UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

IGOR RAPHAEL SILVA DE MELO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NUMA PERSPECTIVA MOTIVACIONAL: ALGUNS MODELOS POPULACIONAIS E APLICAÇÕES

CUITÉ - PB
2018

IGOR RAPHAEL SILVA DE MELO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NUMA PERSPECTIVA MOTIVACIONAL: ALGUNS MODELOS POPULACIONAIS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande campus Cuité.

Orientadora: Dra. Célia Maria Rufino Franco.

Coorientador: Ms. Leonardo de Lira Brito.

CUITÉ – PB

2018

M528e Melo, Igor Raphael Silva de.

Ensino e aprendizagem de equações diferenciais numa perspectiva motivacional: alguns modelos populacionais e aplicações / Igor Raphael Silva de Melo. – Cuité, 2018.

84 f. : il. color.

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde, 2018.

"Orientação: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco, Prof. Me. Leonardo de Lira Brito".

Referências.

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Ensino Superior. 3. Modelagem Matemática. 4. Tecnologias Digitais. 5. Dinâmica Populacional. I. Franco, Célia Maria Rufino. II. Brito, Leonardo de Lira. III. Título.

CDU 517.91(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

IGOR RAPHAEL SILVA DE MELO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NUMA PERSPECTIVA MOTIVACIONAL: ALGUNS MODELOS POPULACIONAIS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande Campus Cuité.

Aprovada em: ___/___/_____

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª. Dra. Célia Maria Rufino Franco - UFCG
(Orientadora)

____

Prof. Ms. Leonardo Lira de Brito – UFCG
(Coorientador)

____

Prof.ª. Esp. Fabíola da Cruz Martins – UFCG
(Examinador Interno).

CUITÉ - PB

2018

A minha avó Adelieta Gonçalves de Matos Silva (in memorian), como símbolo de esforço, trabalho duro e persistência, que tanto me inspirou e me fez chegar até aqui. Essa conquista, eu dedico boa parte a senhora, esteja onde estiver!

Em especial, a minha mãe, Damiana Rizete, que trilhou comigo toda essa jornada, meu alicerce, desde os meus primeiros passos e até aqui se faz peça fundamental dessa vitória.

Por fim, a todos, família e amigos, que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

Com todo meu amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

Enfim !

Já inicio esse texto com essa expressão, pois, os passos trilhados nessa jornada para chegar até aqui, nesta seção do trabalho, não foram poucos. Quando optamos por trilhar um caminho em busca da realização de um sonho, devemos ter em mente que nem sempre a caminhada será fácil, pedras e pedras aparecerão pelo caminho, mas com foco, esforço, dedicação e persistência conseguiremos ultrapassá-las e alcançarmos o nosso destino.

Neste trajeto, aqueles que nos cercam e nos acompanham na caminhada são fundamentais para que tenhamos força, coragem e ousadia para superar os múltiplos e inesperados desafios que se apresentam. Por isso, o momento em que alcançamos nosso objetivo também é um momento para refletir e agradecer a todos os elementos que fizeram parte da nossa conquista.

Uma das melhores lições que pude abstrair nesse percurso, nessa vida acadêmica é que “um bom trabalho não é feito sozinho, ninguém cresce na vida só, a união faz a força e consequentemente essa força faz com que almeje sua meta”, por isso tenho aqui a responsabilidade de explicitar em algumas páginas o meu “obrigado”, de coração, no entanto, não posso me aprofundar, não tenho como objetivo e nem condições físicas de realizar uma tese de agradecimentos, o que não seria impossível, pois tive o prazer de desfrutar de muitas, as melhores amizades que se contempla, praticamente no campus inteiro e nessa cidade toda, que hoje se tornou meu lar, Cuité-PB.

Nesse sentido, agradeço, primeiramente, a Deus por me tornar um ser tão abençoado, por ouvir e atender de sua forma meu clamor. Por me dar o dom da vida, o desejo de sonhar, a sabedoria e discernimento e a força para tornar os meus sonhos realidade.

Agradeço primordialmente aos meus pais, Damiana Rizete e Davi Antônio por serem meus primeiros e eternos professores da vida. Aqueles que formaram o que sou hoje, aqueles que me proporcionaram sempre o melhor, além de uma ótima educação, me deram todo amor e carinho que qualquer filho poderia receber, além disso, o apoio, o cuidado, o incentivo e a força para essa conquista. Um exemplo e um guia para mim.

Aos meus irmãos, namorada, primos, tios e a grande família que mesmo de longe nunca me deixaram se sentir só.

Além de todos os professores que deixaram em mim um pedaço de suas características e ensinamentos, agradeço aos meus orientadores Prof.ª Célia Maria Rufino Franco e Profº Leonardo de Lira Brito, por aceitarem meu convite e por até se fazerem presente em minha formação de forma tão significativa.

A minha banca composta por mais uma examinadora na qual tenho uma imensa admiração, carinho e orgulho, Profº Fabíola da Cruz Martins obrigado por ser essa excelente profissional que tanto me inspira e pelas suas importantíssimas contribuições ao longo de minha jornada.

Aos meus amigos e colegas de curso meu obrigado por mostrarem a mim que a graduação em Matemática pode ser real e muita prazerosa.

Finalmente, gratidão a todos e a todas que de alguma forma me fizeram crescer e tornar esse sonho realidade.

“Não somos apenas educadores, somos também missionários. Assim, se de algum modo conseguimos ser significativos para nossos alunos, inevitavelmente nos tornaremos imortalizados em suas memórias e no rumo de suas vidas.”

(Oton Mário)

RESUMO

Tendo em vista que os estudos apontam que a metodologia predominante no contexto do ensino de Equações Diferenciais (ED) está fortemente voltada para a resolução analítica dessas equações, podendo ser, ou não, um fator suficiente para um aprendizado adequado do conteúdo, trazemos nesse trabalho uma motivação para os estudos dessa disciplina emergente no ensino superior. Esta pesquisa, em geral, pontua todos os passos de um estudo teórico, se caracterizando como uma revisão da literatura. Apesar disso, nosso intuito em permear outras pesquisas desse campo de investigação e sintetiza-las é que a partir disso possamos apresentar possibilidades de ensino para a aprendizagem de ED. Foram estudados dois modelos que descrevem a dinâmica de crescimento de tumores, descritos pela equação de Gompertz e a equação de Verhulst. E ainda, um modelo matemático que representa a ação de um determinado tratamento que tem por finalidade estabilizar o crescimento ou diminuir a substância de drogas no corpo humano. Para isso, foi utilizado parâmetros reais desse fenômeno biológico reportados na literatura e através de uma abordagem analítico-gráfica e numérica com situações-problema exploramos suas soluções com o auxílio das mídias digitais, de modo a investigar seus reflexos na motivação para aprender. Foi possível perceber uma melhor compreensão dos conceitos de ED através de uma abordagem além da algébrica, ressaltando a importância do papel das tecnologias nesse processo, pois a partir disso pudemos também desenvolver algumas atividades do processo de modelagem matemática, como resolver, analisar e validar tais modelos, sobretudo, compreende-los através de sua aplicação.

Palavras-chave: Ensino Superior. Equações Diferenciais Ordinárias. Modelagem Matemática. Tecnologias Digitais. Dinâmica Populacional.

ABSTRACT

Considering that the studies indicate that the predominant methodology in the context of the teaching of Differential Equations (DE) is strongly focused on the analytical resolution of these equations, and may or may not be a sufficient factor for an adequate learning of the content, we bring in this work a motivation for the studies of this emerging discipline in higher education. This research, in general, marks all the steps of a theoretical study, characterizing itself as a review of the literature. Nevertheless, our intention to permeate other researches of this field of investigation and to synthesize them is that from this we can present teaching possibilities for the learning of ED. Two models describing the dynamics of tumor growth, described by the Gompertz equation and the Verhulst equation, were studied. Also, a mathematical model that represents the action of a certain treatment that aims to stabilize the growth or decrease the drug substance in the human body. For this, we used real parameters of this biological phenomenon reported in the literature and through an analytical-graphical and numerical approach with problem situations we explore their solutions with the aid of digital media, in order to investigate their reflexes on the motivation to learn. It was possible to perceive a better understanding of the concepts of ED through a non-algebraic approach, emphasizing the importance of the role of the technologies in this process, because from this we could also develop some activities of the mathematical modeling process, such as solving, analyzing and validating such models, especially, understand them through their application.

Keywords: Higher education. Ordinary Differential Equations. Mathematical Modeling. Digital Technologies. Population Dynamics**.**

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

ED – Equação Diferencial.

ED’s - Equações Diferenciais.

EDO - Equações Diferenciais Ordinárias.

EDP - Equações Diferenciais Parciais.

ICMI - Comissão Internacional de Instrução em Matemática.

ICTM - International Conference on the Teaching of Mathematics.

IES - Instituições de Ensino Superior.

INCA - Instituto Nacional de Câncer.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

UICC - União Internacional Contra o Câncer.

UMAP - Undergraduate Mathematics Application Program.

LDB - Lei de Diretrizes e Bases.

CFE - Conselho Federal de Educação (CFE).

PME - International Group for the Psycology of the Mathematical Education.

SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

TIC - Tecnologias da Informação e Comunicação.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

"Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo". (D'AMBRÓSIO 1996, p. 91).

A Matemática e suas peculiaridades, presentes em nosso cotidiano, foi algo que sempre me cativou. Nunca fui um dos melhores alunos de classe e nem sempre obtive as notas máximas na disciplina, mas sempre fui um observador apaixonado pelas belezas que a matemática pode proporcionar por trás de tantos rigorosos cálculos. Também, sempre mantive meu olhar crítico sob a postura do professor mediante os tantos conceitos, bem como, sua abordagem em busca de tornar seu ensino, de fato, significativo.

Vale ressaltar, que toda essa percepção de criticidade, no processo de ensinar e aprender, só foi amadurecida nos primeiros períodos do curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal de Campina Grande, campus Cuité, o qual ingressei no ano de 2015, ainda sem a pretensão de permanecer, pois naquele momento meu objetivo era ir atrás do que realmente me interessava, a matemática aplicada – cursos de engenharia.

Entretanto, foram os primeiros contatos com a educação matemática, as primeiras práticas metodológicas e as primeiras experiências em sala de aula como professor, na qual acredito que, felizmente, tive a oportunidade de realizar tão cedo em minha carreira, que me fizeram divergir entre duas grandes paixões, duas subáreas da Matemática, que em meu curso, sempre notei uma certa heterogeneidade entre elas, quando tratadas por alunos e professores, que são: a Matemática Pura/Aplicada e a Educação Matemática.

Duas áreas científicas que apenas se distinguem em seu objeto de estudo, mas que ambas, em cursos de formação de professores, especificamente, de matemática, se tornam imprescindíveis. Enfatizando assim, a importância do elo entre "saber" e "saber ensinar".

Não significa que devemos não dar tanta importância à assimilação de conteúdos com tanto rigor que a matemática cobra, mas sim em ir além. Conectar ambos saberes, para entender, ressignificar e dar sentido ao que está sendo ensinado e assim não nos tornarmos meros receptores e transmissores de conceitos, definições, teoremas e exemplos estruturais, sem qualquer ligação com a prática utilitária.

Essas afirmações se intensificaram ao decorrer de minhas praticas docentes em consonância com o curso, me fazendo perceber que pensar no ensino de matemática, nos dias atuais, remete uma reflexão sobre que alunos queremos formar, pois mesmo diante das transformações que a educação vem passando em busca de novas alternativas didáticas-metodológicas que sane os grandes déficits de aprendizagens em meio a múltiplos fatores de dificuldades na disciplina, dar significado ao que aluno "vê" na escola é o grande desafio que docentes enfrentam em salas de aula.

Nesse sentido, como futuros professores, nosso intuito é formar cidadãos capazes de transpassar conceitos vistos em aulas para seu cotidiano, ou vice-versa. E não apenas uma matemática limitada, isolada para si mesma. Nesse viés, temos que, além da preocupação de como esses professores lidarão com essa situação no ensino básico, uma mais pertinente é saber: como está sendo a formação de professores de matemática na perspectiva de um ensino com significado e como a educação matemática pode contribuir para/com essa problemática ainda no ensino superior?

Sendo assim, neste trabalho buscamos estratégias partidas do princípio de uma matemática instrumental que contemple a contextualização e interdisciplinaridade com as ciências, no ensino superior. Para isso, visamos o Cálculo Diferencial e Integral, componente curricular obrigatório em licenciaturas em matemática, com o seu principal objeto de estudo que propõe justamente colocar em prática a matemática conceitual com fenômenos físicos e naturais do mundo e, assim, dar aplicabilidade e compreensão, nos referimos as Equações Diferenciais (ED).

Um dos fatores que motivou este trabalho foi à questão do ensino de ED estar baseado, em sua maior parte, apenas em técnicas analíticas de resolução, segundo vários estudos realizados com o objetivo de melhorar o processo ensino-aprendizagem de ED. Onde, Almeida e Borssoi (2004), Habre (2000), Moreno e Azcárate Giménez (2003), Rasmussen (2001), Rowland e Jovanoski (2004),dentre outros, defendem que o contexto de ensino das ED, hoje em dia, comparando com o que se tinha na metade do século passado, necessita ser reformado, devido ao fato que os tipos de alunos são outros, as necessidades e exigências do mercado de trabalho não são as mesmas, assim como as ferramentas disponíveis, mas a maioria das aulas continuam, em essência, sendo ministradas da mesma forma. Os currículos precisam ser repensados e os avanços tecnológicos considerados

Em função dessa problemática, apresentamos uma proposta de pesquisa sobre o estudo das Equações Diferenciais numa abordagem qualitativa. O foco principal da pesquisa é apresentar alguns modelos matemáticos, envolvendo ED, e soluciona-los com o auxílio de recursos computacionais, de modo que pudéssemos investigar a aprendizagem do conteúdo e também a relação entre contextualização das ED e seus reflexos na motivação para aprender.

> Quando decidimos desenvolver uma pesquisa, partimos de uma inquietação inicial e, com algum planejamento, não muito rígido, desencadeamos um processo de busca. Devemos estar abertos para encontrar o inesperado; o plano deve ser frouxo o suficiente para não "sufocarmos" a realidade, e, em um processo gradativo e não organizado rigidamente, nossas inquietações vão se entrelaçando com a revisão da literatura e com as primeiras impressões da realidade que pesquisamos, para suavemente, delinearmos o foco e o design da pesquisa (ARAÚJO; BORBA, 2004, p. 40).

Diante do exposto, o objeto de pesquisa se constitui em analisar algumas possibilidades de ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais (EDO) com ênfase na abordagem analítico-gráfica e geométrica das soluções, com o auxílio das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). Para tanto, esse trabalho foi conduzido perseguindo "responder" a seguinte pergunta de pesquisa: ***De que forma a Tecnologia de Informação e Comunicação pode contribuir para/com os estudos de Equações Diferenciais Ordinárias através de uma abordagem qualitativa dos modelos matemáticos?***

Assim, somando com a introdução dos aspectos gerais que gerem esse trabalho e com o intuito de apresentar os frutos desta pesquisa foi estruturado um texto em quatro capítulos, além das referências bibliográficas e os apêndices.

No capitulo I, onde se insere a presente seção, é feito um breve relato sobre a trajetória acadêmica e profissional que vivi até chegar aqui, corroborando com uma breve apresentação da pesquisa, referente a algumas possibilidades da abordagem qualitativa no ensino de equações diferenciais ordinárias na educação superior, auxiliada pelos recursos tecnológicos, na tentativa de explicitar qual foi à origem e qual é a relevância dessa investigação. Em seguida apresenta-se a pergunta de pesquisa e, finalmente, o direcionamento que este trabalho irá seguir.

Ampliando a discussão teórica sobre os temas pertinentes da questão de pesquisa, no capítulo II, inicialmente, abordam-se levantamentos bibliográficos sobre a ideia central desse estudo, a Educação Matemática no ensino superior com suas seguintes vertentes: Ensino de ED e as Tecnologias da Comunicação e Informação (TIC) na educação matemática.

No capítulo III, apresenta-se a revisão de literatura sobre alguns conceitos básicos indispensáveis nesse trabalho. Aspectos conceituais e didáticos acerca do Cálculo Diferencial e Integral em cursos de formação de professores, bem como, algumas definições e explanações, normalmente trabalhadas em aulas, de sua subárea, aqui enfaticamente trazida, as Equações Diferencias, utilizadas para embasar e justificar algumas das ideias da abordagem pedagógica proposta neste trabalho.

E em seguida, no capítulo IV, descrevemos alguns modelos matemáticos, que serão utilizados como objeto de estudo na pesquisa, descritos como modelos empíricos, no que se refere à representação de crescimento populacional por meio de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) numa abordagem computacional, sendo apresentados os procedimentos utilizados e a análise dos dados obtidos a partir da metodologia empregada.

Por fim, no capítulo V, é o momento de tecer algumas conclusões que foram sintetizadas e compreendidas no decorrer desta investigação, de modo a esclarecer ideias, formalizar resultados e explicitar as contribuições que este trabalho pode proporcionar tanto para um futuro professor-pesquisador como a toda comunidade da Educação Matemática. E ainda, num teor reflexivo retomamo-nos nas limitações que foram identificadas ao concluir este estudo e assim abrindo portas para que novas buscas sejam realizadas a partir desse trabalho.

2 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

2.1. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR

Além de fazer parte da vida humana e está inserida em diversas peculiaridades do mundo, a matemática, está presente diariamente na educação escolar do cidadão, em qualquer nível de ensino, tornando-se um componente curricular de extrema importância não só de forma singular, mas também, em um contexto multidisciplinar, conectando várias outras áreas do conhecimento, como instrumento de uso, para dentro e fora da sala de aula.

A Educação Matemática no Ensino Superior constitui um campo de ensino e pesquisa não tão antigo. Até mesmo no cenário internacional esse campo, por indícios, surgiu em meados da década de 80 a partir da criação do *Advanced Mathematical Thinking Group*, um grupo de pesquisadores de docentes e discentes de Pós-Graduação em Matemática, que em um encontro anual do International Group for the Psycology of the Mathematical Education (PME) sentiram a necessidade de discutir e aprofundar os estudos de Matemática nesse nível de ensino (SILVA, 2011).

No final da década de 90, a Comissão Internacional de Instrução em Matemática (ICMI), organizou um estudo sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, no nível universitário. Onde, apenas em 2001 foram publicados, pelo matemático britânico Derek Holton, resultados desses estudos, num trabalho intitulado por *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*.

Nesta obra o autor descreve em seu prefácio alguns motivos que justificam a realização de seu estudo. Motivos esses, que também excitaram, indiretamente, a busca de respostas para as mesmas inquietações que ainda hoje são vivenciadas, tema norteador desse trabalho.

Para Holton (2001), o primeiro motivo é o aumento substancial da demanda de estudantes nas Instituições de Ensino Superior (IES) causando preocupações de ordem pedagógicas e educacionais. O segundo motivo está relacionado ao decréscimo no número de estudantes interessados em cursos superiores de Matemática. Em virtude desse fenômeno, os Departamentos de Matemática tiveram que se voltar às questões relacionadas ao ensino e aprendizagem. O terceiro motivo: a tendência de aumento do interesse de matemáticos profissionais, que atuam no Ensino Superior, pela Educação Matemática. Por isso, existe a necessidade de desenvolver um canal de comunicação entre esses profissionais. Nesse sentido, emerge o quarto motivo, a criação de um fórum de discussão, disseminação e intercâmbio de ideias educacionais e pedagógicas entre matemáticos e educadores matemáticos.

Seguindo as ideias que permeiam o quarto motivo de promover pesquisas e produções sobre o ensino e aprendizagem de matemática no ensino superior, citados por Holton (2001) e Silva, B.A. (2011) ressaltam a importância do evento *International Conference on the Teaching of Mathematics (at undergraduate level)* (ICTM), em despertar tanto professores de Matemática quanto aqueles envolvidos em processos de ensino e aprendizagem no nível universitário. Demonstrando ao decorrer de seus eventos, realizados desde 1998 num intervalo de quatro em quatro anos, resultados significativos ao que se espera da atenção e preocupação dos sujeitos da educação superior no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática nessa etapa de ensino.

No Brasil, foi fundada em 1988 a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) em busca de ampliar e consolidar um espaço para discussão de temas de interesse para a Educação Matemática e foi assim que, segundo Fusaro Pinto (2002, apud ALMEIDA e IGLIORI, 2013) a SBEM proporcionou no ano de 2000 o primeiro encontro de pesquisadores dessa área, onde ali constituíram a Educação Matemática do Ensino Superior como um grupo de trabalho para aberto para pesquisas em nível nacional.

