UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

YGOR DOS SANTOS SOUZA

UMA APLICAÇÃO DA INTEGRAL DE RIEMANN NO CÁLCULO DO FLUXO SANGUÍNEO

CUITÉ - PB
2018

YGOR DOS SANTOS SOUZA

UMA APLICAÇÃO DA INTEGRAL DE RIEMANN NO CÁLCULO DO FLUXO SANGUÍNEO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Orientadora: Edna Cordeiro de Souza

CUITÉ - PB
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

S729a Souza, Ygor dos Santos.

Uma aplicação da integral de Riemann no cálculo do fluxo sanguíneo. / Ygor dos Santos Souza. – Cuité: CES, 2018.

54 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2018.

Orientadora: Edna Cordeiro de Souza.

1. Somas de Riemann. 2. Sistema cardiovascular. 3. Lei de Poiseville. I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG CDU 51

YGOR DOS SANTOS SOUZA

UMA APLICAÇÃO DA INTEGRAL DE RIEMANN NO CÁLCULO DO FLUXO SANGUÍNEO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado em 07 de março de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Edna Cordeiro de Souza - UFCG
Orientador

Prof. Me. Marciel Medeiros de Oliveira-UFCG
Examinador

Prof. Dr. Fábio Ferreira de Medeiros - UFCG
Examinador

Este trabalho é dedicado à minha mãe, Luciene Oliveira Santos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a DEUS por ter me dado saúde e guiado durante toda essa caminhada.

Aos meus pais Luciene Oliveira e Gildo de Souza e meus irmãos Yago dos Santos e Dyego dos Santos, pela ajuda nos dias difíceis, por cada palavra de amor e afeto. Agradeço também a toda minha família, por cada conselho dado, por cada ajuda nessa caminhada.

Agradeço a todos os meus amigos, colegas e companheiros de curso que sempre me ajudaram a ser uma pessoa cada vez melhor, agradeço pela oportunidade de cada aula junto, por cada dia no Laboratório de Matemática e por cada copo de café entre uma demonstração e outra.

A coordenadora do curso e minha orientadora Me. Professora Edna Cordeiro de Souza que contribuiu e assim continua na minha formação acadêmica, e principalmente, agradeço por toda sua dedicação e empenho na orientação deste trabalho.

Ao Professor Dr. Fábio Ferreira de Medeiros pelas correções e participação na banca examinadora de TCC.

Ao Professor Me. Marciel Medeiros de Oliveira pela partição na banca examinadora de TCC, e além disso agradeço por cada aula ministrada se existe uma pessoa que merece o título de Educador, esse alguém se chama Marciel Medeiros de Oliveira.

Em especial, eu quero agradecer a minha mãe por toda luta e guarra, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço. E quero deixa meu agradecimento especial a minha vó de consideração a senhora Maria Francisca de Lima.

E a todas as pessoas que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação acadêmica quero deixar registrado meus humildes agradecimentos.

RESUMO

A integral está presente entre as principais áreas do conhecimento humano, ela está associada à noção geométrica de área e à ideia física do trabalho. Este trabalho tem como objetivo a demonstração da lei de Poiseuille através da integral de Riemann a partir da qual realizaremos uma aplicação no cálculo do fluxo sanguíneo. De início será apresentado um breve contexto histórico sobre a matemática, alguns matemáticos e físicos importantes para o conceito de integral e o surgimento do cálculo diferencial e integral. Em seguida, apresentaremos toda teoria necessária para a definição formal da integral de Riemann. Por fim, pontuamos alguns tópicos sobre o funcionamento do sistema cardiovascular para assim realizarmos uma aplicação da integral de Riemanm no cálculo do fluxo sanguíneo utilizando a lei de Poiseuille.

Palavras-chave: Somas de Riemann. Sistema Cardiovascular. Lei de Poiseuille.

ABSTRACT

The integral is present among the main areas of human knowledge, it is associated with the geometric notion of area and the physical idea of the work. This work aims to demonstrate the law of Poiseuille through the integral of Riemann and with that to show that mathematics can and is in our day to day. At the outset, a brief historical context will be presented on mathematics, some mathematicians and physicists important for the concept of integral and the emergence of differential and integral calculus. We will soon present all necessary theory about the Riemann integral. Then we will write some topics about Anatomy and will be finished with a refining application to the cardiovascular system. The work resulted in the possibility of applying an integral referring to the cardiovascular system.

Keywords: sums of Riemann. Blood flow. Law of Poiseuille.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O cálculo integral está presente em diversas áreas como na Física, na Biologia, na Engenharia, na Economia, entre outras. A importância do cálculo integral nem sempre é tão nítida, mas acredite apesar de ser tão difícil de vê-lo e compreende-lo ele está presente nas coisas mais simples do dia a dia. O trabalho de uma partícula, método de diluição de contraste, construção de prédios, gestão de negócios e como veremos neste trabalho o calculo integral também é usado para calcular o fluxo sanguíneo, todos esses exemplos de aplicações fazem com que seja, agora sim, mais nítido o motivo pelo qual devemos aprender sobre o cálculo integral.

Quando iniciamos os estudos sobre o calculo diferencial e integral uma das coisas mais marcantes é a ideia mecânica que para se aprender cálculo deve-se fazer listas e listas, sem dar muita importância as aplicações. Com isso nosso trabalho tem como objetivo geral mostrar que o cálculo integral é usado em muitos outros ramos da ciência e pode ser usado de maneira a explicar fatos do no nosso dia a dia, como objetivos específicos fazer um estudo sobre a integral de Riemann, interpretar geometricamente as somas de Riemann, deduzir a lei de Poiseuille e aplicar esses conceitos em outras áreas do conhecimento. Os materiais utilizados variam entre livros, artigos científicos e monografias, todos os textos relacionados à Análise, cálculo diferencial e integral e Aplicações. A metodologia usada foi a de pesquisa individual combinada com encontros para orientações realizadas pela professora orientadora.

O primeiro capítulo traz um breve contexto histórico sobre como era a matemática antes e depois do século XIX, alguns matemáticos e físicos importantes para todo o desenvolvimento da integral, a ordem cronológica do surgimento do cálculo diferencial e integral e a tão falada guerra do cálculo.

No segundo capítulo será dada toda fundamentação teórica e necessária para a definição da integral de Riemann, em outra palavras, esse capítulo vai tratar especialmente sobre tópicos de análise. Serão apresentados conteúdos como números reais, partição de um intervalo, ínfimo e supremo de conjuntos.

No terceiro capítulo trataremos sobre somas de Riemann para finalmente definir a integral de Riemann, apresentaremos também um dos principais resultados do cálculo diferencial e integral o teorema fundamental do cálculo.

O quarto capítulo traz a lei de Poiseuille junto com suas aplicações, nesta parte do trabalho falaremos um pouco sobre o funcionamento do sistema cardiovascular. Por fim será realizada uma aplicação referente ao cálculo do fluxo sanguíneo, mostrando assim que o cálculo diferencial e integral não é puramente mecânico, e sim uma ferramenta poderosa ligada a vários ramos da ciência.

1 CONTEXTO HISTÓRICO

Neste Capítulo abordaremos o contexto histórico referente ao nascimento do Cálculo Diferencial e Integral. Diferentemente dos cursos de Cálculo onde primeiro aprendemos sobre Derivada e depois de toda sua construção aprendemos sobre Integral, veremos que nasceu primeiro as noções sobre a Integral e só depois de muito tempo surgiram os conceitos sobre Derivada, pois a necessidade de se calcular a área de uma região era bem presente nessa época.

1.1 A matemática do século XIX e início do século XX

Antes dos século XIX, o berço da matemática sempre foi restrito, de maneira geral, a dois países, Suíça com nomes como Leonhard Euler (1707 - 1783) e toda a Família Bernoulli que vai desde de Nicolau I Bernoulli (1687 - 1759) até Daniel II Bernoulli (1751 - 1834) e a França com matemáticos como René Descartes (1596 - 1650), Pierre de Fermat (Nascido na primeira década do século XVII - 1665) e Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783). Mas com o início do século XIX essa hegemonia matemática foi quebrada.

> A matemática nunca fora antes tão zelosamente cultivada e com sucesso do que durante o século XIX e o início do XX [...]. Enquanto a França e a Suíça, que durante as épocas precedentes foram o fio condutor do progresso matemático, continuaram a desenvolver matemática com sucesso, de outros países grandes contingentes de entusiásticos estudiosos se juntaram a frente da fileira. A Alemanha despertou de letargia trazendo para a frente K.F. Gauss, C.G.J. Jacobi, P.G.L. Dirichlet, G.F.B. Riemann e grupos de homens mais novos; a Grã-Bretanha produziu o seu A. de Morgan, G. Boole, W.R. Hamilton, A. Cayley, J.J Syvester, além de outros ainda vivos no início do século XX; a Rússia entrou na arena com o seu N.I. Lobachevstki; a Noruega com N.H. Abel; a Itália com L. Cremona; a Hungria com os dois Boyais; os Estados Unidos cp, B. Peirce e J.Willard Gibbs. (CAJORI, 2007, p.367).

