}^{(0)} = 0$$

o vetor-residual é inicialmente,

$$\mathbf{E}^{(0)} = [-E \ 0 \ 0 \ 0]^t.$$

O Jacobiano desse residual de acordo com as eq.(2.67) é

$$\mathbf{J}^{(0)} = \begin{bmatrix} Ra & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & Ra & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ra & -3\omega \\ 0 & 0 & 3\omega & Ra \end{bmatrix}$$

A estimativa inicial pode então ser corrigida através da eq. (2.63), resultando:

$$\Lambda^{(1)} = \left[ \frac{E}{1 + (\omega / R)^2} \quad \frac{\omega E}{R^2 a^2 + \omega^2} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (2.69)$$

Esse procedimento deve continuar até que o vetor-residual tenha norma pequena tanto quanto aceitável. Em 6 iterações se consegue a solução

$$\Lambda^{(1)} = [1,1907 \quad -3,3842 \quad 0,017081 \quad 0,2565]^T \text{ mVs}$$

com vetor-residual cuja norma é menor que  $10^{-7}$ . O gráfico da solução desse problema é mostrado na fig. 2.9.

Um sistema periódico não-linear se expressa de forma genérica como

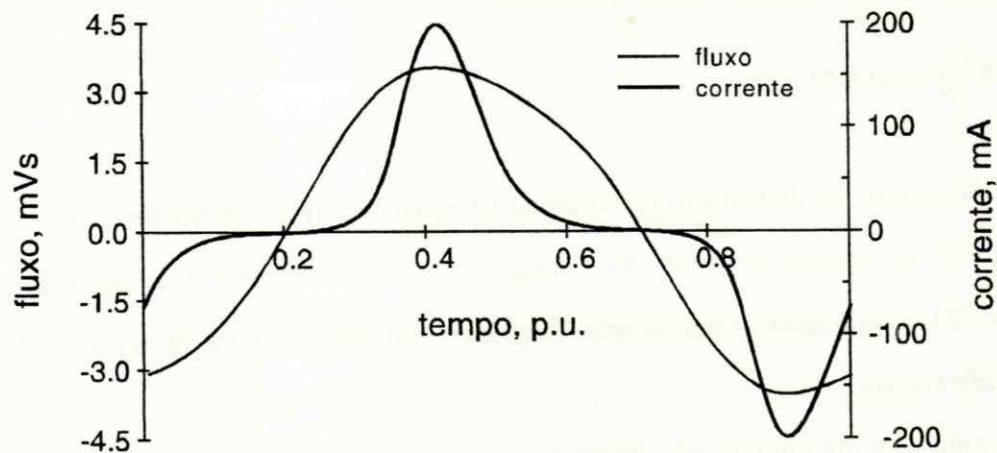


Fig. 2.9 Resposta de regime permanente do circuito da fig. 2.1 obtida pelo método de Galerkin.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t), \quad (2.70)$$

e pode exibir uma ou várias respostas periódicas.

Assumindo uma solução periódica de período  $\tau$  ainda desconhecido, se pode encontrar uma solução aproximada  $\bar{\mathbf{x}}$  que satisfaça suas condições de contorno de periodicidade e de suas derivadas com certas funções de base. É conveniente usar séries de Fourier com coeficientes indeterminados. Assim, com  $\omega = 2\pi / \tau$ ,

$$\bar{x}_i = X_{i,0} + \sum_{p=1}^{\infty} \{X_{i,2p-1} \text{sen}(p\omega t) + X_{i,2p} \text{cos}(p\omega t)\} \quad (2.71)$$

e como  $\bar{\mathbf{x}}$  é assumido ser periódica de período  $\tau$ :

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{p=1}^{\infty} \{pX_{i,2p-1} \text{cos}(p\omega t) - pX_{i,2p} \text{sen}(p\omega t)\} \quad (2.72)$$

O método de Galerkin requer que o vetor residual

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} - \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad (2.73)$$

resultante da introdução da solução aproximada na equação diferencial do sistema, eq. (2.70), seja ortogonal às funções de base. As condições de Galerkin conduz a identificação das amplitudes dos componentes com mesma frequência em ambos os membros do sistema de equações diferenciais.

Considere-se um circuito não-linear com  $n_C$  capacitores lineares e  $n_L$  indutores (com pelo menos um dos quais não-linear). Tomando-se a carga dos capacitores e os fluxos magnéticos com variáveis independentes,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  se expressa na forma matricial, do seguinte modo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{i}(\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}(t) \quad (2.74)$$

onde

$\mathbf{q}$  é o vetor de dimensão  $n_C$ , das cargas do capacitores;

$\lambda$  é o vetor de dimensão  $n_L$ , dos fluxos magnéticos;

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda \end{bmatrix}$  é o vetor das variáveis independentes, de dimensão  $n = n_C + n_L$ .

$\mathbf{i}$  é o vetor de dimensão  $n_L$ , das correntes que são funções dos fluxos;

$\mathbf{f}(t)$  é o vetor de dimensão  $n_F$ , das fontes periódicas de tensão e corrente de período  $T$ .

A expressão alternativa para a eq. (2.74) é

$$G_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_C} a_{ij} q_j + \sum_{j=1}^{n_L} b_{ij} i_j(\lambda) + \sum_{j=1}^{n_F} c_{ij} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.75)$$

Quando se está interessado em soluções periódicas, como é o caso, é conveniente representar a solução aproximada por uma série de Fourier. Introduzindo essa solução aproximada na eq. (2.70) se obtém um sistema de equações algébricas não-lineares onde as incógnitas são os coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} G_i(\mathbf{x}, t) = & \sum_{j=1}^{n_C} a_{ij} \left( Q_{j_0} + \sum_{p=1}^{\infty} Q_{j_{2p-1}} \text{sen } p\omega t + Q_{j_{2p}} \text{sen } p\omega t \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{n_L} b_{ij} \left( I_{j_0} + \sum_{p=1}^{\infty} I_{j_{2p-1}} \text{sen } p\omega t + I_{j_{2p}} \text{sen } p\omega t \right) + \\ & + \sum_{j=1}^{n_F} c_{ij} \left( \sum_{p=1}^{\infty} F_{j_{2p-1}} \text{sen } p\omega t + F_{j_{2p}} \text{sen } p\omega t \right) \end{aligned} \quad (2.76)$$

ou

$$\begin{aligned} G_i(\mathbf{x}, t) = & \sum_{j=1}^{n_C} a_{ij} Q_{j_0} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_C} a_{ij} Q_{j_{2p-1}} \text{sen } p\omega t + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_C} a_{ij} Q_{j_{2p}} \text{sen } p\omega t + \\ & + \sum_{j=1}^{n_L} a_{ij} I_{j_0} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_L} b_{ij} I_{j_{2p-1}} \text{sen } p\omega t + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_L} b_{ij} I_{j_{2p}} \text{sen } p\omega t + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_F} c_{ij} F_{j_{2p-1}} \text{sen } p\omega t + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_F} c_{ij} F_{j_{2p}} \text{sen } p\omega t \end{aligned} \quad (2.77)$$

Introduzindo-se as expressões das eqs. (2.70) e (2.72) na equação que define o resíduo,

$$\varepsilon_i = \frac{d\bar{x}_i}{dt} - G_i(\bar{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

e observando-se a condição de Galerkin de que esse resíduo seja ortogonal às funções de base, se chega a:

$$-\varepsilon_{i0} = \sum_{j=1}^{n_C} a_{ij} Q_{j0} + \sum_{j=1}^{n_L} b_{ij} I_{j0}(\lambda) \quad (2.78a)$$

$$-\varepsilon_{i2p-1} = \frac{2\pi p}{\tau} X_{i2p} + \sum_{j=1}^{n_C} a_{ij} Q_{j2p-1} + \sum_{j=1}^{n_L} b_{ij} I_{j2p-1}(\lambda) + \sum_{j=1}^{n_F} c_{ij} F_{j2p-1} \quad (2.78b)$$

$$-\varepsilon_{i2p} = \frac{-2\pi p}{\tau} X_{i2p-1} + \sum_{j=1}^{n_C} a_{ij} Q_{j2p} + \sum_{j=1}^{n_L} b_{ij} I_{j2p}(\lambda) + \sum_{j=1}^{n_F} c_{ij} F_{j2p} \quad (2.78c)$$

para  $i = 1, n; n = n_C + n_L; p = 1, \infty;$  e onde

$$X_{i\alpha} = \begin{cases} Q_{i\alpha} & \text{se } i = 1, \dots, n_C; \quad \forall \alpha \\ \Lambda_{i\alpha} & \text{se } i = n_C + 1, \dots, n; \quad \forall \alpha \end{cases}$$

$Q_{i\alpha}$  é um dos componentes de Fourier de  $q_i$ ; se  $\alpha=2p-1$  é o componente de ordem  $p$  do seno, se  $\alpha=2p$  é o componente de ordem  $p$  do coseno. Analogamente,

$\Lambda_{j\alpha}$  é um dos componentes de Fourier de  $\lambda_j$ .

$I_{j\alpha}$  é um dos componentes de Fourier de  $i_j$ .

$F_{j\alpha}$  é um dos componentes de Fourier de  $f_j$ .

Para um elemento não-linear, um coeficiente de Fourier  $I_{jk}$  depende em geral dos coeficientes de Fourier de  $\lambda$  em todas as frequências, como é indicado nas eqs. (2.78).

Se o desenvolvimento de Fourier é agora truncado para uma quantidade de termos finita, o método conduz à solução de um conjunto finito de equações lineares nas variáveis  $X_{ij}$ . Se  $n$  é o número de variáveis e  $m$  a ordem do harmônico mais elevado, obviamente  $n \cdot (2m+1)$  equações devem ser resolvidas.

O sistema de equações algébricas não-lineares (2.78) na forma matricial é

$$-\varepsilon = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (2.79)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor das incógnitas, e  $\varepsilon$  o vetor dos resíduos, ambas de dimensão  $n \cdot (2m+1)$ .

Uma maneira conveniente de resolver a eq. (2.79) é através do método de Newton-Raphson.

Conhecendo-se  $\mathbf{x}^{(k)}$  no passo  $k$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  é avaliado e então  $\mathbf{x}^{(k)}$  é corrigido para

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{J}^{-1} \cdot \varepsilon^{(k)} \quad (2.80)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o jacobiano de  $\mathbf{H}$  no passo  $k$ .

No sistema (2.79), os componentes do vetor  $\varepsilon$  são todos os resíduos  $\varepsilon_{ip}$  e os componentes do vetor  $\mathbf{x}$  são todos os coeficientes de Fourier,  $X_{ip}$ , das incógnitas, com  $i = 1, \dots, n$  e  $p = 0, \dots, 2m$ .

Para os elementos do jacobiano

$$J_{i\alpha, j\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{i\alpha}}{\partial X_{j\beta}},$$

três alternativas são possíveis:  $J_{i\alpha, j\beta}$  é zero;  $J_{i\alpha, j\beta}$  é constante; ou  $J_{i\alpha, j\beta}$  é função de  $\mathbf{x}$ . Esse último caso, que ocorre quando  $\varepsilon_{i\alpha}$  é derivado em relação a um componente de  $\mathbf{x}$  que é um coeficiente de Fourier de um fluxo em um elemento não-linear, se expressa do seguinte modo:

$$J_{i\alpha, j\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{i\alpha}}{\partial X_{j\beta}} = b_{ij} \frac{\partial I_{j\alpha}}{\partial X_{j\beta}}$$

ou seja,

$$J_{i\alpha, j\beta} = b_{ij} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial i_j}{\partial x_{j\beta}} dt, \quad \text{se } \alpha = 0 \quad (2.81a)$$

$$J_{i\alpha, j\beta} = b_{ij} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial i_j}{\partial x_{j\beta}} \text{sen } p\omega t dt, \quad \text{se } \alpha = 2p-1 \quad (2.81b)$$

$$J_{i\alpha, j\beta} = b_{ij} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial i_j}{\partial x_{j\beta}} \text{cos } p\omega t dt, \quad \text{se } \alpha = 2p \quad (2.81c)$$



onde

$$\frac{\partial i_{Lj}}{\partial x_{j\beta}} = \frac{\partial i_j}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_{j\beta}},$$

e

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_{j\beta}} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_j}, \quad \text{se } \beta = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_{j\beta}} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_j} \text{ sen } p\omega t, \quad \text{se } \beta = 2p - 1$$

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_{j\beta}} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_j} \text{ cos } p\omega t, \quad \text{se } \beta = 2p$$

Uma vez que o sistema de equações diferenciais (2.74) tenha sido encontrado, a partir da topologia e dos parâmetros do circuito em estudo, várias etapas precisam ser vencidas para que a solução de regime permanente seja determinada. De fato, o sistema de equações diferenciais admite soluções periódicas múltiplas, para um dado período, cada uma correspondendo a uma solução diferente do sistema de equações algébricas. A solução periódica encontrada entre aquelas possíveis depende da estimativa inicial escolhida.

No decorrer do processo de solução é necessário calcular os coeficientes de Fourier da corrente para o fluxo magnético aproximado então disponível. Normalmente as correntes são expressas como funções polinomiais do fluxo magnético. Com todos os coeficientes de Fourier calculados, os resíduos são determinados através da eq. (2.78) e o jacobiano pela eqs. (2.81). As incógnitas (coeficientes de Fourier das variáveis de estado) são então corrigidas através da eq. (2.80).

O método de Newton-Raphson evidentemente requer de partida que sejam estipulados aproximações da solução, inclusive do período, e também as tolerâncias. Uma boa estimativa inicial é fundamental para o sucesso do processo de solução. Começar assumindo todas as incógnitas iguais a zero é razoável. Isso leva a uma solução não-saturada na frequência fundamental, se existe alguma para o valor de tensão que está sendo considerado.

## 2.8 Comparação de resultados

Os vários métodos abordados foram aplicados a um mesmo circuito. O objetivo disso foi tornar o mais claro possível o modo como realmente funciona cada método. Daí porque o circuito escolhido para aplicação ter sido bastante simples. Agora que esses resultados estão disponíveis, não se pode deixar de compará-los. Evidentemente, que essa comparação não pode ser conclusiva no sentido de apontar a superioridade de um método em relação a outro, haja visto a simplicidade do circuito a que se referem os resultados. Além do que é bastante difícil fechar questão de maneira definitiva a respeito da qualidade de um método computacional em relação a outros. Isso por que é comum um método que em geral apresente excelente qualidade falhar em certas aplicações. A recíproca também é verdadeira: um método que na maioria das circunstâncias não tenha desempenho além de sofrível pode vir a ser ótimo em alguns casos. Isso explica a coexistência de todos eles.

A tabela 2.1 expõe valores expressivos extraídos dos resultados conseguidos mediante o emprego dos diferentes métodos abordados ao longo do capítulo. São os valores extremos (no início e no fim do período), os valores de pico e os instantes em que eles ocorrem. O tempo está expresso em por-unidade com base no período. Isto é,  $T = 1 \text{ p.u.} = 16,67 \text{ ms}$ .

Os valores de pico, tanto de fluxo quanto de corrente, obtidos pelos métodos da força bruta, da linearização por parte e de Galerkin são compatíveis.

Com o método de balanço de harmônico, os valores de pico são mais elevados: o fluxo menos de 2,5% mais alto enquanto a corrente quase 17% mais elevada. Isso ocorre por conta dos harmônicos superiores haverem sido desprezados. Ao se considerar o fluxo senoidal, o que se fez de fato foi o chamado balanço do primeiro harmônico. O fato do valor de pico da corrente divergir muito mais que o pico de fluxo, com relação aos mesmos valores encontrados através de outros métodos, serve de advertência: pequenas deformações da onda de fluxo com respeito a uma senóide pode ser responsável por variações significativas na corrente.

Os valores de pico obtidos através do método baseado na característica volt-ampere eficaz são mais baixos. O valor de pico da corrente então, é muito mais baixo, é mesmo completamente destoante.

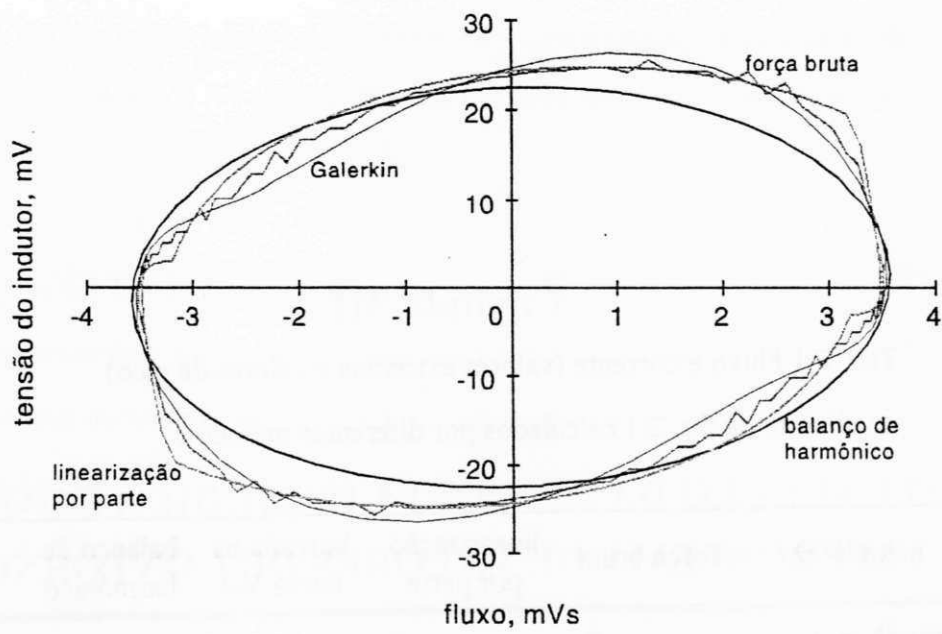
A semelhança das formas de onda levantadas não resiste a uma contemplação mais demorada. Na fig. 2.4 a descontinuidade da inclinação da corrente, devida a linearização por parte da característica não-linear, é facilmente percebida. A simetria de meio período com respeito ao eixo do tempo, que se vê na fig. 2.8 é artificial e conseqüente do fato do terceiro harmônico do fluxo não ter sido levado em conta.

Uma comparação efetivamente mais completa das formas de onda pode ser feita mediante a superposição de suas trajetórias no plano de fase. Essas trajetórias são gráficos cartesianos da amplitude da forma de onda versus suas inclinações, como se vê na fig. 2.10. Como dizem MORK & STUEHM (1994): " A trajetória no plano de fase é uma assinatura singular da forma de onda". Mais do que isso, se diria que é a assinatura vista com uma lupa, uma vez que pequenas diferenças ampliam-se.