Nesse sentido, toma-se a Educação Matemática, hoje, não só como um campo de pesquisa, mas também como uma subárea da Matemática que possui seu objeto de estudo, sendo assim integrada em cursos de nível superior, precisamente em cursos de formação de professores de Matemática - Licenciatura em Matemática. Entretanto, até chegar ao posto atual, a Educação Matemática percorreu e ainda percorre um longo caminho para atingir o reconhecimento de uma área cientifica especifica no mundo acadêmico.

Historicamente, sabemos que a Matemática foi revolucionada ao decorrer do tempo, passando por diversas fases de reformulações e movimentos sociais. E foi na década de 60, um importante momento que marcou a história da Educação Matemática, pois nessa época o movimento da Matemática Moderna emergiu na sociedade, intensificando as conexões entre o ensino primário, secundário, e a Faculdade de Filosofia (BRITO, 2016).

E nesse víeis, houve um crescimento do ensino secundário, que aumentou a carência por professores licenciados no país. Onde, até pesquisadores de Educação Matemática, na década de 60, já discutiam e defendiam por meio de suas teses a necessidade de um currículo voltado para a formação de professores, diferentemente do currículo, até então existente, voltado para a formação de pesquisadores (RODRIGUES, 1959).

Então, em 1961, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) juntamente com o, instituído, Conselho Federal de Educação (CFE) cria a primeira figura de uma reformulação do currículo do ensino superior. Nomeado por “Currículos mínimos”, a CFE oferece em seu parecer nº 292/1962 a inclusão de matérias pedagógicas comuns aos cursos de Licenciatura, como as Práticas de Ensino (estágio supervisionado). Posteriormente, no mesmo ano, o parecer nº 295 estabelece as disciplinas indispensáveis, ou seja, obrigatórias aos cursos de Licenciatura em Matemática, que são: Desenho Geométrico e Geometria Descritiva, Fundamentos da Matemática Elementar, Física Geral, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Álgebra e Cálculo Numérico.

Este foi um momento crucial na história do currículo acadêmico em Matemática. A Licenciatura tomava vez no ensino superior, tendo seu currículo próprio, e não só como um complemento do Bacharelado. Ou seja, ser licenciando já não era mais, necessariamente, ser bacharel. As disciplinas deixavam de ter um teor puramente formativo para pesquisadores.

Situação essa, que desencadeou novos questionamentos pertinentes a pesquisadores da Educação Matemática no Ensino Superior. Um novo ambiente, “novo” curso, novo currículo que inquietou, além de pensadores e professores da época, pesquisadores como Frota e Nasser (2009), que em um de seus recentes trabalhos trouxe um novo olhar e reflexões a esse respeito, destacando alguns questionamentos que se enquadram como objeto de pesquisa para esse campo: “Qual é o papel da Matemática no Ensino Superior? Como o aluno se relaciona com a Matemática formal? Como abordar tal Matemática? Que estratégias o aluno utiliza para aprender Matemática?” (FROTA; NASSER, 2009).

Nesse sentido, neste trabalho falamos do processo de ensino - aprendizagem, mas este sendo concebido no Ensino Superior, o qual difere intrinsicamente do Ensino Básico. Segundo Igliori (2009), ocorre uma mudança na forma como os conteúdos curriculares são tratados e na atitude dos estudantes. Os conteúdos são considerados como “objetos de ensino”, ao invés de “objetos de aprendizagem”, os quais devem ser compartilhados entre professores e estudantes. Com isso, os estudantes do Ensino Superior adquirem maior responsabilidade pelo sucesso (ou insucesso) de sua aprendizagem.

> [...] a investigação de fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado; investigar fatores que dificultam a aquisição de conceito da Matemática avançada; expandir a faixa etária das teorias da aprendizagem para a aquisição de conceitos complexos da Matemática; investigar abordagens de ensino que favoreçam apreensão dos conceitos, entre outros temas (IGLIORI, 2009, p. 12).

A Educação matemática hoje fornece ao professor-pesquisador um leque de possibilidades para trabalhar a matemática, que dentro do processo de ensino-aprendizagem se torna um campo totalmente subjetivo quando se trata de realmente a ensinar e aprender. Viver a Educação Matemática é viver a investigação constantemente, viver do método-científico, tentativa-erro, tentativa-acerto, é tentar, é fazer, é pensar e repensar e, isso tudo, simultaneamente com o ensinar, sim, a sala de aula continua sendo o nosso lugar de pesquisar.

2.2. ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O Estudo das Equações Diferenciais começou no século XVII com o estudo de cálculo por Newton e Leibniz, sabe-se ainda que as primeiras aplicações foram nas ciências físicas, posteriormente em outras áreas, no entanto, mesmo após passar-se tanto tempo as equações diferenciais, continuam com problemas importantes e atrativos, a serem solucionados, essa é uma área de conhecimento que está profundamente ligado ao avanço geral da matemática, consequentemente, também a Educação Matemática.

Hoje, no ensino superior, as “Equações Diferenciais” integram o currículo de vários cursos, sejam eles das exatas ou áreas afins. Os conteúdos referentes a essa disciplina podem ser abordados em cursos de Biologia, Economia, Ecologia, Física e Engenharias, quando ministrado como tópico sequencial do conteúdo de Cálculo ou de uma disciplina específica como “Matemática aplicada”.

Já em cursos de exatas, especificamente em bacharelado ou licenciatura em Matemática, as Equações Diferenciais (ED) são mais aprofundadas, sendo subdividas em dois tópicos, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e as Equações Diferenciais Parciais (EDP), sendo as EDO a mais presente nos cursos de formação de professores.

Apesar de nem sempre a disciplina de EDO estar presente na grade curricular de cursos de Licenciatura em Matemática devemos reconhecer que esta disciplina tem o poder de conectar a Matemática com outras áreas do conhecimento, uma disciplina que deveria ser o elo entre a Ciência e a própria Matemática (HABRE, 2000).

No entanto, o ensino de EDO, tem sido pouco explorado diante dessa importância, pois o ensino dessa disciplina deveria ser voltado para o trabalho e desenvolvimento de ideias da modelagem e aplicações, e não é o que acontece. O curso de EDO, no ensino superior, se constitui dos estudos de vários métodos de resolução para equações diferenciais integráveis, que possam ser resolvidos analiticamente, e que por meio da aplicação de listas de exercícios os alunos possam resolver outros problemas similares pelos métodos já apresentados, ação que caracteriza um ensino mecânico e instrumental (MORENO; AZCÁRATE GIMÉNEZ, 2003).

Diante dessa problemática, Moreno e Azcárate Giménez (2003) identificam, possíveis, quatro fatores que justificam a resistência de docentes aos métodos tradicionais de ensino em meio a variadas alternativas inovadoras, que são: primeiramente a afirmação consensual entre professores sobre o baixo nível de competência e dificuldades conceituais por parte dos alunos para que seja possível trabalhar com um enfoque direcionado a situações que os façam pensar e raciocinar além da memorização e mecanização.

O segundo motivo, consiste na concepção formalista de professores sobre a Matemática Aplicada e sua posição no âmbito da Matemática. Segundo esses pesquisadores, as Equações Diferenciais, ocupa um lugar especial na matemática pura, tratada com um enfoque quase que estritamente algébrico, levando os alunos a se preocuparem exclusivamente com os métodos de busca de soluções, esquecendo-se do objetivo maior que seria entender o processo que gerou determinada equação diferencial, bem como interpretar suas soluções com relação ao fenômeno que ela descreve. Em outras palavras, dando primazia à matemática pura em relação à matemática aplicada.

Consequentemente, surge o terceiro fator, que seria a perca de conteúdos específicos, daquilo que alguns professores consideram como “a matemática de verdade”, caso eles se detenham a favor de conteúdos e técnicas próprias da matemática aplicada, os quais não têm a mesma consideração que aqueles conteúdos da matemática pura para tal disciplina.

E por último, o quarto fator, relativo ao tempo de curso, apontado pelos autores como muito curto, para trabalhar outras investigações e tarefas a não ser a preparação dos alunos para tarefas institucionalmente mais valorizadas, referente a dedicação de tempo para o domínio conceitual.

Em contrapartida, vale destacar que de acordo com Almeida e Borssoi (2004), Habre (2000), Habre (2003), Rasmussen (2001), e Stephan e Rasmussen (2002) entre outros pesquisadores, que deram um grande avanço nos estudos que se preocupam e se interessam com a importância de um ensino de qualidade para esse objeto de estudo, onde o modo de apresentar esses conceitos deve ir muito além de uma simples transferência.

Os referidos autores desenvolveram pesquisas sobre o ensino de Equações Diferenciais, prioritariamente as EDO, mas sempre apresentando possibilidades para este ensino com uma abordagem diversificada, como exemplo o campo de direções como um meio para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem, outros estudos acerca da investigação sobre a aceitação dos estudantes em resolver ED geometricamente, investigações sobre as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em abordar equilibradamente, métodos analíticos, gráficos e numéricos para a análise. Enfim, uma sequência de estudos fundamentada nos pressupostos teóricos da modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática e da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, resultados que serão referencialmente abordados neste trabalho (DULLIUS, 2011).

Outra abordagem alternativa de ensino para as EDO é fazendo-se uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), onde é possível realizar uma abordagem geométrica dos conceitos vistos tradicionalmente (lápis e papel), através da exploração e visualização por meio de um novo ambiente, proporcionado pelos recursos digitais disponíveis nos softwares algébricos e/ou geométricos, fato que há décadas atrás não era possível.

No entanto, devemos ter alguns cuidados ao levar em conta a abordagem do ensino de ED, pois encontramos diversas lacunas que vão se desencadeando ao desenvolver de atividades como essas, onde até mesmo as tecnologias digitais, por exemplo, que oferecem múltiplas contribuições no que se refere à compreensão e interpretação de soluções e resultados que até então eram apenas analíticos e feitos à mão, via técnicas prontas que não possibilitam uma exploração do que é estudado, podem deixar lacunas quando não há um objetivo certo de pesquisa.

Corroborando com essa afirmação, Rasmussen (2001), ressalta que mesmo com a ocorrência de novas direções no ensino de EDO, existe a necessidade maior do desenvolvimento de pesquisas sobre o entendimento e as dificuldades dos alunos na aprendizagem de EDO, que é a ênfase na abordagem qualitativa.

A abordagem qualitativa no ensino de equações diferenciais propicia analisar o modelo (descrição de um fenômeno em termos de equações diferenciais) por meio de sua própria equação e não, apenas, através de suas soluções analiticamente explicitadas (resultados).

Esse termo, “abordagem qualitativa”, surgiu a partir de fundamentos criados e desenvolvidos, no final do século XIX por Alexander Liapunov (1857- 1918) e Henry Poincaré (1854-1912) e por que intitularam esse fato como a teoria qualitativa de equações diferenciais. Momento marcante na história da matemática, especificamente no desenvolvimento dos estudos das ED.

Foi a partir dessas descobertas que foi criado também à teoria geral do comportamento das soluções das equações diferenciais de segunda ordem e com isto foi possível resolver um número de problemas fundamentais que antes por serem problemas analiticamente impossíveis de resolver eram deixados de lado.

Poincaré fez o uso extensivo dos métodos geométricos, a respeito das soluções dos sistemas de equações diferenciais como curvas em um espaço apropriado e Liapunov fundou a teoria moderna da estabilidade do movimento, a “Teoria da Estabilidade” (KLINE, 1972)

Para um melhor entendimento do que chamamos por “Abordagem qualitativa no ensino de Equações Diferenciais”, trazemos um exemplo da proposta de Liapunov que naquela época fazia total sentido para questionamentos como:

> O movimento do ponto descreve uma curva fechada? Permanece sempre no interior de certa porção do plano? Em outras palavras, perguntando na linguagem da astronomia, nós podemos questionar se a órbita é estável ou instável? (KLINE, 1972, p.732).

Em busca de tais questionamentos, Liapunov propôs uma nova forma para determinar soluções periódicas de equações diferenciais, que descrevam o movimento planetário, a estabilidade dos planetas e as órbitas de satélites. No entanto, as equações para o movimento dos três corpos não podem ser resolvidas explicitamente em termos de funções elementares conhecidas. Desta forma, o problema da estabilidade não podia ser resolvido examinando a solução analítica, já que esta não podia ser explicitada. Assim, ele sugeriu um método no qual o problema poderia ser respondido examinando-se as próprias equações diferenciais de forma geométrica.

E esse tipo de problemática se faz presente até os dias atuais em sala de aula, quando vimos que em cursos ministrados de Equações Diferenciais Ordinárias o professor ainda deve se delimitar para problemas simples que envolvam modelos que possam ser resolvidos analiticamente a partir dos métodos que lhe forem apresentados, ou ainda quando é possível fazer aplicações de tais conceitos. Despertando nos alunos pensamentos críticos, onde, “mesmo quando as soluções podem ser escritas de uma forma elementar, a procura por fórmulas frequentemente oculta a questão central: como as soluções se comportam?”, como afirma Hubbard (1986 apud HABRE, 2000).

Dessa forma o ensino de EDO necessita da interferência de outras tendências de ensino, como a Modelagem Matemática e as Tecnologias da Informação e Comunicação, que juntas podem proporcionar uma associação entre múltiplos contextos das ED e seus reflexos na parte motivacional de estudantes em sua aprendizagem, estaremos assim desenvolvendo o cognitivo do indivíduo como resultado de um processo sócio-histórico-cultural, assim como Vygotsky (2000) defende estes fatores como primordiais para esse processo.

i. A aquisição de conhecimentos pela interação social, que é o veículo fundamental para a transmissão dinâmica do conhecimento construído num contexto social, histórico e cultural.
ii. E a possibilidade de organização de situações de ensino que atuem na zona de desenvolvimento proximal do aluno, ou seja, apresentem um nível de dificuldade tal que o aluno não seja capaz de resolver sozinho o problema, mas seja capaz de resolvê-lo com o auxílio de um companheiro mais capaz.

Em vista disso, pode-se agregar aqui ao ensino de EDO, a abordagem qualitativa. Expressão, aqui utilizada, como o processo de inferir sobre o comportamento das soluções de uma equação diferencial ordinária, uma visão crítica sobre o modelo e suas aplicações, bem como as interpretações geométricas, gráfico-numéricas e analíticas, obtidas com o auxilio de mídias informáticas.

2.3. MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

Ao falar em Modelagem Matemática é imprescindível citar um importante matemático brasileiro com maior experiência tanto na produção científica-pessoal como na orientação de estudantes de curso de graduação e pós-graduação, hoje, referencial pertinente para pesquisas que se tratam da Modelagem, ele é Rodney Carlos Bassanezi.

Esse pesquisador apresenta a Modelagem Matemática como possibilidade de estratégia de ensino de tópicos de Matemática em cursos de nível superior, com duas estruturas bastante claras para a possível realização desse procedimento: a primeira, adaptar estruturas matemáticas já existentes aos fenômenos da realidade; a segunda, usar situações da realidade servindo como fonte para obtenção de novos conceitos e estruturas matemáticas.

Bassanezi se tornou um dos maiores contribuintes para a divulgação e aprimoramento da Modelagem Matemática no Brasil trazendo suas concepções, experiências e propostas em suas principais produções científicas, desenvolvidas através dos trabalhos de conclusão dos cursos de pós-graduação (doutorado mestrado e especialização) ministrados e principalmente em seus livros como: Equações Diferenciais com Aplicações, escrito juntamente com professor Wilson Castro Ferreira Júnior e editado em 1988; Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática publicado em 2004 e editado em 2006 e Técnicas de Modelagem Matemática em Curso de Especialização a publicar.

Mas deve ser ressaltado aqui, que Bassanezi teve dois grandes matemáticos influentes em sua vida que consequentemente inspiraram seu trabalho desenvolvido, são eles Aristides Barreto e Ubiratan D'Ambrósio, dois matemáticos e professores de Bassanesi que em suas abordagens peculiares da matemática e das formas de ensina-la causaram grande impacto em sua prática.

O primeiro contato de Aristides Camargo Barreto com a Modelagem Matemática foi quando cursou Engenharia na década de 1960, onde procurou aplicar modelos matemáticos como estratégia de ensino na disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar e Prática de Ensino, ministradas para o curso de Licenciatura em Matemática e de Cálculo Avançado para engenheiros em programas de pós-graduação na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Aristides Barreto realizou diversas experiências pedagógicas com estudantes pertencentes a curso de Engenharia, além da Matemática, Física e Química, orientando os primeiros trabalhos de pós-graduação que podem ser vistos, hoje, como estudo sobre Modelagem Matemática.

Foram esses resultados favoráveis em suas pesquisas pessoais que o levaram a defender esta maneira de ensinar matemática através de modelos que possibilitem um aprendizado mais significativo e eficiente. Defendendo em diversos eventos de Educação Matemática a sua proposta, argumentando de: motivar o estudante com a situação problema Inicial que levasse ao desenvolvimento dos tópicos matemáticos necessários para criar um modelo adequado, aplicar tal modelo para encontrar uma solução e, posteriormente retornar o modelo original para verificar a validade e a qualidade da resposta encontrada.

Já Ubiratan D'Ambrósio foi também um referencial importante para Bassanezi, tanto sua formação como no desenvolvimento de seus trabalhos. Na década de 1960 D'Ambrosio foi professor e pesquisador na Brown University em Providence, Rhode Island; na University of Rhode Island, em Kingston - Rhode Island e na States University of New York, em Bufalo - New York. Foi nessa época que tomou ciência da formação do Undergraduate Mathematics Application Program - UMAP, que visava preparar módulo de aprendizagem matemática por tema com objetivo de melhorar a aprendizagem matemática de alunos da educação superior.

Em 1972, D'Ambrósio inteirado desses conhecimentos e experiências, retornou ao Brasil para atuar na Unicamp e aí implantou com apoio da OEA e da UNESCO propostas de Educação Matemática no Brasil semelhante as que ocorreram em alguns países da Europa e Estados Unidos.

Dentre as propostas implantadas nesse período destacam-se duas: a produção de materiais de apoio didático na forma de módulos e a criação do primeiro Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na Unicamp. Foram produzidos novos materiais de apoio didático sobre vários temas matemáticos todos voltados ao Ensino Fundamental e o programa de pós-graduação originou trabalhos nas áreas de Etnomatemática e Modelagem Matemática.

Na volta de D'Ambrósio ao Brasil estabelecer relações acadêmicas com outros professores e pesquisadores um deles foi Aristides Barreto cuja biografia já foi citada acima, a partir daí surge o convite por parte do D'Ambrósio para a realização da palestra na Unicamp, que foi um dos elementos motivadores para Rodney Bassanezi.

Nesse sentido, Bassanezi ao lado desses grandes pesquisadores desenvolveu suas experiências em Modelagem Matemática tendo sempre como foco a busca por um modelo que permita a resolução em um ambiente matemático de um problema oriundo do mundo real cuja resposta quantitativa ou qualitativa possa ser transportada novamente ao mesmo cenário do qual surgiu à pergunta, oferecendo a melhoria de algum procedimento ou explicação de um fenômeno.

Assim, trazemos a modelagem matemática a partir do ponto de vista da prática de ensino que deve ser alinhada de tal forma que liga as regras abstratas à realidade do aluno, levando-o a aplicar no seu cotidiano.

Com essa perspectiva, a modelagem Matemática passou a ser concebida como uma nova tendência didática, ou seja, uma metodologia com o objetivo de tornar a aprendizagem matemática mais eficiente e eficaz.

Segundo Bassanezi (2002), há uma série de pontos que podem ser levantados para destacar a relevância da Modelagem Matemática quando utilizada como instrumento de pesquisa, como:

> - Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais;
> - Oferecer informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
> - Fornecer um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
> - Sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
> - Preencher lacunas onde existe falta de dados experimentais;
> - Servir como recurso para melhor entendimento da realidade;
> - Servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento.
>
> (BASSANEZZI, 2006, p. 32)

Corroborando com essa ideia, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apontam alguns objetivos para o ensino da matemática em que a utilização da modelagem seria bastante pertinente, a saber:

> a) Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta;
> b) Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos;
> c) Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares; entre outros.

Nesse sentido para se realizar a modelagem matemática em sala de aula, Biembengut (2011), propõe seis etapas para o desenvolvimento do conteúdo programático através da modelagem:

> i. Inicialmente, uma breve exposição do tema;
> ii. Levantamento de questões para instigar os alunos;
> iii. Seleciona-se e formulam-se questões de levar os alunos a proporem respostas (se necessário pode propor uma pesquisa para os alunos);
> iv. Ao suscitar um conteúdo matemático, interrompe-se a exposição e desenvolve-se a matemática necessária;
> v. Propor exemplos análogos e resolução de exercícios;
> vi. Retorna-se a questão que gerou o processo apresentando a solução da questão (BIEMBENGUT, 2011, p. 69).