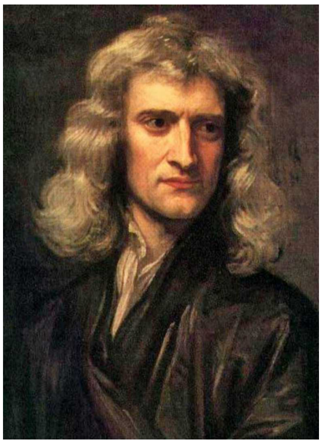
A seguir trataremos de alguns matemáticos que foram de fundamental importância para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

1.2 De Newton a Riemann

Newton (1642 - 1727) foi um astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, Leibniz (1646 - 1716) foi um polímata, filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão. Poiseuille (1797 - 1869) foi médico e físico francês que estudou o fluxo do sangue dentro das artérias e veias do corpo humano. Darboux (1842 - 1917) e Riemann (1826 - 1866) foram dois matemáticos muitos importantes com fortes contribuições em diversas áreas da matemática como Análise, Geometria e Mecânica Clássica.

Isaac Newton(1642 - 1727)[1] nasceu em Woolsthope, Lincolnshire, no mesmo ano em que Galileu morreu. Interessou-se pela matemática lendo obras de diversos matemáticos, e acabou "criando a sua própria matemática" para provar que a sua teoria física sobre a gravitação universal e a força centrípeta estavam corretas GAYO (2010), primeiramente "... descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos, como ele chamava o atual cálculo diferencial." (EVES, 2004, p. 436).

Figura 1 – Issac Newton (1643 - 1727)



Fonte: Google Imagens

O método dos fluxos, a descoberta mais importante, embora publicado em 1736, já havia sido escrito em 1671, e antes disso, em 1669, Newton já comunicara a essência do método a Barrow (EVES, 2004).

O método dos fluxos de Newton parte da suposição de que uma curva é gerada pelo movimento de um ponto e a partir disso ele desenvolveu o que seria fluxo, fluente e fluxo principal.

> Uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de *fluente* (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de *fluxo de fluente*. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por ý. [...] Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava *fluxo principal*, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. (EVES, 2004, p. 439).

[1] Há duas datas para o nascimento de Isaac Newton: uma no Natal de 1642 e outra, em 4 de janeiro de 1643. A razão para tal confusão se deve ao fato que, quando Newton nasceu, a Inglaterra ainda adotava o calendário Juliano, e com esse sistema, a data de nascimento seria 25 de dezembro de 1642. Entretanto, pelo calendário Gregoriano, adotado em 1752, a data de nascimento é adiada para 4 de janeiro do ano seguinte.

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig no dia 1 de julho do ano de 1646 e morreu em Hanôver no dia 14 de novembro de 1716 e acordo com BOYCE (2009) aos quinze anos entrou na universidade e aos dezessete obteve o grau de bacharel.

> Estudou teologia, direito, filosofia e matemática na universidade, e ás vezes é considerado o último sábio a conseguir conhecimento universal. Aos vinte ele estava preparado para o grau de doutor em direito, mas lhe foi recusado pela sua baixa idade. Deixou então Leipzig e obteve seu doutorado na Universidade de Altdorf em Nuremberg, onde lhe foi oferecido um posto de professor de direito, que ele recusou. (BOYCE, 1996, p. 275).

Figura 2 – Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Fonte: Google Imagens

Nos dias atuais estamos habituados com o símbolo de Integral $\int$ e como aprendido nos cursos de cálculo, esse símbolo remete a uma soma e é usado hoje em dia por causa da notação para o cálculo escrita por Leibniz. Nas palavras de EVES (2004):

> Leibniz foi o primeiro a utilizar o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra summa, (soma), tendo feito isso em 29 de outubro de 1675, com o objetivo de indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como fazemos hoje, assim como escrevia $\int xdx$ e $\int ydy$ para integrais. (EVES, 2004, p.443).

EVES (2004) no conta que em que seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial foi publicado em 1684, Leibniz define dx como um intervalo finito e arbitrário e dy pela proporção $dy/dx = y$: subtangente.

Em 1686, Leibniz fez outra importante publicação, na qual enfatizou a relação inversa entre derivação e diferenciação no teorema fundamental do cálculo. (BOYER, 2010, p.278).

A notação sobre o cálculo que ficou mais usual hoje em dia foi a notação de Leibniz, pois a mesma é mais acessível, isso sem mencionar o fato da notação ser muito mais compacta e objetiva se comparada com a notação de Newton. Apesar de Newton ser chamado de o pai do cálculo vemos que as contribuições de Leibniz que resistiu ao tempo.

O francês Jean-Léonard-Marie Poiseuille nasceu no dia 22 de abril de 1797 e morreu em Paris no dia 26 de dezembro de 1869. Poiseuille foi um médico e físico e tinha interesse no comportamento do fluxo de sangue dentro das veias e artérias do corpo humano.

Figura 3 – Jean-Léonard-Marie Poiseuille (1797 - 1869)

Fonte: Google Imagens

Poiseuille era filho de Jean Baptiste Poiseuille, um carpinteiro, e Anne Victoire Caumont. De 1815 a 1816, estudou na École Polytechnique, em Paris. Em 1828, tornou-se doutor em ciência, mas os cargos profissionais que ocupou até 1860 são, atualmente, desconhecidos. Os registros profissionais de Poiseuille remontam a este último ano, quando foi eleito inspetor das escolas primárias em Paris.

Suas publicações iniciaram-se no ano de 1828, discutindo sobre o bombeamento do coração, o escoamento do sangue nas veias e nos vasos capilares e a resistência a esse movimento. Porém seus conhecimentos em circulação sanguínea possibilitaram-no entender também a circulação de água em tubulações. Assim, pesquisou as leis de fluxo laminar de fluidos viscosos em tubos cilíndricos e publicou uma importante obra, “Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres” (1844).

Em 1842, Poiseuille foi eleito para a Académie de Médecine de Paris e para a Société Philomathique, na mesma cidade. Poiseuille foi também membro de várias sociedades estrangeiras, incluindo sociedades de medicina em Estocolmo, Berlim e Breslau (Polónia). Recebeu a Medalha Montyon em 1829, 1831, 1835 e 1843 pelas suas investigações em fisiologia.

Integrou a equação que mostrou que em um regime laminar, a velocidade média é proporcional a perda - Lei de Poiseuille. Formulou uma expressão matemática para a taxa de fluxo laminar de fluidos em tubos circulares.

O alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann, nasceu no dia 17 de setembro de 1826, na cidade de Breselenz, atual cidade de Jameln, e morreu no dia 20 de julho de 1866 na cidade de Selasca. Foi um matemático, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial.

Figura 4 – Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Fonte: Google Imagens

De acordo com EVES (2004) Riemann era filho de um pastor de aldeia e tinha problemas de saúde desde a infância. Mesmo com a família em condições financeiras precárias, seu pai conseguiu proporcionar-lhe uma boa educação que começou na Universidade de Göttingen e continuou na Universidade Humboldt de Berlim. Obteve o doutorado na Universidade de Göttingen, com uma tese no campo da teoria das funções complexas. Na tese, encontramos as equações diferenciais de Cauchy-Riemann, que garantem a análise de uma função de variável complexa e o conceito de superfícies de Riemann, que trouxe considerações topológicas à análise. Com uma definição própria - integral de Riemann, tornou mais claro o conceito de integrabilidade abrindo caminho para a generalização deste conceito no século XX - a integral de Lebesgue e daí para horizontes mais amplos como a relatividade geral.

Boyer (1996) nos diz que em 1857 Riemann tornou-se *Privatdozent*[2] na Universidade de Göttingen, e segundo o costume ele foi designado para apresentar um *Habilitationsschrift*[3] perante o corpo docente. O resultado no caso de Riemann foi a mais célebre conferência probacionária da história da matemática, pois apresentava uma ampla e profunda visão de todo domínio da geometria. A tese tinha o título “Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen” (Sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da geometria) e propunha uma

[2] Conferencista externo.
[3] Tese de habilitação.

visão global da geometria como um estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço. Suas geometrias eram não-euclidianas num sentido muito mais geral do que a de Lobachevsky, em que a questão é simplesmente a de quantas paralelas são possíveis por um ponto. Riemann viu que a geometria nem sequer deveria necessariamente tratar de pontos ou retas ou do espaço no sentido ordinário, mas de uma coleção de n-uplas que são combinadas segundo certas regras.

Por conta de sua criação Riemann tinha um corpo frágil e isso o levou a morte em Selascas vítima de uma tuberculose no ano de 1866.

1.3 O cálculo diferencial e integral

EVES (2004) nos diz que o século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática devido às novas e vastas áreas de pesquisa que nela se abriram. Certamente, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

Nos cursos de cálculo de hoje em dia aprendemos o cálculo como disposto nessa seção, primeiro aprendemos sobre o cálculo diferencial e depois sobre o cálculo integral. Porém, a descoberta do cálculo não seguiu essa ordem e sim o contrário, primeiro foi criado o cálculo integral e só depois o cálculo diferencial. De acordo com EVES (2004),

> O desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p.417).

A seguir trataremos do cálculo na sequência em que o mesmo surgiu.