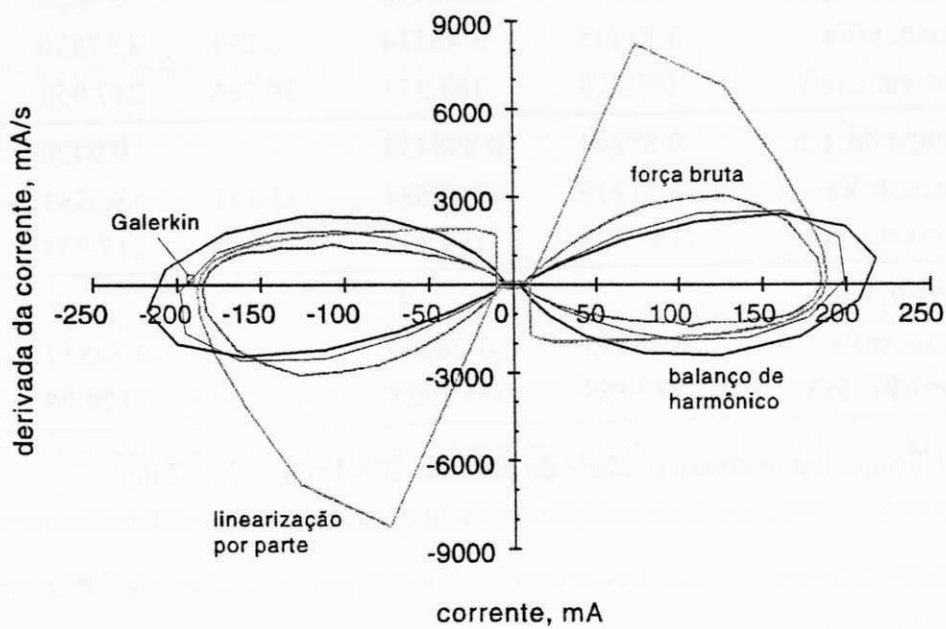
Tab. 2.1 Fluxo e corrente (valores extremos e valores de pico)  
no circuito da fig. 2.1 calculados por diferentes métodos.

	método →	força bruta	linearização por parte	baseada na curva V-I	balanço de harmônico	Galerkin
inicial	tempo*, p.u.	0.	0.	–	0.	0.
	fluxo, mVs	-3.15973	-3.24563	–	-3.34857	-3.12765
	corrente, mA	-77.3555	-38.5218	–	-124.26	-71.3333
máximo	tempo de, p.u.	0.39844	0.398438	–	0.4426	0.41208
	fluxo, mVs	3.51115	3.48534	3.231	3.57830	3.54479
	corrente, mA	185.328	188.335	79.785	217.953	201.060
mínimo	tempo de, p.u.	0.89844	0.898438	–	0.9426	0.91208
	fluxo, mVs	-3.51115	-3.48534	-3.231	3.5783	-3.54479
	corrente, mA	-185.328	-188.335	-79.785	217.953	-201.060
final	tempo, p.u.	1.	1.	–	1.	1.
	fluxo, mVs	-3.15973	-3.24564	–	-3.34857	-3.12765
	corrente, mA	-77.3555	-38.5228	–	-124.26	-71.3333

(\*) Tempo expresso em unidade do período,  $T = 1$  p.u. = 16,67 ms.



(a)



(b)

Fig. 2.10 Trajetórias no plano de fase. (a) fluxo, (b) corrente.

## Capítulo III

### O CÁLCULO DA RESPOSTA PERIÓDICA COMO UM PROBLEMA DE VALORES DE CONTORNO

Os métodos de que se dispõe para cálculo da resposta de regime permanente de circuitos não-lineares são de duas classes, conforme o domínio em que a solução é encontrada. O método do balanço de harmônicos e o método de Galerkin, que foram abordados no capítulo II, são métodos de solução no domínio da frequência.

Há fundamentalmente dois métodos de solução no domínio do tempo: o método da linearização por parte, de que especificamente tratou a seção 2.3, e os métodos de integração explícita. O método da linearização por parte é um método direto, de natureza analítica. Enquanto isso, os métodos de integração explícita são recursivos, e se baseiam na substituição das equações diferenciais que descrevem o circuito por equações algébricas, mediante o emprego de fórmulas aproximadas para integrais definidas (ordinariamente a regra trapezoidal).

Diferentemente dos métodos no domínio da frequência, os métodos no domínio do tempo, não fornecem prontamente e por si próprios, a resposta de regime permanente, mas sim, a resposta completa, incluindo a componente transitória. Para se descartar essa componente da resposta obtida, algum procedimento adicional deve ser adotado. A maneira mais primária de se fazer isso é através do método da força bruta (seção 2.2). Outros

procedimentos mais elaborados, que são matérias deste capítulo, emergem ao se tratar a determinação da solução periódica como um problema de valores de contorno em dois pontos.

### 3.1 A formulação do problema

Um circuito excitado por sinal de período  $T$  pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t), \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado do circuito; o vetor  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^n$  é periódico em  $t$  com período  $T$ , isto é,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t + T)$ .

Quando  $\mathbf{G}$  é não-linear, não há garantia de que a eq. (3.1) tenha solução periódica. Por outro lado, é possível que essa equação tenha solução periódica de período  $T_1 \neq T$  ou que admita soluções múltiplas de período  $T$ .

Suponha-se que a eq. (3.1) tenha uma solução periódica  $\mathbf{x}$  de período  $T$ . Para se encontrar essa solução, se deve procurar um estado inicial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$  tal que

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(T) \quad (3.2)$$

Isso é essencialmente um problema de valor de contorno em dois pontos. O estado que satisfaz a eq. (3.2) é denominado de *estado periódico*.

Para se estabelecer sucintamente as condições de contorno, se define a seguinte função vetorial de discrepância:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, T) - \mathbf{x}_0 = \int_0^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) dt \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, T)$  é a solução da eq. (3.1) em  $t = T$  e depende do vetor de condições iniciais  $\mathbf{x}_0$ . Esse vetor de discrepância é uma medida de como uma solução qualquer está satisfazendo a condição de periodicidade.

Evidentemente a solução periódica é alcançada quando o vetor de discrepância se anula. Portanto, a determinação da solução periódica é equivalente a resolver o sistema de equações

$$\varepsilon(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (3.4)$$

Num problema convencional de valor de contorno em dois pontos, as condições que a solução do sistema de equações diferenciais devem satisfazer são conhecidas em valores. No problema da solução de regime permanente é diferente; as condições são conhecidas apenas em relação. Isto é, sabe-se apenas que  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(T)$ . Sendo que o *estado periódico* deve ser determinado.

### 3.2 A solução do problema por método de tentativas e erros

Da forma como foi colocado o problema do cálculo da resposta de regime permanente (eq. (3.4)), ele se converte em resolver um sistema de equações não-lineares. O primeiro método que se apresenta para resolvê-lo é o de tentativas e erros (*shooting method*) (GERALD, 1978; SMITH, 1977), o qual, como o próprio nome diz, busca encontrar um estado periódico por tentativa. Estas tentativas não são aleatórias, mas se dirigem por algum critério. O método da força bruta (seção 2.2) pode ser visto como um método de tentativas e erros em que as correções se fazem através de:

$$\mathbf{x}_0^{(k+1)} = \mathbf{x}_0^{(k)} + \mathbf{H} \cdot \varepsilon(\mathbf{x}_0^{(k)}), \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz identidade no espaço de  $\mathbf{x}$  e  $\varepsilon$ . Esse critério pode ser generalizado, ponderando-se o vetor de discrepância com uma matriz  $\mathbf{H}$  qualquer, constante ou mesmo função de  $\varepsilon$ .

Outro critério de definição da próxima tentativa é:

$$\mathbf{x}_0^{(k)} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0^{(i)} + \mathbf{x}_0^{(j)}), \quad (3.6)$$

$i, j < k$ , que é muito eficiente quando os vetores de discrepância correspondentes a duas tentativas passadas têm os elementos de mesma ordem com sinais trocados. Isso seria um



equivalente generalizado do método *regula falsi* usado para cálculo de raízes de funções não-lineares.

A solução de regime permanente apresentada no exemplo 2.2 foi efetivamente encontrada empregando-se um método de tentativas e erros. O método da linearização por parte, foi o meio empregado naquela ocasião para calcular o vetor (unidimensional) de discrepância,  $\varepsilon$ .

### 3.3 Um circuito de segunda ordem para exemplificação

No circuito da fig. 2.1 se introduz agora um capacitor linear de  $1 \mu\text{F}$  em paralelo com o indutor, resultando no que se vê na fig. 3.1. Essa modificação é necessária para que o circuito se adeque melhor aos exemplos a seguir, com os quais se pretende elucidar por completo os métodos que serão abordados neste e no próximo capítulo.

O circuito da fig. 3.1 é regido pela equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2} = \frac{1}{RC}e(t) - \frac{1}{RC}v(t) - \frac{1}{C}i(\lambda)$$

ou alternativamente pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\lambda(u)}{du} = \frac{1}{\omega}v(u), \quad (3.7a)$$

$$\frac{dv(u)}{du} = \frac{1}{\omega RC}e(u) - \frac{1}{\omega RC}v(u) - \frac{1}{\omega C}i(\lambda), \quad (3.7b)$$

onde  $u = \omega t$  e  $i(\lambda)$  continua a se expressar pela eq. (2.1). Nesse caso, o fluxo magnético e a tensão no capacitor são tomados como variáveis de estado.

As equações diferenciais (3.7) podem ser aproximadas por equações algébricas que se obtém aplicando-se a regra trapezoidal. Voltando-se a expressar a variável independente como múltiplos do passo de integração,  $u = p \Delta u$ , e a empregar a notação  $x_p = x(p \Delta u)$ , se tem:

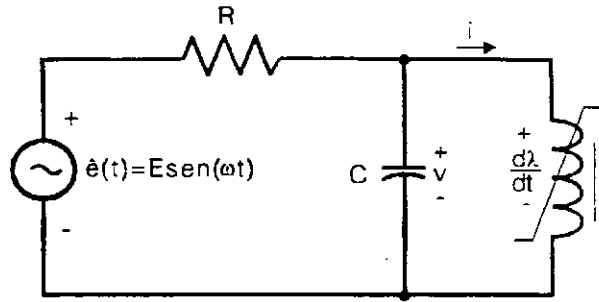


Fig. 3.1 Circuito empregado em exemplificação.

$$E = 1,5 \text{ V}; \quad \omega = 120\pi \text{ rd/s}; \quad R = 4,8 \, \Omega; \quad C = 1 \mu\text{F}$$

$$i = i(\lambda) = 3,12\lambda + 2,15 \cdot 10^{21} \lambda^9$$

$$\lambda_p = \alpha v_p + \gamma_{1p} \quad (3.8a)$$

$$\left(1 + \frac{\alpha}{RC}\right) v_p = -\frac{\alpha}{C} i_p + \gamma_{2p} \quad (3.8b)$$

sendo  $p = 1, 2, \dots, n$  e

$$\alpha = \frac{\pi}{\omega n} \quad (3.9)$$

$$\gamma_{1p} = \lambda_{p-1} + \alpha v_{p-1} \quad (3.10a)$$

$$\gamma_{2p} = e_p - e_{p-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{RC}\right) v_{p-1} - \frac{\alpha}{C} i_{p-1} \quad (3.10b)$$

Como se vê acima,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes que dependem dos parâmetros do circuito e do número de subintervalos do período. Já  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são funções do tempo, dos parâmetros do circuito e do passo de integração. Na eq. (3.10b),  $e = \int \hat{e} \, du$ , portanto,

$$e_p = -\frac{E}{\omega RC} \cos\left(\frac{2\pi}{n} p\right) \quad (3.11)$$

O estado pode ser determinado em cada instante  $p$  a partir do estado no instante anterior,  $p-1$ . Para isso se devem resolver as equações não-lineares (3.8). Ou seja, se deve resolver

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_p) = \begin{bmatrix} -\lambda_p + \alpha v_p + \gamma_{1p} \\ -\left(1 + \frac{\alpha}{RC}\right)v_p - \frac{\alpha}{C}i_p + \gamma_{2p} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{x}_p = [\lambda_p \ v_p]^T$ . Isso pode ser feito através do método de Newton-Raphson tomando-se  $\mathbf{x}_{p-1}$  como estimativa inicial. O jacobiano de  $\mathbf{f}$  é

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ -\frac{\alpha}{C} \frac{di}{d\lambda} & -\left(1 + \frac{\alpha}{RC}\right) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

No final do processo se tem determinado o vetor de discrepância:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_n - \lambda_0 \\ v_n - v_0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

### 3.4 O método de Newton-Raphson

Para resolver o problema da determinação da solução periódica de um circuito não-linear, formulado como um problema de valor de contorno em dois pontos, APRILLE & TRICK (1972a, 1972b) propuseram o método de Newton-Raphson. Posteriormente COLON & TRICK (1973) e ZEIN (1990) também trataram dessa técnica, segundo a qual, a solução da eq. (3.4) é obtida iterativamente por meio de

$$\mathbf{x}_0^{(k+1)} = \mathbf{x}_0^{(k)} - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0^{(k)}} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}, \quad (3.15)$$

a partir de uma estimativa inicial  $\mathbf{x}_0^{(0)}$ ; sendo  $\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0^{(k)}}$  o jacobiano do vetor de discrepância,

avaliado com os valores disponíveis do vetor de estado inicial.

O desafio enfrentado por Aprile e Trick foi justamente encontrar uma forma computacionalmente eficiente de calcular o jacobiano. Para isso foi definido a função

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 = \int_0^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (3.16)$$

de modo que,

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left[ \int_0^T \mathbf{G}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \mathbf{x}_0 \right]$$

ou

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{I} + \int_0^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\tau)}{\partial \mathbf{x}_0} d\tau \quad (3.17)$$

A integração indicada à direita da eq. (3.17) representa a matriz de transição de estado correspondente à equação variacional

$$\dot{\mathbf{z}} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(i)}(t)} \mathbf{z} \quad (3.18)$$

associada à equação diferencial (3.1), onde

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(i)}(t)}$$

é o Jacobiano de  $\mathbf{G}$  avaliado ao longo da trajetória  $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Resumindo, o Jacobiano do vetor de discrepância é

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{x}_0} = \Phi(T, 0; \mathbf{x}_0^{(i)}) - \mathbf{I} \quad (3.19)$$

onde  $\Phi(T, 0; \mathbf{x}_0^{(i)})$  é a matriz de transição de estado da eq. (3.18).

A matriz de transição de estado  $\Phi(T, 0; \mathbf{x}_0^{(i)})$ , pode ser calculada facilmente, pois ela está relacionada com o Jacobiano de  $\mathbf{G}$  ao longo da trajetória de  $\mathbf{x}^{(i)}$ . Aplicando-se a fórmula de Euler regressiva à eq. (3.1) se obtém:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_{p-1} + h \mathbf{G}(\mathbf{x}_p) \quad (3.20)$$

onde  $h = \frac{T}{n}$  é o tamanho do passo,  $p = 1, 2, \dots, n$  e  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}(ph)$ . A eq. (3.20) é resolvida pelo método de Newton:

$$\mathbf{x}_p^{(i+1)} = \mathbf{x}_p^{(i)} - \left[ \mathbf{I} - h \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_p^{(i)}} \right]^{-1} \cdot \left[ \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{p-1}^{(i)} - h \mathbf{G}(\mathbf{x}_p^{(i)}) \right] \quad (3.21)$$

onde  $\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_p}$  é o jacobiano de  $\mathbf{G}$ , e  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(nh) \approx \mathbf{x}(T)$ .

Aplicando-se a fórmula de Euler regressiva à eq. (3.18), então

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + h \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_1} \mathbf{z}_1$$

ou

$$\mathbf{z}_1(h) = \left[ \mathbf{I} - h \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_1} \right]^{-1} \mathbf{z}_0 \quad (3.22)$$

e

$$\mathbf{z}(T) \approx \mathbf{z}_n = \prod_{p=1}^n \left[ \mathbf{I} - h \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{n-p+1}} \right]^{-1} \mathbf{z}_0 \quad (3.23)$$

Assim se tem:

$$\Phi(T, 0; \mathbf{x}_0) \approx \prod_{p=1}^n \left[ \mathbf{I} - h \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{n-p+1}} \right]^{-1} \quad (3.24)$$

e

$$\Phi^{-1}(T, 0; \mathbf{x}_0) \approx \prod_{p=1}^n \left[ \mathbf{I} - h \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_p} \right] \quad (3.25)$$

onde  $h$  foi previamente escolhido e  $\mathbf{x}_p$  fora calculado antes.

### 3.4.1 O algoritmo do método

O algoritmo de análise de regime permanente de circuitos não-lineares baseado no método de Newton é o seguinte:

1. Para um estado inicial dado  $\mathbf{x}^{(i)}$  calcule a solução da eq. (3.1),  $\mathbf{x}^{(i)}(t, \mathbf{x}_0^{(i)})$ ,  $0 \leq t \leq T$ ;
2. calcule a matriz de transição de estado  $\Phi(T, 0; \mathbf{x}_0^{(i)})$ , da eq. (3.18) e então o Jacobiano do vetor de discrepância;
3. Corrija o estado inicial, isso é, calcule  $\mathbf{x}_0^{(i+1)}$  através da eq. (3.15);
4. Retorne ao passo 1 com  $\mathbf{x}_0^{(i+1)}$  a menos que  $\|\mathbf{x}^{(i)}(T) - \mathbf{x}_0^{(i)}\| < \varepsilon$  e  $\|\mathbf{x}_0^{(i+1)} - \mathbf{x}_0^{(i)}\| < \delta$ , onde  $\varepsilon$  e  $\delta$  são números positivos arbitrariamente pequenos;
5. Pare.

#### Exemplo 3.1

Calcular a resposta de regime permanente do circuito da fig. 3.1 empregando o método de Newton-Raphson.

Comparando-se as eqs. (3.1) e (3.7) identifica-se

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} \frac{v(u)}{\omega} \\ \frac{E}{\omega RC} \operatorname{sen} u - \frac{1}{\omega RC} v(u) - \frac{1}{\omega C} i(\lambda) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

cujo jacobiano é

$$\left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_p} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\omega} \\ -\frac{1}{\omega C} \left. \frac{di}{d\lambda} \right|_{\lambda_p} & -\frac{1}{\omega RC} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

O procedimento de cálculo apresentado na seção 3.3 deve ser modificado para fornecer além do vetor de discrepância o seu jacobiano. Em cada ponto da trajetória traçada no espaço de estado para calcular o vetor de discrepância, se deve calcular também a matriz

$$\mathbf{I} - \Delta u \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_p} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\pi}{\omega n} \\ -\frac{2\pi}{\omega n C} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{i,p} & 1 - \frac{2\pi}{\omega n RC} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

e então se corrige a matriz  $\Phi^{-1}$ ,

$$\Phi^{-1} \leftarrow \Phi^{-1} \left[ \mathbf{I} - \Delta u \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_p} \right]$$

que inicialmente foi tomada igual a  $\mathbf{I}$ . Terminado o processo iterativo se determina o jacobiano do vetor de discrepância através da eq. (3.19).

Estimando-se inicialmente o estado periódico como zero ( $\mathbf{x}_0^{(0)} = \mathbf{0}$ ) e tomando-se  $n = 256$ , se encontram em apenas duas iterações, o seguinte resultado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3.16045 \cdot 10^{-3} \\ 0.37094 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-9} \\ 3 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

A resposta de regime permanente do circuito da fig. 3.1 correspondente ao estado periódico encontrado acima é mostrado na fig. 3.2.

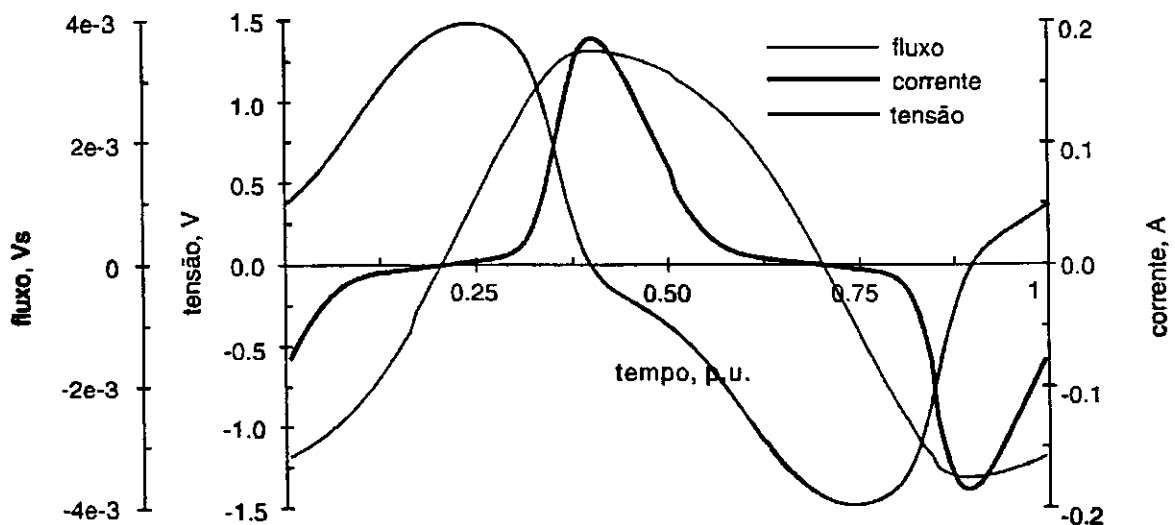


Fig. 3.2 Uma resposta de regime permanente do circuito da fig. 3.1 obtida pelo método de Newton-Raphson (exemplo 3.1).