A Modelagem Matemática, além de ser também considerada como uma estratégia de ensino é abordada como um ramo de estudos da Matemática Aplicada, que é uma subárea da Matemática Pura/Aplicada.

Nessa perspectiva, a Matemática Aplicada é um ramo da matemática no qual se trata da aplicação do conhecimento matemático a outros domínios ou se trata da matemática incumbida na natureza/mundo real que fascina os homens a seu estudo para entender o mundo em que vive?

A Matemática Aplicada é um ramo da Matemática em si? Ou é a conexão que abre portas para outras áreas afins serem estudadas como um campo multidisciplinar?

Em busca de respostas para tais questionamentos, devemos sempre lembrar que a Matemática, num ponto de vista, é uma ciência. Uma ciência desenvolvida pelo ser humano, encurralado de suas necessidades, curiosidades e questionamentos. Uma delas, entender a natureza, seus padrões e suas regularidades, que despertavam tanta curiosidade no homem, que a fim de estuda-las por meio de teorias, pudessem agir e pensar sobre ela e, então, explica-las.

A Matemática, além de uma ciência, uma linguagem. Capaz de dar subsídios ao homem para se comunicar e entender o mundo, por meio de uma linguagem simbólica de codificações. Esses símbolos e códigos associados às representações orais ou visuais de comunicação dão origem à linguagem e à representação gráfica (BASSANEZI, 2002).

O conhecimento do homem se dá, quando este por meio de uma linguagem, conseguem ter acesso às informações contidas na realidade. Quando essas informações são processadas pelos indivíduos, se torna possível à realização de uma ação. Ação definida pela capacidade de explicar, lidar, manejar e entender a realidade.

Esse conhecimento gerado é incorporado à realidade, naturalmente modificando-a e armazenando-se na coleção dos fatos que a constituem. Desta forma, também a realidade está em constante modificação (D'AMBROSIO, 2001).

Já que falamos sobre linguagem, matemática e sobre a sociedade no contexto da realidade em que vive, não podemos deixar de falar sobre a Modelagem Matemática.

O termo "modelagem", segundo o dicionário Houaiss (2009), significa dar forma a algo por meio de um modelo. Logo, entendemos a Modelagem Matemática como o ato de dar forma, modelar algo da vida real por meio de modelos matemáticos, usando-a como uma linguagem.

Claro que hoje, há vários pesquisadores que defendem e apresentam diferentes definições e abordagens para o que chamamos por Modelagem Matemática.

Para Bassanezi (2001), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Já para Almeida (2012), a modelagem matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, nesse caso, é o que dá forma à solução do problema e a modelagem matemática é a atividade de busca dessa solução.

Biembengut (2011) defende que Modelagem Matemática "é o processo que envolve a obtenção de um modelo", e que suscintamente, envolve "... um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se modelo matemático".

Por essas definições e dentre várias outras que pressupõem a Modelagem Matemática em diferentes formas de aborda-las e trabalha-las, podemos deslinda-la como a “atividade de tradução” de situações e informações do cotidiano para o contexto matemático (modelo), permitindo uma análise das possíveis soluções e a busca da solução almejada.

Essa “atividade” em busca de soluções para problemas mediados pela construção de modelos não é tão nova assim. Em 1941, Bento de Jesus Caraça (1901-1948), matemático português, publicou a primeira edição de sei livro *Fundamentos de Matemática,* onde aborda nessa obra que a atividade matemática se desenvolve motivada por duas buscas incessantes, são elas: a busca de respostas para questões relacionadas da própria Matemática e a busca da compreensão de fenômenos ou respostas para problemas da realidade física, social e cultural na vida do homem.

O que remete ao próprio desenvolvimento da Matemática e suas aplicações. Para Boyer (2010), “... a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da sobrevivência do mais apto.” Ou seja, a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos.

E que nesse sentido, a Modelagem Matemática é tão antiga como a própria Matemática, estando presente em nossas vidas desde eras primitivas, surgindo das necessidades do homem em compreender o mundo em que vive desencadeando sua aplicabilidade e funcionalidade no processo evolutivo da sociedade. (BIEMBENGUT, 2011).

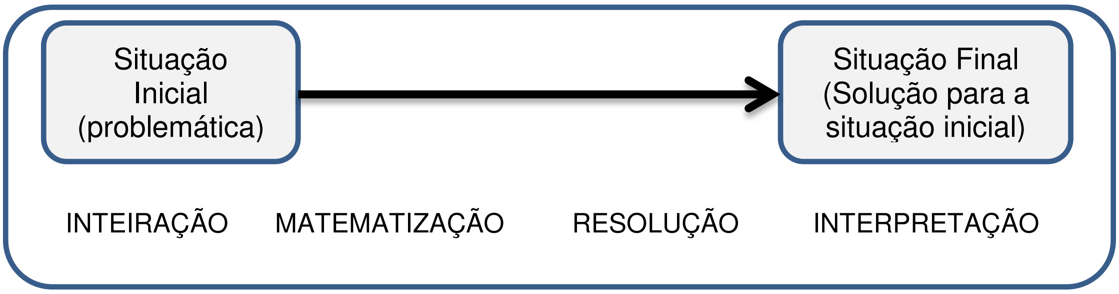
Ainda segundo a autora, a primeira expressão ‘Modelagem Matemática’ surgiu durante o Renascimento Cultural, na Europa, em estudos como a *Sequência de Fibonacci* e nas primeiras construções de ideias físicas representadas por uma linguagem matemática que hoje é objeto e/ ferramenta de estudo em toda a ciência.

Atualmente, o estudo de Modelagem Matemática no Brasil vem avançando muito nos últimos anos e ganhando destaque tanto no ramo da Matemática aplicada quanto no Ensino de Matemática, em diferentes níveis de ensino.

Vale ressaltar que pela vasta aplicabilidade dessa área em áreas afins na ciência, esse processo não é somente próprio dos cientistas, pois para se pensar na construção de um modelo é preciso ter bastante conhecimento matemático e, além disso, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas (BIEMBENGUT, 2011).

Uma atividade de Modelagem Matemática, nesse contexto, envolve fases de desenvolvimento relativas ao seu procedimento que se configura a partir de uma estruturação e resolução de uma situação-problema, as quais são caracterizadas por: interação, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Figura 2: Fases de Desenvolvimento da Modelagem Matemática.



Fonte: Própria.

Inteiração

O termo "inteiração" remete a "ato de inteirar-se", "informar-se sobre", "tornou-se ciente de". Em termos da atividade de Modelagem Matemática, essa etapa representa um primeiro contato com uma situação-problema que se pretende estudar a finalidade de conhecer as características e especificadas da situação. Implica, portanto, cercar-se de informações sobre essa situação por meio de coleta de dados quantitativos e qualitativas.

A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução. Essa formulação é orientada pela falta de compreensão, de entendimento da situação. A escolha de um tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central nessa fase. Ainda que seja uma etapa inicial, a inteiração pode se estender durante o desenvolvimento da atividade, considerando que a necessidade de novas informações pode emergir.

Matematização

A matematização está associada a transformação de um representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática). Visto que, a situação-problema identificada e estruturada na fase de inteiração, apresenta-se em linguagem natural e não parece estar, ainda, associada a uma linguagem matemática. Sabendo que essa linguagem matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido.

A busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar bem essas características, uma descrição. Essas descrições são realizadas a partir de formulações de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações e ao problema defino na fase de inteiração.

Resolução

A fase de resolução consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

Interpretação

A interpretação dos resultados indicados pelo modelo implica a analise de uma resposta para o problema. A análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associado ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação.

Desse modo, para elaborar um modelo é necessário um conhecimento matemático que varia desde conceitos básicos de uma matemática elementar, como aritmética e medidas até uma Matemática mais sofisticada, como as Equações Diferenciais, ao lidar com problemas mais complexos, além de certo domínio da área que o modelo esta sendo aplicado/estudado.

Nessa perspectiva, notamos que modelos e a modelagem matemática estão presentes em diversos cursos de nível superior, principalmente em Engenharias e Tecnologias que tem a matemática como norte. Compondo uma extensa carga horária de disciplinas de exatas em seus currículos, acarretando, assim, nas inquietações de alunos que mesmo após cursarem as disciplinas ainda se questionam em qual o objetivo de estudar uma carga tão ampla de Matemática em alguns cursos de graduação? E, onde usarão tais conceitos matemáticos em sua vida profissional?

3 CÁLCULO E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: ASPECTOS TEÓRICOS E CONCEITUAIS

A presente seção, incialmente, se preocupa em trazer abordagens teóricas e discussões a respeito do surgimento das Equações Diferenciais (ED's) como um tópico de matemática nos estudos do Cálculo Diferencial e Integral e da Matemática aplicada.

Para isso, baseamos nossos estudos nos livros-texto Bassanezi (2002), Bassanezi e Ferreira (1988), Batschelet (1978), Boyce e DiPrima (2002) e Zill e Cullen (2001), mostrando a linha cronológica que a disciplina passou até chegar aos dias atuais, e seu cenário no mundo acadêmico, com ênfase em cursos de formação de professores de Matemática.

Em sequência, definidos os conceitos básicos, apresenta-se as Equações Diferenciais numa perspectiva de ensino e, como suas diferentes abordagens refletem na vida acadêmica/profissional dos sujeitos em questão.

O estudo da literatura relacionada ao tema evidencia a importância do ensino de EDO na área de ciências exatas e, em particular, no curso de Matemática. Apresentando-a como uma disciplina inerente da continuidade e especificidade dos estudos do Cálculo Diferencial e Integral, capaz de conectar uma matemática até então, puramente algébrica com o mundo real, despertando o interesse de estudos para estudantes matemáticos e não matemáticos, por meio de suas subáreas, como a Modelagem Matemática, por exemplo.

3.1. O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM CURSOS DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O que é cálculo? Qual a importância do cálculo nos cursos de graduação? Por que ensinar cálculo tão enfaticamente na licenciatura em matemática?

O Cálculo se originou desde a idade antiga pelos gregos, porém só foi planeamento entendido pelos cientistas da idade média como René Descartes, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, através da convergência das Ciências Matemáticas e físicas, no estudo, especificamente, do cálculo infinitesimal, segundo o matemático e filósofo Marquês de Condorcet (1743-1794).

Outro pensador que contribuiu significantemente para o desenvolvimento do conceito de cálculo é Euler, como afirma o autor a seguir:

> Sua enorme contribuição para o desenvolvimento do cálculo no século XVIII se deu tanto no trabalho de extensão ao caso de várias variáveis com as diferenciais parciais, como nas equações diferenciais, na teoria das funções, séries e integrais, enunciando resultados fundamentais para Matemática pura e aplicada. Mas ainda, Euler certamente pode ser considerado o primeiro matemático da era pós-cálculo que se preocupou em conseguir, e de fato conseguiu, alguns refinamentos nos fundamentos daquela disciplina (REIS, 2001, p.56).

Vemos que o cálculo, ao decorrer da sua história, sofreu diversas modificações e aprimoramentos, na tentativa de cada vez mais oferecer uma abordagem mais rigorosa. Foi nesse momento que o cálculo tomou-se/ difundiu-se como "um ramo mais geral da matemática que a partir daí é chamado 'análise' - o estudo de processos infinitos" (BOYER, 1994).

Análise ocupou, então, mais um ramo da matemática, mesmo que seus conteúdos fossem basicamente os mesmos dos do Cálculo, seu foco era o rigor em suas demonstrações, ou seja, mais relacionada à álgebra, diferentemente do Cálculo que tem uma visão mais geométrica associada ao utilitário, ao prático.

> Esse campo se estabeleceu a partir da necessidade de prover formulações rigorosas as ideias intuitivas iniciadas pelo Cálculo Diferencial e Integral, como estudo dos números e das funções reais (de uma ou várias variáveis reais). Com a extensão do desses conceitos a espaços abstratos, ampliou-se o campo de interesses da Análise e, desse modo, as abordagens dos tópicos do Cálculo passaram a ser tratadas, respectivamente, em duas áreas da assim chamada Análise Clássica, isto é Análise Real (Análise na Reta) e a Análise no Rn. (TOLEDO, 2008, p.79)

O nome cálculo diferencial e integral vem dos estudos desenvolvidos devido às necessidades dos cientistas do século XVI e XVII associados à mecânica. Segundo Howard Eves (2004, p. 417) "primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o diferencial".

A integração se originou nas técnicas do cálculo de somatórios de áreas e volumes. A diferenciação partiu dos resultados de “problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos de funções”. (ELVES, 2004, p.417).

Em outras palavras destacamos aqui uma definição de Finney (2002), para ele o cálculo é a matemática dos movimentos e das variações.

> O cálculo diferencial lidou com um problema de calcular taxa de variação. Ele permitiu definir os coeficientes angulares de curvas, calcular a velocidade e a aceleração de corpos em movimento [...] O Cálculo Integral lidou com o problema de determinar uma função a partir de informações a respeito de sua taxa de variação (FINNEY, 2002, p.15).

Contudo, o que podemos perceber atualmente, é que o cálculo, a análise e suas demais aplicações atingem e extrapolam os limites da Matemática e das ‘Exatas’, tornando-se, então, disciplinas fundamentais no currículo acadêmico de cursos de graduação e pós-graduação, até mesmo de áreas afins, como Biologia, Medicina, Economia, dentre outras.

Ao tratar de ‘disciplina’, retomamo-nos há uma variedade de elementos que a cercam. Embora que não seja foco dessa pesquisa a discussão sobre currículo, se torna fundamental essa abordagem, já que tratamos sobre a história de uma disciplina inserida, também, em cursos de formação de professores.

Nesse sentido, aprofundando essas ideias, pode-se encontrar na literatura diversas conceituações para definir o que é disciplina. Para Goodson (1998), a disciplina se refere ao modo de se entender e estudar as práticas educativas, que são desenvolvidas por meio: do estudo dos conteúdos programáticos; da metodologia utilizada; do professor mediador; do material didático utilizado; dos alunos; da legislação em vigor; e da avaliação realizada.

Figura 1: Esquema das constituintes de uma disciplina.

Fonte: Adaptado de Goodson (1998).

Já na obra “História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa”, publicada em 1990, pelo autor André Chervel, veem algumas concepções históricas sobre a disciplina, sendo agora, retratado como uma matéria de ensino com tendência de servir como exercício intelectual, capaz de realmente ‘formar’, não mais, como apenas a disciplina no sentido forte da palavra: as humanidades clássicas.

> Com o desenvolvimento da industrialização, intensificada na segunda metade do século XIX, os conhecimentos das áreas denominadas de ‘exatas’ como Biologia, Química, Botânica e Física além da Matemática,

> passaram a ser considerados importantes e disputavam o espaço com as áreas de 'humanidades clássicas' na formação escolar. Essa disputa sobre o papel formativo das 'disciplinas humanísticas' ou das 'disciplinas científicas' possibilitou a organização mais sistemática dos conhecimentos já tradicionalmente pertencentes ao currículo antigo e dos novos que estavam sendo introduzidos nas escolas (BITTENCOURT, 2004, p. 41).

Ou seja, se uma educação é fundamentalmente *matemática ou cientifica*, então, essa deve ser reconhecida como verdadeira formação dos indivíduos.

Formar ou "[...] disciplinar o espírito quer dizer, de lhe dar os métodos e as regras para abordar os diferentes domínios do pensamento, do conhecimento e da arte." (CHERVEL, 1990, p. 180).

> Foi importante, então, nesse momento estabelecer as finalidades de cada uma das disciplinas, explicitar os conteúdos selecionados para serem 'ensináveis' e definir métodos que garantissem tanto apreensão de tais conteúdos como a avaliação da aprendizagem (BITTENCOURT, 2004, p. 41).

Historicamente, notamos que por mais que a disciplina-Cálculo seja reconhecida pelos próprios discentes pela sua relevância, o alto índice de reprovações e dificuldades ao decorrer desse curso é nítido em todo país. O que desencadeia múltiplos questionamentos sobre currículo, professor-didática, métodos e avaliação no ensino dessa disciplina.

Segundo Oliveira e Raad (2012), a cultura de ensino do cálculo é linear, isso quer dizer que, um conhecimento só é realmente apreendido se o conteúdo que o antecede também foi assimilado corretamente, de modo que, caso haja alguma falha nesta sequência a reprovação é uma consequência natural.

Eles ainda ressaltam que a solução mais adequada para essa problemática seria a implantação de disciplinas preparatórias, que possibilitassem aos alunos revisões de conteúdos de matemática básica, bem como, a introdução de noções básicas acerca do Cálculo Diferencial e Integral.

Ação essa, que para eles não há eficácia visto que, essa iniciativa não resultou como esperado, o que causa um grande temor nos estudantes de exatas em plena entrada na graduação, até os dias atuais.

Já para Santos e Matos (2012), isso é muito subjetivo, mas a respeito do fracasso dos alunos na disciplina de Cálculo elas ressaltam principalmente o 'jogo de responsabilidades', pois, por um lado temos os estudantes e suas famosas falas, dentre elas: "o problema está nos professores" (seus procedimentos metodológicos).

Uma queixa bastante ouvida por parte dos alunos é que muitos de seus professores são especialistas e dominam o conteúdo de ensino, entretanto, deixam de utilizar técnicas didáticas que ajudem numa melhor compreensão.

Sobre essa afirmação, Gil (2008), destaca que a didática passou a receber novos aportes ao decorrer da história, o que impulsionou muitos movimentos de reforma escolar que contestavam a didática do modelo tradicional como um método não tão suficiente para uma educação que considerasse os aspectos psicológicos relacionados com a realidade e o processo de ensino e aprendizagem dos sujeitos envolvidos.

E assim, mostrando-se de grande importância propostas didáticas que forneçam instrumentos para que o educando atue como cidadão agente da aprendizagem. Para essas abordagens se torna imprescindível à colocação do autor a seguir, afirmando que:

> [...] não existe o aluno em geral, mas o aluno vivendo numa sociedade determinada, que faz parte de um grupo social e cultura determinado, sendo que estas circunstâncias interferem na sua capacidade de aprender [...] Um bom professor que aspira ter uma boa didática necessita aprender a cada dia como lidar com a subjetividade dos alunos, sua linguagem, sua percepções, sua prática de vida. Sem esta disposição, será incapaz de colocar problemas, desafios, perguntas relacionadas com o conteúdo, condição para se conseguir uma aprendizagem significativa. (LIBÂNEO, 2001, p. 3)

Com base nisso, por outro lado, temos os professores que atribuem o baixo rendimento à falta de motivação, à falta de raciocínio e interesse na disciplina, à falta de uma postura ativa dos estudantes frente ao novo conhecimento, onde não se desacomodam para conhecer outra aprendizagem que não seja a automática, a mecânica, como já vinda de uma educação precária.

Isso se deve, principalmente, a circunstância de que o ensino da educação superior exige do aluno maior empenho e que ele próprio desenvolva habilidades que o auxiliem a construir a sua própria formação. Corroborando com essa afirmação, temos que:

> O que caracteriza o ensino de nível superior e que ele transmiti diretamente o saber. Suas práticas coincidem amplamente com suas finalidades. Nenhum hiato existe entre os objetivos distantes e os conteúdos do ensino. O mestre ignora a necessidade de adaptar a seu público os conteúdos de acesso difícil e de modificar esses conteúdos em função das variações de seu público. (CHERVEL, 1990, p.185)

O aluno, inserido na educação superior, num curso que tenha a disciplina de Cálculo com componente curricular obrigatório, se depara com diferentes cursos que visam conduzir os alunos a estudarem funções a partir das análises de gráficos as quais têm uma ou mais variáveis reais.

O curso destaca o estudo de funções, limites de funções com variáveis reais, visando ainda, o estudo de taxa de variação de funções com definições de derivações, diferenciais e integrações, inserindo também o estudo das relações entre funções e sequências.

Na Educação Matemática, o curso de Cálculo Diferencial e Integral é analisado e discutido em diversas pesquisas sobre didática do Cálculo e formação de professores de Matemática. Enaltecendo sua grande importância em cursos de graduação e pós-graduação, como também as dificuldades de aprendizagem que essa disciplina vem acarretando nos alunos, e ainda, como a forma do curso a ser trabalhada influenciam na formação didática docente do aluno (futuro professor).