1.3.1 O Cálculo integral

Se f for integrável em $[a, b]$, calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$. Questões desse tipo são comuns nos cursos de cálculo da atualidade, sempre nessa ideia abstrata, porém as coisas na matemática nascem conforme a necessidade do dia a dia e a necessidade de saber a área de certas regiões, por exemplo, a divisão das margens de um rio para agricultura local, é bem mais antiga do que aparenta. BOYER (2010) afirma que:

> O primeiro registro que se tem do que parece ser uma estimativa primitiva da área de uma superfície curva, é o Papiro Egípcio de Moscou (ou Golonischev), escrito aproximadamente em 1890 a.C., onde o escriba pede a área da superfície

> de um cesto, e resolve a questão com um cálculo semelhante a uma fórmula de integração. Além disso, o mesmo papiro traz, entre outros problemas matemáticos da vida quotidiana dos egípcios, o cálculo do volume de um tronco de pirâmide. (BOYER, 2010).

Houve após muitas contribuições importantes para o desenvolvimento do cálculo integral, como as de Antífon, o Sofista (c. 430 a.C.), um contemporâneo de Sócrates e sua ideia das sucessivas duplicações.

> Consta que Antífon teria antecipado a ideia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono ao fim exaurir-se-ia. E como se pode construir um quadrado de área igual à de qualquer polígono, seria então possível construir um quadrado de área igual à do círculo. A crítica que imediatamente se levantou contra esse argumento sustentava-se no princípio de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente e que, assim, o processo de Antífon jamais esgotaria a área do círculo. Não obstante, a corajosa abordagem de Antífon continha o germe do famoso *método de exaustão* grego. (EVES, 2004).

O método da exaustão é o equivalente grego do cálculo integral, e foi creditado por Arquimedes (287 - 212 a.C.) a Eudoxo de Cnides (370 a. C), discípulo de Platão, mas o que foi o método da exaustão? De acordo com EVES (2004) o método consiste em:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES,2004).

Apesar de ser creditado por Arquimedes o próprio usava de um método mais simples de ser entendido, de fato:

> Para determinar uma área ou um volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. (EVES, 2004).

O que se comparado com o método de Riemann é uma ideia bem parecida. Esse método que Arquimedes usava ele chamava de **método do equilíbrio**, e após isso, usava o método de exaustão como uma forma de demonstração ou comprovação dos seus resultados.

Novas descobertas sobre o cálculo integral só voltaram a aparecer por volta do século XVII, na Europa Ocidental, mais precisamente na Bélgica, com o engenheiro flamengo Simon Stevin (1548-1620) que usou um método parecido com o de Arquimedes. Mas, no lugar de tentar achar a área ou volume de algo ele usou para calcular a força causada pela pressão de um fluído em dique vertical:

> Stevin usava o método do equilíbrio em seu trabalho no campo da hidrostática, para determinar a força exercida pela pressão de um fluido sobre um dique vertical. Basicamente, sua ideia consistia em dividir o dique em faixas horizontais e então fazer cada uma girar em torno de suas bordas superior e inferior, até que elas se tornassem paralelas ao plano horizontal. Fundamentalmente é esse o método usado hoje em dia em nossos textos elementares de cálculo. (EVES, 2004).

Mesmo ainda sem uma definição formal do cálculo integral, ele continuou se expandindo para demais áreas do conhecimento, chegando até a ser aplicado algumas leis sobre o movimento planetário:

> Dos primeiros europeus modernos que desenvolveram ideias sobre infinitésimos em trabalhos com a integração, merece destaque o matemático alemão Johann Kepler (1571 -1630). Ele utilizou o processo de integração para calcular as áreas envolvidas na sua segunda lei do movimento planetário, e também para calcular os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho. Kepler tinha pouca paciência com o extremo rigor do método da exaustão, porém, apesar das objeções levantadas sobre seu trabalho do ponto de vista do rigor matemático, conseguiu resultados corretos, e de maneira bem simples, e seus métodos são utilizados até hoje por físicos e engenheiros para armar problemas. (EVES, 2004).

Por volta de 1650, o matemático John Wallis(1616 - 1703) apresentou fortes contribuições para o cálculo integral. Por conta dele que usamos o símbolo do infinito ∞ como ele é hoje em dia:

> Também muito importante no desenvolvimento do cálculo integral, foi o matemático inglês John Wallis que fez uso sistemático das séries em análise, foi o primeiro a considerar as cônicas como curvas de segundo grau, ao invés de considerá-las como secções de um cone, e também explicou de maneira razoavelmente satisfatória o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários, e introduziu o atual símbolo do infinito (∞), entre outras importantes contribuições à matemática e muitas publicações em diversas áreas da física. (EVES, 2004).

1.3.2 O cálculo diferencial

O conceito de diferenciação se originou, na Grecia antiga, de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões que buscavam determinar máximos e mínimos de funções, porém a primeira manifestação realmente clara do método diferencial data de 1629 de acordo com EVES (2004).

O alemão Kepler já tinha observado que os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas proximidades de um ponto de máximo ou de mínimo comum. Porém foi o matemático francês Pierre de Fermat (1601 - 1665) quem primeiro manifestou com clareza o método diferencial. Considerando a ideia de Kepler, Fermat estabeleceu um procedimento para determinar os pontos de máximo ou de mínimo:

> Cerca de 20 anos antes, Kepler foi o primeiro a observar que o incremento de uma variável, como, por exemplo, a ordenada de uma curva, é esvanecente (desaparece) para valores muitos próximos de um máximo ou de um valor mínimo da variável sob consideração. Desenvolvendo essa ideia, Fermat obteve sua regra para máximos e mínimos, substituindo x por $x + e$ na dada função de x e então igualou este resultado a cada um de dois valores consecutivos da função,dividindo a seguir o resultado por e. Se e é tomado como 0, então as raízes desta equação são valores de x que tornam a função um máximo ou um mínimo. Fermat fez desta ideia a base do seu método de traçar tangentes, que envolve o cálculo do comprimento da subtangentes para um dado ponto da curva. (CAJORI, 2007).

Esse método é conhecido como método de Fermat. O método é incompleto, pois ignorou que a condição de a derivada de $f(x)$ se anular não é suficiente para que se tenha um máximo ou mínimo comum e também não fazia distinção entre valor máximo e valor mínimo EVES (2004).

1.3.3 Newton versus Leibniz

Quem inventou o cálculo diferencial e integral? Essa questão gerou uma grande disputa entre dois grande matemáticos da época, que na minha opinião se tivessem trabalhado juntos talvez hoje em dia o cálculo moderno pudesse ter se tornado algo bem mais acessível e avançado.

Cada um dos matemáticos teve uma forma sua e única de escrever sobre o cálculo, como eram contemporâneos e as ideias surgiram na mesma época acabou que quando Leibniz publicou sua descoberta, um grupo de cientistas da Royal Society acusou Leibniz de plágio, que exatamente nesse tempo contava com Sr. Issac Newton como presidente da mesma. Segundo Gayo (2010),

> Leibniz foi o primeiro a publicar suas descobertas relativas ao cálculo diferencial e integral, porém Newton já havia desenvolvido sua teoria muitos anos antes, o que levou à disputa sobre a paternidade do cálculo. A Royal Society, composta pelos principais cientistas da Inglaterra, a qual Newton era presidente, acusou Leibniz de plágio, o que marcou profundamente a carreira do alemão. (GAYO, 2010).

Gayo (2010) nos diz a **ordem cronológica** de como tudo isso acorreu. Em 1666 foi o ano milagroso da ciência, Isaac Newton desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral. Em 1676 Gottfried Willhelm Leibniz desenvolveu o Cálculo Diferencial e Integral com uma simbologia diferente da utilizada por Newton e sem conhecer seu trabalho. No ano de 1684, Leibniz faz sua primeira publicação sobre o assunto no periódico mensal *Acta Eroditorum* com o título *Nova methodus pro maximis ET mínimos, itemque tangentibus, qua Nec irrationales quantitaes moratur* (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes que não é obstruído por quantidades irracionais); e no ano de 1686, Newton publica *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural), obra que contém, além de Cálculo, Fundamentos da Física.

Ambos os matemáticos usaram seus conhecimentos e raciocínio para a elaboração do cálculo de maneira única e separados porém, também temos que ter em mente que ambos utilizaram de conhecimentos antigos e de notações dadas por outros matemáticos. GAYO (2010) cita algumas dessas utilizações como a adoção das letras x e y para os eixos cartesianos notação de Descartes; a extensão destes eixos para os lados negativos mais uma notação de Descartes e a utilização do atual sinal de igual criado por Robert Record, em 1557.

De maneira geral hoje em dia se aceitou a ideia que ambos os matemáticos desenvolveram o cálculo separadamente mas, sempre com a ideia que Newton pensou primeiro e Leibniz fez a primeira publicação.

> A opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético e embora inferior (...) como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. (EVES, 2004).

Agora situados com os principais fatos referentes ao Cálculo Integral, temos que definir o conceito de integral. Antes disso veremos algumas características sobre o conjunto dos números reais, essas características serão apresentadas no próximo capítulo.