Comparando-se as eq. (3.5) e (3.15) fica claro que o método de Newton-Raphson é um método de tentativas e erros, "inteligente", é verdade, pois  $\mathbf{H} = -(\hat{\partial}\boldsymbol{\varepsilon}/\hat{\partial}\mathbf{x})^{-1}$  é função do próprio erro. As propriedades do método de Newton que se conhecem de outras aplicações continuam válidas: convergência rápida, mas que depende muito da estimativa inicial da solução. O que há de realmente novo aqui, é o processo de cálculo do jacobiano. Esse processo, iterativo, exige um esforço computacional muito grande, uma vez que implica em produtos sucessivos e inversões de matrizes. Esse esforço aumenta acentuadamente quando crescem a dimensão do vetor de estado e o número de passos de integração.

### 3.5 Solução do problema através de método de otimização

Uma alternativa para a determinação da resposta de regime permanente de circuitos não-lineares, formulada como um problema de valores de contorno em dois pontos, foi proposta NAHKLA & BRANIN (1977). Esse método, que se baseia em técnica de otimização que emprega o gradiente, será descrito a seguir.

A função escalar  $\zeta(\mathbf{x}_0)$  é definida como o quadrado do módulo do vetor de discrepância (eq. (3.3)):

$$\zeta(\mathbf{x}_0) = [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)]^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0) \quad (3.29)$$

Se procura minimizar  $\zeta(\mathbf{x}_0)$  ajustando  $\mathbf{x}_0$ , através de um algoritmo de otimização que requer o gradiente:

$$\nabla\zeta(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial\zeta(\mathbf{x}_0)}{\partial\mathbf{x}_0} = 2 \cdot \left[ \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)}{\partial\mathbf{x}_0} \right]^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0) \quad (3.30)$$

ou, usando a eq. (3.3),

$$\nabla\zeta(\mathbf{x}_0) = 2 \cdot \left[ \frac{\partial\mathbf{x}(T, \mathbf{x}_0)}{\partial\mathbf{x}_0} - \mathbf{I} \right]^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0) \quad (3.31)$$



A principal tarefa aqui é encontrar uma maneira computacionalmente eficiente de calcular o vetor gradiente. Para se realizar isso, se deriva a equação diferencial do circuito, eq. (3.1), com respeito a  $\mathbf{x}_0$ , o que resulta na equação diferencial linear dependente do tempo

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (3.32)$$

que tem a forma da equação variacional

$$\dot{\mathbf{y}} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)} \mathbf{y} \quad (3.33)$$

Essa equação descreve pequenas variações em torno de qualquer trajetória conhecida  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ . A *adjunta* da equação variacional é

$$\dot{\mathbf{z}} = - \left( \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)}^T \right) \mathbf{z} \quad (3.34)$$

que também é linear e dependente do tempo.

Uma propriedade fundamental de equações variacionais lineares dependentes do tempo e suas adjuntas, assegura que suas soluções obedecem à relação

$$\mathbf{y}(t)^T \mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(0)^T \mathbf{z}(0), \quad (3.35)$$

constante para todo  $t$ . De acordo com essa propriedade, se pode escrever

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T \mathbf{z}(t) = \left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T \mathbf{z}(0)$$

ou

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(0) \quad (3.36)$$

levando-se em conta que

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T = \mathbf{I}.$$

Assim, fazendo-se  $\mathbf{z}(T) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)$  na eq. (3.34), isto é, usando-se o vetor de discrepância  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)$  como condições iniciais em  $t = T$ , e então integrando-se recursivamente a eq. (3.34) até  $t = 0$ , o vetor resultante  $\mathbf{z}(0)$  é justamente o que se necessita. Logo a eq. (3.31) finalmente se reduz a:

$$\nabla\zeta(\mathbf{x}_0) = 2 \cdot [\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0), 0) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)] \quad (3.37)$$

### 3.5.1 O algoritmo do método do gradiente

Do que se apresentou acima emerge o seguinte algoritmo para encontrar o estado periódico e a solução periódica correspondente:

1. Escolha uma primeira estimativa de  $\mathbf{x}_0$ .
2. Usando  $\mathbf{x}_0$  como condição inicial na eq. (3.1), integre-a progressivamente de  $t = 0$  até  $t = T$ , guarde a trajetória  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  na ordem em que ela é gerada.
3. Calcule o vetor de discrepância  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)$  e o quadrado de seu módulo  $\zeta(\mathbf{x}_0)$ .
4. Se  $\zeta$  é menor do que um critério de convergência aceitável, pare. Do contrário vá para o passo 5.
5. Use  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)$  como condição inicial na eq. (3.34), a equação variacional adjunta, em  $t = T$  e integre-a reversivelmente até  $t = 0$ , usando a trajetória  $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  na ordem inversa para calcular a matriz  $(\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{x})^T$  durante esse processo de integração.
6. Calcule o vetor de discrepância adjunto e dobre-o para obter o vetor gradiente  $\nabla\zeta(\mathbf{x}_0)$ . Então passe  $\zeta(\mathbf{x}_0)$  e  $\nabla\zeta(\mathbf{x}_0)$  como argumentos de uma rotina de otimização para minimizar  $\zeta(\mathbf{x}_0)$ .
7. Calcule a próxima estimativa de  $\mathbf{x}_0$  usando o vetor de correção  $\Delta\mathbf{x}_0$  fornecido pela rotina de otimização e volte para o passo 2.

A taxa de convergência do método de gradiente é fortemente dependente do método de otimização usado para minimizar  $\zeta(\mathbf{x}_0)$ . NAHKLA & BRANIN (1977) empregam o método de Fletcher, embora outros métodos, como o de Polak-Ribiere (PRESS et al, 1986), possam ser empregados com possível melhoria do desempenho do método de gradiente.

### Exemplo 3.2

Calcular a resposta de regime permanente do circuito da fig. 3.1 empregando o método do gradiente.

O esforço realizado para calcular o vetor de discrepância e que foi descrito na seção 3.3 é aproveitado no cálculo do gradiente. A trajetória  $\mathbf{x}_p$  ( $p=1,2,\dots,n$ ) deve ter sido memorizada, pois com base nela se definirá a matriz  $-\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T$  em cada ponto. A solução da equação variacional adjunta é mais simples por se tratar de uma equação diferencial linear. A equação algébrica correspondente à eq. (3.34) é

$$\mathbf{z}_p = \left[ \mathbf{I} + \frac{\pi}{n} \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right]^{-1} \left[ \mathbf{I} - \frac{\pi}{n} \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] \mathbf{z}_{p-1} \quad (3.38)$$

onde  $\mathbf{z}_0 = \varepsilon$  e  $p = 1, 2, \dots, n$ .  $\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}\right]^T$  é a transposta da matriz que é dada pela eq. (3.27).

Logo, a eq. (3.38) fica assim:

$$\mathbf{z}_p = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\pi}{n\omega C} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{\lambda_p} \\ \frac{\pi}{n} & 1 + \frac{\pi}{n\omega C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\pi}{n\omega C} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{\lambda_p} \\ -\frac{\pi}{n} & 1 - \frac{\pi}{n\omega C} \end{bmatrix} \mathbf{z}_{p-1} \quad (3.39)$$

Uma vez que  $\mathbf{z}_n$  tenha sido calculado, o gradiente do vetor de discrepância estará determinado através da eq. (3.37).

Tomando-se o estado inicial como zero ( $\mathbf{x}_0^{(0)} = \mathbf{0}$ ) e  $n = 256$ , como foi feito no exemplo 3.1, se encontram em cinco iterações, o seguinte resultado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3.16041 \cdot 10^{-3} \\ 0.37095 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^{-9} \\ 3 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

A resposta de regime permanente do circuito da fig. 3.1 correspondente a esse estado periódico é mostrado na fig. 3.3.

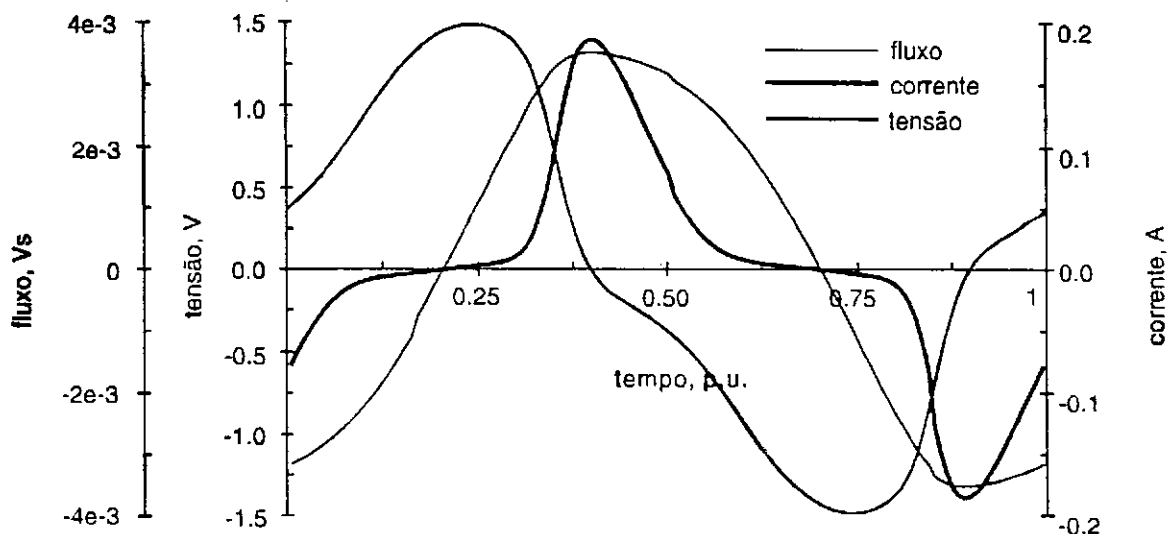


Fig. 3.3 Uma resposta de regime permanente do circuito da fig. 3.1 obtida pelo método do gradiente (exemplo 3.2).

### 3.5.2 O método do gradiente com variação de fase

Na seção 3.5.1 ficou implícito que as condições iniciais são sempre dadas em  $t = 0$ ; mas essa restrição não é necessária para a definição do estado periódico. De fato se pode usar uma definição de periodicidade geral: se  $\mathbf{w}(t)$  é uma solução periódica de período  $T$ , então:

$$\mathbf{w}(\phi) = \mathbf{w}(T + \phi) \quad (3.40)$$

onde  $\phi$  é uma fase que assume valores entre 0 e  $T$ . Ao se permitir que a fase seja variável se dá uma nova dimensão ao problema, o que equivale a oferecer um alvo maior para o processo iterativo atingir. Isso tende a tornar a convergência mais rápida.

Tomando-se a fase como uma variável adicional, o vetor de discrepância passa a ser definido do seguinte modo:

$$\varepsilon(\mathbf{x}_\phi, \phi) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_\phi, T + \phi) - \mathbf{x}_\phi = \int_\phi^{T+\phi} \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) dt \quad (3.41)$$

onde  $\mathbf{x}_\phi = \mathbf{x}(\phi)$  é o vetor de condições iniciais em  $t = \phi$ . O quadrado da amplitude de  $\varepsilon(\mathbf{x}_\phi)$  também deve depender de  $\phi$ , ou seja,

$$\zeta(\mathbf{x}_\phi, \phi) = [\varepsilon(\mathbf{x}_\phi, \phi)]^T \varepsilon(\mathbf{x}_\phi, \phi). \quad (3.42)$$

Desse modo, a dimensão adicional aparece no gradiente  $\nabla \zeta(\mathbf{x}_\phi, \phi)$ , com o termo

$$\frac{\partial \zeta(\mathbf{x}_\phi, \phi)}{\partial \phi} = 2 \varepsilon^T(\mathbf{x}_\phi, \phi) \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_\phi, T + \phi)}{\partial \phi} \quad (3.43)$$

que deve se agregar ao vetor  $\partial \zeta(\mathbf{x}_\phi, \phi) / \partial \mathbf{x}_\phi$ , que se expressa pela eq. (3.30) e é efetivamente calculado pela eq. (3.37).

O cálculo eficiente de  $\partial \zeta(\mathbf{x}_\phi, \phi) / \partial \phi$  segue um procedimento análogo ao apresentado anteriormente. Primeiro se diferencia a eq. (3.1) com respeito a  $\phi$ , e assim se obtém a relação

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}(\mathbf{x}_\phi, t)} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}, \quad (3.44)$$

que tem a forma da equação variacional não-homogênea

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}(\mathbf{x}_\phi, t)} \mathbf{y} + \nabla \mathbf{G}(t),$$

onde  $\nabla \mathbf{G}(t) = \partial \mathbf{G} / \partial t$  é conhecido. A solução desejada da eq. (3.44),

$$\mathbf{y}(T + \phi) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_\phi, T + \phi)}{\partial \phi},$$

é obtida integrando-se-a progressivamente de  $t = \phi$  a  $t = T + \phi$ , usando-se  $\mathbf{y}(\phi) = \partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_\phi) / \partial \phi = \mathbf{0}$  como vetor de condições iniciais. O componente extra do vetor gradiente é determinado de acordo com a eq. (3.43).

Se agora o vetor gradiente aumentado  $\nabla \zeta(\mathbf{x}_\phi, \phi)$  e  $\zeta(\mathbf{x}_\phi, \phi)$  são passados para uma rotina de otimização, conforme estabelece o passo 5 do algoritmo, retorna-se-ão não apenas  $\Delta \mathbf{x}_\phi$ , mas também  $\Delta \phi$ , que determina como modificar-se a fase para a próxima iteração, de modo que  $\zeta(\mathbf{x}_\phi, \phi)$  seja reduzido de uma maneira ótima.

## Capítulo IV

# UMA NOVA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DO GRADIENTE E SUA EXTENSÃO AO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Uma formulação alternativa do método do gradiente surge ao se observar que o problema de valores de contorno a que foi convertido a determinação do estado periódico de um circuito não-linear, pode ser tratado como um problema de otimização com restrição. Essa nova versão do método, em que o gradiente é determinado por otimização, com as equações do circuito em cada instante tomadas como restrição, será referenciada como *método da otimização restrita*.

### 4.1 O método da otimização restrita

Como já se colocou antes o interesse neste trabalho se concentra em circuitos com excitação senoidal, cujos elementos não-lineares são só indutores. Sendo assim, a função  $G$  na eq. (3.1) pode se expressar ainda com grau de generalidade acima do suficiente, como:

$$\mathbf{G} = \mathbf{E}\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{y} \quad (4.1)$$

onde,

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T$  é o vetor de estado;

$\mathbf{y}$  é uma função vetorial do vetor de estado através da qual as características dos elementos não-lineares entram na formulação;

$\mathbf{E}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  são matrizes constantes no tempo, que dependem das amplitudes e frequência das excitações, e dos parâmetros e topologia do circuito;

$\hat{\mathbf{e}}$  é o vetor das excitações do circuito; uma função periódica do tempo.

As equações de diferença resultantes da discretização das eqs. diferenciais (3.1), postas na forma matricial são:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_p + \mathbf{B}\mathbf{y}_p + \boldsymbol{\gamma}_p = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

onde,

$$p = 1, 2, \dots, n;$$

$$\mathbf{A} = \frac{\pi}{n} \hat{\mathbf{A}};$$

$$\mathbf{B} = \frac{\pi}{n} \hat{\mathbf{B}};$$

$$\mathbf{e} = \int \hat{\mathbf{e}}(u) du;$$

$n$  é o número de passos de integração;  $\mathbf{e}$

$$\boldsymbol{\gamma}_p = (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}_{p-1} + \mathbf{B}\mathbf{y}_{p-1} + \mathbf{E}(\mathbf{e}_p - \mathbf{e}_{p-1}) \quad (4.3)$$

é função dos valores atuais das excitações e dos valores históricos das variáveis de estado e das excitações.

Para se determinar um estado periódico (se é que existe algum) se estabelece a seguinte função objetivo:

$$\zeta(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)]^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_0)$$

que deve ser minimizada com as restrições (4.2). Isso equivale a minimizar sem restrição a seguinte função objetivo aumentada (também conhecida como função de Lagrange (GOTTFRIED & WEISMAN, 1973 ):

$$Z = \frac{1}{2} [\varepsilon(\mathbf{x}_0)]^T \varepsilon(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^n \mathfrak{L}_p^T [(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_p + \mathbf{B}\mathbf{y}_p + \boldsymbol{\gamma}_p] \quad (4.4)$$

onde  $\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  é o vetor de discrepância definido pela eq. (3.3) e  $\mathfrak{L}_p = [\mathfrak{L}_{1p}, \mathfrak{L}_{2p}, \dots, \mathfrak{L}_{np}]$  é o vetor multiplicador de Lagrange no  $p$ -ésimo passo.

Por conveniência, a eq. (4.4) é reorganizada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{2} [\varepsilon(\mathbf{x}_0)]^T \varepsilon(\mathbf{x}_0) + \mathfrak{L}_1^T [(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{y}_0] - \mathfrak{L}_1^T \mathbf{E} \mathbf{e}_0 + \\ & + \sum_{p=1}^{n-1} [\mathfrak{L}_p^T (\mathbf{A} - \mathbf{I}) + \mathfrak{L}_{p+1}^T (\mathbf{A} + \mathbf{I})] \mathbf{x}_p + [\mathfrak{L}_p^T + \mathfrak{L}_{p+1}^T] \mathbf{B}\mathbf{y}_p + \\ & + [\mathfrak{L}_p^T - \mathfrak{L}_{p+1}^T] \mathbf{E} \mathbf{e}_p + \\ & + \mathfrak{L}_n^T [(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{y}_n] + \mathfrak{L}_n^T \mathbf{E} \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (4.5)$$

Levando-se em conta que

$$d\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}\right) = -\boldsymbol{\varepsilon}^T d\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T d\mathbf{x}_n,$$

se tem a seguinte expressão da diferencial da eq. (4.5):

$$\begin{aligned} dZ = & \left\{ -\boldsymbol{\varepsilon}^T + \mathfrak{L}_1^T \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right] \right\} d\mathbf{x}_0 - \{ \mathfrak{L}_1^T \mathbf{E} \} d\mathbf{e}_0 + \\ & + \sum_{p=1}^{n-1} \left\{ \mathfrak{L}_p^T \left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right] + \mathfrak{L}_{p+1}^T \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right] \right\} d\mathbf{x}_p + \\ & + \{ [\mathfrak{L}_p^T - \mathfrak{L}_{p+1}^T] \mathbf{E} \} d\mathbf{e}_p + \\ & + \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^T + \mathfrak{L}_n^T \left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_n} \right] \right\} d\mathbf{x}_n + \{ \mathfrak{L}_n^T \mathbf{E} \} d\mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$  é o jacobiano da função  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ .

No caso das excitações serem completamente fixas (em amplitude, frequência e fase) os termos  $d\mathbf{e}_p$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ , na eq. (4.6) são todos nulos.