A dualidade entre o rigor e formalismo matemático com os aspectos intuitivos no processo de ensino- aprendizagem, principalmente, de Cálculo e Análise, em cursos de graduação, nos faz perceber uma dicotomia entre um curso formal e um curso direcionado as noções intuitivas e dedutivas a partir de aplicações, que podem ser optadas ou não por professores nesse âmbito de ensino, segundo Reis (2011).

> Vale lembrar que, na prática da sala de aula do Cálculo, tanto o procedimental como o conceptual vêm carregados de aspectos intuitivos que devem ser explorados pelos professores e alunos que constroem estes conhecimentos. Cabe aos professores, então, refletir sobre uma melhor utilização, como referência para suas disciplinas, de livros que claramente apresentam uma abordagem rigorosa dos conteúdos e raramente exploram situações-problema, exemplos, contra-exemplos e ilustrações que poderiam produzir significados e melhor compreensão dos conceitos (REIS, 2011, p.196).

A matemática, desde o ensino básico é tratada como uma disciplina com grandes deficiências na aprendizagem escolar, isso devido, dentre vários outros fatores, ao seu rigor conceitual, que por diversas vezes é trabalhada em sala de aula seguindo manuais didáticos que contemplem um currículo norteador. Um currículo que pode, ou não, estar adequado à realidade do alunado envolvido.

Nesse sentido, Reis (2011), exclama essa problemática para o ensino superior, apontando uma variedade de possibilidades de abordar um curso de Cálculo, cabendo ao professor atingir ou não um determinado nível de rigor que a disciplina cobrará, dependendo, claro, de sua finalidade.

Um exemplo disso é a linguagem utilizada para cursos voltados a Engenharia e Física que foge totalmente de um teor formal, trabalhado em cursos de Bacharelado em Matemática, ou ainda, em Licenciaturas: a distinção do rigor ao provar ou justificar uma afirmação matemática deve variar para cada objetivo de ensino, respeitando os conhecimentos prévios dos alunos e considerando a que público o curso será destinado.

Podemos perceber que para alcançar os objetivos da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, na perspectiva que colocamos, o professor se torna o elemento principal nesse processo, visto que, é através de uma boa proposta metodológica que podemos despertar no aluno a curiosidade e a motivação para que este reconheça a importância do cálculo em sua formação universitária.

Santos e Matos (2012), ainda ressaltam que o professor deve mostrar ao aluno a importância e aplicabilidade do conteúdo na sua área de atuação, não se detendo tanto ao rigor formal dos teoremas, proposições e corolários, mas sim, na realidade que ele está vivenciando.

Destacando aqui a nossa discussão, enfatizamos ao decorrer desse estudo algumas colocações de Giraldo (2004), autor atuante na pesquisa na área de Educação Matemática, especificamente, relativos aos conteúdos de Cálculo, apoiando-se nas ideias de David Tall e Schlomo Vinner, onde discuti a integração de recursos computacionais a prática docente e as possibilidades de conexões entre conteúdos e assim criando novas formas de explorar e aprender.

O ensino de Cálculo e as tecnologias, segundo Reis (2010), têm por objetivo não somente promover a construção do conhecimento pelos alunos, mas também desenvolver novos ambientes (softwares e aplicativos) para serem utilizados, destacando, que esse processo de visualização gráfica no entendimento do conceito de Cálculo Diferencial e Integral e áreas afins enriquece as representações numéricas e algébricas, abrindo portas para novas aprendizagens, talvez até mais significativas.

Baseado no exposto e a partir de um levantamento teórico, em livros e textos teóricos-metodológicos, publicados recentemente, notamos possíveis relevantes utilizações de recursos tecnológicos que aprimorem, reformule e renove esse ensino tão discutido em âmbito educacional, como vamos abordar ao longo da pesquisa.

3.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – CONCEITOS BÁSICOS

Neste tópico, fazemos uma familiarização com alguns conceitos e métodos fundamentais das Equações Diferenciais trabalhados em qualquer curso de graduação, que contenha essa disciplina.

Buscamos destacar, primeiramente, a importância desse estudo na Modelagem Matemática, citando alguns de seus mais diversos fenômenos expressados por uma ED. Os quais são tratados em sala de aula, mas com o foco primordial aos métodos de resolução para tais modelos.

Em seguida, ressaltar como a complexidade nesses estudos varia de acordo com aplicação realizada, ou seja, quanto mais próxima da realidade for à aplicação, mais sofisticada será a matemática utilizada neste procedimento.

E, a partir do momento em que a complexidade for aumentando, a abordagem no procedimento de resolução de uma ED vai se tornando mais quantitativa do que qualitativa, uma vez que, ao lidar com um sistema de equações diferenciais de várias variáveis, há a necessidade do auxilio de ferramentas computacionais para analise desse modelo.

Em outras palavras, quando temos um modelo, arguido por equações diferencias, sendo ele, unidimensional ou bidimensional, tratamos de um estudo analítico e geométrico. Já, se este modelo possuir mais dimensões, o estudo se torna baseado em análises numéricas (computacionais).

Mas, afinal, o que são Equações Diferenciais? Quais e que tipos de fenômenos, mais básicas, podemos expressar através de um modelo matemático?

Para isso, apresentamos a seguir algumas definições embasadas e mescladas de grandes autores que tratam sobre deste estudo e que é bastante usado como livros-texto em cursos de graduação, como Boyce e DiPrima (2002) e Zill e Cullen (2001).

Falar em equação e em diferencial nos remete a conceitos pertinentes a cursos de Cálculo e Álgebra. Onde, intuitivamente, nos levam a pensar em equações que certamente envolvem derivadas (diferencial).

De fato, num curso de Álgebra, por exemplo, são dadas equações como $x^2+3x+5=0$ para resolução, tendo x como incógnita. Já em cursos de Equações Diferenciais, uma das tarefas é resolver equações, porém, do tipo $y''+3y'+5=0$, onde temos como incógnita uma função $y = \phi(x)$.

Nos primeiros estudos de Cálculo Diferencial e Integral, o conceito de derivada deixa bem explicito que a derivada *dy/dx* de uma função qualquer *y=ϕ(x)* gera outra funç*ão ϕ'(x),* obtido por meio de regras apropriadas para cada função.

Seja y = $e^{0,1x^2}$, diferenciável no intervalo $(-\infty, \infty)$, e sua derivada:

$$\frac{dy}{dx} = 0,2\ e^{0,1x^2}. \qquad (1)$$

Se substituirmos $e^{0,1x^2}$no lado direito da derivada por y, obteremos:

$$\frac{dy}{dx} = 0,2xy. \qquad (2)$$

Resolver uma equação diferencial propõe-se em descobrir qual é a função representada por y na equação (I), partindo da hipótese em que não fazemos ideia de como ela foi construída. Ou seja, um problema familiar ao inverso do calculo diferencial, dada uma derivada, devemos encontrar, agora, uma antiderivada.

Temos então, que a equação (I) é chamada de equação diferencial, devido aos seus atributos que discutiremos mais precisamente a seguir.

Definição 3.2. (*Equação Diferencial*): Denomina-se Equação Diferencial (ED) toda equação que contém como incógnita funções e suas respectivas derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

3.2.1. Classificação pelo Tipo

As equações diferenciais, para um melhor esclarecimento, são classificadas por *tipo, ordem e linearidade.* Primeiramente sua classificação por *tipo*, expostas nas definições abaixo:

Definição 3.2.1. (*Equação Diferencial Ordinária*): Se uma equação contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis *dependentes* em relação a uma única variável *independente*, ela será chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO).

Exemplo 1: A equação $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$ apresenta duas variáveis dependentes, u e v, e apenas uma única variável independente x. De acordo com a definição anterior, temos uma equação diferencial ordinária.

Exemplo 2: No caso da equação $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = x^2$, nota-se que existe uma variável dependente y e uma variável independente x. Portanto é uma equação diferencial ordinária.

Perceba que o número de variáveis dependentes não define uma EDO, visto que é caracterizada por possuir apenas uma única variável independente. Nos nossos exemplos, os números de variáveis dependentes são diferentes, no entanto, por haver apenas uma variável independente, ambas são equações diferenciais ordinárias.

Vejamos mais alguns exemplos norteadores:

a) $\frac{dy}{dx} + 5y = 0$
b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$
c) $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$
d) $\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2x + y$

Observação 1: Neste texto, as equações diferenciais ordinárias serão escritas com a *notação de Leibniz*:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$$

Ou com a *notação linha: y', y'', y''',...* Dessa forma, podem-se escrever as equações diferenciais um pouco mais compactamente como:

a) $y' + 5y = 0$
b) $y'' + 2y' + 5y = 0$
c) $y' + 2xy = e^{-x^2}$
d) $y' + y' = 2x + y$

Devemos lembrar que a *notação linha* é somente usadas para denotar as três primeiras derivadas. Da quarta derivada em diante é usada a notação $y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, y^{(n)}$, até a enésima derivada, $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Por mais que a notação linha seja mais fácil de escrever no desenvolver dos cálculos, a notação de Leibniz, ganha vantagem, em explicitar claramente as variáveis dependentes e independentes. Por exemplo, na equação $\frac{dx}{dt} + 64x = 0$, é claramente exposto que x é a variável dependente e t, uma variável independente.

Nesse sentido, o que diferencia e classifica o tipo de uma equação diferencial é justamente a relação entre os termos das variáveis dependentes e independentes. Veja, uma equação que envolva as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equações diferenciais parciais. De forma mais sucinta segue a definição de Zill, D. G. e Cullen, M. R. (2001) a seguir:

Definição 3.2.2. (*Equação Diferencial Parcial): Denomina-se Equação Diferencial Parcial (EDP),* se tal equação, também, correspondente a Definição (3.2) e, envolve mais de uma variável independente, denominadas por derivadas parciais.

São exemplos de equações diferenciais parciais:

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$

3.2.2. Classificação por Ordem

Definição 3.2.3. A ordem de uma equação diferencial é dada de acordo com a derivada de maior ordem que nela aparece, pode-se representar equação diferencial ordinária geral de n-ésima ordem como,

$$F(t, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}).$$

Em outras palavras, ordem de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é dada pela ordem mais alta da derivada na equação. Por exemplo,

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ (Percebemos que essa equação possui uma derivada de segunda ordem e outra derivada de primeira ordem, portanto classificamo-la como uma EDO de segunda ordem, por ser a ordem maior da equação).

b) $\frac{d^5y}{dx^5}$ + 5 $\frac{d^2y}{dx^2}$ + 3 $\frac{d^6y}{dx^6}$ + 5y = 0 (Nessa equação temos derivadas de várias ordens, que inclusive, estão misturadas, porém a sexta ordem não deixa ser a mais alta derivada da equação, portanto, classificamo-la como uma EDO de sexta ordem).

Pode-se assim denotar uma EDO de ordem n das seguintes formas:

i. F(t, y, y', y'', ..., $y^{(n)}$) = 0 (3)

Ou,

ii. F$(t, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$

3.2.3. Classificação por Linearidade

Definição 3.2.4. Uma equação diferencial ordinária de ordem n é linear se F for linear em y, y',..., $y^{(n-1)}$. Ou seja, uma EDO de enésima ordem é linear quando (II) for da forma:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y^1 + a_0(x)y = g(x) \tag{4}$$

Observe que em (4) há duas propriedades características de uma equação diferencial linear: primeiramente, a variável dependente e todas suas derivadas são do primeiro grau, a potência de cada termo envolvendo y é 1. Segundo, cada coeficiente depende no máximo da variável independente x.

Exemplo 3:

a) $(x - y)dx + 4x\,dy = 0$

b) $y'' - 2y' + y = 0$

c) $\frac{d^3y}{dx^3}$ + x $\frac{dy}{dx}$ - 5y = e^x

Essas são exemplos de equações diferenciais ordinárias lineares que independem da ordem, ou seja, temos aí exemplos de EDO de primeira, segunda e terceira ordem.

Em especial, reescrevemos a equação (a) demonstrando sua linearidade na variável y, de ordem um (1), descrita na forma alternativa $4xy' + x = y$.

Uma equação que não for da forma (III) é dita não-linear. Funções não-lineares da variável dependente ou de suas derivadas não podem aparecer em uma equação linear. Assim sendo:

Exemplo 4:

a) $(1-y)y' + 2y = e^x$ (Não é linear, pois possui um termo não-linear, coeficiente depende de y: (1-y)).

b) $y'' + sen\, y = 0$ (Não é linear, pois possui um termo não-linear em relação a y, uma função não-linear: (sen y)).

c) $y''' + y^2 = 0$ (Não linear, pois possui um termo não-linear em relação ao y, uma potencia diferente de 1).

3.2.4. Solução de uma EDO

Como já mencionado anteriormente, o objetivo principal deste trabalho é resolver ou encontrar soluções para determinadas equações diferenciais ordinárias. Então, na definição a seguir vamos apresentar o conceito de solução de uma EDO, de modo geral, encontrada no livro de Zill e Cullen (2001).

Definição 3.2.5. *(Solução de uma EDO):* Toda função $\emptyset$, definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I, as quais quando substituídas em uma equações diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma **solução** da equação diferencial no intervalo.

Não se pode pensar em solução de uma equação diferencial ordinária sem, se quer, pensar em *intervalo. Para isso definimo-lo a seguir.*

Definição 3.2.6. *(Intervalos de Definição):* Um intervalo I é alternativamente conhecido por intervalo de definição, intervalo de existência, intervalo de validade ou domínio da solução e pode ser um intervalo aberto (a,b), um intervalo fechado [a,b], um intervalo infinito (a,∞) e assim por diante.

Assim, uma solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma função $\emptyset$ que tem pelo menos n derivadas e para o qual:

$$F\ (x, \emptyset(x), \emptyset'(x), \dots, \emptyset^n(x)) = 0, \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

De maneira geral, como afirma Machado (1988), as variadas equações correspondem às perguntas que em geral surgem na formulação de problemas a serem resolvidos. Portanto, equacionar um determinado problema é traduzir as perguntas, que devem ser respondidas, em equações. Responder às perguntas formuladas significa resolver as equações. Quando um problema envolve grandezas variáveis e taxa de variação, as equações resultantes costumam ser equações diferenciais. Uma equação diferencial representa uma pergunta do tipo: *qual é a função cuja derivada satisfaz determinada relação?*

Embora tenhamos definido o que vem a ser solução de F $(x, \emptyset(x), \emptyset'(x), \dots, \emptyset^n(x)) = 0$, uma questão importante que surge, é a seguinte: *essa equação sempre tem solução?*

O fato descrever uma equação deste tipo não significa, necessariamente, que existe uma função *u*(*t)* que a satisfaça. Então, como saber se uma determinada equação diferencial ordinária tem solução?

Essa é a questão de existência de solução e é respondida pelo Teorema da Existência e Unicidade que garante, sob determinadas condições, a equação tem sempre solução (BOYCE; DI PRIMA, 2002).

Essa preocupação com a existência da solução não é puramente uma preocupação matemática, pois se um problema não tem solução, gostaríamos de saber deste fato desde o início de sua análise para evitar investir tempo e esforço na tentativa de resolvê-lo. Além disso, se um problema físico, por exemplo, está sendo modelado matematicamente por uma equação diferencial, então a equação deveria ter solução, pois caso contrário presume-se que a formulação do problema deve ser avaliada.

Mas se supusermos que uma dada EDO tem pelo menos uma solução, uma segunda questão surge. *Quantas soluções ela tem? Que ou quais condições adicionais devemos especificar para se obter uma única solução?* Essas perguntas se referem à unicidade da solução.

Essa questão da unicidade também tem implicações práticas. Se conseguirmos determinar uma solução de um problema dado e se soubermos que este tem uma única solução, o problema é então resolvido. Caso contrário, sabendo da existência de outras soluções, talvez tenhamos que continuar a busca pelas demais soluções.

Uma terceira e última questão que surge é: dada uma EDO na F $(x, \emptyset(x), \emptyset'(x), \dots, \emptyset^n(x)) = 0$, podemos de fato determinar uma solução? Se sim, como? Observemos que, se encontrarmos uma solução da equação dada, respondemos, simultaneamente, a questão da existência da solução. No entanto, desconhecendo esta teoria, ou seja, o Teorema de Existência e Unicidade poderíamos, por exemplo, usar um computador e, por meio de uma rotina, encontrar uma aproximação numérica para uma 'solução' que não existe. Por outro lado, mesmo sabendo da existência da solução, pode não ser possível expressá-la em termos das funções elementares, conforme já discutimos na seção anterior. E, infelizmente, essa situação é a mais comum para a maioria das equações diferenciais (BASSANEZI, 2002; BOYCE, DI PRIMA, 2002).

Porém, em geral, nos cursos de graduação este resultado não impõe nenhuma dificuldade maior aos alunos já que este teorema é trabalhado logo no início da disciplina de uma única vez, e a partir daí buscam-se os métodos analíticos de resolução das equações, já que na grande maioria dos cursos, esta disciplina é basicamente operacional. E, além disso, a maioria dos modelos matemáticos, que são estudados na disciplina, envolve funções que atendem as condições do teorema. No entanto, esse resultado deve ter sua relevância quando o estudo de EDO é proposto, principalmente quando os modelos são analisados por métodos numéricos, onde se busca soluções aproximadas destes e, portanto, ter a garantia de que elas existem é imprescindível.

Exemplo 5: Dada a equação $y' = 25 + y^2$, devemos verificar se $y = 5.tg\,(5x)$ é uma solução para essa EDO. Como $y = 5.tg\,(5x)$, então $y' = 25.sec^2\,(5x)$.

Substituindo y e y' na equação, temos:

$$25sec^2\,(5x) - 25 - (5tg\,(5x))^2 = 0 \qquad (5)$$

Pelas propriedades das identidades fundamentais da trigonometria, temos que:

$$1 + tg^2\,(t) = sec^2\,(t) \Rightarrow 1 + tg^2\,(5x) = sec^2\,(5x),\ \text{logo,} \qquad (7)$$

$$25(1 + tg^2\,(5x)) - 25 - (5.tg\,(5x))^2 = 0 \qquad (6)$$

Usando distributividade resulta em:

$$25 + 25tg^2\,(5x) - 25 - 25tg^2\,(5x) = 0 \quad (8)$$

Portanto, y = 5tg (5x) é solução da equação é:

$$y' = 25 + y^2. \quad (9)$$

3.2.5. Equações Lineares de Primeira Ordem

Podemos definir uma equação linear como uma equação diferencial da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = g(x) \quad (10)$$

Dividindo a equação (10) pelo coeficiente a_1(x), obtemos:

$$\frac{a_1(x)}{a_1(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)} \quad (11)$$

Tome P(x) = $\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e f(x) = $\frac{g(x)}{a_1(x)}$, substituindo na equação (11) obtemos uma forma mais útil de uma equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \quad (12)$$

Usando diferenciais, multiplicando a equação (12) por dx, obtemos:

$$\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] = dxf(x)$$

$$\Rightarrow dy + P(x)ydx = f(x)dx \quad (13)$$

Reescrevendo, adicionando o inverso aditivo de f(x)dx, obtemos:

$$dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0 \quad (14)$$

Multiplicamos a equação (14) por μ(x),

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0 \quad (15)$$

Pelo Teorema do Critério para uma Diferencial Exata, o lado esquerdo da equação é uma diferencial exata, se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)] \quad (16)$$

Ou seja,

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x) \quad (17)$$

Multiplicando a equação (17) por $\frac{dx}{\mu}$, obtemos a equação separável:

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx \quad (18)$$

Encontrando o μ(x), integrando ambos os lados da igualdade, temos:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(x)dx \quad (19)$$

Assim,

$$\ln|u| = \int P(x)dx \quad (20)$$

Usando exponencial, temos:

$$e^{\ln|u|} = e^{\int P(x)dx} \quad (21)$$

Dessa forma encontramos que o fator integração para a equação linear é:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (22)$$

Para exemplificar a resolução de equações lineares de primeira ordem, segue o exemplo.

Exemplo 6: Seja a equação

$$x\frac{dy}{dx} + y = e^x \quad (23)$$

Como podemos observar a equação não se encontra na forma da equação linear de primeira ordem, então dividindo a equação por x que é o coeficiente $\frac{dy}{dx}$, obtemos assim a equação:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x} \quad (24)$$

Onde temos $P(x) = \frac{1}{x}$. Calculando o fator integração $\mu(x)$,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln|x|} = x \quad (25)$$

Encontrando o $\mu(x) = x$, multiplicamos a equação por ele:

$$x\left[\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}\right] = x\left[\frac{e^x}{x}\right] \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = e^x \quad (26)$$

Reescrevendo a equação, obtemos

$$\frac{d}{dx}[x.y] = e^x \quad (27)$$

Integrando ambos os lados

$$\int \frac{d}{dx}[x.y]dx = \int e^x dx \quad (28)$$

Obtemos assim,

$$x.y = e^x + c \Rightarrow y = \frac{e^x}{x} + \frac{c}{x}, \quad (29)$$

Onde c, é a constante de integração.