2 A INTEGRAL DE RIEMANN

Neste capítulo definiremos a integral de Riemann, e apresentaremos as condições gerais que garantem a integrabilidade de uma função.

2.1 A integral inferior e superior

Definição 2.1 *Uma* ***Partição*** *do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$. Denotaremos da seguinte forma $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. O intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, de* ***comprimento*** *$t_i - t_{i-1}$, será chamado o i-**ésimo intervalo** da partição P. Note que, $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$.*

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e seja $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Temos que f é limitada em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P e, portanto, existem m_i e M_i, respectivamente o ínfimo e o supremo de f em $[t_{i-1}, t_i]$. Assim,

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\};$$
$$M_i = \sup\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Definição 2.2 *A* ***soma inferior*** *de f relativamente à partição P é definida como sendo*

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Definição 2.3 *A* ***soma superior*** *de f relativamente à partição P é definida como sendo*

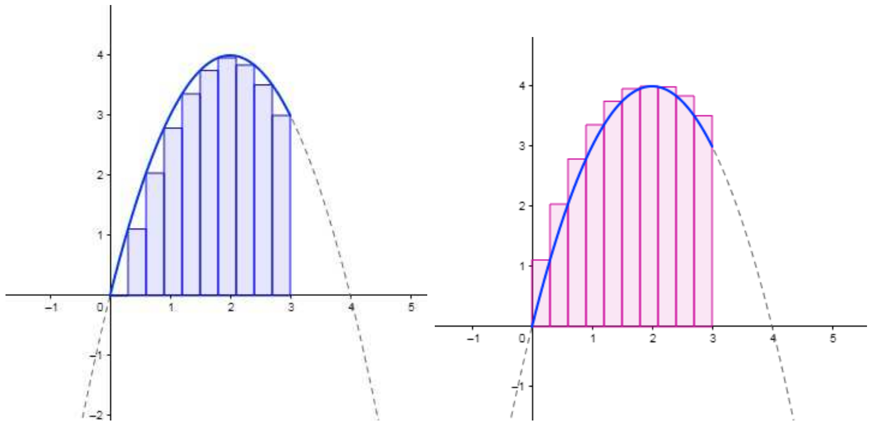
$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Os números $s(f; P)$ e $S(f; P)$ são denominadas, respectivamente, de somas de Riemann inferior e superior de f, relativas à partição P.

Quando f é uma função contínua e $f(x) \geq 0$ em todo o intervalo $[a, b]$, perceba que a soma inferior possui uma aproximação por falta da área da região limitada pelo gráfico de f, observe a Figura 5, pelo eixo das abscissas e pelas retas verticais levantadas nos ponto a e b desse eixo. Analogamente, cada soma superior é um valor aproximado por excesso da mesma área.

A fim de podermos definir a integral inferior e superior de uma função limitada, serão apresentados três resultados a respeito de somas inferiores e superiores.

Figura 5 – Somas de Riemann



Fonte: Autoria própria

Proposição 2.1 *Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é limitada então, para qualquer partição* P *de* $[a, b]$*, tem-se* $m(b - a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b - a)$ *onde,* $m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$ *e* $M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$.

Demonstração. A prova segue diretamente do fato que, para cada $i = 1, 2, ..., n$ tem-se que $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ e que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$. ■

Definição 2.4 *Sejam* P *e* Q *partições do intervalo* $[a, b]$*. Diz-se que* Q ***refina*** P *quando* $P \subset Q$.

Observação 2.1 *A maneira mais simples de refinar uma partição é acrescentar-lhe um único ponto.*

Lema 2.1 *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função limitada e sejam* P *e* Q *duas partições de* $[a, b]$*. Se* Q *é um refinamento de P então:*

1. $s(f; P) \leq s(f; Q)$;

2. $S(f; Q) \leq S(f; P)$.

Demonstração. Seja $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ e suponhamos, inicialmente, que a partição Q resulta de P pelo acréscimo de um ponto, ou seja, $Q = P \cup \{r\}$, com $t_{j-1} < r < t_j$ para algum j entre $1, 2, ..., n$. Sejam m' e m'', respectivamente, os ínfimos de f nos subintervalos $[t_{j-1}, r]$ e $[r, t_j]$ de Q. Evidentemente que $m_j \leq m'$, $m_j \leq m''$ e $t_j - t_{j-1} = (t_j - r) + (r - t_{j-1})$. Portanto,

$$\begin{aligned} s(f; Q) - s(f; P) &= m'(r - t_{j-1}) + m''(t_j - r) - m_j(t_j - t_{j-1}) && (2.1)\\ &= m'(r - t_{j-1}) + m''(t_j - r) - m_j(t_j - r) - m_j(r - t_{j-1}) && (2.2)\\ &= (m' - m_j)(r - t_{j-1}) + (m'' - m_j)(t_j - r) && (2.3)\\ &\geq 0. && (2.4)\end{aligned}$$

Donde $s(f;P) \leq s(f,Q)$.

O segundo item prova-se de maneira análoga. ∎

O Lema acima nos informa que os refinamentos de uma partição tendem a aumentar as somas inferiores e a diminuir as superiores. Quando Q resulta de P pelo acréscimo de k pontos, usa-se k vezes a demonstração acima.

Lema 2.2 *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, sejam P e Q duas partições quaisquer de $[a,b]$. Então $s(f;P) \leq S(f,Q)$.*

Demonstração. A Partição $P \cup Q$ é um refinamento comum a P e Q. De modo que, pelo lema anterior,

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q).$$

∎

O lema acima nos diz que para uma função limitada em $[a,b]$ as somas inferiores são cotas inferiores para a somas superiores e que as somas superiores são cotas superiores para a somas inferiores. De maneira que podemos estabelecer a seguinte definição.

Definição 2.5 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a **integral inferior** de f como*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P \in [a,b]} \{s(f;P)\}$$

*e a **integral superior** de f por*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P \in [a,b]} \{S(f;P)\}.$$

Definição 2.6 *Uma função limitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **integrável** quando sua integral inferior e superior são iguais. Esse valor comum chama-se a **integral** (de Riemann) de f e é indicado por $\int_a^b f(x)dx$.*

Realizando uma análise geométrica, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, a existência da integral $\int_a^b f(x)dx$ significa que a região limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$ e $y = b$ e o eixo das abscissas possui uma área, cujo valor, por definição, é o valor da integral.

Lema 2.3 *Seja P_0 uma partição de $[a,b]$. Se considerarmos as somas $s(f;P)$ e $S(f;P)$ apenas relativas às partições P que refinam P_0, obteremos os mesmo valores para $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx$.*

Demonstração. Combinando o Lema .4 e o Lema 2.1, obteremos o resultado desejado.

∎

Proposição 2.2 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e sejam m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Então*

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b-a).$$

Demonstração. Pela Proposição 2.1 temos

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq M(b-a)$$

para qualquer $P \in [a,b]$. Portanto para $P \in [a,b]$ temos,

$$m(b-a) \leq \sup\{s(f;P)\} \leq \inf\{S(f;P)\} \leq M(b-a),$$

logo

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

como queríamos. ■

Proposição 2.3 *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, temos:*

1. $\underline{\int_a^b}[f(x)+c]dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx + c(b-a)$;
2. $\overline{\int_a^b}[f(x)+c]dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx + c(b-a)$.

Demonstração. Seja $P = \{t_0, ..., t_n\}$ uma partição qualquer do intervalo $[a,b]$. Denotamos $\mu_i = \inf\{f(x),$
$x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ e por $M_i = \inf\{f(x)+c, x \in [t_{i-1}, t_i]\}$. Temos que $M_i = \mu_i + c$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(\mu_i + c)(t_i - t_{i-1}) && (2.5)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) && (2.6)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t_i - t_{i-1}) + c(b-a). && (2.7)
\end{aligned}$$

Ou seja, $s(f+c;P) = s(f;P) + c(b-a)$, donde

$$\sup_{P\in[a,b]}\{s(f+c;P)\} = \underline{\int_a^b}[f(x)+c]dx = \sup_{p\in[a,b]}\{s(f;P)\} + c(b-a) = \underline{\int_a^b} f(x)dx + c(b-a).$$

isso nos mostra o item 1, para o item 2 vamos construir uma ideia bem análoga porém fazendo as devidas adaptações.

Denotamos $\mu_i = \sup\{f(x) + c, x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ e por $M_i = \sup\{f(x), x \in [t_{i-1}, t_i]\}$. Temos que $\mu_i = M_i + c$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i + c)(t_i - t_{i-1}) \tag{2.8}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) \tag{2.9}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) + c(b - a). \tag{2.10}$$

Ou seja, $S(f + c; P) = S(f; P) + c(b - a)$, donde

$$\inf_{P\in[a,b]}\{S(f+c;P)\} = \overline{\int_a^b}[f(x)+c]dx = \inf_{p\in[a,b]}\{S(f;P)\} + c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx + c(b-a).$$

■

Teorema 2.1 ***(Condição imediata de integrabilidade.)*** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é integrável;*
2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a, b]$ tais que $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$;*
3. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$ tal que $S(f; P) - s(f; P) = \sum_{n}^{i=1} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$, em que $\omega_i = M_i - m_i$ é chamado de **oscilação** de $f(x)$ no i-ésimo intervalo de P.*

Demonstração. Sejam A o conjunto das somas inferiores e B o conjunto das somas superiores de f. Pelo Lema 2.2, tem-se $s \leq S$ para toda $s \in A$ e toda $S \in B$. Supondo 1, vale $\sup A = \inf B$. Logo, pelo lema .1, podemos concluir que $1 \Rightarrow 2$. Para provar que $2 \Rightarrow 3$, basta observar que se $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$ então, como a partição $P_0 = P \cup Q$ refina ambas P e Q, segue-se do Teorema .1 que $s(f, P) \leq s(f; P_0) \leq S(f; P_0) \leq S(f; Q)$, donde se conclui que $S(f; P_0) - s(f; P_0) < \varepsilon$. Finalmente $3 \Rightarrow 1$ segue do Lema .1 que $\sup A = \inf B$ e, portanto, f é integrável.