As eq. (4.4) e por conseguinte a eq. (4.6) são verdadeiras, quaisquer que sejam os valores dos multiplicadores de Lagrange. Contudo, por conveniência, eles devem se definir de modo que anulem todos os termos da eq. (4.6), a não ser aqueles que correspondam ao estado inicial. Desse modo, se assegura que o gradiente da função objetivo aumentada seja igual ao gradiente da função objetivo original. Para se levar isso a efeito, se estabelece a seguinte equação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T + \boldsymbol{\xi}_n^T \left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_n} \right] = 0 \quad (4.7)$$

a partir da qual se determina

$$\boldsymbol{\xi}_n = - \left\{ \mathbf{A}^T - \mathbf{I} + \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_n} \right]^T \mathbf{B}^T \right\}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.8a)$$

Os outros multiplicadores de Lagrange são determinados recursivamente e na ordem inversa. Isto é, para  $p = n-1, \dots, 1$ , se faz:

$$\boldsymbol{\xi}_p^T \left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right] + \boldsymbol{\xi}_{p+1}^T \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right] = 0$$

ou seja,

$$\left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right]^T \boldsymbol{\xi}_p = - \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right]^T \boldsymbol{\xi}_{p+1} \quad (4.8b)$$

Concluído esse processo, há como calcular o gradiente de  $\zeta$ , que conforme a eq. (4.6) é dado por:

$$\nabla \zeta = \left( \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right)^T \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.9)$$

Essa formulação geral pode até parecer complexa à primeira vista, mas de fato é mais compreensível e muito mais eficiente, sob o ponto de vista de implementação, que a da seção 3.4.1. Isso fica claro reportando-se ao circuito da fig. 3.1 como se fará no exemplo seguinte.

#### Exemplo 4.1

Calcular um estado periódico do circuito da fig. 3.1 através do método da otimização restrita.

O problema consiste fundamentalmente em determinar o gradiente da discrepância. Isso poderia ser feito simplesmente particularizando-se o procedimento geral estabelecido acima, mas isso seria de pouca utilidade neste momento em que se quer deixar o método absolutamente claro. Portanto, se repetirá todo o desenvolvimento, agora tomando-se por base o circuito da fig. (3.1).

O problema agora se apresenta assim: minimizar a função objetivo

$$\zeta = \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2$$

sendo

$$\varepsilon_1 = \lambda_n - \lambda_0$$

$$\varepsilon_2 = v_n - v_0$$

e tendo as eqs. (3.8) como restrições.

Noutros termos, o problema é enunciado como: minimizar sem restrição a seguinte função objetivo aumentada:

$$Z = \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 + \sum_{p=1}^n \mathcal{L}_{1p} \left( -\lambda_p + \alpha v_p + \gamma_{1p} \right) + \\ + \mathcal{L}_{2p} \left[ -\left( 1 + \frac{\alpha}{RC} \right) v_p - \frac{\alpha}{C} i_p + \gamma_{2p} \right],$$

que após a eliminação de  $\gamma_{1p}$  e  $\gamma_{2p}$ , empregando-se as eqs. (3.10), e a reorganização numa forma mais conveniente fica assim:

$$\begin{aligned}
Z = & \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 + [\xi_{1_1}] \lambda_0 + \left[ -\frac{\alpha}{C} \xi_{2_1} \right] i_0 + \\
& + \left[ \alpha \xi_{1_1} + \left( 1 - \frac{\alpha}{RC} \right) \xi_{2_1} \right] v_0 + [-\xi_{2_1}] e_0 + \\
& \sum_{p=1}^{n-1} \left[ -\xi_{1_p} + \xi_{1_{p+1}} \right] \lambda_p + \left[ -\frac{\alpha}{C} (\xi_{2_p} + \xi_{2_{p+1}}) \right] i_p + \\
& + \left[ \alpha \xi_{1_p} - \left( 1 + \frac{\alpha}{RC} \right) \xi_{2_p} + \alpha \xi_{1_{p+1}} + \left( 1 - \frac{\alpha}{RC} \right) \xi_{2_{p+1}} \right] v_p + \\
& + [\xi_{2_p} - \xi_{2_{p+1}}] e_p + \\
& + [-\xi_{1_n}] \lambda_n + \left[ -\frac{\alpha}{C} \xi_{2_n} \right] i_p + \left[ \alpha \xi_{1_n} - \left( 1 + \frac{\alpha}{RC} \right) \xi_{2_n} \right] v_n + \xi_{2_n} e_n \quad (4.10)
\end{aligned}$$

A diferencial da eq. (4.10) é:

$$\begin{aligned}
dZ = & \left[ -\varepsilon_1 + \xi_{1_1} - \frac{\alpha}{C} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{\lambda_0} \xi_{2_1} \right] d\lambda_0 + \\
& + \left[ -\varepsilon_2 + \alpha \xi_{1_1} + \left( 1 - \frac{\alpha}{RC} \right) \xi_{2_1} \right] dv_0 + [-\xi_{2_1}] de_0 + \\
& + \sum_{p=1}^{n-1} \left[ -\xi_{1_p} + \xi_{1_{p+1}} - \frac{\alpha}{C} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{\lambda_p} (\xi_{2_p} + \xi_{2_{p+1}}) \right] d\lambda_p + \\
& + \left[ \alpha \xi_{1_p} - \left( 1 + \frac{\alpha}{RC} \right) \xi_{2_p} + \alpha \xi_{1_{p+1}} + \left( 1 - \frac{\alpha}{RC} \right) \xi_{2_{p+1}} \right] dv_p + \\
& \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda_0} = \xi_{1_1} + \beta \xi_{2_1} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{\lambda_0} - \varepsilon_1 \\
& \frac{\partial \zeta}{\partial v_0} = \alpha \xi_{1_1} + \left( 1 - \frac{\alpha}{RC} \right) \xi_{2_1} - \varepsilon_2 \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Como a excitação é completamente fixa (em amplitude, frequência e fase) os termos  $de_p$ ,  $p = 0, 1, \dots, n$ , na eq. (4.11) são naturalmente nulos. Existem valores dos multiplicadores de Lagrange com os quais todos os termos da eq. (4.11) são nulos, excetos

aqueles que correspondem ao estado inicial. Para determiná-los se deve estabelecer essa condição começando por:

$$\mathcal{L}_{1_n} + \frac{\alpha}{C} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{\lambda_n} \mathcal{L}_{2_n} = \varepsilon_1 \quad (4.12a)$$

$$-\alpha \mathcal{L}_{1_n} + \left(1 + \frac{\alpha}{RC}\right) \mathcal{L}_{2_n} = \varepsilon_2 \quad (4.12b)$$

Resolvendo-se as eqs. (4.12) simultaneamente se determinam  $\mathcal{L}_{1_n}$  e  $\mathcal{L}_{2_n}$ . A partir daí os demais multiplicadores de Lagrange, serão determinados recursivamente e na ordem inversa:

$$\mathcal{L}_{1_p} + \frac{\alpha}{C} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{\lambda_p} \mathcal{L}_{2_{p+1}} = \mathcal{L}_{1_{p-1}} - \frac{\alpha}{C} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{\lambda_p} \mathcal{L}_{2_{p-1}}$$

$$-\alpha \mathcal{L}_{1_p} + \left(1 + \frac{\alpha}{RC}\right) \mathcal{L}_{2_p} = \alpha \mathcal{L}_{1_{p+1}} + \left(1 - \frac{\alpha}{RC}\right) \mathcal{L}_{2_{p-1}}$$

onde,  $p = n-1, n-2, \dots, 1$ .

Uma vez calculados  $\mathcal{L}_p^1$  e  $\mathcal{L}_p^2$ , se tem como determinar o gradiente da função objetivo,

$$\nabla \zeta = \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda_0} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v_0} \right]^T,$$

pois de acordo com a eq. (4.11),

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda_0} = \mathcal{L}_{1_1} + \beta \mathcal{L}_{2_1} \frac{di}{d\lambda} \Big|_{\lambda_0} - \varepsilon_1 \quad (4.13a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v_0} = \alpha \mathcal{L}_{1_1} + \left(1 - \frac{\alpha}{RC}\right) \mathcal{L}_{2_1} - \varepsilon_2 \quad (4.13b)$$

Passando-se o erro  $\zeta$  e o seu gradiente  $\nabla \zeta$  para a mesma rotina de otimização empregada no exemplo 3.2 se chega ao mesmo estado periódico ( $\lambda_0 = -3,16045 \cdot 10^{-3}$  Vs,  $v_0 = 0,37094$  V) que se encontrou lá, partindo-se do estado zero.

Agora se percebe com clareza que o método da otimização restrita é simples, muito mais do que aparenta através da formulação geral. É também uma maneira extremamente eficiente de se calcular o gradiente. Aquela formulação, que apresentou-se aqui apenas para demonstrar que o método é absolutamente geral, poderá vir a ter importância prática noutra instância, no desenvolvimento de uma rotina computacional de propósito geral, capaz de ser aplicada a qualquer circuito de interesse. Note-se que a excitação não precisa se restringir a funções senoidais e que está previsto acoplamento magnético, através da função  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ .

Antes de deixar de lado a formulação geral, ela será aplicada ao circuito da fig. 3.1. Isso é importante por várias razões: primeiro, pode ajudar a quebrar uma eventual resistência a sua aceitação; segundo, serve para definir as dimensões das matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$ , que ficaram em aberto; por fim, dá uma idéia do que essas matrizes representam.

As equações diferenciais (3.7) postas na forma matricial são:

$$\begin{bmatrix} d\lambda \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\omega} \\ 0 & -\frac{1}{\omega RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega C} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{\omega RC} \end{bmatrix} [\text{sen } u]$$

Logo, as matrizes e vetores que participam das eq. (4.2) e (4.3) são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\frac{\alpha}{RC} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{C} \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E}{\omega RC} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \lambda_p \\ v_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ i(\lambda_p) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_p = \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{2\pi}{n} p\right) \end{bmatrix}.$$

Além disso se tem que o jacobiano da função  $\mathbf{y}$  é:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{di}{d\lambda} & 0 \end{bmatrix}$$

Levando-se as matrizes expressas acima à eq. (4.9) irá se encontrar exatamente as expressões dadas pela eq. (4.13), o que prova a compatibilidade entre as formulações particular do exemplo 4.1 e a formulação geral.

Os vetores  $\mathbf{x}_p$  e  $\mathbf{y}_p$  e a matriz quadrada  $\mathbf{A}$  tem obviamente a dimensão do espaço estado, que aqui é 2. Como há apenas um elemento não-linear e uma excitação,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{e}_p$  são de dimensão 1. A primeira dimensão da matriz  $\mathbf{E}$  é sempre a dimensão do espaço e a segunda o número de excitações.

#### 4.2 O método da otimização restrita com variação de fase

Conforme foi discutido na seção 3.5.2, pode ser vantajoso permitir que as fases das excitações variem durante o processo de minimização da discrepância. Também foi visto que isso implica em num sobredimensionamento do jacobiano, já que o vetor de discrepância passa a ser função também das fases. A questão agora é: como os elementos adicionais do gradiente serão determinados pelo método da otimização restrita? Para respondê-la deve-se reportar à eq. (4.6).

Suponha-se que existam  $k$  excitações no circuito, todas senoidais, de modo que

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \text{sen}(u + \phi_1) \\ \text{sen}(u + \phi_2) \\ \vdots \\ \text{sen}(u + \phi_k) \end{bmatrix}$$

Por conveniência, as amplitudes das excitações estão contidas na matriz  $\mathbf{E}$ . Se tem por definição que

$$\mathbf{e} = \int \hat{\mathbf{e}} du = \begin{bmatrix} -\cos(u + \phi_1) \\ -\cos(u + \phi_2) \\ \vdots \\ -\cos(u + \phi_k) \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\mathbf{e}_p = \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{2\pi}{n}p + \phi_1\right) \\ -\cos\left(\frac{2\pi}{n}p + \phi_2\right) \\ \vdots \\ -\cos\left(\frac{2\pi}{n}p + \phi_k\right) \end{bmatrix}$$

Os termos  $d\mathbf{e}_p$  ( $p = 0, 1, \dots, m$ ) na eq. (4.6) não podem mais ser desconsiderados como antes. Desenvolvendo-os, se tem por resultado:

$$d\mathbf{e}_p = \left[ \frac{\partial e_1}{\partial \phi_1} d\phi_1 \quad \frac{\partial e_2}{\partial \phi_2} d\phi_2 \quad \dots \quad \frac{\partial e_m}{\partial \phi_m} d\phi_m \right]^T$$

ou

$$d\mathbf{e}_p = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \Phi} d\Phi$$

onde  $\Phi$  é o vetor das fases e  $\partial \mathbf{e} / \partial \Phi$  é uma matriz diagonal de dimensão  $k \times k$  em que o  $j$ -ésimo elemento é

$$\frac{\partial e_{j_p}}{\partial \phi_j} = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}p + \phi_j\right) = \hat{e}_{j_p}$$

A eq. (4.6) fica então assim:

$$\begin{aligned}
dZ = & \left\{ -\varepsilon^T + \underline{\lambda}_1^T \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right] \right\} d\mathbf{x}_0 + \\
& + \sum_{p=1}^{n-1} \left\{ \underline{\lambda}_p^T \left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right] + \underline{\lambda}_{p+1}^T \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right] \right\} d\mathbf{x}_p + \\
& + \left\{ \varepsilon^T + \underline{\lambda}_n^T \left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_n} \right] \right\} d\mathbf{x}_n + \\
& + \left\{ -\underline{\lambda}_1^T \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \Phi} + \sum_{p=1}^{n-1} \left[ \left( \underline{\lambda}_p^T - \underline{\lambda}_{p+1}^T \right) \mathbf{E} \right] \frac{\partial \mathbf{e}_p}{\partial \Phi} + \underline{\lambda}_n^T \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \Phi} \right\} d\Phi
\end{aligned} \tag{4.14}$$

O vetor gradiente da discrepância portanto é agora,

$$\nabla \zeta = \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}_0} \mid \frac{\partial \zeta}{\partial \Phi} \right]^T \tag{4.15a}$$

Os multiplicadores de Lagrange continuam a ser calculados absolutamente como antes, isto é, resolvendo-se as eqs. (4.8). Também não há mudança no cálculo do sub-vetor  $\partial \zeta / \partial \mathbf{x}_0$ , que continua a ser feito através da eq. (4.9). Isto é,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}_0} = \left( \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right)^T \underline{\lambda}_1 - \varepsilon \tag{4.15b}$$

Por outro lado, como

$$\left[ \frac{\partial \zeta}{\partial \Phi} \right]^T = -\underline{\lambda}_1^T \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \Phi} + \sum_{p=1}^{n-1} \left[ \left( \underline{\lambda}_p^T - \underline{\lambda}_{p+1}^T \right) \mathbf{E} \right] \frac{\partial \mathbf{e}_p}{\partial \Phi} + \underline{\lambda}_n^T \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \Phi}$$

então,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \Phi} = -\frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \Phi} \mathbf{E}^T \underline{\lambda}_1 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{e}_p}{\partial \Phi} \left[ \mathbf{E}^T \left( \underline{\lambda}_p - \underline{\lambda}_{p+1} \right) \right] + \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \Phi} \mathbf{E}^T \underline{\lambda}_n \tag{4.15c}$$

esse sub-vetor deve ser calculado por parte a medida que os multiplicadores de Lagrange forem sendo determinados.

Como se percebe facilmente, o esforço computacional é maior quando se tomam as fases como variáveis. Mesmo assim, há casos em que esse esforço adicional é compensativo



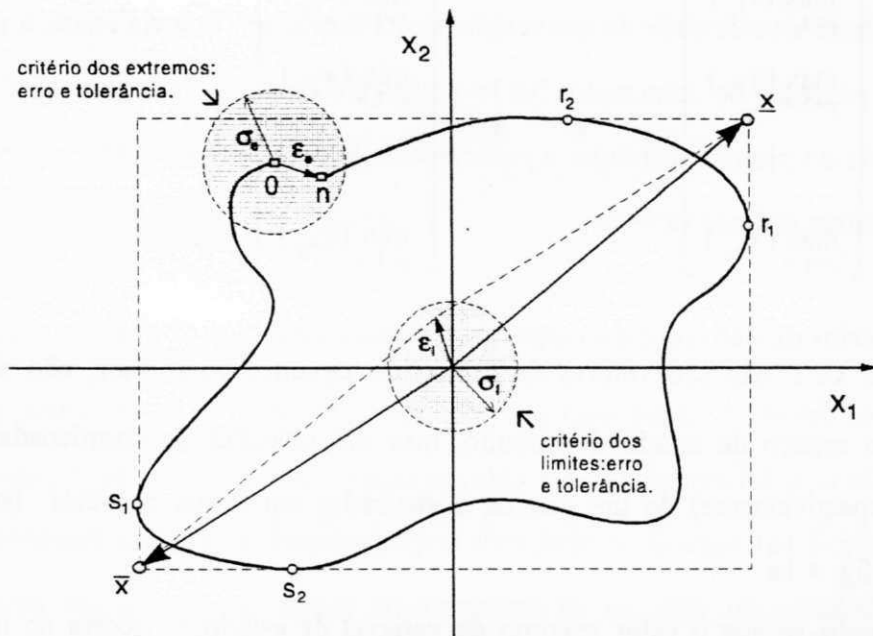
porque melhora a velocidade de convergência; há outros em que ele chega a ser decisivo no sucesso do processo de otimização. No levantamento da curva de ferroressonância, problema que é matéria do próximo capítulo, é praticamente impossível a solução em alguns trechos, se não se permitem as fases variarem.

### 4.3 Critérios de definição da resposta periódica de circuitos não-lineares

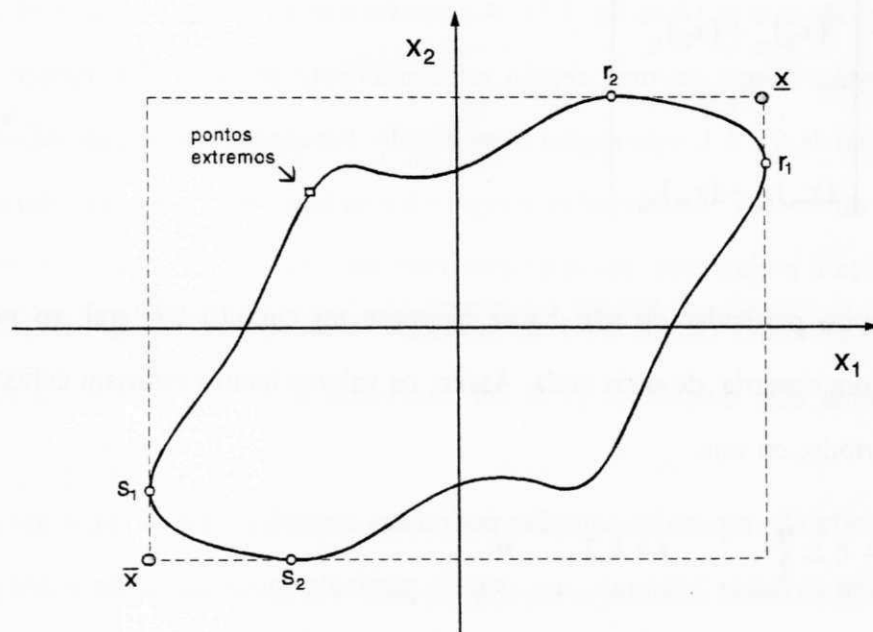
Tudo que se desenvolveu até aqui teve por base um vetor de discrepância  $\varepsilon$  definido pela eq. (3.3). Ou seja, foi empregado até agora o *critério dos extremos* das trajetórias no espaço de estado (fig. 4.1a), segundo o qual, uma resposta é periódica se sua trajetória no espaço de estado é fechada; ou seja, se os extremos da trajetória durante um período completo coincidem.