3.2.6. Problema de Valor Inicial (PVI)

O problema de valor inicial, consiste na resolução de equações diferenciais de primeira ordem, que pode ser definida geometricamente em algum intervalo I, tal que o gráfico passe por um ponto (x_0, y_0) determinando que a equação:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (30)$$

Está sujeita a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$

Onde:

- x_0 – um número no intervalo I;
- y_0 – número real arbitrário.

Teorema 3.2.1. (Existência e unicidade de uma solução) Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se f(x,y) e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe um intervalo

I, centrado em x_0 e uma única função y(x) definida em I que satisfaz o problema de valor inicial.

3.2.7. Equações Lineares de Segunda Ordem

As equações lineares de segunda ordem são de grande importância no estudo das equações diferencias por duas razões: por ter uma estrutura teórica rica, implícita a diversos métodos sistemáticos de resolução e por elas serem essenciais para qualquer investigação séria das áreas clássicas da física matemática. É da forma

$$\frac{d^2y}{d^2t} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \tag{31}$$

Onde:

f – uma função dada

t – uma variável independente

y – uma variável dependente

Para a equação acima ser linear a função f deve ter a forma

$$f\ \left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y. \tag{32}$$

Assim, se f é linear em y' e y'' na equação acima, temos que g, p e q são funções especificadas da variável independente t, porém não depende de y, logo podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y \tag{33}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t) \tag{34}$$

Ou

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \tag{35}$$

3.2.8. Sistemas de Equações Diferenciais

Até agora discutimos uma única equação diferencial contendo uma função incógnita. Mas, o que frequentemente costuma acontecer na teoria e principalmente em aplicações é lidar com sistemas de equações diferenciais.

Em uma sistema equações diferenciais ordinárias duas ou mais equações envolvem as derivadas de duas ou mais funções incógnitas de uma variável independente. Por exemplo, se x e y denotarem variáveis dependentes e t denotar a variável independente, um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem será dado por:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y).$$

Uma **solução** de um sistema como o mostrado acima é um par de funções diferenciáveis $x = \emptyset_1(t)$ e $y = \emptyset_2(t)$, definidas em um intervalo I, que satisfazem cada equação do sistema nesse intervalo.

3.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COMO MODELOS MATEMÁTICOS

No ramo da matemática aplicada é frequentemente desejável descrever um comportamento ou fenômeno natural da vida real numa linguagem matemática, sejam eles fenômenos físicos, biológicos, sociológicos, ou ainda econômicos.

Nomeamos por *modelo matemático* a descrição matemática de um sistema ou fenômeno que se pretende a estudar. A construção de um modelo pode ser um processo simples, complexo ou até mesmo impossível, levando em conta que não basta apenas construir um modelo, mas sim, também, resolve-lo. Quanto mais próximo for a descrição do modelo da vida real mais difícil será sua resolução.

Um exemplo disso seria se queremos compreender os mecanismos de um determinado ecossistema por meio do estudo do crescimento de populações de animais num certo sistema, devemos construir um modelo que se adeque a situação, mas sempre levando em conta que apenas uma aproximação e que se essa aproximação for muito próxima da realidade vamos chegar a termos matemáticos provavelmente impossíveis de manipular ou resolver, tanto analiticamente como graficamente.

Nesse exemplo citado um modelo que melhor se adequa a essa situação é um que envolve equações diferenciais. A construção de equações diferenciais com modelos matemáticos é o foco desse trabalho tendo em vista que já estudado alguns dos métodos da resolução de equações diferenciais poderemos resolver alguns desses modelos.

Devemos lembrar que de acordo com Zill, D. G. e Cullen, M. R. (2001) a construção de um modelo matemático de um sistema começa a partir das seguintes etapas:

i) A identificação das variáveis responsáveis pela variação do sistema. Podemos a princípio optar por não incorporar todas essas variáveis do modelo. Quando nós fazemos isso, estamos especificando o **nível de resolução do modelo**.

ii) Logo após elaboramos um conjunto de hipóteses razoáveis ou pressuposições sobre o sistema que estamos tentando descrever. Essas hipóteses deverão incluir também quaisquer **leis empíricas** aplicáveis ao sistema.

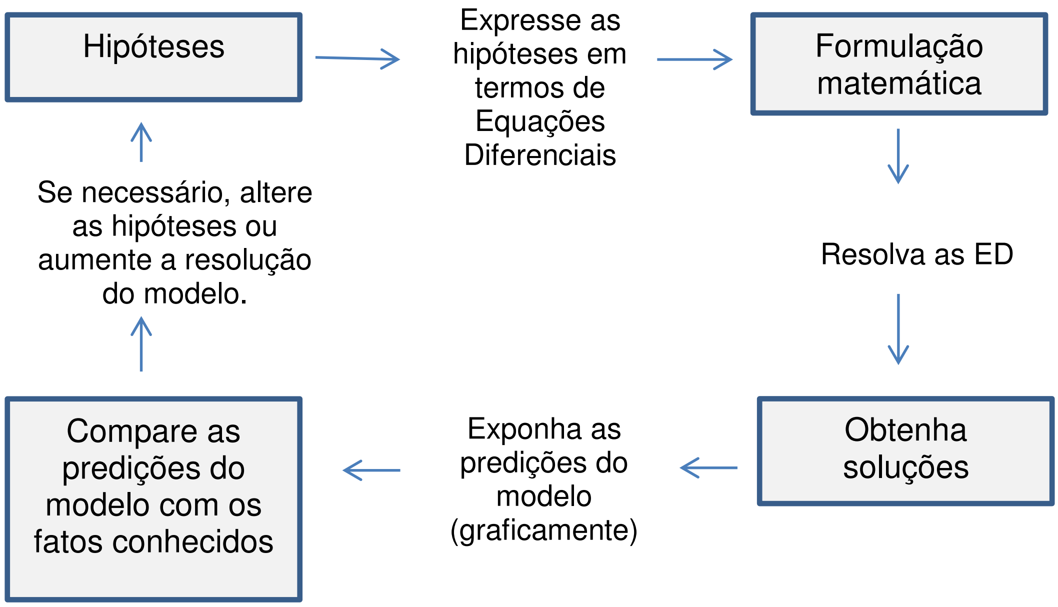
O nível de resolução do modelo varia de acordo com cada propósito, podendo ser de baixa até alta resolução. Por exemplo, em cursos básicos de Física, podemos nos contentar com um modelo de baixa resolução na modelagem do movimento de um corpo em queda nas proximidades da superfície da Terra, ignorando a força retardadora do atrito com o ar, agora, já para um cientista cujo trabalho é predizer precisamente o percurso de um projetil de longo alcance, terá que levar em conta, sim, a resistência do ar, ou ainda outros fatores da situação.

Sobre as leis empíricas aplicadas a modelagem do problema, temos que muitas vezes as hipóteses feitas da situação envolvem uma taxa de variação de uma ou mais variáveis, desse modo, a descrição matemática de todas essas hipóteses pode ser uma ou mais equações envolvendo derivadas. Ou seja, existe a possibilidade do modelo ser uma equação diferencial ou um sistema de equações diferenciais.

O importante, a saber, é que seja uma equação diferencial ou sistemas de equações diferenciais o modelo matemático, após ser formulado ou na maioria das vezes apenas usado, deve ser resolvido. A resolução dos modelos pode ser classificada como: modelo razoável, se suas soluções forem consistentes com dados experimentais ou fatos conhecidos sobre o comportamento do problema; e modelos cujas soluções obtidas forem pobres, quando não satisfaz os resultados esperados, com uma discrepância de erro muito distante da prevista.

Nesse sentido ao se estudar Modelagem Matemática o sujeito objetiva-se a construir/usar modelos capazes de descrever, representar ou exprimir, de fato, a situação real estudada, sendo essa uma das etapas mais difíceis do *processo de modelagem.*

Figura 3: Esquema das Etapas do Processo de Modelagem.



Fonte: Própria.

Um modelo matemático de um sistema físico frequentemente envolve a variável tempo *t.* Os valores da variável (ou variáveis) de *t* descrevem o sistema no passado, presente ou futuro.

4 APLICAÇÕES DE MODELOS POPULACIONAIS: DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Aqui, nesta seção, apresenta-se o contexto da investigação, os traços gerais metodológicos que essa pesquisa se deu, bem como, uma breve descrição dos objetivos deste estudo e a abordagem didática utilizada com o auxilio das ferramentas computacionais. Na sequência, descreveremos os instrumentos de coleta de dados utilizados para as aplicações propostas nesse estudo, à discussão dos resultados e por último, algumas considerações finais.

Este estudo, em geral, pontua todos os passos de um estudo teórico, se caracterizando como uma revisão da literatura. Apesar disso, nosso intuito em permear outras pesquisas desse campo de investigação e sintetiza-las é que a partir disso possamos trazer e apresentar possibilidades de ensino para a aprendizagem de EDO, por meio de uma abordagem diferenciada dos modelos matemáticos aqui apresentados, dentre vários outros que também podem ser explorados.

Para isso, traçamos metodicamente algumas atividades que se enquadram numa metodologia qualitativa, baseadas em literaturas de estudos sobre Equações Diferenciais Ordinárias, com um ponto de vista da matemática aplicada– Biomatemática.

Neste trabalho, primeiramente, faremos uso da Equação de Gompertz e a Equação de Verhulst para estudar o desenvolvimento de tumores sólidos, aplicações escolhidas para serem abordadas neste trabalho pelo fato de serem equações que envolvem EDO e também pela relevância do avanço que a matemática tem proporcionado para outras áreas do saber, como a Biologia e a Saúde.

Complementando, apresentamos ainda mais um modelo matemático, um que representa a ação de um determinado tratamento que tem por finalidade estabilizar o crescimento ou diminuir a substância de drogas no corpo humano. Para isso, utilizaremos parâmetros reais desse fenômeno biológico encontrados na literatura por Domingues (2010), Domingues (2011), O'Reilly et al. (1997), Sachs et al. (2001) e Spencer et al. (2004), pois o real interesse, aqui, é uma análise mais detalhada da situação investigada, voltada para sua abordagem como fator motivacional no ensino de matemática. O estudo foi desenvolvido em contexto de sala de aula, apesar de ainda não ser aplicado, trazemos como uma possibilidade de proposta metodológica.

> O quantitativo tem a ver com o objetivo passível de ser mensurável. Ele carrega consigo as noções próprias ao paradigma positivista, que destaca como pontos importantes para a produção da ciência a razão, a objetividade, o método, a definição de conceitos, a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa (BICUDO, 2004, p. 103).
> O qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções de respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências (BICUDO, 2004, p. 104).

Em outras palavras, pesquisas no paradigma qualitativo surgem como uma possibilidade para investigação. Nesta abordagem, a pesquisa pode ser concebida como uma trajetória inerente em torno do que se deseja compreender, não se preocupando exclusivamente com seus princípios, leis e generalizações, mas sim focando nos elementos que se constituem significativos para o pesquisador.

Nesta proposta consideram-se as ED como um instrumento para explorar modelos e resolver problemas e procura-se abordar, equilibrada e simultaneamente, representações gráficas, numéricas e simbólicas das equações e suas respectivas soluções.

Buscamos uma abordagem mais qualitativa das ED, trabalhando o conteúdo com maior ênfase na contextualização através de situações-problema passíveis de serem representadas por meio de ED.

No delineamento das atividades, procuramos explorar também questões conceituais, de modo a dar significado às EDO e às suas soluções. Nosso intuito é estimular os estudantes a mudarem o foco da simples manipulação analítica das equações, para a compreensão de seu caráter representativo.

Inicialmente exploramos a interpretação das EDO e o comportamento das soluções, contando com a ajuda de recursos computacionais para facilitar e agilizar o processo. E assim, simultaneamente ou não, abordamos as técnicas de solução analítica dos modelos aqui trabalhados.

4.1. MODELAGEM MATEMÁTICA NA BIOLOGIA: DINÂMICA DE CRESCIMENTO DE UM TUMOR

A Dinâmica de crescimento populacional é uma aplicação que sempre é abordada em cursos de Equações Diferenciais Ordinárias, quase sempre, logo na introdução do conteúdo, quando é apresentado a definição e os diferentes tipos de ED. Vale ainda ressaltar que, até mesmo em livros-texto didáticos dessa disciplina, como Boyce e DiPrima (2002) e Zill e Cullen (2001), são encontrados alguns modelos simples de crescimento populacional, onde são apresentados como exemplos de métodos simples de resolução para EDO.

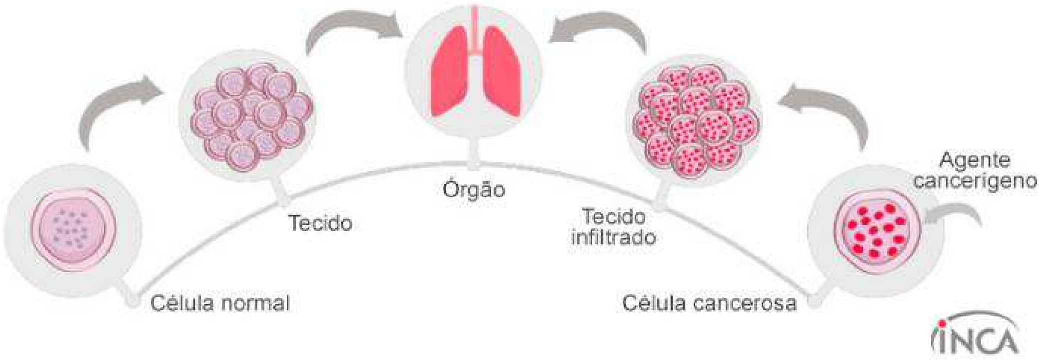
De fato, a dinâmica populacional já vem sendo estudada há anos por pesquisadores, não só da área de matemática pura/aplicada, mas também por estudiosos de áreas afins na qual a matemática pode ser aplicada e consequentemente oferecer bons resultados no mundo cientifico. (BASSANEZI, 2002)

A dinâmica populacional se dá ao processo de crescimento de certa população, podendo ser modelado, simplesmente, usando uma EDO, através de modelos que representam o comportamento da proliferação dessa população por meio de uma variável de interesse. Sendo assim, estes modelos podem ser aplicáveis a diversas situações, basta haver uma população e uma variação de tempo, abrindo um leque de possibilidades para diferentes aplicações.

Neste estudo, tratamos da dinâmica populacional de células cancerígenas no corpo humano, enfaticamente ao crescimento populacional de um tumor. Segundo o Instituto Nacional de Câncer – INCA (2018), o tumor é causado por um desequilíbrio no sistema de divisão celular, em outras palavras, o crescimento excessivo de células anormais que acabam causando um aumento de tamanho em algum tecido do corpo, e assim atingindo algum órgão. O tumor pode ser considerado benigno, quando não cancerígeno, ou maligno, quando afeta a saúde humana causando a doença responsável por cerca de 13% de todas as causas de mortes no mundo, o que representa aproximadamente sete milhões de pessoas doentes de Câncer. Ainda, segundo o INCA (2018), algo bastante alarmante dessa doença é o fato de como o tumor pode se desenvolver no corpo, podendo ser de forma lenta e gradativa ou com uma velocidade de multiplicação das células tão rápidas que acabam invadindo tecidos e órgãos, sejam vizinhos ou distantes, na área biológica conhecida como metástase.

Na figura a seguir são explanados alguns dos elementos principais envolvidos na dinâmica populacional de crescimento de um tumor.

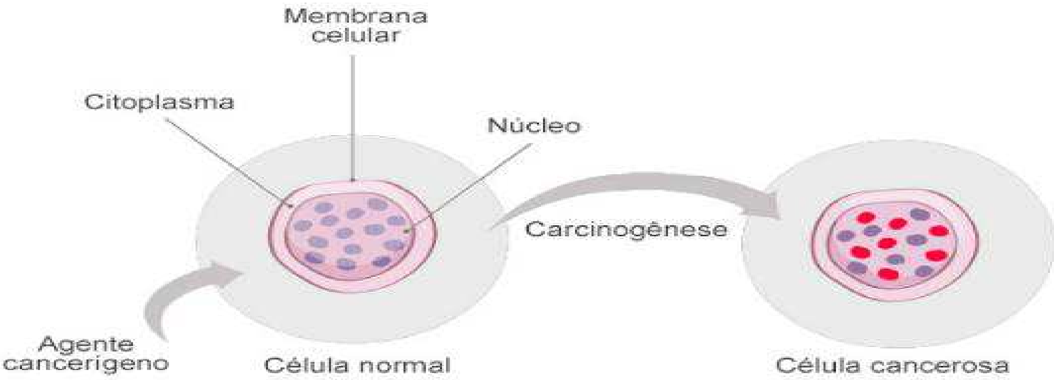
Figura 4: Elementos biológicos do tumor no corpo humano.



Fonte: INCA (2018).

Além disso, quando o individuo é diagnosticado com a doença logo surge a seguinte questão: como surgiu o câncer? Segundo INCA (2018), o câncer surge a partir de uma mutação genética, ou seja, de uma alteração no DNA da célula, que passa a receber instruções erradas para as suas atividades. As alterações podem ocorrer em genes especiais, denominados proto-oncogenes, que a princípio são inativos em células normais. Quando ativados, os proto-oncogenes tornam-se oncogênese, responsáveis por transformar as células normais em células cancerosas.

Figura 5: Conceitos biológicos no surgimento do câncer.



Fonte: INCA (2018).

E assim, essas alterações no DNA podem ser decorrentes da influência tanto de fatores genéticos como de agente externos, que segundo a União Internacional Contra o Câncer - UICC (2018) são classificadas em três categorias de carcinógenos:

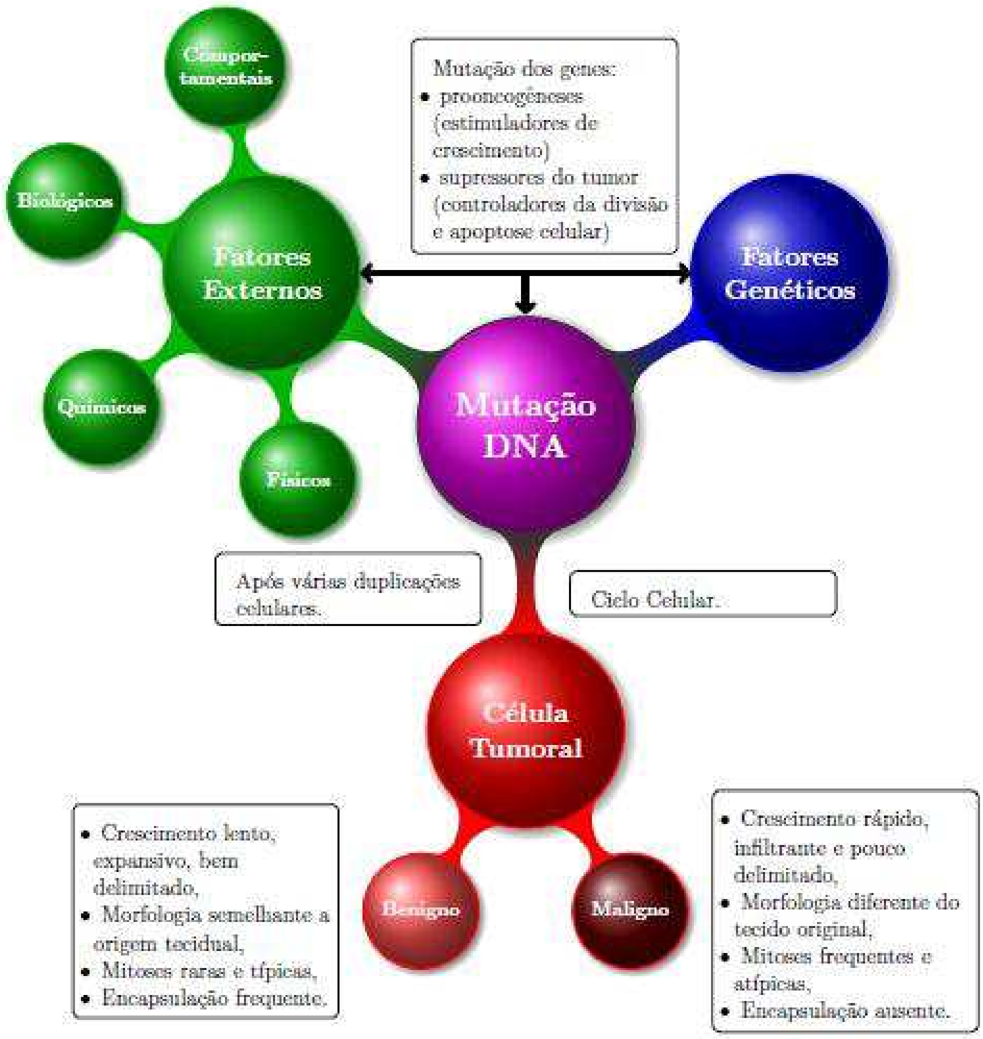
- Físicos (raios ultravioletas e radiação ionizante);
- Químicos (componentes advindos da poluição do ar, fumaça de tabaco, alimentos e água);

- Biológicos (advindos das infecções provocadas por vírus, bactérias e parasitas).