■

Teorema 2.2 *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável.*

Demonstração. A demonstração deste resultado está disponível na Referência [8], página 130. ■

2.2 Propriedades da integral

O resultado a seguir é muito útil e de suma importância em aplicações que envolvem cálculo de áreas.

Teorema 2.3 *Seja $a < c < b$. A função limitada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é **integrável** se, e somente, se suas restrições $f|[a, c]$ e $f|[c, b]$ são integráveis. No caso afirmativo, tem-se*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

.

Demonstração. Sejam A e B, respectivamente, os conjuntos das somas inferiores $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$. Podemos observar que $A+B$ é o conjunto das somas inferiores de f relativamente às partições de $[a, b]$ que contêm o ponto c. Pelo Lema 2.3, ao calcular a integral inferior de f, basta considerar as partições desse tipo, pois elas são as que refinam $P_0 = \{a, c, b\}$. Pelo Lema .2, temos

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Analogamente se mostra que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx.$$

Logo

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx = (\overline{\int_a^c} f(x)dx - \underline{\int_a^c} f(x)dx) + (\overline{\int_c^b} f(x)dx - \underline{\int_c^b} f(x)dx).$$

Como as duas parcelas dentro dos parênteses são positivas, sua soma é zero se, e somente se, elas são ambas nulas. Assim, f é integrável se, e somente se, suas restrições $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ o são. No caso afirmativo, vale a igualdade:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

■

Teorema 2.4 *Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, o mesmo é verdade para $f + g$. Além disso,*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \tag{2.11}$$

Demonstração. Seja $P = \{t_0, ..., t_n\}$ uma partição qualquer do intervalo $[a, b]$. Note que pelo Corolário .1 temos

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq S(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P) \tag{2.12}$$

e

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \geq s(f+g,P) \geq s(f,P) + s(g,P). \tag{2.13}$$

Suponha $P = P' \cup P''$, em que P' e P'' são outra partições de P. Então $S(f,P) \leq S(f,P')$ e $S(g,P) \leq S(g,P'')$; daqui e de (2.12) obtemos

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq S(f,P') + S(g,P'').$$

Como P' e P'' são partições arbitrárias, temos que

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g = \int_a^b f + \int_a^b g \tag{2.14}$$

Esta última igualdade decorre do fato de f e g serem integráveis. Usando a suposição acima, temos, $s(f,P) \geq s(f,P')$ e $s(g,P) \geq s(g,P'')$; com isso e por (2.13) temos

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \geq s(f,P') + s(g,P''). \tag{2.15}$$

Como P' e P'' são partições arbitrárias, temos que

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{2.16}$$

Esta última igualdade decorre o fato de f e g serem integráveis da mesma forma como explicado acima. De (2.14) e (2.16) segue que, o primeiro membro de (2.14) é menor ou igual ao primeiro membro de (2.16); mas este último é menor ou igual ao primeiro membro de (2.14), um resultado geral para qualquer função limitada, como $f+g$. Então esses dois membros são iguais e $f+g$ é integrável, além do que vale também a igualdade (2.11), como queríamos demonstrar.

∎

Teorema 2.5 *Se f é uma função integrável em $[a, b]$ e c é uma constante qualquer, cf é integrável no mesmo intervalo e $\int_a^b cf = c \cdot \int_a^b f$.*

Demonstração. Se $c = 0$ é trivial. Suponha,então, $c \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja P uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Tendo em conta o Lema .2, podemos perceber que $S(c \cdot f, P)$ é igual a $c \cdot S(f, P)$ ou a $c \cdot s(f, P)$, conforme seja $c > 0$ ou $c < 0$ respectivamente; e analogamente para $s(c \cdot f, P)$. Então

$$S(cf, P) - s(cf, P) = |c|[S(f, P) - s(f, P)] < \varepsilon,$$

que é a condição de integrabilidade (Teorema 2.1), o que prova que cf é integrável. Finalmente, em qualquer dos casos possíveis, $S(cf, P) = c \cdot S(f, P)$ ou $S(cf, P) = c \cdot s(f, P)$, donde $\int_a^b cf = c \cdot \int_a^b f$, e isto conclui a demonstração. ■

Teorema 2.6 *Se f é uma função integrável em $[a, b]$, o mesmo é verdade de f^2.*

Demonstração. Vamos supor inicialmente que $f(x) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Dada qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ do intervalo $[a, b]$, tal que

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta t_i < \varepsilon.$$

Seja M o supremo de f no intervalo I, de forma que $M_i - m_i \leq 2M$. Então,

$$\begin{aligned} S(f^2, P) - s(f^2, P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^2 - m_i^2)\Delta t_i && (2.17)\\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(M_i + m_i)\Delta t_i && (2.18)\\ &\leq 2M \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta t_i && (2.19)\\ &\leq 2M\varepsilon. && (2.20) \end{aligned}$$

Vemos assim que f^2 satisfaz a condição de integrabilidade (Teorema 2.1), logo é integrável.

Na hipótese de f não ser sempre ≥ 0, $m = inf f < 0$ e $(f - m)^2$ é integrável, pois $f(x) - m$ é integrável e ≥ 0. Como $f^2 = (f - m)^2 + 2mf - m^2$, vemos que f^2 é integrável, como queríamos provar. ■

Teorema 2.7 *Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, então $f \cdot g$ também é integrável no mesmo intervalo.*

Demonstração. Podemos notar que:

$$f \cdot g = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2],$$

como a soma de funções integrável no mesmo intervalo é integrável, o quadrado de funções integráveis também é integrável e por fim o escalar vezes uma função integrável também é integrável. Assim, concluímos que $f \cdot g$ é integrável.

■

Teorema 2.8 *Se f e g são funções integráveis num intervalo $[a, b]$, então,*

(a) Se $f \geq 0$, então $\int_a^b f \geq 0$;

(b) Se $f \geq g$, então $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Demonstração. Sendo $f \geq 0$, é claro que $s(f, P) \geq 0$ para toda partição P, o que é suficiente para estabelecer a parte a). Desta segue a parte b), observando que $f - g \geq 0$. ■

Teorema 2.9 *Se f é integrável em $[a, b]$, o mesmo é verdade para $|f|$ e*

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b |f|. \tag{2.21}$$

Demonstração. A integrabilidade de $|f|$ segue da desigualdade

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|, \tag{2.22}$$

que é válida para todo $x, y \in [a, b]$. Em consequência, a oscilação de $|f|$ em qualquer subintervalo de uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$ será menor ou igual à oscilação de f no mesmo subintervalo, assim

$$S(|f|, P) - s(|f|, P) \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta t_i = S(f, P) - s(f, P).$$

Daqui e do teorema 2.1 segue a integrabilidade de $|f|$. Quanto à desigualdade 2.21, observe que $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$, logo $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ e $-\int_a^b f = \int_a^b (-f) \leq \int_a^b |f|$. Essas duas ultimas desigualdades equivalem a 2.21, o que completa a demonstração do teorema.

■

2.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta seção apresentaremos um dos principais resultados do cálculo diferencial e integral, o teorema fundamental do cálculo, o qual estabelece a ligação entre derivadas e integrais.

Teorema 2.10 ***(Teorema Fundamental do Cálculo)***. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes:*

1. F é uma integral indefinida[1] de f, isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in I$.

[1] Caso seja necessária a definição de integral indefinida pode ser encontrada no livro do STEWART [10], na página 403.)