O critério dos extremos é exato e absolutamente geral. Contudo, por imposição de ordem prática ele é relaxado. Em vez de  $\varepsilon = 0$  se pratica  $|\varepsilon| \leq \sigma$ . Isto repercute no espaço de estado do modo que se vê na fig. 4.1a. A resposta é considerada periódica se os extremos da trajetória estão dentro de uma região arbitrariamente pequena. No espaço bidimensional, como no caso da fig. 4.1, essa região é um círculo. No espaço tridimensional, uma esfera e em espaços de dimensões mais elevadas, a região é uma hiper-esfera. Com a relaxação do critério sua segurança é prejudicada, passa a haver risco de uma solução quase-periódica ser tomada por solução periódica (KUNDERT & SORKIN, 1988; GLAZIER & LIBCHABER, 1988). Para contornar essa dificuldade pode ser necessário aumentar a trajetória por mais alguns períodos.

Quando são esperadas soluções periódicas simétricas (fig. 4.1b), o que ocorre quando o trato é com circuitos bilaterais, um critério particular pode substituir o dos extremos, para se ter economia de esforço computacional e possivelmente mais resolução. Esse outro critério, denominado *critério dos limites*, se apoia numa nova definição do vetor de discrepância:  $\varepsilon = \underline{x} - \bar{x}$  onde



(a)



(b)

Fig. 4.1 Espaço de estado bidimensional. (a) Trajetória genérica; (b) trajetória fechada e simétrica correspondente a uma solução periódica de circuito bilateral.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \max_{p=1, n} (x_{1p}) \\ \max_{p=1, n} (x_{2p}) \\ \vdots \\ \max_{p=1, n} (x_{mp}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \min_{p=1, n} (x_{1p}) \\ \min_{p=1, n} (x_{2p}) \\ \vdots \\ \min_{p=1, n} (x_{mp}) \end{bmatrix}$$

Note-se que  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$  não são vetores de estado do circuito, ou melhor, não são pontos da trajetória no espaço de estado do circuito, mas sim coleções de coordenadas (máximas e mínimas respectivamente) de tais pontos organizadas em forma de vetor. Isto está muito evidente na fig. 4.1a.

Suponha-se que o valor máximo da variável de estado  $x_i$  ocorra no instante  $r_i$  e o valor mínimo em  $s_i$ , então

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} (x_1)_{r_1} + (x_1)_{s_1} \\ (x_2)_{r_2} + (x_2)_{s_2} \\ \vdots \\ (x_m)_{r_m} + (x_m)_{s_m} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

No caso muito particular de não haver histerese no circuito bilateral, se poderia esperar respostas com simetria de meia onda. Assim, os valores limites estariam defasados no tempo em meio período, ou seja,

$$s_i = r_i \pm \frac{n}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

sendo que o sinal deveria ser escolhido de modo que  $0 < s_i \leq n$ .

O que muda no método da otimização restrita com o critério dos limites? A definição da função objetivo se mantém:

$$\zeta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon},$$

porém  $\varepsilon$  agora é dado pela eq. (4.16). Logo,

$$d\zeta = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i d(x_i)_{r_i} + \varepsilon_i d(x_i)_{s_i}$$

Desta maneira a diferencial da função objetivo aumentada é

$$\begin{aligned} dZ = & \left\{ \mathfrak{L}_1^T \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right] \right\} d\mathbf{x}_0 - \{ \mathfrak{L}_1^T \mathbf{E} \} d\mathbf{e}_0 + \\ & + \sum_{p=1}^{n-1} \left\{ \xi^T + \mathfrak{L}_p^T \left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right] + \mathfrak{L}_{p+1}^T \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right] \right\} d\mathbf{x}_p + \\ & + \{ [\mathfrak{L}_p^T - \mathfrak{L}_{p+1}^T] \mathbf{E} \} d\mathbf{e}_p + \\ & + \left\{ \mathfrak{L}_n^T \left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_n} \right] \right\} d\mathbf{x}_n + \{ \mathfrak{L}_n^T \mathbf{E} \} d\mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (4.17)$$

Na eq. (4.17)  $\xi = [\xi_{1_p} \ \xi_{2_p} \ \dots \ \xi_{m_p}]^T$ , sendo

$$\xi_{1_p} = \begin{cases} \varepsilon_i & \text{se } p=r_i \text{ ou } p=s_i \\ 0 & \text{se } p \neq r_i \text{ e } p \neq s_i \end{cases}$$

De acordo com a eq. (4.17), quando se emprega o critério dos limites, o gradiente é dado por

$$\nabla \zeta = \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} \right]^T \mathfrak{L}_1$$

O esforço computacional pode ser reduzido porque o processo iterativo de cálculo de  $\mathfrak{L}_1$  não deve começar necessariamente no fim do período, mas sim a partir do último instante em que ocorreu um pico, isto é, no instante  $p = q$  tal que  $q = \max(r_1, s_1, r_2, s_2, \dots, r_m, s_m)$ , pois,  $\mathfrak{L}_p = \mathbf{0}$  para  $p = n, n-1, \dots, q+1$ . Para  $p = q, q-1, \dots, 1$ ,  $\mathfrak{L}_p$  é calculado recursivamente resolvendo-se:

$$\left[ \mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right]^T \mathcal{L}_p = - \left[ \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_p} \right]^T \mathcal{L}_{p+1} - \xi \quad (4.18)$$

O procedimento para permitir a variação de fase das excitações é completamente análogo ao apresentado na seção 4.2.

#### 4.4 Cálculo do jacobiano do vetor de discrepância pelo método da otimização restrita

Ligeiramente modificado, o método da otimização restrita, inicialmente desenvolvido para calcular o gradiente  $\nabla \zeta$ , poderá também ser empregado para calcular o jacobiano  $\partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial \mathbf{x}_0$ .

Mais adiante se verá como isso é possível.

Como a funcional erro é definida por

$$\zeta = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.19)$$

seu gradiente é dado por

$$\nabla \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \mathbf{x}_0}$$

ou seja,

$$\nabla \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{x}_0} \right]^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.20)$$

A equação (4.20) permite determinar o gradiente da funcional erro quando são conhecidos o vetor de discrepância  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , e seu jacobiano  $\partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial \mathbf{x}_0$ . Infelizmente, essa equação não estabelece uma relação biunívoca entre o gradiente  $\nabla \zeta$  e o jacobiano de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ; o que é óbvio, pois o gradiente contém menos informação que o jacobiano. Basta observar, por exemplo, o seguinte: vetores de discrepância em que os elementos de um sejam iguais em valores aos do outro, são diferentes se os elementos de igual valor são de posições diferentes. Neste caso, os jacobianos são diferentes, mas as funcionais erros associadas e seus gradientes são iguais.

A prova formal de que a relação (4.20) não é biunívoca é simples. Se fosse possível determinar o jacobiano  $\partial \boldsymbol{\varepsilon} / \partial \mathbf{x}_0$  de um vetor de discrepância  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dado, a partir do conhecimento

do gradiente  $\nabla\zeta$  da funcional erro associada (definida pela eq. (4.19)), haveria um vetor  $\mu$  no espaço vetorial de  $\epsilon$ , de modo que a matriz quadrada  $\mu^T \epsilon$  fosse não-singular. Mas isso não acontece; quaisquer que sejam  $\epsilon$  e  $\mu$ , a matriz  $\mu^T \epsilon$  será sempre singular (suas colunas são nulas ou linearmente dependentes de outras).

Sendo pragmático, considere-se que os vetores  $\epsilon$  e  $\mathbf{x}_0$  e sejam de mesma dimensão,  $m$ . Para qualquer matriz quadrada  $U_i$  com a mesma dimensão do vetor  $\epsilon$  e independente do estado inicial,  $\mathbf{x}_0$ , a seguinte igualdade é válida:

$$\frac{\hat{c}(U_i \epsilon)}{\hat{c}\mathbf{x}_0} = U_i \frac{\hat{c}\epsilon}{\hat{c}\mathbf{x}_0}$$

Se todos os elementos de  $U_i$  são nulos exceto o  $i$ -ésimo elemento diagonal, que é unitário, o produto  $U_i (\hat{c}\epsilon/\hat{c}\mathbf{x}_0)$  é uma matriz quadrada em que  $i$ -ésima linha é a única que não é nula, mas sim, igual a  $i$ -ésima linha de  $\hat{c}\epsilon/\hat{c}\mathbf{x}_0$ . Por outro lado  $U_i \epsilon$  é um vetor em que o  $i$ -ésimo elemento é igual ao  $i$ -ésimo elemento de  $\epsilon$  e que os demais são nulos.

A conclusão é portanto a seguinte: se  $\epsilon$  é substituído por  $U_i \epsilon = [0 \ 0 \ \dots \ \epsilon_i \ \dots \ 0 \ 0]^T$  nas eqs. (4.8a) e (4.9), o gradiente que se obtém é o da funcional erro  $\zeta_i = \frac{1}{2}\epsilon_i^2$ , o qual corresponde justamente à  $i$ -ésima linha do jacobiano de  $\epsilon$ . Isto é,

$$\left[ \frac{\hat{c}\epsilon_i}{\hat{c}x_{1_0}} \quad \frac{\hat{c}\epsilon_i}{\hat{c}x_{2_0}} \quad \dots \quad \frac{\hat{c}\epsilon_i}{\hat{c}x_{m_0}} \right] = \frac{1}{\epsilon_i} [\nabla\zeta_i]^T$$

Fazendo-se  $i = 1, 2, \dots, m$ ; sucessivamente se determina o jacobiano por completo, linha por linha. Ou seja, o jacobiano do vetor de discrepância que se precisa determinar é,

$$\frac{\hat{c}\epsilon}{\hat{c}\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{c}\epsilon_1}{\hat{c}x_{1_0}} & \frac{\hat{c}\epsilon_1}{\hat{c}x_{2_0}} & \dots & \frac{\hat{c}\epsilon_1}{\hat{c}x_{m_0}} \\ \frac{\hat{c}\epsilon_2}{\hat{c}x_{1_0}} & \frac{\hat{c}\epsilon_2}{\hat{c}x_{2_0}} & \dots & \frac{\hat{c}\epsilon_2}{\hat{c}x_{m_0}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\hat{c}\epsilon_m}{\hat{c}x_{1_0}} & \frac{\hat{c}\epsilon_m}{\hat{c}x_{2_0}} & \dots & \frac{\hat{c}\epsilon_m}{\hat{c}x_{m_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon_1} [\nabla\zeta_1]^T \\ \frac{1}{\epsilon_2} [\nabla\zeta_2]^T \\ \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_m} [\nabla\zeta_m]^T \end{bmatrix}$$

Neste ponto, fica muito claro o tamanho do esforço computacional exigido no processo de determinação do jacobiano em comparação com o que é requerido para o cálculo do gradiente. O esforço computacional do jacobiano é maior que o do gradiente, o número de vezes correspondente à dimensão do jacobiano. É preciso ter isso em mente, e decidir se vale a pena arcar com esse ônus. A experiência mostra que há circunstância em que o método de Newton-Raphson é indubitavelmente melhor, pois converge rapidamente, enquanto o método do gradiente só consegue a solução com um número de iterações muito alto.

## Capítulo V

### ANÁLISE DE FERRORESSONÂNCIA ATRAVÉS DO MÉTODO DA OTIMIZAÇÃO RESTRITA

A técnica da otimização restrita será aplicada agora em conjunto com um procedimento de continuação, para se levantar a característica de ferroressonância fundamental de um circuito contendo um indutor saturável. As faixas de valor dos parâmetros do circuito em que haja risco de ferroressonância também serão determinadas.

O estudo a que se reportará este capítulo teve por base o circuito mostrado na fig. 5.1. A dependência da corrente de magnetização com relação ao fluxo magnético foi expressa por uma função polinomial de 9ª ordem, embora isso não seja nenhuma imposição metodológica. A técnica de otimização restrita é absolutamente geral, conforme ficou demonstrado no capítulo anterior, e pode aceitar qualquer outra dependência não-linear. O programa de computador, em que essa técnica foi implementada, é inclusive capaz de gerar internamente a relação de dependência através de *spline* sob tensão (SCHWEIKERT, 1966; CLINE, 1974a), a partir de alguns pontos da curva característica experimental dados. Para ter essa faculdade, o programa incorporou as subrotinas desenvolvidas por CLINE (1974b).



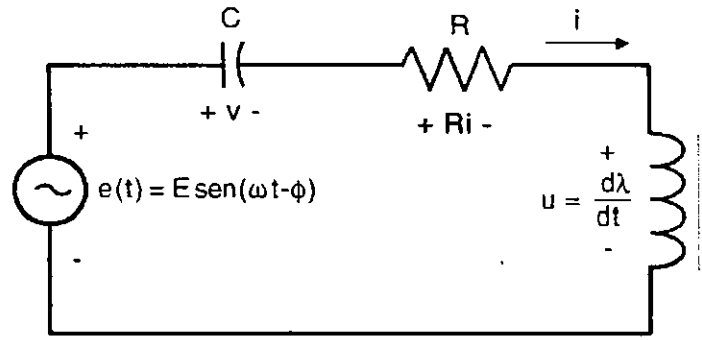


Fig. 5.1 Circuito ferroressonante série.

### 5.1 A resposta transitória do circuito

As equações que governam o circuito da fig. 5.1 no domínio do tempo são:

$$\frac{d\lambda}{dt} + v + Ri = E \text{ sen}(\omega t - \varphi), \quad (5.1a)$$

$$C \frac{dv}{dt} = i. \quad (5.1b)$$

A relação bilateral não-linear entre o fluxo concatenado  $\lambda$  e a corrente de magnetização  $i$  é:

$$i = a\lambda + b\lambda^q, \quad \lambda \geq 0 \quad (5.1c)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes reais e  $q$  é um número inteiro ímpar. Deseja-se determinar a resposta transitória do circuito subsequente à energização, dadas as condições iniciais  $\lambda(0)$  e  $v(0)$ .

As derivadas em relação ao tempo que aparecem nas equações (5.1a) e (5.1b) são removidas dividindo-se o período  $T$  em  $n$  intervalos de tempo iguais de duração  $\Delta t$ , e aplicando-se a regra trapezoidal. Isso resulta nas seguintes equações discretizadas:

$$\lambda_p - \lambda_{p-1} + \frac{T}{2n} (v_p + v_{p-1} + Ri_p + Ri_{p-1}) - \frac{E}{\omega} \left\{ \cos\left(2\pi \frac{p}{n} - \phi\right) - \cos\left(2\pi \frac{p-1}{n} - \phi\right) \right\} = 0 \quad (5.2a)$$

$$v_p - v_{p-1} - \frac{T}{2nC} (i_p + i_{p-1}) = 0, \quad (5.2b)$$

O fluxo magnético é máximo em  $t = j \Delta t$  e mínimo em  $t = k \Delta t$ . Analogamente, a tensão do capacitor é máxima em  $t = l \Delta t$  e mínima em  $t = m \Delta t$ .

A funcional erro é mínima quando a resposta for de regime permanente. Portanto o problema aqui é minimizar  $\zeta$ , sujeita as restrições dadas pelas eqs. (5.2). Essas restrições podem ser removidas, incorporando-as à funcional objetivo mediante o emprego de multiplicadores de Lagrange. Essa funcional objetivo aumentada, que deve ser minimizada sem restrição alguma, é:

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \\
 &+ \sum_{p=1}^n \left\{ \mathcal{L}_{1p} \left[ \lambda_p - \lambda_{p-1} + \frac{T}{2n} (v_p + v_{p-1}) + \frac{RT}{2n} (i_p + i_{p-1}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{E}{\omega} \left\{ \cos(2\pi \frac{p}{n} - \phi) - \cos(2\pi \frac{p-1}{n} - \phi) \right\} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{L}_{2p} \left[ (v_p - v_{p-1}) - \frac{T}{2nC} (i_p + i_{p-1}) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \\
 &- \mathcal{L}_{11} \lambda_0 + \frac{i_0 T}{2n} \left( \mathcal{L}_{11} R - \frac{\mathcal{L}_{21}}{C} \right) + v_0 \left( \frac{\mathcal{L}_{11} T}{2n} - \mathcal{L}_{21} \right) + \frac{\mathcal{L}_{11} E}{\omega} \cos \phi \\
 &+ \sum_{p=1}^n \lambda_p \left( \mathcal{L}_{1p} - \mathcal{L}_{1p-1} \right) + \frac{i_p T}{2n} \left\{ R (\mathcal{L}_{1p} + \mathcal{L}_{1p+1}) - \frac{1}{C} (\mathcal{L}_{2p} + \mathcal{L}_{2p-1}) \right\} \\
 &+ v_p \left\{ \frac{T}{2n} (\mathcal{L}_{1p} + \mathcal{L}_{1p+1}) + \mathcal{L}_{2p} - \mathcal{L}_{2p+1} \right\} + \frac{E}{\omega} \cos(2\pi \frac{p}{n} - \phi) \cdot (-\mathcal{L}_{1p} + \mathcal{L}_{1p+1})
 \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{L}_{1p}$  e  $\mathcal{L}_{2p}$  são os multiplicadores de Lagrange, e  $\mathcal{L}_{1_{n-1}} = 0$  e  $\mathcal{L}_{2_{n+1}} = 0$  por definição.

Assumindo que a tensão da fonte seja fixa, a diferencial primeira de  $Z$  é dada por:

$$\begin{aligned}
\delta Z = & \delta\lambda_0 \left\{ -\mathcal{L}_{1_1} + \frac{f_0 T}{2n} \left( \mathcal{L}_{1_1} R - \frac{\mathcal{L}_{2_1}}{C} \right) \right\} + \delta v_0 \left( \frac{\mathcal{L}_{1_1} T}{2n} - \mathcal{L}_{2_1} \right) + \\
& + \sum_{p=1}^n \delta\lambda_p \left\{ \left( 1 + \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{1_p} - \frac{f_p T}{2nC} \mathcal{L}_{2_p} + \varepsilon_1 \mu_{1_p} - \right. \\
& \quad \left. - \left( 1 - \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{1_{p+1}} - \frac{f_p T}{2nC} \mathcal{L}_{2_{p+1}} \right\} + \\
& + \delta v_p \left\{ \frac{T}{2n} \mathcal{L}_{1_p} + \mathcal{L}_{2_p} + \varepsilon_2 \mu_{2_p} + \frac{T}{2n} \mathcal{L}_{1_{p+1}} - \mathcal{L}_{2_{p+1}} \right\}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

onde

$$f_p = \left. \frac{di}{d\lambda} \right|_p,$$

$$\mu_{1_p} = 1 \text{ para } p = j, k \text{ e } \mu_{1_p} = 0 \text{ para outros valores de } p,$$

$$\mu_{2_p} = 1 \text{ para } p = l, m \text{ e } \mu_{2_p} = 0 \text{ caso contrário}$$

Os multiplicadores de Lagrange,  $\mathcal{L}_{1_p}$  e  $\mathcal{L}_{2_p}$ , são determinados resolvendo-se as equações:

$$\left( 1 + \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{1_p} - \frac{f_p T}{2nC} \mathcal{L}_{2_p} = -\varepsilon_1 \mu_{1_p} + \left( 1 - \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{1_{p+1}} + \frac{f_p T}{2nC} \mathcal{L}_{2_{p+1}} \tag{5.5a}$$

$$\frac{T}{2n} \mathcal{L}_{1_p} + \mathcal{L}_{2_p} = -\varepsilon_2 \mu_{2_p} - \frac{T}{2n} \mathcal{L}_{1_{p+1}} + \mathcal{L}_{2_{p+1}} \tag{5.5b}$$

retroativamente no tempo, para  $p = s, s-1, \dots, 1$ ; onde  $s = \max(j, k, l, m)$ , pois  $\mathcal{L}_{1_p}$  e  $\mathcal{L}_{2_p}$  são nulos para  $p = s+1, \dots, n$ .