Independente da decorrência do fator do câncer, o paciente deve ser confirmado pelo resultado do exame histopatológico que dará um ponto de vista prognóstico e terapêutico da doença a partir daí deve-se iniciar uma anamnese que verificará o histórico familiar e o padrão de vida em relação à nutrição, trabalho, hábitos nocivos à saúde, como o consumo de tabaco e álcool, entre outros hábitos que também são fatores de risco da doença.

Em vista disso a UICC (2018) apresenta uma classificação da evolução tumoral para se determinar a melhor forma de tratamento do paciente.

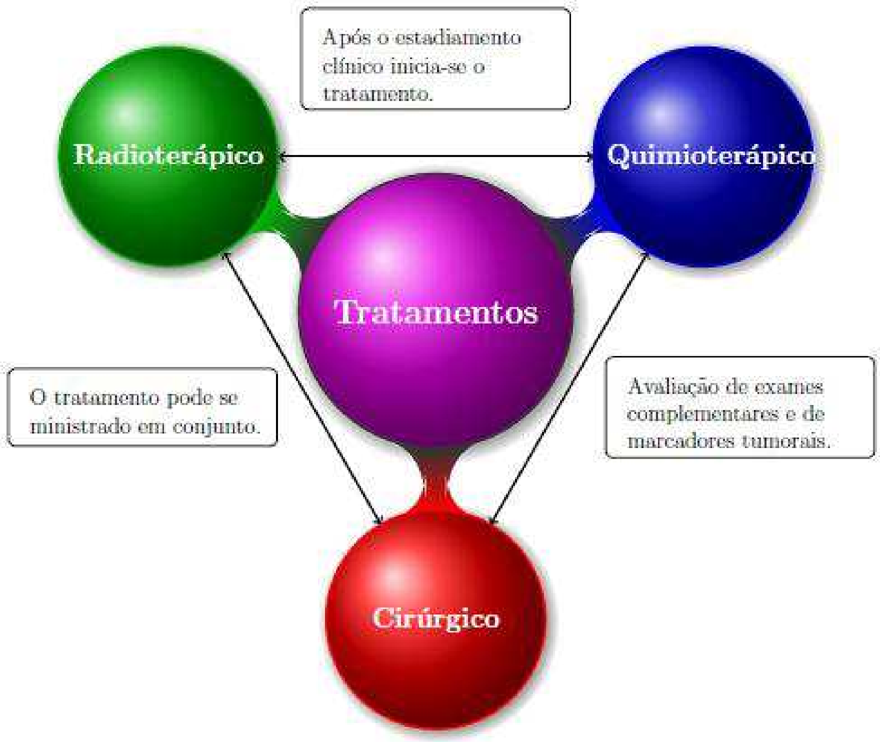
Figura 6: Diagrama dos fatores que levam a classificação da evolução tumoral benigna e maligna.



Fonte: UICC (2018).

Nesse sentido, quando o tumor é classificado clinicamente, é iniciado o tratamento, podendo ser: cirúrgico; radioterápico; e quimioterápico. Esses tipos de tratamento podem ser realizados em conjunto ou de forma singular, dependendo de sua importância no tratamento mais adequado ao paciente e de acordo com o processo de desenvolvimento da doença, bem como seus sintomas.

Figura 7: Diagrama dos tipos de tratamento da doença.



Fonte: UICC (2018).

O processo de desenvolvimento da doença ocorre de forma gradativa e passa pelas seguintes estágios (INCA, 2018):

i. Estágio de iniciação: onde a célula sofre e passa por vários estágios carcinógenos que provoca a modificação no DNA;
ii. Estágio de promoção: depois as alterações no DNA, a célula é transformada em uma célula maligna, gradualmente;
iii. Estágio de progressão: pela multiplicação descontrolada de células, esse estágio é caracterizado por progressivo, onde a doença já está instalada e evolui até as primeiras manifestações clinicas.

4.1.1. Crescimento de Tumores: Modelo de Gompertz

Com base no exposto, nossa primeira aplicação, aqui, a ser abordada é justamente o crescimento tumoral, a partir do modelo de Gompertz. Beijamin Gompertz, no ano de 1938, desenvolveu uma equação muito famosa, pois mesmo como matemático, se interessou em fazer um estudo que até então naquela época era pesquisado apenas em áreas biológicas. O matemático, com o intuito de entender mais sobre a doença conseguiu descrever o crescimento de tumores sólidos com um modelo denominado Equação de Gompertz (DOMINGUES, 2010).

Pode-se encontrar na literatura várias formas de apresentação desse modelo atualmente, pois, deve-se considerar que o modelo de Gompertz não foi o primeiro e nem o único a ser construído e desenvolvido ao decorrer da história. Na verdade, os estudos sobre crescimento populacional começou a ser estudado há décadas antes, um exemplo disso é um modelo bastante conhecido que foi apresentado pelo economista inglês Thomas Malthus no ano de 1798, que até hoje é considerado como um modelo percursor que deu suporte a criação de vários outros que foram e são ainda usados e aperfeiçoados conforme a demanda de novas pesquisas científicas, alguns desses modelos supracitados podem ser encontrados em um dos capítulos da obra de Bassanezi (2002), intitulado por *Evolução de Modelos*.

Neste trabalho, consideramos o modelo de Gompertz da forma escrita em uma de nossas referencias (BOYCE; DIPRIMA, 2002), porém levando em conta algumas modificações em relação à notação de parâmetros, que também é colocada segundo nossa referência de aplicação, Domingues (2011), dada por:

$$\frac{dN}{dt} = -r\, N \ln\left(\frac{N}{K}\right) \tag{36}$$

onde:

$N(t)$ é a população de células tumorais no instante t;

t é o instante considerado para cada quantidade de população de células;

r é a constante positiva de crescimento interno da célula;

K é o tamanho máximo que o tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis, ou seja, nossa capacidade de suporte.

Agora, apresenta-se a solução usando alguns métodos para a resolução de uma EDO, citados no capitulo três. Temos:

$$\frac{dN}{dt} = -r\,N\ln\left(\frac{N}{K}\right) \tag{37}$$

Fazendo uma mudança de variável, tem-se:

$$u = \ln\left(\frac{N}{K}\right) \Rightarrow N = Ke^{u} \tag{38}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} = Ke^{u}\frac{du}{dt}$$

Substituindo em (37)

$$Ke^{u}\frac{du}{dt} = -ruKe^{u} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -ru \tag{39}$$

Separando as variáveis e integrando, tem-se:

$$\frac{du}{u} = -rdt \Rightarrow \int\frac{du}{u} = -\int rdt \tag{40}$$

$$\ln(u) = -rt + C \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{K}\right) = e^{-rt}e^{C} \tag{41}$$

$$N = Ke^{e^{-rtc}} \tag{42}$$

E sendo $N(0) = N_0$

Logo,

$$N(t) = Ke^{-e^{rt}\ln\left(\frac{N_0}{k}\right)} \tag{43}$$

que é solução do PVI:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN\ln\left(\frac{K}{N}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Agora, nesse momento, devemos levar em consideração os conhecimentos prévios e específicos sobre os conceitos biológicos acerca do crescimento de um tumor no corpo humano. Pois, tendo em vista que as populações de células com anomalia não podem ser excedidas por certo limite suporte de células tumorais. Assim, um dos parâmetros do modelo, traz-se, então, um estudo de Friberg e

Mattson (1997), no qual a carga letal de células tumorais está entre 10^{12} – 10^{13} células.

Desse modo, assim como Domingues (2011), consideremos para os cálculos, que a capacidade de suporte será $K = 10^{13}$ células.

Os parâmetros da solução da equação de Gompertz utilizados neste trabalho são reportados na literatura, Domingues (2011).

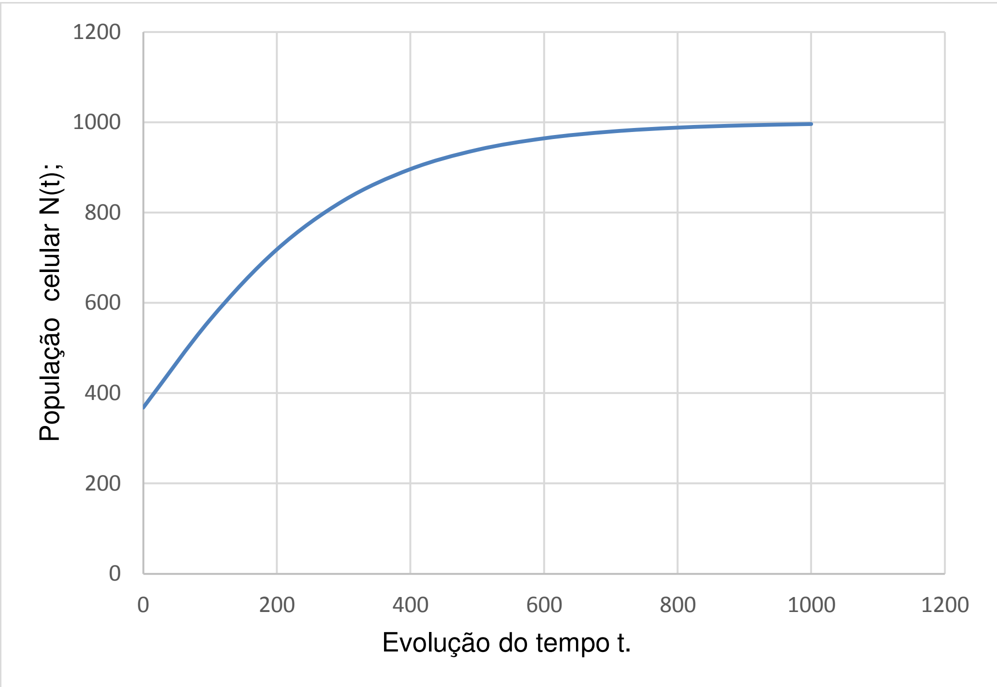
- $r = 0,0060$;
- $K = 10^{13}$;
- $N_0 = 10^9$.

Logo, a equação (43) com esses valores citados torna-se:

$$N(t) = 10^{13}e^{-e^{-0,0024\ln(10)t}} \tag{44}$$

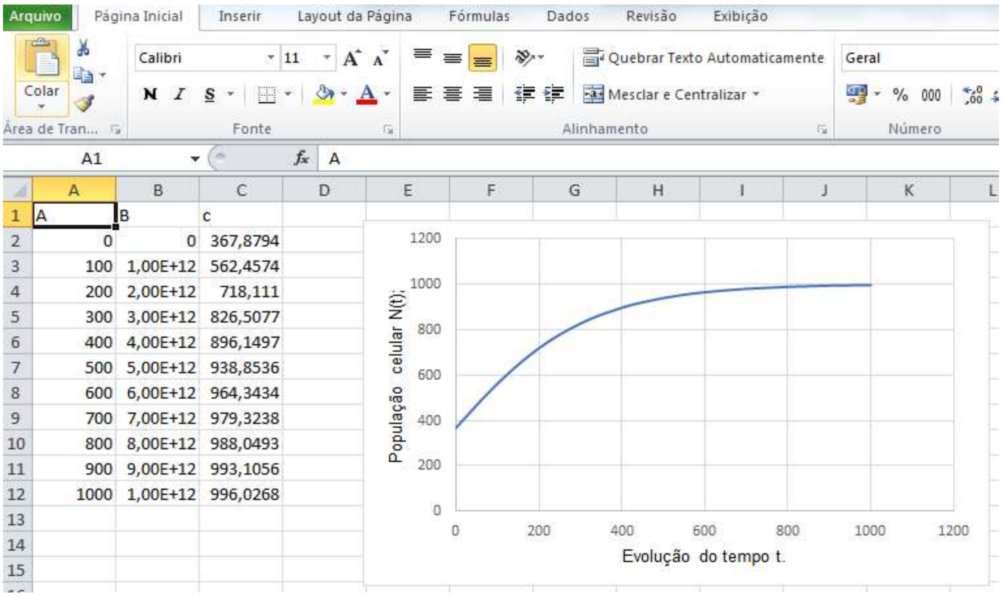
E assim pode-se representar graficamente e analisar esta solução. Primeiramente, com o auxilio da ferramenta Excel, construímos o gráfico da evolução temporal de crescimento populacional descrito pelo modelo de Gompertz, de acordo com os dados e estudos realizados em Domingues (2011), posteriormente uma análise comparativa de resultados.

Figura 8: Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais – Modelo de Gompertz.



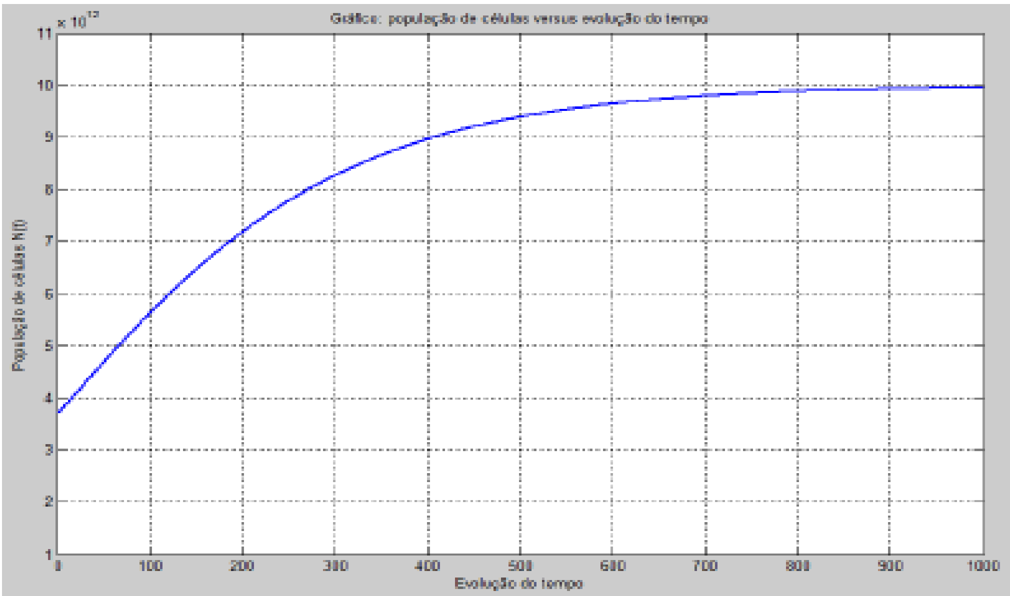
Fonte: Próprio autor.

Figura 9: Construção do Gráfico da evolução tumoral pelo modelo de Gompertz.



Fonte: Próprio autor.

Figura 10: Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais.



Fonte: Adaptado de Domingues (2011).

É possível perceber graficamente que, normalmente, o crescimento do tumor pode ser considerado com uma taxa de crescimento acelerado ou controlado das células, pela contextualização da aplicação sabe-se que essa variação só se torna possível se existir ou não um fator de tratamento inibidor.

Nesse sentido, apresenta-se a seguir mais uma aplicação de Domingues (2011), no qual, dessa vez, foi realizado um estudo computacional onde é inserido um fator de tratamento baseado em *endostatina* e, assim, percebe-se que tal fator, teoricamente, impede o crescimento acelerado das células, mas para um determinado tempo *t* suficientemente grande, mesmo com o tratamento, alcançará a capacidade suporte, algo que graficamente com o auxilio de recursos digitais pode-se "ver" e entender de forma mais concreta a diferença entre as duas situações de crescimento.

4.1.2. Crescimento de Tumores: Modelo Logístico

É sabido, que inicialmente a equação que descreve o crescimento ou decrescimento de populações foi dada pelo modelo de Malthus no ano de 1798, cujo modelo é descrito por:

$$\frac{d(P)}{d(t)} = kP, com\ k > 0.$$

onde, a população em relação ao tempo apresenta um crescimento exponencial não limitado. Assim, essa equação diverge substancialmente do previsto, o que torna o modelo não tão eficaz para algumas aplicações que necessitam de resultados mais precisos ou mais próximos da realidade.

Nesse sentido, surge o biólogo-matemático Pierre François Verhulst, um matemático belga que introduziu a equação de crescimento logístico onde a população deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar num determinado valor. O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando a variação de crescimento dependendo da própria população em cada instante e satisfazendo algumas propriedades (BASSANEZI, 2002).

Em nossa referência conceitual, Bassanezi (2002), encontra-se o modelo de crescimento logístico, também denominado por Equação de Verhulst, dada por:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), com\ k > 0$$

onde $a\ e\ b$ são constantes positivas, as quais complementam a equação do crescimento populacional exponencial proposto por Malthus que produz taxas infinitas de populações com o crescimento do tempo que pode vir a descrever bem inicialmente, mas para tempos suficientemente grandes foge da realidade das populações reais.

Para nosso estudo, corroborado por Domingues (2011), usaremos o modelo de crescimento logístico, apresentado por Verhulst em 1838, porém adaptado nos moldes de nossa aplicação, crescimento de tumores, que é dado por:

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \tag{45}$$

Observe que se usássemos o modelo de crescimento de tumor pelo estudo de Malthus seria:

$$\frac{dN}{dt} = rN \tag{46}$$

O qual tem como solução, por separação de variáveis, e sendo a condição inicial *N*(0) = n_0, a função:

$$N(t) = n_0\, e^{rt} \tag{47}$$

E utilizando os dados reportados por Domingues (2011), a equação fica da seguinte forma:

$$N(t) = 10^{13}\, e^{0{,}006t} \tag{48}$$

Entretanto, observa-se que para $t \to \infty$, $N(t) \to \infty$ que para o crescimento tumoral não e real para tempos indefinidamente grandes. E já, para o modelo logístico, isso não acontece como vemos ao resolvermos a equação.