2. *F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $1 \Rightarrow 2$. De fato, primeiro note que, pelo teorema 2.3 temos

$$F(x_0 + h) = F(a) + \int_a^{x_0+h} f(t)dt = F(a) + \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Assim, se $x_0, x_0 + h \in I$ então

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F(a) + \int_a^{x_0+h} f(t)dt - F(a) - \int_a^{x_0} f(t)dt \tag{2.23}$$

$$= \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \tag{2.24}$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt. \tag{2.25}$$

Além disso,

$$h \cdot f(x_0) = \int_{x_0}^{x_o+h} f(x_0)dt,$$

portanto

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f no ponto x_0, existe $\delta > 0$ tal que $t \in I$, $|t - x_0| < \delta$ implicam $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Então $0 < |h| < \delta, x_0 + h \in I$ implicam

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt < \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Isto mostra que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Vejamos agora que $2 \Rightarrow 1$. Seja $F' = f$. Como acabamos de ver, se fixarmos $a \in I$ e definimos $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$, teremos $\varphi' = f$. As duas funções $F, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, tendo a mesma derivada, diferem por uma constante. Como $\varphi(a) = 0$, essa constante é $F(a)$. Portanto, $F(x) = F(a) + \varphi(x)$, isto é,

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

para todo $x \in I$. ■

Observação 2.2 *1. Podemos concluir com a demonstração acima que se uma função é contínua, então possui uma primitiva. Em outra palavras: se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável então $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_x^a f(t)dt$, é derivável em todo ponto x_0 pertencente ao intervalo $[a, b]$ no qual f seja contínua, e tem-se $F'(x_0) = f(x_0)$. Nesse ponto também é derivável a função $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $G(x) = \int_x^b f(t)dt$. Tem-se $G'(x_0) = -f(x_0)$. Com efeito, $F(x) + G(x) = \int_a^b f(t)dt = constante$, logo $F'(x_0) + G'(x_0) = 0$.*

2. *O segundo resultado de extrema importância que também foi mostrado é que se a primitiva de uma função é de classe C^1, ou seja, possui derivada contínua então $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$. Em particular $F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)dt$, o que simplifica o cálculo da integral $\int_a^b f(x)dx$ à procura de uma primitiva de f. Em outras palavras, se $F' = f$ então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Os próximos dois teoremas trazem duas ferramentas muitos importantes para a solução de integrais de maneira geral, onde tais ferramentas são geralmente ensinadas nos curso de Cálculo.

Teorema 2.11 ***(Mudança de variável.)*** *Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ com derivada contínua e $g([c, d]) \subset [a, b]$. Então*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo, f possui uma primitiva $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e vale $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c))$. Por outro lado, a regra da Cadeia nos dá $(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$ para todo $t \in [c, d]$. Portanto $F \circ g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva da função contínua $t \mapsto f(g(t)) \cdot g'(t)$. Portanto $\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c))$. O que prova o teorema. ■

Teorema 2.12 ***(Integração por partes.)*** *Se f e g tem derivadas contínuas no intervalo $[a, b]$, então,*

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx.$$

Demonstração. A prova para esse teorema note que $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, agora como f e g são contínuas temos que $\int_a^b (f \cdot g)' = \int_a^b [f' \cdot g + f \cdot g']$ por propriedades de integral e o teorema fundamental do cálculo ficamos com, $f \cdot g|_a^b = \int_a^b [f' \cdot g] + \int_a^b [f \cdot g']$ arrumando a equação

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx,$$

o que mostra o teorema. ■

2.4 A integral como limite de somas de Riemann

Definição 2.7 *A **norma** de uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\} \subset [a, b]$ é o número $|P|$ = maior comprimento $t_i - t_{i-1}$ dos intervalos de P.*

Teorema 2.13 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow S(f; P) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P_0 = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f, P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $M = \sup f$. Tomamos δ com $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2Mn}$. Se P é qualquer partição de $[a, b]$ com $|P| < \delta$, vamos indicar com $[r_{\alpha-1}, r_\alpha]$ os intervalos de $P = \{t_0, ..., t_n\}$ que estão contidos em algum $[t_{i-1}, t_i]$ de P_0 e com $[r_{\beta-1}, r_\beta]$ os restantes intervalos de P. Cada um destes contém pelo menos um ponto t_i em seu interior, logo há, no máximo, n intervalos do tipo $[r_{\beta-1}, r_\beta]$. Escrevemos $\alpha \subset i$ para representar $[r_{\alpha-1}, r_\alpha] \subset [t_{i-1}, t_i]$. Quando $\alpha \subset i$ valem $M_\alpha \leq M_i$ e $\sum_{\alpha \subset i}(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq t_i - t_{i-1}$. Estes números são todos ≥ 0, logo $\sum_{\alpha \subset i} M_\alpha(r_\alpha - r_{\alpha-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$ e $M_\beta(t_\beta - t_\beta) \leq M \cdot \delta$. Portanto:

$$\begin{aligned} S(f; P) &= \sum_\alpha M_\alpha(r_\alpha - r_{\alpha-1}) + \sum_\beta M_\beta(r_\beta - r_{\beta-1}) && (2.26)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) + M \cdot n \cdot \delta && (2.27)\\ &< S(f; P_0) + \frac{\varepsilon}{2} && (2.28)\\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon. && (2.29) \end{aligned}$$

No caso geral, como f é limitada, existe uma constante c tal que $f(x) + c \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Tomando $g(x) = f(x) + c$ temos $S(g; P) = S(f; P) + c \cdot (b - a)$ e

$$\overline{\int_a^b} g(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx + c \cdot (b - a),$$

e assim voltamos ao caso anterior. ■

O Teorema 2.13 significa que

$$\lim_{|P| \to 0} S(f; P) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Analogamente, mostramos que

$$\lim_{|P|\to 0} s(f;P) = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Definição 2.8 *Uma* ***partição pontilhada*** *do intervalo* $[a,b]$ *é um par* $P^* = (P,\xi)$*, onde* $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ *é uma partição de* $[a,b]$ *e* $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ *é uma lista de* n *números escolhidos de forma que* $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$*, para cada* $i = 1, 2, \cdots, n$*.*

Definição 2.9 *Dada uma função limitada* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *e uma partição pontilhada* P^* *de* $[a,b]$*, definimos a* ***soma de Riemann***

$$\sum(f;P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Observe que seja qual for o modo de pontilhar a partição P, temos

$$s(f;P) \leq \sum(f;P^*) \leq S(f;P).$$

Teorema 2.14 *Se* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é integrável então* $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{|P|\longrightarrow 0} \sum(f,P^*)$.

Demonstração. Como consequência do Teorema 2.13, se f é integrável então:

$$\lim_{|P|\longrightarrow 0} s(f;P) = \lim_{|P|\longrightarrow 0} S(f;P) = \int_a^b f(x)dx.$$

Como se tem $s(f;P) \leq \sum(f;P^*) \leq S(f;P)$, segue que $\lim\limits_{|P|\longrightarrow 0} \sum(f;P^*) = \int_a^b f(x)dx$. ■

Com os conteúdos mostrados nos capítulos 2 e 3 temos uma boa base para entender o funcionamento do cálculo sobre o fluxo sanguíneo, porem a modelagem matemática de uma artéria é feita em 3 dimensões e com isso é necessário algumas definição sobre volume. Principalmente o sobre o cálculo de volume através de seções transversais. Tendo entendido isso podemos finalmente trazer todas as aplicações do cálculo integral sobre o fluxo sanguíneo.

3 CÁLCULO DO FLUXO SANGUÍNEO

Neste capítulo será abordado alguns conteúdos sobre volume, a fim de que possamos trazer a demonstração da lei de Poiseuille, e após isso trago uma aplicação que mostra a relação entre a obstrução arterial e a pressão arterial.

3.1 Volumes

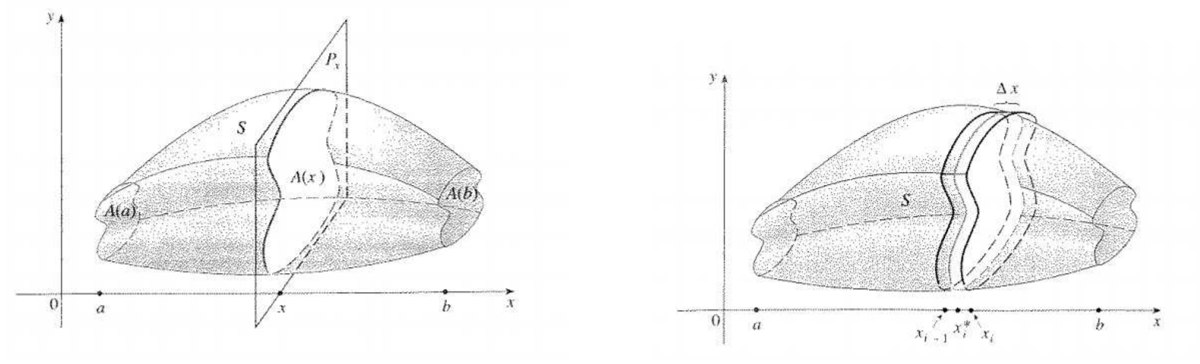
Considere uma região plana qualquer com área igual a A, a essa região será dada o nome de **base**. Agora imagine que fosse possível empilhar essas regiões de tal forma que agora de uma base tivéssemos também uma altura h, vamos obter com isso um sólido e não mais uma figura plana. Para calcular o volume desse sólido basta multiplicar a área da base pela altura

$$V = Ah.$$

Nem sempre essa fórmula será o suficiente para calcular o volume de um sólido, muitos sólidos possuem características únicas e próprias. Para esse tipo de sólido será aplicado um método chamado de cálculo de volume por seção transversal. Seja S um sólido de características próprias, a ideia para calcular o volume desse sólido consiste em fatiá-lo em pequenos sólidos, os quais possuem base e altura, para os quais vamos aproximar o volume usando a relação dada anteriormente. Para isso, basta interceptar nosso sólido com um plano e obtemos uma região plana chamada **seção transversal** de S.