Por fim, se obtém a diferencial primeira de Z:

$$\delta Z = \frac{\partial Z}{\partial \lambda_0} \delta \lambda_0 + \frac{\partial Z}{\partial v_0} \delta v_0$$

onde

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda_0} = -\mathcal{L}_{1_1} + \frac{f_0 T}{2n} \left( R \mathcal{L}_{1_1} - \frac{\mathcal{L}_{2_1}}{C} \right) \tag{5.6a}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v_0} = \frac{\mathcal{L}_{1_1} T}{2n} - \mathcal{L}_{2_1} \tag{5.6b}$$

As condições iniciais para as quais a funcional erro tem um valor mínimo, serão determinadas passando-se as informações do gradiente para uma rotina de otimização. A resposta gerada com essas condições iniciais é a resposta de regime permanente do circuito.

### 5.2.2 Determinação pelo Método de Newton-Raphson

Outra vez considere-se a resposta transitória do circuito da fig. 5.1 durante um período completo (seção 5.1). Para determinar a resposta de regime permanente pelo método do gradiente, uma única funcional erro foi definida (eq. 5.3). Diferentemente do que foi feito lá, definam-se agora duas funcionais erros como iguais às discrepâncias:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \varepsilon_1 = \max(\lambda) + \min(\lambda) \\ &= \lambda_j + \lambda_k \\ \zeta_2 &= \varepsilon_2 = \max(v) + \min(v) \\ &= v_l + v_m\end{aligned}$$

Existe um estado inicial  $\lambda_0, v_0$ , para o qual  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ . A resposta transitória gerada pelas eqs. (5.2) a partir deste estado inicial pode ser identificada como a resposta de regime permanente. Portanto, o objetivo agora é determinar o estado inicial para o qual  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ , respeitando-se as equações do circuito (eqs. (5.2)). Essas restrições podem ser removidas, incorporando-se-as às funcionais erros mediante multiplicadores de Lagrange. Assim, são estabelecidas as seguintes funcionais objetivos aumentadas:

$$\begin{aligned}Z_1 &= \varepsilon_1 - \mathcal{L}_{11_1} \lambda_0 + \frac{i_0 T}{2n} \left( \mathcal{L}_{11_1} R - \frac{\mathcal{L}_{12_1}}{C} \right) + v_0 \left( \frac{\mathcal{L}_{11_1} T}{2n} - \mathcal{L}_{12_1} \right) + \frac{\mathcal{L}_{11_1} E}{\omega} \cos \phi + \\ &+ \sum_{p=1}^n \lambda_p \left( \mathcal{L}_{11_p} - \mathcal{L}_{11_{p+1}} \right) + \frac{i_p T}{2n} \left\{ R \left( \mathcal{L}_{11_p} + \mathcal{L}_{11_{p+1}} \right) - \frac{1}{C} \left( \mathcal{L}_{12_p} + \mathcal{L}_{12_{p+1}} \right) \right\} + \\ &+ v_p \left\{ \frac{T}{2n} \left( \mathcal{L}_{11_p} + \mathcal{L}_{11_{p+1}} \right) + \mathcal{L}_{12_p} - \mathcal{L}_{12_{p+1}} \right\} + \\ &+ \frac{E}{\omega} \cos \left( 2\pi \frac{p}{n} - \phi \right) \cdot \left( -\mathcal{L}_{11_p} + \mathcal{L}_{11_{p+1}} \right)\end{aligned}\tag{5.7a}$$

$$\begin{aligned}
Z_2 = & \varepsilon_2 - \mathcal{L}_{21} \lambda_0 + \frac{i_0 T}{2n} (\mathcal{L}_{21} R - \frac{\mathcal{L}_{221}}{C}) + v_0 (\frac{\mathcal{L}_{21} T}{2n} - \mathcal{L}_{221}) + \frac{\mathcal{L}_{21} E}{\omega} \cos \phi + \\
& + \sum_{p=1}^n \lambda_p (\mathcal{L}_{21p} - \mathcal{L}_{21p+1}) + \frac{i_p T}{2n} \left\{ R(\mathcal{L}_{21p} + \mathcal{L}_{21p+1}) - \frac{1}{C} (\mathcal{L}_{22p} + \mathcal{L}_{22p+1}) \right\} + \\
& + v_p \left\{ \frac{T}{2n} (\mathcal{L}_{21p} + \mathcal{L}_{21p+1}) + \mathcal{L}_{22p} - \mathcal{L}_{22p+1} \right\} + \\
& + \frac{E}{\omega} \cos(2\pi \frac{p}{n} - \phi) \cdot (-\mathcal{L}_{21p} + \mathcal{L}_{21p+1}) \quad (5.7b)
\end{aligned}$$

Nas eqs. (5.7),  $\mathcal{L}_{\alpha\beta p}$  ( $\alpha = 1, 2; \beta = 1, 2$ ) é o multiplicador de Lagrange na  $\alpha$ -ésima funcional da  $\beta$ -ésima equação do circuito, e  $\mathcal{L}_{\alpha\beta n+1} = 0$  por definição.

Com a fonte fixa, em amplitude e fase, a diferencial primeira de  $Z_1$  é:

$$\begin{aligned}
\delta Z_1 = & \delta \lambda_0 \left\{ -\mathcal{L}_{111} + \frac{f_0 T}{2n} (\mathcal{L}_{111} R - \frac{\mathcal{L}_{121}}{C}) \right\} + \delta v_0 (\frac{\mathcal{L}_{111} T}{2n} - \mathcal{L}_{121}) + \\
& + \sum_{p=1}^n \delta \lambda_p \left\{ \left( 1 + \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{11p} - \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{12p} + \mu_{1p} - \right. \\
& \quad \left. - \left( 1 - \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{11p+1} - \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{12p+1} \right\} + \\
& + \delta v_p \left\{ \frac{T}{2n} \mathcal{L}_{11p} + \mathcal{L}_{12p} + \frac{T}{2n} \mathcal{L}_{11p+1} - \mathcal{L}_{12p+1} \right\}
\end{aligned}$$

onde

$$f_p = \frac{di}{d\lambda}_p,$$

$$\mu_{1p} = 1 \text{ para } p = j, k \text{ e } \mu_{1p} = 0 \text{ para outros valores de } p.$$

Os multiplicadores de Lagrange,  $\mathcal{L}_{11p}$  e  $\mathcal{L}_{12p}$ , são determinados resolvendo-se as equações:

$$\left( 1 + \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{11p} - \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{12p} = -\mu_{1p} + \left( 1 - \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{11p+1} + \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{12p+1} \quad (5.8a)$$

$$\frac{T}{2n} \mathcal{L}_{11p} + \mathcal{L}_{12p} = -\frac{T}{2n} \mathcal{L}_{11p+1} + \mathcal{L}_{12p+1} \quad (5.8b)$$

retroativamente no tempo, para  $p = s, s-1, \dots, 1$ ; sendo  $s = \max(j, k)$ , pois  $\mathcal{L}_{11_p}$  e  $\mathcal{L}_{12_p}$  são nulos para  $p = s+1, s+2, \dots, n$ .

Por fim, se obtém a diferencial primeira de  $Z_1$ :

$$\delta Z_1 = \frac{\partial Z_1}{\partial \lambda_0} \delta \lambda_0 + \frac{\partial Z_1}{\partial v_0} \delta v_0$$

onde

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \lambda_0} = -\mathcal{L}_{11_1} + \frac{f_0 T}{2n} \left( R \mathcal{L}_{11_1} - \frac{\mathcal{L}_{12_1}}{C} \right) \quad (5.9a)$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial v_0} = \frac{\mathcal{L}_{11_1} T}{2n} - \mathcal{L}_{12_1} \quad (5.9b)$$

De maneira análoga, se tem que a diferencial primeira da funcional  $Z_2$  é:

$$\begin{aligned} \delta Z_2 = & \delta \lambda_0 \left\{ -\mathcal{L}_{21_1} + \frac{f_0 T}{2n} \left( \mathcal{L}_{21_1} R - \frac{\mathcal{L}_{22_1}}{C} \right) \right\} + \delta v_0 \left( \frac{\mathcal{L}_{21_1} T}{2n} - \mathcal{L}_{22_1} \right) + \\ & + \sum_{p=1}^n \delta \lambda_p \left\{ \left( 1 + \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{21_p} - \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{22_p} - \right. \\ & \left. - \left( 1 - \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{21_{p+1}} - \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{22_{p+1}} \right\} + \\ & + \delta v_p \left\{ \frac{T}{2n} \mathcal{L}_{21_p} + \mathcal{L}_{22_p} + \mu_{2_p} + \frac{T}{2n} \mathcal{L}_{21_{p+1}} - \mathcal{L}_{22_{p+1}} \right\} \end{aligned}$$

onde  $f_p = \frac{di}{d\lambda}_p$ , como antes,  $\mu_{2_p} = 1$  para  $p = j, k$  e  $\mu_{2_p} = 0$ , para outros valores de  $p$ .

Os multiplicadores de Lagrange,  $\mathcal{L}_{21_p}$  e  $\mathcal{L}_{22_p}$ , são determinados resolvendo-se as equações:

$$\left( 1 + \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{21_p} - \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{22_p} = \left( 1 - \frac{R f_p T}{2n} \right) \mathcal{L}_{21_{p+1}} + \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{22_{p+1}} \quad (5.10a)$$

$$\frac{T}{2n} \mathcal{L}_{21_p} + \mathcal{L}_{22_p} = -\mu_{2_p} - \frac{T}{2n} \mathcal{L}_{21_{p+1}} + \mathcal{L}_{22_{p+1}} \quad (5.10b)$$

retroativamente no tempo, para  $p = s, s-1, \dots, 1$ ; sendo  $s = \max(l, m)$ , pois  $\mathcal{L}_{21_p}$  e  $\mathcal{L}_{22_p}$  são nulos para  $p = s+1, s+2, \dots, n$ .

Por fim, se obtém a diferencial primeira de  $Z_2$ :

$$\delta Z_2 = \frac{\partial Z_2}{\partial \lambda_0} \delta \lambda_0 + \frac{\partial Z_2}{\partial v_0} \delta v_0$$

onde

$$\frac{\partial Z_2}{\partial \lambda_0} = -\mathcal{L}_{21_1} + \frac{f_0 T}{2n} \left( R \mathcal{L}_{21_1} - \frac{\mathcal{L}_{22_1}}{C} \right) \quad (5.11a)$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial v_0} = \frac{\mathcal{L}_{21_1} T}{2n} - \mathcal{L}_{22_1} \quad (5.11b)$$

As derivadas expressas pelas eqs. (5.9) e (5.11) formam respectivamente a primeira e a segunda linha do jacobiano

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial [Z_1, Z_2]}{\partial [\lambda_0, v_0]}$$

O estado inicial para o qual  $Z_1 = Z_2 = 0$  é determinado por um esquema iterativo de Newton-Raphson. As iterações são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ v_0 \end{bmatrix}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ v_0 \end{bmatrix}^{(i)} - \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^{(i)} \right]^{-1} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}^{(i)}$$

As iterações convergem para um estado periódico, isto é, um estado inicial a partir do qual, a resposta transitória gerada do modo que é descrito na seção 5.1, coincide com a resposta de regime permanente do circuito.

### 5.3 A característica de ferroressonância de frequência fundamental

Uma vez que as equações que governam o circuito são não-lineares, pode existir uma única solução, ou podem existir soluções múltiplas, dependendo da amplitude  $E$  da tensão de excitação. Há boa chance da solução ser única para baixas amplitudes, porque o circuito opera na região linear. Conhecendo-se uma solução de regime permanente e a amplitude de tensão

de excitação correspondente, um procedimento de continuação pode ser empregado para determinarem-se outras soluções.

Considere-se a solução de regime permanente correspondente a uma amplitude  $\hat{E}$ , representada pelo estado inicial  $(\hat{v}_0, \hat{\lambda}_0)$ . Seja  $\hat{\Lambda} = \max(\hat{\lambda})$ , o valor de pico positivo de  $\hat{\lambda}$ . O procedimento de continuação compreende a procura por uma nova solução  $(v_0, \lambda_0)$  e a amplitude desconhecida  $E$  da excitação, tal que um novo valor de pico  $\Lambda = \max(\lambda)$  do fluxo concatenado é dado por:

$$\Lambda = \hat{\Lambda} + \delta\hat{\Lambda} = \Lambda^* \quad (5.12)$$

onde  $\Lambda^*$  é especificado. A busca parte das condições iniciais  $(\hat{v}_0, \hat{\lambda}_0)$  e amplitude  $\hat{E}$ , já conhecidas no passo anterior.

O procedimento de continuação é por conseguinte, a determinação de uma nova solução com um valor especificado de pico do fluxo,  $\Lambda^*$ , conhecendo-se a solução correspondente ao valor de pico  $(\hat{\Lambda} - \delta\hat{\Lambda})$ .

Os procedimentos de cálculo descritos a seguir levam à determinação das soluções de regime permanente simétricas do circuito não-linear, como uma função da amplitude da fonte de tensão. Os resultados da análise são usualmente apresentados como uma curva relacionando o pico da onda de fluxo concatenado com a amplitude da fonte de tensão. Cada ponto dessa curva, conhecida como *característica de ferroressonância*, representa uma solução de regime permanente.

### 5.3.1 Determinação pelo método do gradiente

Para se levar a efeito procedimento de continuação pelo método do gradiente, se define uma nova funcional objetivo da seguinte maneira:

$$\hat{\zeta} = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3^2 \quad (5.13)$$

onde



$$\varepsilon_1 = \max(\lambda) + \min(\lambda)$$

$$\varepsilon_2 = \max(\nu) + \min(\nu)$$

$$\varepsilon_3 = \max(\lambda) - \Lambda^*$$

A nova solução é obtida minimizando-se  $\hat{\zeta}$ , sujeita as restrições dadas pelas equações (5.2a) e (5.2b).

Pode-se mostrar que o gradiente da nova funcional erro  $\hat{\zeta}$  é dada por:

$$[\nabla \hat{\zeta}] = \left[ \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \lambda_0} \quad \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \nu_0} \quad \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial E} \right]^T$$

onde

$$\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \lambda_0} = -\mathcal{L}_{1_1} + \frac{f_0 T}{2n} \left( R \mathcal{L}_{1_1} - \frac{\mathcal{L}_{2_1}}{C} \right) \quad (5.14a)$$

$$\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \nu_0} = \frac{\mathcal{L}_{1_1} T}{2n} - \mathcal{L}_{2_1} \quad (5.14b)$$

$$\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial E} = \frac{\mathcal{L}_{1_1} \cos \phi}{\omega} + \frac{1}{\omega} \sum_{p=1}^n (-\mathcal{L}_{1_p} + \mathcal{L}_{1_{p+1}}) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n} p - \phi\right) \quad (5.14c)$$

Neste caso, os multiplicadores de Lagrange,  $\mathcal{L}_{1_p}$  e  $\mathcal{L}_{2_p}$  que aparecem nas eqs. (5.14) são as soluções de

$$\left(1 + \frac{R f_p T}{2n}\right) \mathcal{L}_{1_p} - \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{2_p} = -\varepsilon_1 \mu_{1_p} - \varepsilon_3 \mu_{3_p} + \left(1 - \frac{R f_p T}{2n}\right) \mathcal{L}_{1_{p+1}} + \frac{f_p T}{2n C} \mathcal{L}_{2_{p+1}} \quad (5.15a)$$

$$\frac{T}{2n} \mathcal{L}_{1_p} + \mathcal{L}_{2_p} = -\mu_{2_p} - \frac{T}{2n} \mathcal{L}_{1_{p+1}} + \mathcal{L}_{2_{p+1}} \quad (5.15b)$$

onde  $\mu_{3_p} = 1$  para  $p = j$  e  $\mu_{3_p} = 0$  caso contrário.

Um procedimento de otimização suprido com a informação do gradiente fornecerá a nova solução  $(\nu_0, \lambda_0)$  e a amplitude  $E$  da excitação necessária para se obter o valor de pico especificado  $\Lambda^*$  do fluxo concatenado. As soluções de frequência fundamental são obtidas

aumentando-se progressivamente  $\Lambda^*$ . Em cada passo, o procedimento que determina a solução, usa a solução obtida no passo anterior como estimativa inicial.

O algoritmo que é finalmente sugerido para determinar a curva de ferroressonância é o seguinte:

1. Obter a solução do circuito<sup>1</sup> para um valor baixo de amplitude,  $\hat{E}_0$ , da tensão de excitação. Seja  $\hat{\Lambda}$  o valor de pico do fluxo correspondente a essa solução.
2. Determinar uma nova solução, na vizinhança da solução conhecida anteriormente, cujo pico de fluxo  $\Lambda = (\hat{\Lambda} + \delta\hat{\Lambda})$  seja especificado. Este passo compreende o seguinte:
  - (a) Gerar uma resposta transitória ao longo de um período completo para uma tensão de excitação  $E_0$ , e condições iniciais  $\lambda_0, v_0$ . Durante o cálculo do transitório,
    - (i) calcular e armazenar  $f_i = \partial i / \partial \lambda$  em cada passo de tempo;
    - (ii) monitorar as formas de onda de  $v$  e  $\lambda$  e armazenar os valores máximo e mínimo dessas variáveis e os passos de tempo que eles ocorrem, isto é,  $j\Delta t, k\Delta t, l\Delta t$  e  $m\Delta t$ .
  - (b) Depois de determinar a resposta transitória,
    - (i) calcular a funcional erro  $\hat{\zeta}$  e seu gradiente,
    - (ii) passar os valores calculados da funcional erro e seu gradiente para uma rotina de otimização, tal como a rotina de Polak-Ribiere (PRESS et al, 1986), a fim de alterar convenientemente os parâmetros  $\lambda_0, v_0, E_0$ .
  - (c) Repetir (2a), (2b) até que  $\hat{\zeta}$  seja menor que uma tolerância especificada.

### 5.3.2 Determinação pelo método de Newton-Raphson

Um modo alternativo de se levar a efeito o o procedimento de continuação é descrito a seguir. Deseja-se agora encontrar um novo estado inicial  $(\lambda_0, v_0)$  e uma nova excitação  $(E, \phi)$ , tais que:

---

<sup>1</sup>Uma solução do circuito é definida pelo fluxo inicial no indutor,  $\hat{\lambda}_0$ , e a tensão inicial do capacitor,  $\hat{v}_0$ .

$$\zeta_1(\lambda_0, \nu_0, E, \phi) = \max(\lambda) + \min(\lambda) = 0$$

$$\zeta_2(\lambda_0, \nu_0, E, \phi) = \max(\nu) + \min(\nu) = 0$$

$$\zeta_3(\lambda_0, \nu_0, E, \phi) = \max(\lambda) - \Lambda^* = 0$$

Exatamente da maneira que foi descrita na seção 5.2.2, se formam as funcionais aumentadas  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  e determina-se a matriz jacobiano

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial [Z_1 \ Z_2 \ Z_3]}{\partial [\lambda_0 \ \nu_0 \ E \ \phi]}$$

Tomando-se a última solução encontrada,  $[\hat{\lambda}_0 \ \hat{\nu}_0 \ \hat{E} \ \hat{\phi}]^T$ , como estimativa inicial, emprega-se o esquema de Newton-Raphson para encontrar uma nova solução  $[\lambda_0 \ \nu_0 \ E \ \phi]^T$ , na vizinhança da solução anterior, para a qual  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ . As iterações são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \nu_0 \\ E \\ \phi \end{bmatrix}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \nu_0 \\ E \\ \phi \end{bmatrix}^{(i)} - \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

onde,

$$\left[ \left( \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{(i)} \right] \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}^{(i)} \quad (5.17)$$

As correções  $\Delta_i$  devem ser determinadas a partir da eq. (5.17) e substituídas na eq. (5.16) para se obterem valores atualizados de  $[\lambda_0 \ \nu_0 \ E \ \phi]^T$ . Porém, as eqs. (5.16) são um conjunto de 3 equações a 4 incógnitas e portanto, admite uma infinidade de soluções<sup>2</sup>. Dentre essas, é recomendável se escolher aquela mais próxima da solução anterior, o que pode ser feito impondo-se a condição de que  $\sum_{i=1}^4 \Delta_i^2$  seja mínimo.