Sendo *N*(0) = n_0, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)N \\ N(0) \end{cases}$$

De fato,

$$\frac{dN}{dt} = r\left(\frac{K-N}{K}\right)N \Longrightarrow \frac{K}{N(K-N)}dN = r\,dt \tag{49}$$

Por frações parciais, temos que:

$$\frac{K}{N(K-N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K-N} \tag{50}$$

Assim, integrando ambos os membros da equação, temos-se:

$$\int\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{K-N}\right)dN-\int r\,dt$$

$$\int\left(\frac{1}{N}\right)dN+\int\left(\frac{1}{K-N}\right)dN=rt+C$$

$$\ln N-\ln(K-N)=rt+C$$

$$\ln\left(\frac{N}{K-N}\right)=rt+C$$

$$\frac{N}{K-N}=e^{rt}.e^{k}\Longrightarrow N=(K-N)e^{rt}.e^{C}$$

$$\Longrightarrow N=Ke^{rt}.e^{C}-Ne^{rt}.e^{C}$$

$$\Longrightarrow N+Ne^{rt}.e^{C}=Ke^{rt}.e^{C}$$

$$\Longrightarrow N(t)=\frac{Ke^{rt}.e^{C}}{1+e^{rt}.e^{C}} \qquad (51)$$

E das condições iniciais e fazendo os ajustes necessários, a solução do PVI é dada por:

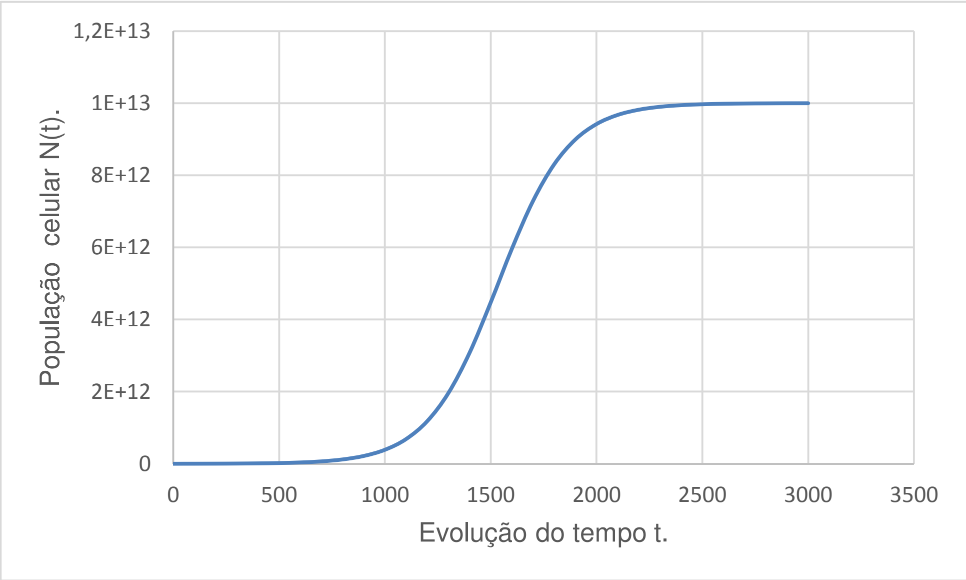
$$N(t)=\frac{KN_0}{N_0+(K-N_0)e^{-rt}} \qquad (52)$$

Como os dados já citados anteriormente, a equação (52) fica da seguinte forma:

$$N(t)=\frac{10^{22}}{10^{9}+(10^{13}-10^{9})e^{-0,006t}}, \qquad (53)$$

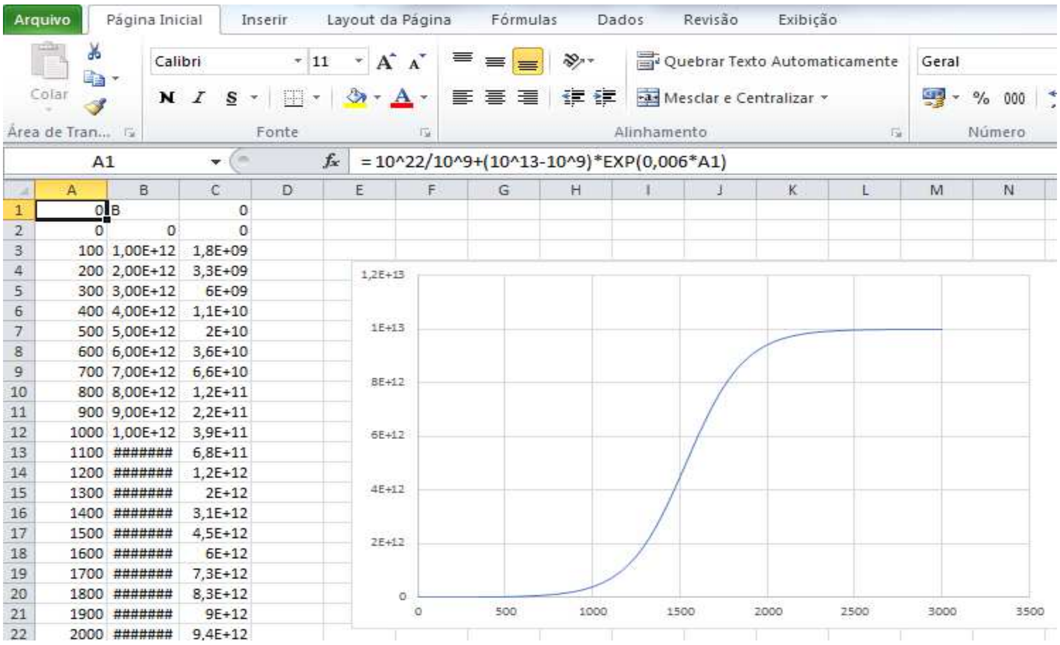
Que, de acordo com nossas aplicações, tem como representação gráfica:

Figura 11: Gráfico da Evolução Tumoral – Modelo Logístico.



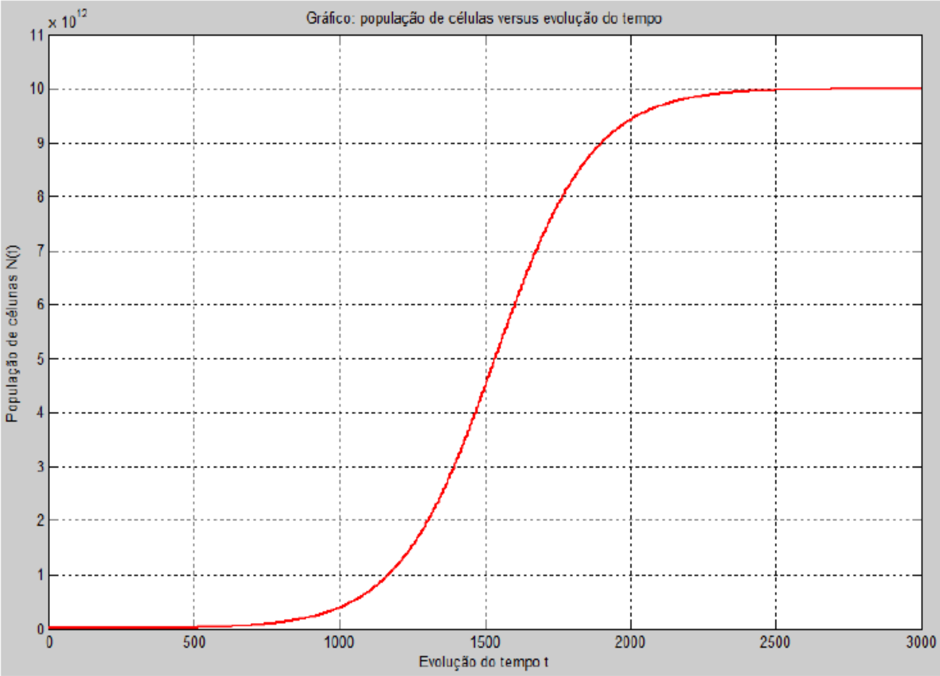
Fonte: Próprio autor.

Figura 12: Construção do Gráfico da evolução tumoral pelo modelo de Verhulst.



Fonte: Próprio autor.

Figura 13: Gráfico da evolução temporal de crescimento populacional de células tumorais - Modelo logístico.



Fonte: Domingues (2011).

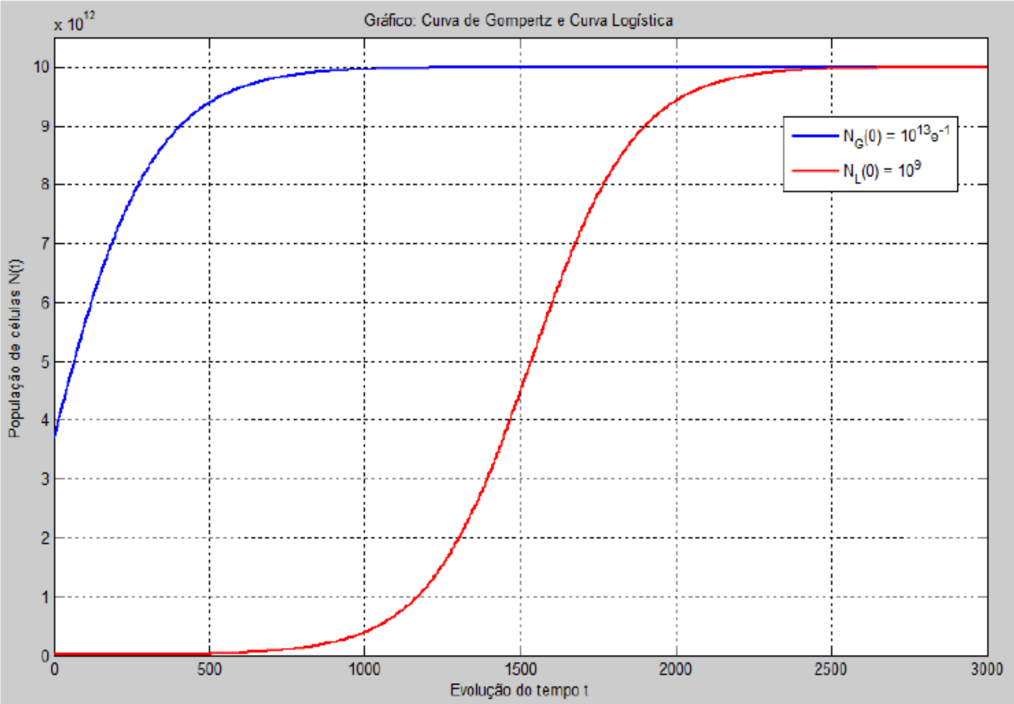
Geometricamente, pode-se observar que, diferente do modelo de crescimento exponencial, já mencionado, quanto $t \to \infty$ temos que $N(t) \to 10^{13}$. Em outras palavras, para um tempo suficientemente grande, a população de células tumorais tende para a capacidade de suporte *K*. E isso, mesmo com o modelo não contendo um fator de tratamento que, como já dito, impede o crescimento acelerado das células.

Para ambos modelos, para $t \to \infty$, a população de células tende a capacidade suporte. Porém, graficamente, observa-se que há diferenças na evolução das células tumorais com o tempo.

No modelo logístico, a população de células cresce bem mais lentamente do que o modelo de Gompertz. Entretanto, para um tempo suficientemente grande, tendem a capacidade de carga. Como apresentado em Domingues (2011), o gráfico abaixo apresenta ambos os modelos plotados no mesmo plano, no qual é possível ver graficamente a diferença que até então é expressa de forma algébrica.

Observe no gráfico abaixo que, inicialmente, o modelo de Gompertz tem crescimento rápido, já o modelo logístico forma uma curva chamada *sigmóide*, onde para tempos iniciais o crescimento é mais lento. Vale destacar também que o modelo logístico, ao analisar graficamente, demora, praticamente, duas vezes e meia a mais que o modelo de Gompertz para chegar à capacidade suporte.

Figura 14: Gráfico da evolução temporal: Modelo de Gompertz e Modelo logístico.



Fonte: Domingues (2011).

Lembrando que para ambos os modelos apresentados neste capitulo, não partimos de hipóteses iniciais e nem levantamento de dados conforme as etapas da modelagem descritas por Bassanezi (2002). Denominamos essas ações por *experimentação* e *abstração*, já que apresentamos a problemática já modelada. Visto que, com os modelos descritos por equações diferenciais ordinárias, passamos a resolvê-lo analiticamente com as técnicas de resolução apresentadas no capitulo três, etapa esta denominada por *resolução*. Já a *validação* se dá ao compararmos e revisarmos ambos modelos com os estudos de Domingues (2011) e, por fim, a *aplicação* com o auxilio das mídias digitais nos permitiu fazer reflexões acerca da situação tanto algebricamente quanto graficamente.

Portanto, percebe-se um papel bastante importante na formação curricular de um aluno de matemática, como também para um futuro professor, pois vemos que é possível ir além dos termos algébricos, tratar a matemática como meio e não apenas como um fim, a aplicação ganha sentido e gera dados importantes para a tomada de decisões, principalmente, em situações como essas, a precisão e a necessidade de fornecer um tratamento adequado para o paciente ou até mesmo para previsões de crescimento muito descontrolados no ponto de vista biológico.

4.2. ABSORÇÃO DE DROGAS (MEDICAMENTOS)

Nesta seção, assim com a anterior, buscamos tratar da dinâmica populacional numa abordagem diferenciada, a partir do auxilio das mídias digitais e que também a contextualização e aplicação sejam abordadas no ensino superior de modo a motivar os alunos acerca dos estudos de Equações Diferenciais Ordinárias e ainda diminuir suas inquietações ao se questionarem o porquê de estudar tal conceito. Por isso, apresentamos agora outro modelo bastante relevante em termos de aplicações tanto para matemáticos ou não matemáticos quando se questionam: “Como a droga (medicamento) é absorvida no sangue?”.

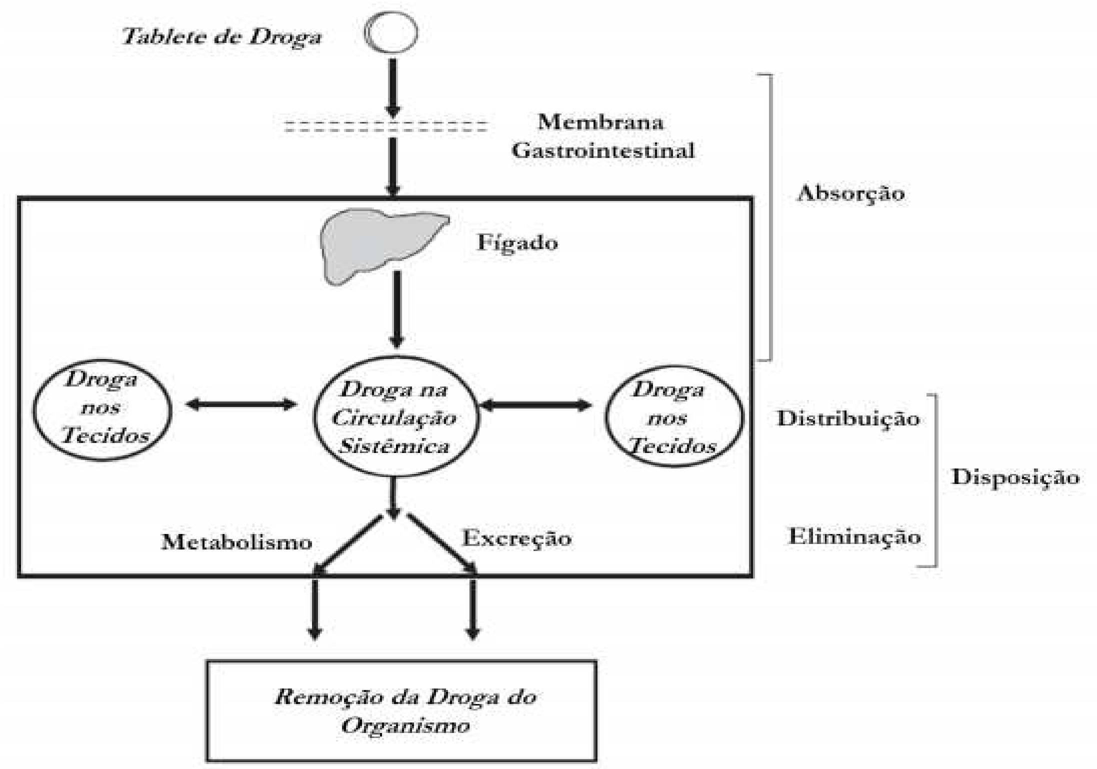
Agora, trataremos de um modelo também envolto na dinâmica populacional com aplicação na Biologia, que explica matematicamente o funcionamento da absorção de drogas no organismo. Através deste estudo é possível tirar algumas dúvidas de nosso dia a dia e entender o motivo para o qual tomamos uma medicação de tempos em tempos, por exemplo, de oito em oito horas, doze em doze horas e etc. Nesta aplicação, temos que a taxa de queda do efeito da medicação se dá por uma função exponencial decrescente (BASSANEZI, 2002).

Para este estudo, apresenta-se a farmacocinética como a área que realmente estuda a absorção e o tempo de absorção de drogas no organismo, cujo objetivo é estudar o caminho percorrido pelo medicamento no organismo desde sua administração ate sua eliminação.

A partir do momento que um medicamento é ingerido no organismo de um ser humano, é realizado um processo simples que se dá: primeiramente através da via de administração, a absorção do medicamento; em seguida ela se distribui pelo organismo; logo após ocorre a chamada biotrasnformação; e finalmente a excreção. Todo esse processo se dá à quantidade de dose que for ingerida, na qual a mesma determina a concentração química do composto e suas devidas ações nos locais preditos Rosebaum (2011).

Na figura (15), a seguir, apresenta-se um esquema montado por Rosebaum (2011), na tentativa de mostrar visualmente esse processo baseado em alguns conceitos clínicos e biológicos, divididos em *absorção, distribuição, metabolismo* e *eliminação*.

Figura 15: Processo de absorção de uma droga.



Fonte: Rosebaum (2011).

- **Absorção:** transferência da droga do local de administração para o plasma sanguíneo.
- **Distribuição:** transferência da droga do sangue para o local de ação, dependendo da perfusão sanguínea, da associação da droga às proteínas plasmáticas, dos componentes de tecidos e da permeabilidade da droga na membrana plasmática.
- **Metabolismo:** processo em que a droga se transforma em outras espécies químicas, denominadas metabólitos.
- **Eliminação:** remoção das drogas pelos rins.

A droga citada nesse trabalho se refere a uma substância química que altera o processo fisiológico ou bioquímico no corpo humano, usada como medicamento. Quando usada como tal, há uma grande preocupação na frequência de administração e da rota do fármaco na previsão de efeitos colaterais que a droga pode proporcionar, como também em sua eficácia ao decorrer do tratamento.

Por isso, antes de realizar tal aplicação surge a necessidade de entender todas as informações que se refere aos processos e etapas, desde a entrada até a eliminação de tal substancia. Todos estes parâmetros variam de acordo com o paciente, levando em conta sua idade, sexo e massa do individuo Rosebaum (2011).

Mas, em essência, o que tudo isso tem haver com a Matemática? Com base no exposto, percebe-se que a absorção de drogas envolve uma dinâmica, especificamente, uma função de ações que tendem a decrescer. Por isso, tal área de estudo é denotada por Farmacodinâmica, de origem, Pharmacodynamics, onde Pharmacos significa droga e Dynamics variação de intensidade, portanto, o estudo dessa área visa analisar a resposta do organismo de acordo com a variação do fármaco.

O que mostra, por alguns pesquisadores em atividade na área, a relevância dessas pesquisas, pois a partir delas é possível determinar o tratamento adequado para a necessidade de cada individuo, visto que, para cada ser e faixa etária são necessárias doses distintas e até mesmo reajustes quando preciso.

Sendo assim, a matemática fornece através da modelagem matemática diversos modelos matemáticos de sistemas biológicos que são desenvolvidos para simular o comportamento de um organismo vivo, exposto a determinadas condições. Aqui nos detemos a um modelo que farmacocinético que descreve a função da dose e do tempo, dada por um modelo apresentado em Bauer (2008), que é:

$$C_P = f_{pk}$$

- C_P representa a concentração plasmática.
- f_{pk} uma função farmacocinética.

O funcionamento do modelo é simples. A primeira dose aplicada no instante t_0 tem como concentração de droga no sangue zero e a consequência é a distribuição no organismo. Disso ocorre a biotransformacão ou metabolização, como já citados, aumentando a concentração da substância no organismo. Porém, há um determinado momento em que a concentração para de aumentar havendo, assim, um declínio do efeito.

Passado esse determinando instante de tempo, precisamos no instante t_1 tomar uma nova dose da droga e o processo vira um ciclo. Diante desse fato é que os médicos indicam de quanto em quanto tempo precisamos tomar certo medicamento.

Caso não tivermos essa regulamentação precisa para ingerir a medicação podemos correr diversos riscos se não respeitarmos os instantes de tempo corretos, como por exemplo, insuficiência renal e hepática, respostas cínicas não adequadas, entre outras situações mais graves.

Portanto, o interesse do modelo farmacocinético é nos inferir das seguintes situações:

- Estudar o tempo entre a entrada e "saída" de um medicamento no organismo;
- Verificar o pico de concentração máxima da droga no sangue e a partir disso analisar o decaimento do efeito no organismo;
- Comparar as respostas dos diferentes tipos de aplicações da droga (oral, sublingual, intravenosa, intramuscular, entre outras);
- Estudar os possíveis acontecimentos caso ocorra o esquecimento de tomar a medicação ou toma-la antes do tempo correto;
- Entre outras situações que possam ocorrer.

Apesar de existirem diversos modelos, cada um com sua área de interesse, o modelo estudado neste trabalho é baseado apenas no decaimento do efeito da droga no sangue em função do tempo.

Supondo que a taxa de variação da concentração é proporcional a concentração existente na corrente sanguínea em cada instante t e sabendo que a dosagem (da concentração) inicial seja $C(0) = C_0$, então matematicamente, temos:

$$\frac{dC}{dt} = -\gamma C \tag{54}$$

onde,

- $C(t)$ e a concentração de droga (medicamento) no sangue;
- C_0 e a dosagem inicial ministrada absorvida pelo sangue;
- t e o tempo de ação da concentração;
- $-\gamma$ e a constante de proporcionalidade negativa (devido ao decaimento da concentração da droga no sangue).