Seja $A(x)$ a área da seção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde $a \leq x \leq b$. Considere uma partição pontilhada $P^* = (P, x^*)$ de $[a, b]$, onde $P = \{x_1, \cdots, x_n\}$ e $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$, $i = 1, \cdots, n$. Usando os planos $P_{x_1}, P_{x_2}, ...$ podemos dividir S em n fatias de larguras iguais a Δx. Seja $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, podemos aproximar a i-ésima fatia S_i, onde essa fatia terá base $A(x_i^*)$ e altura Δx. Veja a figura 3.1.

Figura 6 – Seção transversal



Fonte: Stewart (2006, p. 442)

Assim uma aproximação para o volume de S_i é dado por $A(x_i^*) \cdot \Delta x$, em outras palavras,

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x.$$

Com o mesmo pensamento para as demais seções, teremos uma aproximação para o volume do sólido:

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x.$$

Observe que quanto maior o número de fatias melhor será essa aproximação, nesse caso, se $|P|$ é o maior comprimento $x_i - x_{i-1}$ dos intervalos de P, para melhorar essa aproximação podemos fazer $|P| \to 0$, agora observe que fazer $|P| \to 0$ é equivalente a fazer $n \to \infty$. Deste modo, definimos o volume como o limite dessas somas quando $n \to \infty$. Note ainda que essa soma trata-se da soma de Riemann, assim se $A(x)$ é integrável, pelo Teorema 2.14, o limite dessa soma é $\int_a^b A(x)dx$. Com isso podemos finalmente definir o que seria o volume dado por seções transversais de maneira mais formal.

Definição 3.1 *Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da seção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o* ***volume*** *de S é*

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx.$$

Agora temos as ferramentas necessárias para realizar a aplicação da integral de Riemann no cálculo do volume de sangue que flui através de uma seção transversal de uma artéria. Mas antes, apresentaremos alguns conceitos referentes ao sistema cardiovascular.

3.2 Sistema cardiovascular

O sistema circulatório humano ou cardiovascular é o elo entre o ser humano e o meio ambiente, possibilitando assim a troca de nutrientes com o meio externo. O sistema circulatório é responsável pelo transporte de substancia do nosso corpo.

> Uma rede de canais existe dentro do ser humano atendendo às suas cem trilhões de células. Um contínuo suprimento de carboidratos, oxigênio, aminoácidos, eletrólitos, lipídios, colesterol e hormônios é sintetizado pelas células, sendo distribuídos a todo o organismo no interior das hemáceas ou livres no plasma. A fim de garantir um transporte barato, o corpo dissolve estas substâncias vitais em um líquido complexo denominado sangue. A mesma rede de tubos retira catabólitos, gases de descarga e produtos químicos imprestáveis, resultantes do metabolismo tissular. A maior função do sistema vascular ocorre na microcirculação, por meio do transporte de nutrientes para os tecidos e a remoção dos produtos de excreção celular. (SOUZA, 2010, p.93).

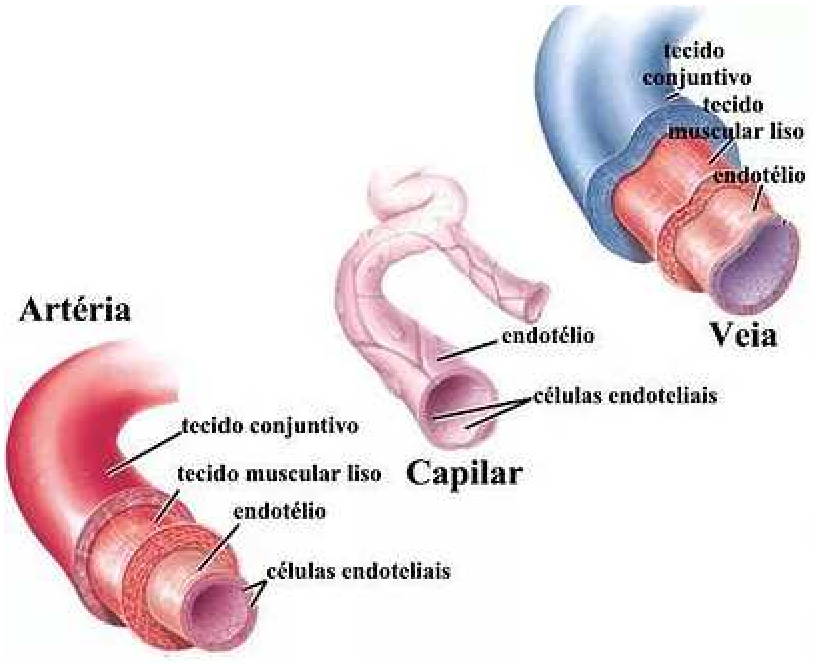
O sistema circulatório sanguíneo é formado pelo coração, órgão cuja função é propulsão sanguínea, e pelo sistema vascular, formado de artérias, veias e capilares.

3.2.1 Componentes do sistema cardiovascular

De acordo com SOUZA (2010), as **artérias** são vasos por onde passa o sangue que sai do coração, e diminuem de calibre à medida que se afasta do seu ponto de origem. As artérias têm início cardíaco (isto é, no coração) e término capilar (isto é, nos vasos capilares); funcionam transferindo sangue do coração para todos os órgãos, sob altas pressões. Os **capilares** formam uma rede de túbulos delgados que se espalha largamente e anastomosam profusamente. Através de suas paredes, se dá o intercâmbio metabólico entre o sangue e os tecidos. As **veias** são vasos por onde passa o sangue que vai para o coração, aumentando progressivamente de diâmetro à medida que os capilares vão se unindo em um sistema de drenagem cada vez mais calibroso; têm início capilar e término cardíaco. Funcionam transferindo o sangue de todos os órgãos para o coração, sob baixas pressões. Essa reduzida pressão intraluminal torna as veias de paredes mais finas e diâmetro maior e com trajetórias mais variáveis que as artérias. A diferença entre artéria, veia e capilar é ilustrada na figura 7.

Em conjunto, as artérias, arteríolas, veias e capilares tem o comprimento de 97000 Km, o que é equivalente a duas voltas na terra pela linha do equador.

Figura 7 – Diferença entre Artéria, Veia e Capilar.



Fonte: Google Imagens.

3.2.2 Coração

O coração adulto mede cerca de 12 cm x 9 cm x 6 cm, pesando aproximadamente $0,5\%$ do peso corpóreo, o que corresponde a 280 a 340 gramas, no sexo masculino, e 230 a 280 gramas, no sexo feminino.

Segundo SOUZA (2010), o coração é um órgão fibromuscular cavitário com forma similar a um cone truncado, com uma base voltada dorsalmente para a direita, um ápice direcionado anteriormente e para a esquerda. Apresenta as faces anterior ou estemocostal, diafragmática ou inferior e laterais ou pulmonares. Os limites do coração são sua margens superior, inferior ou borda aguda e margem esquerda ou borda obtusa.

O coração possui quatro câmaras: dois átrios e dois ventrículos. Os átrios (as câmaras superiores) recebem sangue; os Ventrículos (câmaras inferiores) bombeiam o sangue para fora do coração, observe a figura 8.

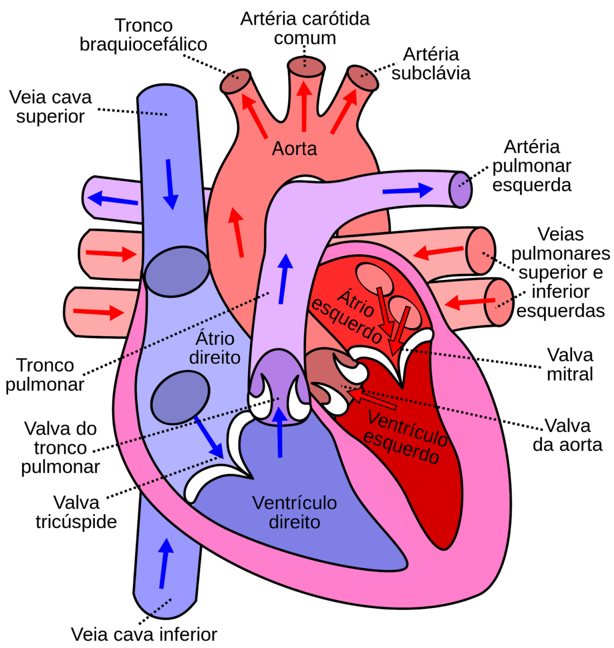
O **átrio direito**, uma câmara grosseiramente quadrangular, está anterior e à direita do esquerdo. A aurícula projeta-se para a esquerda a partir da parte anterior mais alta do átrio direito, sobrepondo-se ao lado direito da parte ascendente da aorta.

O **átrio esquerdo** se encontra à esquerda, junto ao tronco pulmonar. Algumas vezes, o átrio esquerdo é tão reduzido que se restringe apenas à sua aurícula.