Do que se apresentou até aqui surge o seguinte algoritmo para determinação da característica de ferroressonância:

<sup>2</sup> Esse é um problema semelhante àquele que é tratado por Scheid (1991).

1. Obter uma solução  $(\hat{\lambda}_0, \hat{v}_0, \hat{E}_0, \hat{\phi})$  para uma amplitude baixa da fonte de excitação  $(\hat{E}_0 \sin(\omega t - \hat{\phi}))$ . Seja  $\hat{\Lambda}$  o pico do fluxo concatenado correspondente a essa solução.
2. Determinar uma nova solução na vizinhança da solução conhecida, para qual o pico de fluxo concatenado seja  $\Lambda = \hat{\Lambda} + \delta\hat{\Lambda}$ . Este passo compreende o seguinte:
  - (a) Gerar a resposta transitória durante um período completo da excitação com condições iniciais  $\hat{\lambda}_0, \hat{v}_0$ . Durante o cálculo do transitório:
    - (i) Calcular e guardar  $f_p = \frac{di}{d\lambda}$  em cada passo de tempo
    - (ii) Monitorar as formas de onda de  $\lambda$  e  $v$ ; guardar os valores finais  $\lambda_n$  e  $v_n$ .
    - (iii) Identificar e guardar os valores de pico  $\Lambda = \max(\lambda)$  e  $V = \max(v)$  e os passos de tempo em que eles ocorrem.
  - (b) (i) Calcular o vetor de discrepância  $\epsilon = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3]^T$  e o jacobiano  $\left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}}$
  - (ii) Usar o procedimento de Newton-Raphson para alterar  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\lambda}_0 \ \hat{v}_0 \ \hat{E}_0 \ \hat{\phi}]^T$
  - (c) Repetir os passos (2a) e (2b) até que  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  sejam menores que uma tolerância especificada.

#### 5.4 Resultados e discussão

A característica de ferroressonância do circuito da fig. 5.1 foi obtida usando-se a técnicas descritas na seção precedente. O circuito é o equivalente de um transformador de potencial indutivo desconectado da barra de alta tensão. A capacitância série representa a capacitância do disjuntor aberto. Os parâmetros usados nos cálculos foram:

$$\phi = 0, \quad R = 32 \text{ k}\Omega, \quad C = 400 \text{ pF},$$

$$i = a\lambda + b\lambda^9, \quad a = 10^{-8}, \quad b = 1.8385 \cdot 10^{-36},$$

que são iguais aos de um circuito similar, que é apresentado por KIENY et al (1991).

A fig. 5.2 mostra a curva de ferroressonância fundamental e ela concorda bem com os resultados de KIENY et al (1991), que emprega uma metodologia computacional completamente diferente. Os pontos da curva de ferroressonância que são indicados na fig. 5.2 como ●, são conhecidos como *pontos críticos*. Neles a direção da curva muda com referência ao eixo das abscissas.

Para amplitudes da tensão de excitação entre 40 kV e 2385 kV, o circuito ferroressonante estudado apresenta três soluções de regime permanente. Essas soluções são tipicamente representadas na fig. 5.2 pelos símbolos ①, ② e ③. O segmento da característica de ferroressonância compreendido entre os dois pontos críticos representam soluções de regime permanente que são instáveis. As figs. 5.3 e 5.4 mostram as formas de onda da tensão do indutor e da corrente de magnetização correspondentes às soluções estáveis (pontos ①, e ③) e à solução instável (ponto ②) respectivamente. Para ambas as figuras, a amplitude da tensão de excitação é de 1000 kV. Uma mudança de fase de aproximadamente  $180^\circ$  pode ser observada entre as formas de onda das soluções estáveis (fig. 5.3).

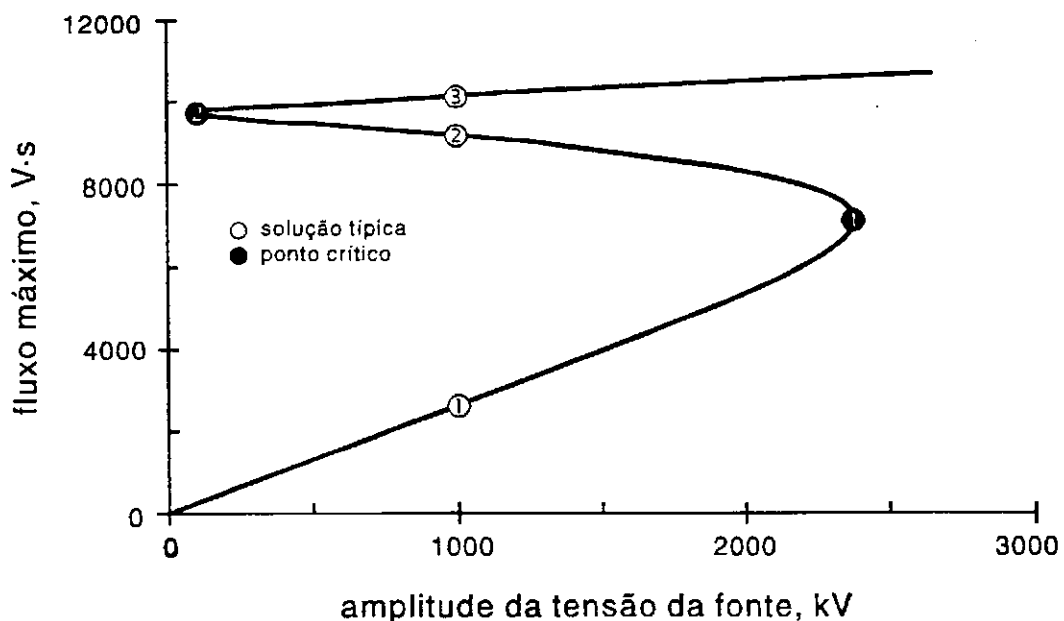
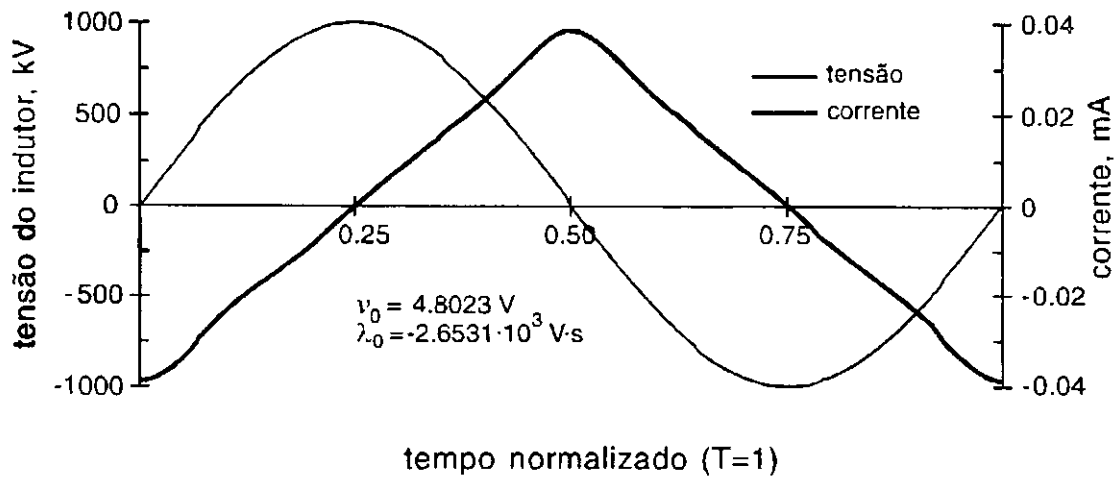
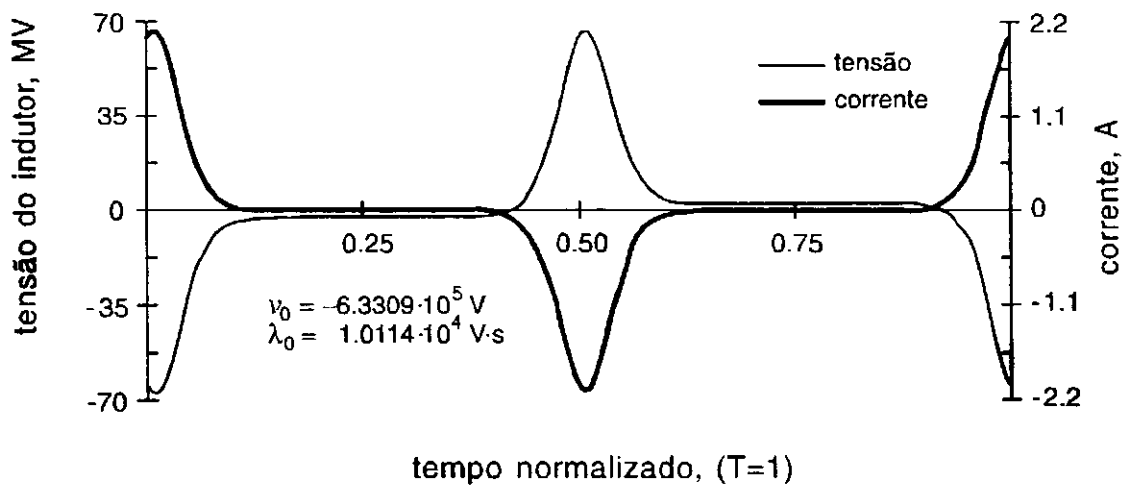


Fig. 5.2 Característica de ferroressonância fundamental do circuito da fig. 5.1. ( $C = 400 \text{ pF}$ ,  $R = 32 \text{ k}\Omega$ ).



(a)



(b)

Fig. 5.3 Soluções estáveis do circuito da fig. 5.1 para uma tensão de excitação de 1000 kV; (a) com baixo nível de saturação (ponto ① da fig. 5.2); (b) com alto nível de saturação (ponto ③ da fig. 5.2).

A figura 5.5 mostra a característica de ferroressonância obtida para diferentes valores da capacitância, mantendo-se os outros parâmetros fixos. Pode-se ver que a região de instabilidade das soluções periódicas diminui com a capacitância e que a amplitude da tensão de excitação correspondente ao ponto crítico ② é pouco sensível à variação da capacitância. Ferroressonância é observada somente para capacitâncias na faixa  $0.01 \text{ pF} < C < 400 \text{ nF}$ . Na segunda série de experimentos numéricos, a capacitância  $C$  foi fixada em  $400 \text{ pF}$ . A fig. 5.6 mostra as características de ferroressonância para valores crescentes da resistência. A característica de ferroressonância é quase insensível a resistência e somente para um valor de  $320 \text{ M}\Omega$  é que o fenômeno não foi observado.

Do modo como foram definidas as funcionais erros até agora (pelo critério dos limites), somente são encontradas as respostas de regime permanente com formas de onda simétricas. Contudo, é possível que a resposta de regime permanente de circuitos não-lineares, mesmo bilaterais, venha a apresentar formas de onda assimétricas (CHUA et al, 1992). Uma funcional erro capaz de revelar a existência de soluções de regime permanente assimétricas deve ser estabelecida com base no critério dos extremos (ver seção 4.3). Esta nova funcional se definiria ainda pela eq. 5.13, onde

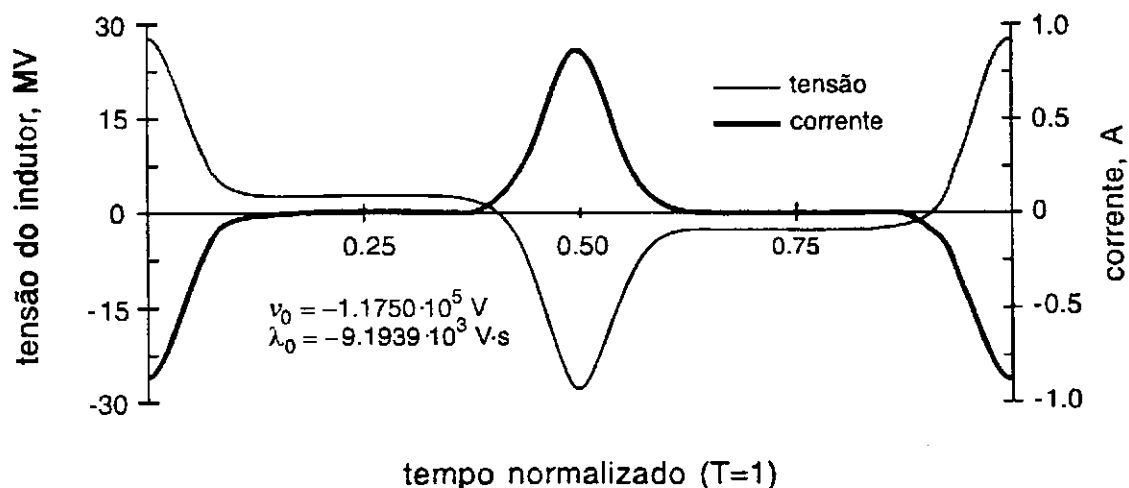
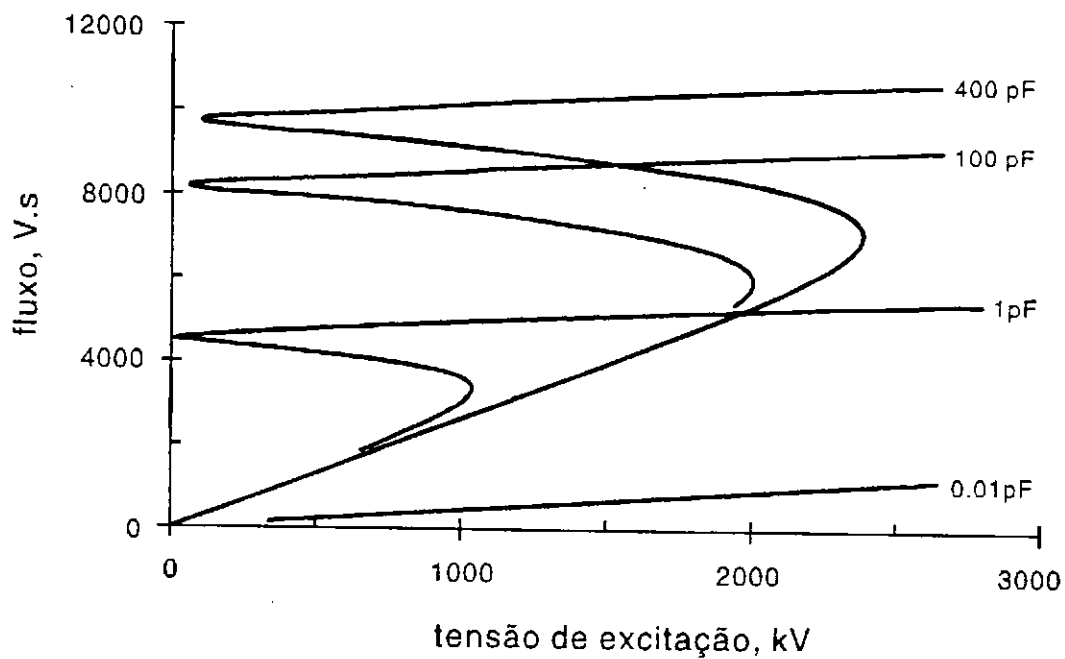
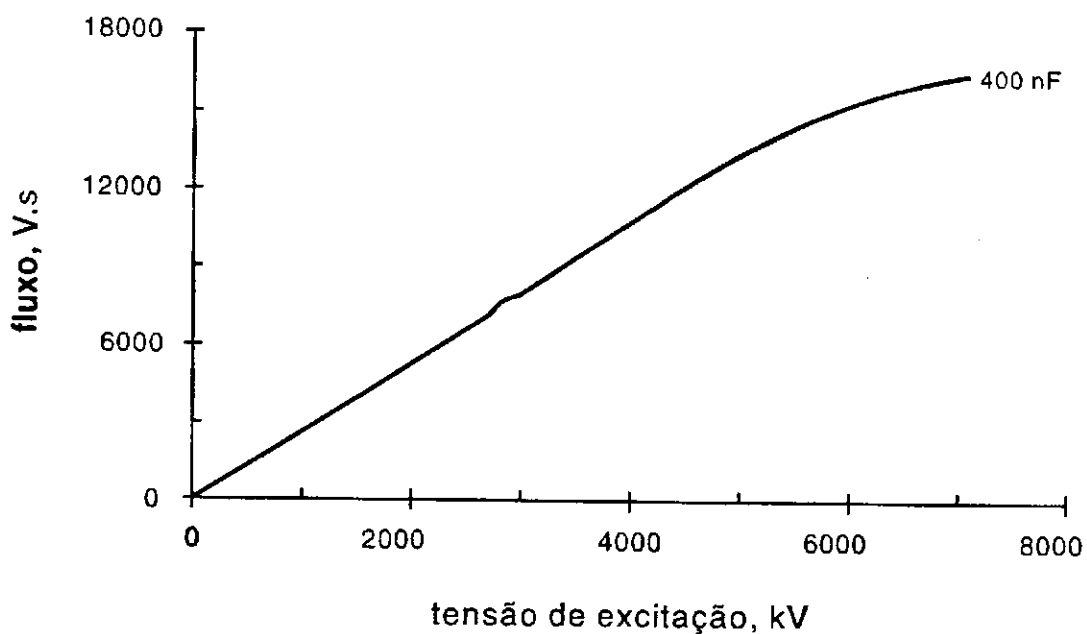


Fig. 5.4 Solução instável do circuito da fig. 5.1 para uma tensão de excitação de  $1000 \text{ kV}$  (ponto ② da fig. 5.2).



(a)



(b)

Fig. 5.5 Dependência da característica de ferroressonância fundamental com relação à capacitância do circuito ( $R = 32k\Omega$ ); (a) características para  $C \leq 400$  pF; (b) característica para  $C = 400$  nF.



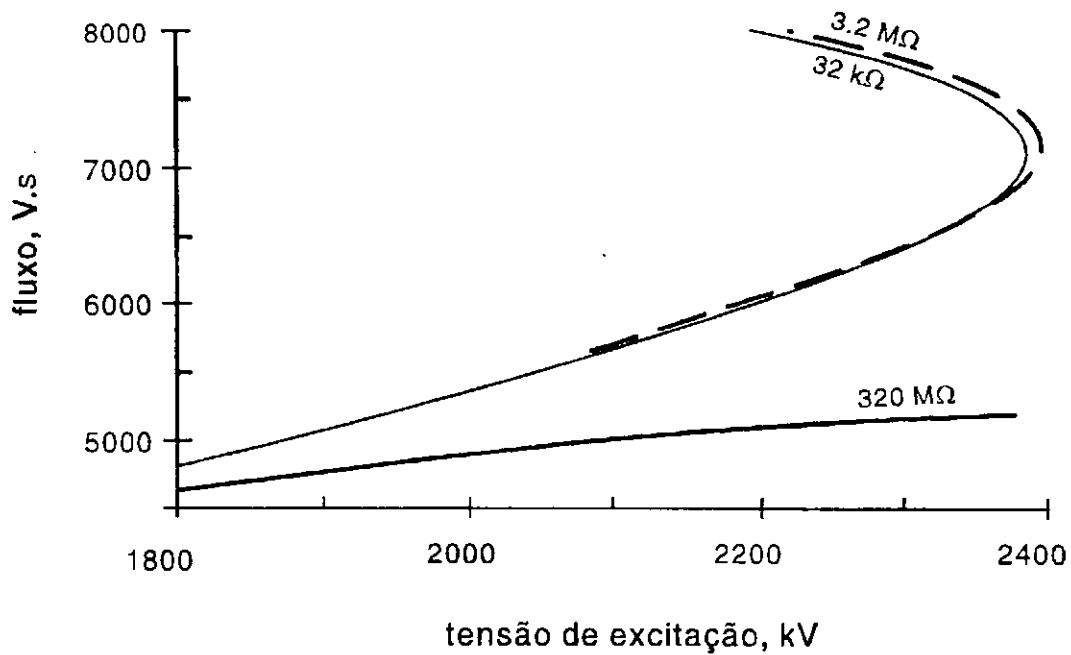


Fig. 5.6 Dependência da característica de ferroressonância fundamental com relação à resistência série ( $C = 400 \text{ pF}$ ).

$$\varepsilon_3 = \max(\lambda) - \Lambda^*$$

com antes, mas com as discrepâncias de fluxo e tensão redefinidos como:

$$\varepsilon_1 = \lambda_n - \lambda_0$$

$$\varepsilon_2 = v_n - v_0$$

A análise de ferroressonância do circuito da fig. 5.1 foi repetida mudando-se o critério de definição da resposta de regime permanente. Não foram observadas soluções de regime permanente assimétricas. As características de ferroressonância foram determinadas pela minimização da funcional  $\hat{\zeta}$ , definida por um e outro critério de regime permanente, e os resultados foram idênticos. Além disso, a análise foi feita usando as técnicas do gradiente e de Newton-Raphson, descritas respectivamente nas seções 5.3.1 e 5.3.2. Outra vez não se encontrou diferenças significativas nos resultados. O que se observou realmente de diferente foi o tempo exigido por cada método. Para se ter uma idéia dessa diferença, na fig. 5.7 se compara o número de iterações requerido por cada um dos métodos para se chegar a alguns pontos da curva de ferroressonância.