Da mesma forma que o modelo anterior, a solução se da por separação simples de variáveis. Assim, temos:

$$\frac{dC}{dt} = -\gamma C \implies \int \frac{dC}{C} = \int_{t0}^{t} -\gamma dt$$

$$\implies \ln(C) = -\gamma(t - t_0) + k$$

$$\implies \mathrm{C(t)} = e^{-\gamma(t-t_0)} \cdot e^{K}$$

Como $C(0) = C_0$

$$\implies \mathrm{C(t)} = C_0 \, e^{-\gamma(t-t_0)}$$

Que é a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN \ln\left(\dfrac{K}{N}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Baseado em nossa referência Bauer (2008), para encontrar o valor de γ é necessário saber o tempo de meia-vida $t_{1/2}$ biológico, que é o tempo em que a concentração do fármaco cai pela metade do seu valor inicial.

Logo, em $C(t) = \frac{1}{2}c_0$, obtemos o tempo de meia de vida que é dado por:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\gamma}$$

Como exemplo, disposto em Bassanezi (2002), temos um medicamento, *Fenobarbital*, princípio ativo do Gardenal, no qual tem como tempo de meia-vida entre 50−140 minutos em uma pessoa adulta. De acordo com os estudos farmacológicos, entre 4 e 6 meias-vidas o medicamento quase atinge sua concentração máxima plasmática e quanto mais curta for a meia-vida, mais rápido alcança-se a concentração máxima. É evidente que a cada dose aplicada do medicamento ele possui um período de tempo de ação no organismo e sendo eliminado durante tal período.

Sendo assim, foi aplicada a ação do Fenobarbital com uma concentração inicial $C(0) = 0{,}03mg/ml$ em um adulto de acordo com a bula do medicamento e

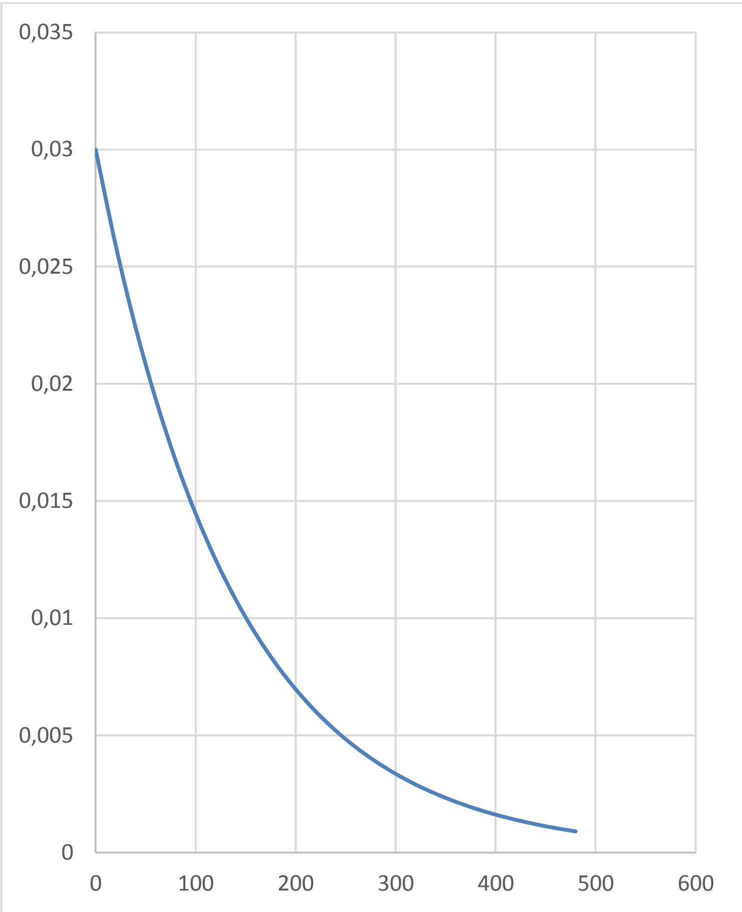
$\gamma = -0{,}007296$ por intermédio de um tempo de meia-vida de 95 minutos nos fornecendo a seguinte equação:

$$C(t) = 0{,}03e^{-0{,}007296(\mathrm{t}-t_0)},$$

onde t_0 e o tempo inicial do intervalo na primeira dose da medicação ou na dose após a queda do efeito da mesma. Por exemplo, para o intervalo de tempo em minutos [0, 480], $t_0 = 0$ e para o intervalo [480, 960], $t_0 = 480$ e assim por diante.

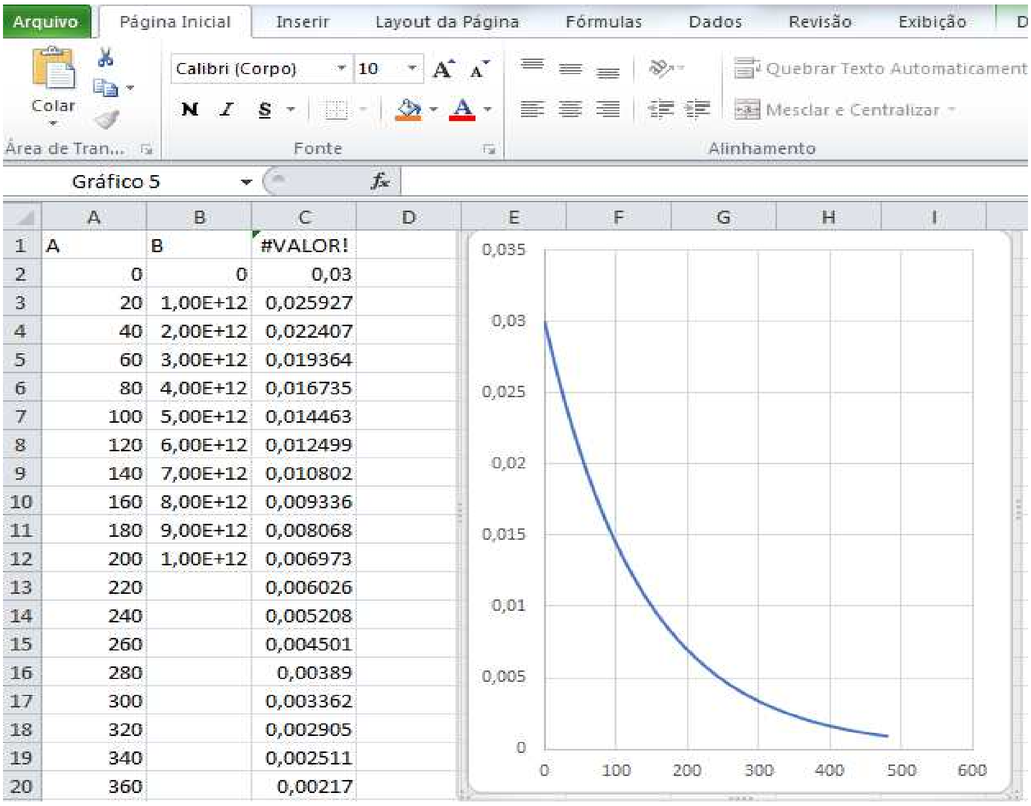
O gráfico da função *C* (concentração de droga no sangue) é representado pela figura abaixo:

Figura 16: Gráfico de concentração versus tempo.



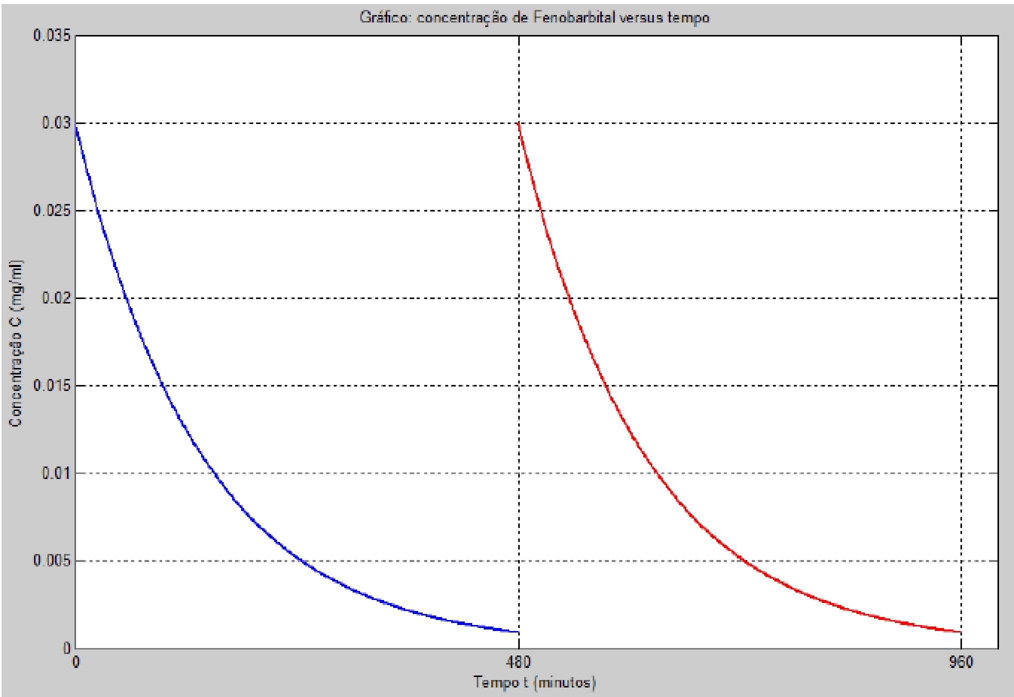
Fonte: Próprio autor.

Figura 17: Construção do Gráfico de concentração versus tempo.



Fonte: Próprio autor.

Figura 18: Gráfico de concentração versus tempo.



Fonte: Adaptado de Bauer (2008).

Dessa forma, com esse exemplo a partir da aplicação gráfica é possivel perceber mais claramente que a cada 480 minutos (8 horas) uma nova dose de *Fenobarbital* é aplicada, ou seja, o tempo inicial de aplicação é a cada 480 minutos e a partir de então a concentração da medicação decai em função do tempo.

Observe que para *t* suficientemente grande, a concentração da medicação tende a concentração inicial, então o paciente, no tempo designado, tem que tomar outra dose, criando, assim, um ciclo até o fim do tratamento estipulado pelo médico responsável.

Portanto, essa aplicação desenvolvida com o auxilio das mídias digitais se encaixa, de acordo as etapas descritas por Bassanezi (2002) de atividades de modelagem matemática, como uma resolução, visto que também não partirmos de levantamento de dados e hipóteses iniciais e sim da problemática já modelada. E assim, com os resultados obtidos, passamos a verificar a *validação* a partir da *aplicação* por comparar a solução do modelo com a bula do medicamente, utilizada no exemplo descrito em Bassanezi (2002), no qual indica que a concentração plasmática máxima ocorre em adultos, dentro de aproximadamente oito horas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao propor essa pesquisa, a intenção de conectar ou, ao menos, tentar aproximar o conhecimento matemático com a arte de ensinar, de forma a colher resultados satisfatórios e significativos na aprendizagem discente, ainda em formação inicial do professor, sempre foi à essência que motivou a realização desse trabalho.

Apesar, de que nessa trajetória não fosse possível entrar em contato direto com alunos, o desejo de entender e compreender as possibilidades e limitações das ideias que permeiam este estudo através de uma revisão de literatura foi algo imprescindível para amadurecer pressupostos, indagações e questionamentos que ainda nos inquietavam.

Neste trabalho, foi possível evidenciar que o ensino da disciplina de Equações Diferenciais, em cursos do ensino superior, já teve grandes avanços conforme nas obras expostas e discutidas de pesquisadores que privilegiam esta área da Matemática, porém ainda há muito a trilhar, em vista de um ensino com significados para a demanda de alunos que temos atualmente.

O que só fortalece e justificativa a razão de realizar esse trabalho, quando buscamos investigar o quanto as ferramentas tecnológicas podem contribuir para os estudos de ED através de uma abordagem além da algébrica, ou seja, as possibilidades de abordar modelos matemáticos e suas aplicações através de um tratamento geométrico e gráfico, tornar, o que às vezes, abstrato, visível.

Sabemos que normalmente, o conteúdo da disciplina de Equações Diferenciais, em geral, se delimita a apresentação da definição, posteriormente são desenvolvidas técnicas de resolução analítica dessas equações e, isso quando, são abordadas algumas aplicações, retiradas de livros de texto, o que não deixa de também ser importante na aprendizagem matemática.

Entretanto, pesquisam também mostram que devemos ir além, as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem deste conteúdo e de todo rigor conceitual e algébrico que a disciplina requer, é realidade em boa parte dos estudantes que a cursam, com isso vem à desmotivação em estudar tais conceitos, reforçando, desse modo, a importância da introdução da contextualização e situações-problemas às quais os alunos sejam capazes de atribuir algum significado, isso é essencial para/com essa problemática.

Nesse sentido, nos concentrávamos não apenas na resolução de uma EDO, mas sim no comportamento de suas soluções, visto que, o foco não era mais apenas resolver uma equação com técnicas preditas e sim modelos que a partir de uma contextualização numa situação-problema se desperta a necessidade e a preocupação de, além de resolvê-las cuidadosamente em termos algébricos, compreender sua resolução e consequente sua solução para que pudesse ser fazer sentido na aplicação. Para isso as mídias tecnológicas se tornam fator fundamental nesse processo de desenvolvimento cognitivo.

Nas aplicações foram apresentados dois modelos matemáticos, sendo o primeiro, o Modelo de Gompertz e o segundo, o modelo de Verhulst, também conhecido por Modelo Logístico. Modelos já desenvolvidos para descrever o crescimento populacional de tumores, mas que agora foi trabalhado numa abordagem, além da algébrica, a gráfica e numérica, baseadas em estudos de Domingues (2011), na qual pudemos ver o que havia por trás de tantos termos analíticos. Vale ainda, ressaltar a importância do papel do software nessa questão, pois a partir dele pudemos também desenvolver algumas atividades do processo de modelagem matemática, expostas por Bassanezi (2002), como validar tais modelos através de sua aplicação.

Além disso, em outra aplicação buscamos compreender a queda da concentração da medicação na corrente sanguínea via modelo simples em que sua solução dá-se por separação de variáveis. E explorando, buscamos informações do medicamento Fenobarbital e estudamos algébrica e graficamente a queda de concentração desta medicação na corrente sanguínea.

Do que apresentamos nesta pesquisa, sugerimos, para cada modelo nas áreas do conhecimento abordadas, a criação de sequências didáticas para o ensino de EDO por meio da Modelagem Matemática em consonância com as tecnologias da Informação e Comunicação. Como dito na Introdução, não estamos defendendo o ensino deste tópico matemático sem seu enfoque formal, mas que tenha a possibilidade de apresentar aplicações das equações diferenciais, pois elas surgiram, justamente, para resolver problemas de outras ciências. Tornar isso fato em sala de aula é fundamental.

O termo Modelagem Matemática aparece na Educação Matemática sob várias concepções diferenciadas em aspectos de sua definição. Existem pesquisadores que a utilizam como uma como uma abordagem de ensino. Para outros, a Modelagem Matemática é uma linha da Matemática Aplicada que a utiliza para resolver problemas da realidade.

Neste trabalho a Modelagem Matemática não surgiu nem como a concepção da Educação Matemática nem como a da Matemática Aplicada como elementos distintos, mas sim como Aplicação Matemática, ou seja, a estratégia de estudar modelos matemáticos clássicos da literatura, neste caso, o modelo de Gompertz e o modelo de Verhulst, utilizando a abordagem qualitativa, através das tecnologias digitais.

Pensamos que isto contribuiu para uma melhor compreensão das ED's, embora ainda que persistam várias das dificuldades relacionadas à aprendizagem deste conteúdo, também cabe destacar que ao propor uma forma de trabalho diversificada da que estão acostumados possa ser algo motivador ao que se trata de ensinar e aprender na educação superior.

Acredita-se que indicar novos caminhos para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias pode ser a expectativa de algum leitor. Talvez esse trabalho traga elementos que possam auxiliar pessoas interessadas no ensino dessa disciplina e assim motiva-los também a elaborarem suas próprias propostas de ensino. Iniciar o curso de EDO com a ideia de Modelagem Matemática/Aplicação, ou seja, iniciar com o estudo de modelos matemáticos clássicos da literatura, explorando-os com o auxílio das TIC, pode trazer mais possibilidades e, talvez assim, conseguir atribuir algum significado para essa disciplina.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; BORSSOI, A.H. Modelagem Matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91 – 122, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Equações Diferenciais Ordinárias - Um curso introdutório**. São Paulo: UFABC, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores**. Campinas, n. 9, p. 9–22, set. 1999.Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf. Acesso em: 14 nov. 2018.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo, SP: Editora Contexto, 2011.

BITTENCOURT, C. M. F. **Ensino de História: fundamentos e métodos**. São Paulo: Cortez, 2004.

BOYER, K. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blüicher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 2, de 19 de fevereiro de 2002. Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de Professores da Educação Básica em nível superior. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 19 fev. 2002.

BRASIL. Ministério da Saúde. Instituto Nacional de Câncer José de Alencar Gomes da Silva. Tipos de cânceres. Rio de Janeiro: INCA, acesso em 2018. Disponível em: hhttp://www.inca.gov.br/wps/wcm/connect/tiposdecancer/site/home/mamai.

BRITO, A, J.; MIORIM, M, Â. In: GARNICA, A. V. M. **Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil**: sob o signo da pluralidade. São Paulo: Livraria da Física, 2016. p. 67-92.

CHERVEL, A. **História das disciplinas escolares**: reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria & Educação, 1990.

CONDORCET, J. A. N.; CARITAT, M. **Esboço de um Quadro Histórico dos Progressos do Espírito Humano**. Campinas – SP: Unicamp 1993.

Domingues, J. S. **Modelo matemático e computacional do surgimento da angiogênese em tumores e sua conexão com as células-tronco.** In. Dissertação de Mestrado - Belo Horizonte - MG. CEFET.

DOMINGUES, J. S. Análise do modelo de gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento. **Biomatemática IMECC - Unicamp**, Campinas, n. 21, p. 103–112, 2011.

DULLIUS, M. M.; VEIT, E. A.; ARAUJO, I. S. O uso do software Powersim no aprendizado de equações diferenciais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 36., 2008, São Paulo, SP. **Anais** [...]. São Paulo: EDP, 2008.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

FINNEY, R. L. **Cálculo de George B. Thomas Jr.** São Paulo, SP: Addison Wesley, 2002.

GIL, A. C. **Didática do ensino superior**. São Paulo: Atlas, 2008.

GOODSON, I. F. **Historia del curriculum**: La strucción social de las disciplinas escolares. Barcelona: Ediciones Palmares - Corredor, 1998.

HABRE, S. Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions**. International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology**, London, v. 34, n. 5, p. 651 - 662, 2003.

HOLTON, D. **The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI Study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

IGLIORI, S. B. C. (2009) **Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais.** In FROTA, M. C. R; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 11 – 26.

LIBÂNEO, J. C. **O essencial da Didática e o trabalho do professor: em busca de novos caminhos**. 2001. Disponível em: www.ucg.br/site_docente/edu/libaneo/pdf/didaticaprof,pdf Acesso em: 28 mar. 2012.

MORENO, M. M.; AZCÁRATE, C. G. Concepciones de los Profesores sobre la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales a Estudiantes de Química y Biología. Estudio de Casos. **Revista Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 15, n. 1, p. 21 - 34, 1997.

OLIVEIRA, M. C. A.; RAAD, M. R. A. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Ciências. **Boletim Gente**, n. 61, p. 125-137, 2012.

PINTO, M. M. F. **Students' Understanding of Real Analysis**. 1998, 320f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - University of Warwick, England, 1998.

POINCARÉ, H. **Mathematics and Science**: last essays. New York: Dover, 1913.

REIS, F. S. **A tensão entre Rigor intuição no ensino de cálculo e análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

RODRIGUES, A. M. Sobre o problema da formação do professor secundário e do pesquisador. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO ENSINO DA MATEMÁTICA, 3., , 1959, Rio de Janeiro. **Anais** [...] Rio de Janeiro: CADES/MEC, 1959.

ROWLAND, D. R.; JOVANOSKI, Z. Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. **International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology**, London, v. 35, n. 4, p. 503 - 516, 2004.

SANTOS, S. P; MATOS, M. G. O. O ensino de Cálculo 1 no curso de licenciatura em matemática: obstáculos na aprendizagem. **Revista Eventos Pedagógicos**, v. 3, n. 3, p. 458-473, 2012.

SILVA, B. A. **Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 13, nº 3, 2011.

STEPHAN, M.; RASMUSSEN, C. Classroom mathematical practices in differential equations. **Journal of Mathematical Behavior**, Norwood, v. 21, n. 4, p. 459-490, 2002.

TOLEDO, J. C. **Uma história do processo de instucionalização da área da Análise Matemática no Brasil**. 2008. 315 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP: Rio Claro, 2008.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. 3. ed. Sao Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

.