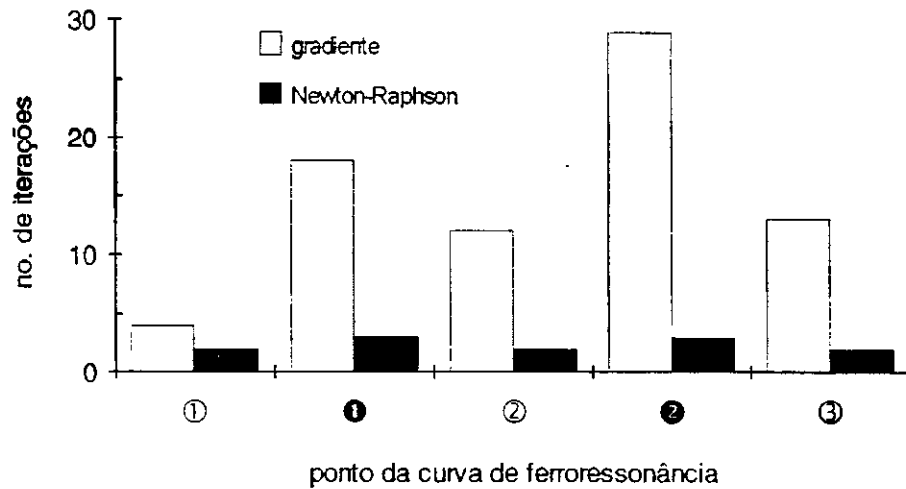


Fig. 5.7 Número de iterações para se obterem os pontos indicados da curva de ferroressonância da fig. 5.2.

Observou-se que bem próximo dos pontos críticos o processo encontra alguma dificuldade de convergência com o método do gradiente. Com o método de Newton-Raphson se tem um indicador de proximidade dos pontos críticos. Nesses pontos, a parte do jacobiano do vetor de discrepância correspondente as variáveis de estado (isto é  $\partial[Z_1, Z_2]^T / \partial[\lambda_0, \nu_0]$ ), torna-se singular, e portanto, ao atravessá-los o determinante dessa matriz muda de sinal.

## Capítulo VI

### CONCLUSÃO

Os métodos para a análise de circuitos não-lineares em regime permanente são de dois tipos, conforme o domínio em que as soluções são obtidas: *métodos no domínio da frequência e métodos no domínio do tempo*.

Os métodos no domínio da frequência fornecem diretamente uma resposta de regime permanente aproximada. Dois deles foram abordados no capítulo II: o método do balanço de harmônico e o método de Galerkin; justamente os de uso mais freqüente.

Os métodos no domínio da frequência reúnem uma gama de desvantagens, a começar pelo esforço computacional exigido. Para se ter uma idéia, suponha-se que apenas a componente de frequência fundamental mais dois harmônicos sejam dominantes. Isso dá seis incógnitas (amplitude e fase de cada harmônico) para cada variável de estado. Se o número de variáveis de estado é cinco, a ordem do sistema de equações a ser resolvido é trinta. Porém mais sério, é o fato do método exigir que sejam pressupostos quais harmônicos são determinantes. Essa solução presumida pode ser instável ou harmônicos importantes podem ter sido desprezados.

Os métodos no domínio do tempo são em princípio dois: o *método da linearização por partes* e o *método da integração explícita*. Naturalmente, eles fornecem a resposta

completa (transitória mais periódica) do circuito. Algum procedimento adicional é necessário para evitar a componente transitória. O usual é tratar a determinação da resposta de regime permanente de um circuito não-linear como um problema de valores de contorno em dois pontos e procurar resolvê-lo empregando-se um método de tentativas e erros ou um método de otimização.

Aprille e Trick enfrentaram o problema da determinação da resposta periódica de um circuito não-linear como um problema de valores de contorno em dois pontos, empregando um esquema de Newton-Raphson. A dificuldade nesse método é calcular a matriz  $\hat{\partial}\varepsilon/\hat{\partial}\mathbf{x}_0$  onde  $\varepsilon = \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_0$  é o vetor de discrepância entre o vetor de estado inicial e o vetor de estado após um período completo. Esse cálculo requer a integração num período completo do sistema de equações diferenciais originais para determinar  $\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ . Além do mais, várias integrações de período completo das equações variacionais correspondentes são necessárias para se calcular  $\hat{\partial}\varepsilon/\hat{\partial}\mathbf{x}_0$ , apesar de que essas integrações possam ser efetuadas simultaneamente com as integrações principais.

Uma vez que o processo iterativo de Newton-Raphson tenha se iniciado satisfatoriamente, o método de Aprille-Trick converge rapidamente; mas a região de convergência é algumas vezes restrita, e o esforço computacional por iteração pode ser alto para grandes problemas.

O método do gradiente é fortemente dependente da técnica de otimização empregada para minimizar a funcional objetivo. É de convergência mais lenta que o método baseado no algoritmo de Newton-Raphson, embora algumas vezes convirja numa região consideravelmente mais ampla. Nesse método, um algoritmo de otimização é usado para minimizar o quadrado do módulo do vetor de discrepância  $P(\mathbf{x}_0) = [\varepsilon(\mathbf{x}_0)]^T \cdot \varepsilon(\mathbf{x}_0)$ . O cálculo do gradiente dessa função escalar de  $\mathbf{x}_0$  requer a integração progressiva num período completo, das equações diferenciais originais, do mesmo modo que no método de Aprille e Trick, mas somente uma integração regressiva das equações variacionais adjuntas, usando  $\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  como condições iniciais. O vetor gradiente é duas vezes o vetor de discrepância adjunto.

O método da otimização restrita desenvolvido neste trabalho é uma formulação alternativa do método do gradiente, muito mais compreensivo e mais eficiente, e que comprovadamente, é extensível à determinação do jacobiano do vetor de discrepância. Outra vantagem da nova formulação é o fato dela se adaptar ao critério dos limites tão bem quanto ao critério dos extremos. Embora restrito, o critério dos limites é muito eficiente quando são esperadas soluções simétricas, pois melhora a resolução e reduz o esforço computacional.

Para levantamento da característica de ferroressonância, o método da otimização restrita conjugou-se com um procedimento de continuação. O processo parte de uma solução de regime permanente em condições de não-saturação (cuja determinação é muito fácil) e prossegue, buscando uma nova solução em que o fluxo máximo tenha sido especificado. Em cada passo, a solução do passo imediatamente anterior é tomada como estimativa inicial.

O método de Newton-Raphson quando converge, faz em poucas iterações. Contudo exige um esforço computacional por iteração muito alto. Isso o desfavorece em comparação com o método do gradiente, quando aplicado a problemas em que as variáveis de estado são muitas. Por exemplo, se há 15 condições iniciais, a matriz jacobiano tem dimensão  $16 \times 17$ , e 16 equações lineares simultâneas devem ser resolvidas repetidamente, no processo iterativo de Newton-Raphson, o que tem repercussão marcante no tempo de processamento. Nestas circunstâncias, o método do gradiente deverá ter melhor desempenho.

Ao se conseguir uma formulação única, que atenda tanto ao método do gradiente, quanto ao de Newton-Raphson, viabilizou-se a criação de um programa de computador híbrido que dá ao usuário maior autonomia.

Este trabalho se configura como um trabalho de base, com possibilidades de aplicações diversas. Para efeito de sua continuação, algumas sugestões se apresentam:

- Implementação e validação de um procedimento para determinação dos ramos de bifurcação da característica de ferroressonância.
- Adaptação da rotina computacional desenvolvida para aplicação a sistemas elétricos trifásicos de porte, empregando-se técnicas de preservação e exploração de esparsidade.

- Realização de estudos de ferroressonância utilizando modelo realista do núcleo ferromagnético, que leve em conta histerese e correntes parasitas. Isso poderá ser feito sem nenhum obstáculo, pois o método da otimização restrita é absolutamente geral e não faz restrição ao modelo de não-linearidade adotado.

## REFERÊNCIAS

- AGGARWAL R.P., SOXENA N.S., SHARMA B.S., KUMAR S., KRISHNAN S. Failure of electromagnetic voltage transformer due to sustained overvoltage on switching - an indepth field investigation and analytical study. *IEEE Trans. on Power Apparatus on Systems*, v. PAS-100, n. 11, p. 4448-4455, 1981.
- APRILLE Jr., T.J., TRICK T.N. Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs. *IEE Proc.*, v. 60, p. 108-114, 1972.
- \_\_\_\_\_ A computer algorithm to determine the steady-state response of non-linear oscillators. *IEEE Trans. on Circuits Theory*, v. CT-19, n. 4, jul. 1972.
- ARTURI C. M. Transient simulation and analysis of a five-limb step-up transformer following an out-of-phase synchronization. *IEEE Trans. Power Delivery*, v. 6, n. 1, p. 196-207, jan. 1991.
- BESSONOV, L. *Applied electricity for engineers*. 2.ed. Moscou: MIR Publishers, 1973.
- BETHENOD, J. Sur le transformateur et résonance. *L'Eclairae Electrique*, p. 289-296, nov. 1907. *Apud* MORK B.A., STUEHM D.L. Application of nonlinear dynamics and chaos to ferroresonance in distribution systems. *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 9, n. 2, p. 1009-1017, abr. 1994.

- BORNARD, P., BILLON, V.C., KIENY, C. Protection of EHV Power systems against ferroresonance. CIGRÉ 1990 seccion, ago./set., paper 34-103.
- BOUCHEROT P. Existence de deux régimes en ferorésónance. R.G.E., p. 827-828, dez. 1920. *Apud* MORK, B.A., STUEHM, D.L. Application of nonlinear dynamics and chaos to ferroresonance in distribution systems. IEEE Trans. on Power Delivery, v. 9, n. 2, p. 1009-1017, abr. 1994.
- BOYCE, W.E., Diprima, R.C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno, 3.ed., New York: John Willey, 1977.
- CHUA, L.O., LIN, P.M. Computer-aided analysis of electronic circuits: algorithms and computational techniques. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975.
- \_\_\_\_\_ HASLER, M., NEIRYNCK, J., VERBURGH, P. Dynamics of a piecewise-linear resonant circuit. IEEE Trans. on Circuits and Systems, v. CAS-29, n. 8, p. 535-546, ago. 1992.
- CLINE, A.K. Scalar- and planar-valued curve fitting using splines under tension. Comm. of The ACM, v. 17, n. 4, p. 218-220, 1974.
- \_\_\_\_\_ Algorithm 476; six subprograms for curve fitting using splines under tension. Comm. of The ACM, v. 17, n. 4, pp. 220-223, 1974.
- COLON F.R., TRICK T.N. Fast periodic steady-state analysis for large-signals electronic circuits. IEEE Journal Solid-State Circuits, v. SC-8, p. 260-269, ago. 1973.
- CRANN, L.B., FLICKINGER, R.B. Overvoltages on 14.4/24.9-kV rural distribution systems. Trans. of The AIEE, v. 73, p. 1208-1212, out. 1954.
- DOLAN, E.J., GILLIES, D.A., KIMBARK, E.W. Ferroresonance in a transformer switched with on EHV line. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, v. PAS-91, p. 1273-1280, 1972.
- DOMMEL, H.W., YAN, A., WEI, S. Harmonics from transformer saturation. IEEE Trans. on Power Systems, v. PWRD-1, n. 2, p. 209-215, 1986.
- FELDMAN, J.M., CAPPABIANCA, A.L. On the accuracy and utility of piecewise-linear models of ferroresonance. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, v. PAS-97, n. 2, p. 209-215, mar./abr. 1978.



- GERALD C.F. Applied numerical analysis. 2.ed. Reading: Addison-Wesley Publishing, 1978.
- GERMAY N., MASTERO S., VROMAN J. Review of ferroresonance phenomena in high-voltage power system and presentation of a voltage transformer model for predetermining them. CIGRÉ, 1974, paper 33-18.
- GERMOND A.J. Computation of ferroresonant overvoltages in actual power systems by Galerkin's method. In: IEEE Pica Conference 1975, New Orleans, jun. 1975.
- GLAZIER J.A, LIBCHABER A. Quasi-periodicity and dynamical systems: an experimentalist's view. IEEE Trans. on Circuits and Systems, v. 35, n. 7, p. 790-809, jul. 1988.
- GÖNEN, T. Electric power distribution system engineering. New York: McGraw-Hill Book Company, 1986.
- GOTTFRIED, B.S., WEISMAN, J. Introduction to optimization theory. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973.
- HAYASHI, C. Non-linear oscillations in physical systems. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964.
- HENDRICKSON, P.E., JOHNSON, I.B., SCHULTZ, N.R. Abnormal voltage conditions produced by open conductors on three-phase circuits using shunt capacitors. Trans. of The AIEE, v. 72, pt. III, p. 1183-1188, 1953.
- HOPKINSON R.H. Ferroresonant during single-phase switching of 3-phase distribution transformer banks. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, v. PAS-84, n. 4, p. 289-293, abr. 1965.
- \_\_\_\_\_ Ferroresonant overvoltage control based on TNA tests on three-phase delta-wye transformer banks. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, v. PAS-86, n. 10, p. 1258-1261, out. 1967.
- \_\_\_\_\_ Ferroresonant overvoltage control based on TNA tests on three-phase wye-delta transformer banks. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, v. PAS-87, n. 2, p. 352-361, fev. 1968.

- JASSENS, N., EVEN, E., DONOEL, H., MONFILS, P.A., Determination of the risk of ferroresonance in high voltage networks: experimental verification on a 245 kV voltage transformer, Sixth International Symposium on High Voltage Engineering, New Orleans: 28 ago.-1 set.
- KIENY, C. Application of the bifurcation theory in studying and understanding the global behavior of a ferroresonant electric power circuit. *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 6, n. 2, p. 866-872, 1991.
- \_\_\_\_\_ Le ROY, G., SBAI, A. Ferroresonance study using Galerkin method with pseudo-arclength continuation method. *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 6, n. 4, p. 1841-1847, 1991.
- KUNDERT K.S., SORKIN G.B., SANGIOVANNI-VINCENTELLI A. Applying harmonic balance to almost-periodic circuits. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, v. MTT-36, n. 2, fev. 1988.
- MAIRS D.D., STUEHM D.L., MORK B.A. Overvoltages on five-legged core transformers in rural electric systems. *IEEE Trans. on Industrial Applications*, v. 25, n. 2, p. 366-370, mar. 1989.
- MARTI J.R., SOUDACK, A.C. Ferroresonance in power systems: fundamental solutions. *IEE Proc.-C*, vol. 138, no. 4, pp. 321-329, 1991.
- MORK B.A. Ferroresonant modeling using the Electromagnetic Transients Program. Dissertação (Mestrado). North Dakota State University, 1981.
- \_\_\_\_\_ Ferroresonance and chaos - observation and simulation of ferroresonance in a five-legged core distribution transformer. Dissertação (Doutorado). North Dakota State University, May 1992.
- \_\_\_\_\_ STUEHM D.L. Application of nonlinear dynamics and chaos to ferroresonance in distribution systems. *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 9, n. 2, p. 1009-1017, abr. 1994.
- NAIDU, S.R. Time domain model for the ferromagnetic core, including the effects of hysteresis and eddy-currents. *IEE Proc.-A*, v. 138, n. 1, p. 44-50, 1991.

- \_\_\_\_\_ SOUZA B.A. Resposta de regime permanente do núcleo ferromagnético com excitação senoidal. In: IX Congresso Brasileiro de Automática, 1992, Vitória.
- \_\_\_\_\_ SOUZA, B.A. Steady-state sinusoidal response of circuits with a non-linear inductive element. IEE Proc.-A, v. 140, n. 4, p. 287-293, 1993.
- \_\_\_\_\_ SOUZA, B.A. A Newton-Raphson scheme for the analysis of ferroresonant circuits. 1995 (Inédito).
- NAKHLA M.S., BRANIN Jr., F.H. Determining the periodic response of nonlinear systems by a gradient method. Circuit Theory and Applications, v. 5, p. 225-273, 1977.
- ODESSEY P.H., WEBER E. Critical conditions in ferroresonance. Trans. AIEEE, v. 57, p. 444-452, 1938.
- PARKER T.S., CHUA L.O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York: Springer-Verlag, 1989.
- PETERSON, H.A., Transients in Power Systems. New York: John Wiley, 1951.
- PRESS, W.H., FLANNERY, B.P., TEWKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T. Numerical recipes; The art of scientific computing. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 301-307, 1986.
- RUDENBERG R. Transient performance of electrical power systems. New York: McGraw-Hill Book Company, 1950.
- SCHEID F. Análise numérica. 2.ed. Lisboa: McGraw-Hill, 1991.
- SCHULTZ, R.A. Ferroresonance in distribution transformer banks on 19.8/34.5 kV systems. Spring Conference, 1964, Rocky Mountain Elec. League.
- SCHWEIKERT, D.G. An interpolation curve using a spline in tension. Journal of Mathematics and Physics, n. 45, p. 312-317, 1966.
- SEMLYEN A., ACHA A., ARRILAGA J. Harmonic Norton equivalent for the magnetising branch of a transformer. IEE Proc.-C, v. 134, n. 2, p. 162-169, 1987.
- \_\_\_\_\_ RAJAKOVIC N. Harmonic domain modeling of laminated iron core. IEEE Trans. on Power Delivery, v. 4, n. 1, p. 382-390, 1989.
- SMITH, J.M. Mathematical modelling and digital simulation for engineers. New York: John Willey, 1977.

- SMITH D.R., SWANSON S.R., BORST J.D. Overvoltages with remotely-switched cable-fed grounded wye-wye transformers. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, v. PAS-94, n. 5, p. 1843-1853, set./out. 1975.
- SOUZA, B.A., NAIDU S.R. Fundamental ferroresonance study using a gradient method. 1995. (Inédito).
- SPIEGEL, M.R.. Manual de fórmulas e tabelas matemática. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1979.
- STUEHM D.L., MORK B.A., MAIRS D.D. Five-legged core transformer equivalent circuit. IEEE Trans. on Power Delivery, v. 4, n. 3, p. 1786-1793, jul. 1989.
- VERHULST F. Nonlinear differential equations and dynamical systems. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- ZEIN D.A. On the periodic steady-state problem by the Newton method. IEEE Trans. on Circuits and Systems, v. CAS-27, n. 12, p. 1263-1268, dez. 1990.
- ZIENKIEWICZ, O.C., MORGAN, K. Weighted residual methods: use of continuous trial functions. In: \_\_\_\_\_ Finite elements and approximation. New York: John Willey & Sons, Inc., 1983.