O **ventrículo direito** estende-se a partir do óstio da valva tricúspide até quase o ápice do coração. Daí então sobe para a esquerda como o cone arterioso, alcançando o óstio pulmonar. Em contraste com o VD, a construção do **ventrículo esquerdo** atende a sua função como uma bomba poderosa para sustentar o fluxo pulsátil nas artérias sistêmicas de alta pressão. Mais longo e estreito que o VD, seu eixo se dirige para frente esquerda. Sua cavidade é oval com as paredes de 8 a 12 mm de espessura, ou seja, três vezes mais espessas do que no VD.

O átrio direito se comunica com o ventrículo direito por meio da válvula tricúspide e o átrio esquerdo comunica com o ventrículo esquerdo pela válvula bicúspide, os quais têm como funções garantir a circulação do sangue no coração em um único sentido, dos átrios para os ventrículos.

Figura 8 – Nomenclatura das partes do coração humano.



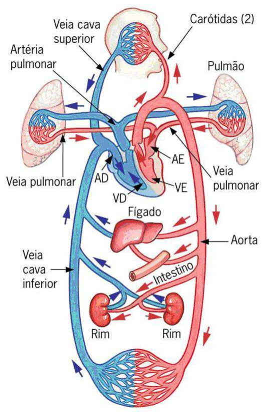
Fonte: Google Imagens.

Em um minuto, o coração lança 5 litros de sangue no corpo; em uma hora, são 400 litros. O órgão faz dois movimentos: sístole e diástole. A sístole, que é uma espécie de contração, é responsável pela distribuição do sangue. Na diástole, o coração descansa. Mas é bom saber que no ciclo cardíaco normal os dois átrios se contraem, enquanto os dois ventrículos relaxam e vice versa. A frequência cardíaca normal, em repouso, varia entre 60 e 100 batimentos por minuto.

> Como o VD, o VE possui um óstio e trato eferentes contínuos com o óstio e trato aferentes, com complexos valvulares anexos. O óstio atrioventricular esquerdo, com sua valva mitral, recebe o sangue proveniente do átrio durante a diástole, com o influxo sendo direcionado para o ápice do coração. Após o fechamento da valva mitral e durante toda a fase de ejeção da sístole, o sangue é expelido do ápice através do óstio da aorta, definindo o vetor de efluxo. Ao contrário do que ocorre no VD, os vetores de influxo e efluxo são agudamente angulados e próximos um do outro. (SOUZA, 2010, p.62).

Agora, finalmente, podemos saber como acontece a circulação sanguínea no nosso corpo. observando a figura 9 a partindo do ponto em que, o sangue arterial, rico em oxigênio, está circulando pelo corpo e conforme vai fazendo as trocas gasosas esse sangue passa a ser um sangue venoso, rico em gás carbônico, onde através das veias cavas vai ser levado ao átrio direito, passando pela valva tricúspide e caindo no VD. Agora por meio da artéria pulmonar esse sangue ainda veneso é levado para o pulmão onde lá passa por uma oxigenação e é transformado em sangue arterial. Neste momento o sangue retorna ao coração, porém agora ele vai para o lado esquerdo do coração através da veia pulmonar, onde entra no átrio esquerdo e cai pela valva bicúspide no VE e a partir desse ponto é mandado para refazer todo o processo,

Figura 9 – Circulação sanguínea.



Fonte: Google Imagens.

3.2.3 Fisiologia do sistema cardiovascular

A fisiologia é uma área da biologia que estuda as múltiplas funções mecânicas, físicas e bioquímicas nos seres vivos. Em síntese, a fisiologia estuda o funcionamento do organismo. É dividida classicamente em fisiologia vegetal e fisiologia animal.

Algumas características físicas, como velocidade, pressão, fluxo e resistência, são encontradas nessa parte da biologia. Veremos logo adiante que o fluxo é determinado pelo gradiente da pressão e pela resistência.

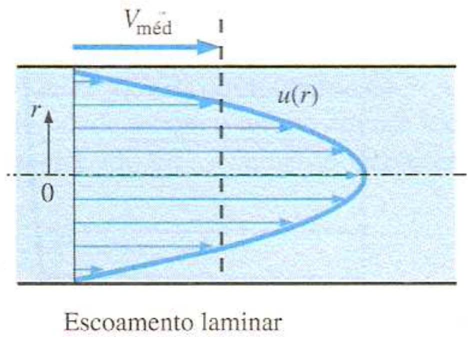
> O fluxo ao longo de um vaso sanguíneo é determinado por dois fatores: (1) gradiente de pressão, que é a diferença de pressão do sangue entre as duas extremidades do vaso; é a força que impele o sangue pelo vaso, e (2) resistência vascular, o impedimento ao fluxo sanguíneo, ao longo do vaso. Observe que é a diferença de pressão entre as duas extremidades do vaso, e não a pressão absoluta no vaso, é que determina a intensidade do fluxo.[...]A velocidade do fluxo sanguíneo é inversamente proporcional à secção transversa do vaso. (SOUZA, 2010, p.106).

3.2.4 Lei do Fluxo Laminar e Lei de Poiseuille

A **hidrodinâmica** é a área da dinâmica dos fluidos que estuda o seu movimento. Existem essencialmente dois tipos de fluidos, um que é considerado ideal, ou seja, que não tem viscosidade e os fluidos viscosos, aqueles que apresentam viscosidade, como, por exemplo, o sangue.

A **viscosidade** é o atrito interno em um fluido. Ou seja, quanto maior a viscosidade, menor será a velocidade em que o fluido se movimenta. Existem dois tipo de movimentação do fluidos são elas **fluxo laminar** onde velocidade do sangue no centro do vaso é muito maior do que a que ocorre na periferia, conferindo ao fluxo um perfil parabólico, ou seja , existem um fluxo paralelo de modo que não existe sobreposição, em outras palavras não existe **turbulência**, observe a figura 10 e perceba que os vetores estão com o mesmo sentido e não existe sobreposição de vetores.

Figura 10 – Fluxo laminar em um tubo de raio R.



Fonte: Google Imagens.

Consequentemente a velocidade de escoamento do fluxo é inversamente proporcional a viscosidade. No corpo humano a pressão do sangue se deve a contribuição da pressão estática, da pressão dinâmica e da pressão mecânica. Em virtude do próprio peso do sangue as artérias e veias estão sob a pressão estática, que dependerá da altura da coluna de sangue em relação ao pé. A contribuição da pressão dinâmica é em virtude das diversas velocidades do sangue no corpo. O efeito da pressão mecânica é em virtude do coração, que ao bombear o sangue para o corpo está lhe exercendo certa pressão. No percurso do sangue, haverá variações de pressão sanguínea pelo corpo, muito em virtude dos efeitos da viscosidade. Um outro fato interessante é que a pressão do sangue arterial (sangue rico em oxigênio) é maior que a do sangue venoso (sangue rico em gás carbônico). Isto se deve ao fato do sangue arterial ter o auxílio do coração para ser bombeado para o resto do corpo, o que não ocorre com o sangue venoso.

Uma observação que vale a pena ser mencionada é que a partir desse ponto, afim de aplicarmos os conhecimentos da hidrodinâmica seja necessário analisar as propriedades do sangue e assumir algumas aproximações. O sangue é considerado um fluido homogêneo porém sua estrutura é muio mais complexa do que se imagina, pois o sangue é constituído por diversas partículas em suspensão, o que, do ponto de vista da análise do seu escoamento, torna a sua descrição particularmente difícil, nomeadamente, quando os vasos que o conduzem são muito estreitos.

Um segundo ponto se dá pelo fator de supormos que o sangue circula através de tubos rígidos e sabemos que as artérias e veias dos nossos sistema cardiovascular são flexíveis e elásticas, e que realmente essa elasticidade é muito importante para um bom fluxo sanguíneo.

De acordo com SOUZA (2010) a condutância é a medida do fluxo sanguíneo em um vaso para determinado gradiente de pressão. A condutância é a recíproca exata da resistência, ou seja, a condutância aumenta de modo diretamente proporcional à medida que a resistência diminui e vice-versa.

Podemos modelar a forma de um vaso sanguíneo (como veia ou artéria) por um tubo cilíndrico de raio R e comprimento l. Como existe atrito nas extremidades do tubo, então a velocidade do sangue é maior no centro do cilindro e decresce a medida que a distância r do centro do tubo se distancia do eixo central.

Tendo em mente essa característica e lembrando que a viscosidade e o comprimento é inversamente proporcional a velocidade, e supondo um escoamento do tipo laminar, podemos escrever a fórmula de Poiseuille, chamada de **lei do fluxo laminar**.

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 - r^2), \quad \text{com} \quad 0 \leq r \leq R,$$

onde $v(r)$ é velocidade de escoamento, r a distância a qualquer ponto do líquido a partir do eixo do tubo, ΔP diferença de pressão entre as extremidades do tubo, R o raio do círculo originado pela seção transversal, η é o coeficiente de viscosidade do fluido e l é o comprimento do tubo.

Observe que a imagem dessa função vai variar de $r = R$, logo $v(R) = \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 - R^2) = 0$, até $r = 0$ nesse caso $v(0) = \frac{\Delta P}{4\eta l}R^2$ onde teríamos a sua velocidade máxima. Assim, a imagem da função varia de $0 \leq v \leq \frac{\Delta P}{4\eta l}R^2$.

Se movermos $r = r_1$, para $r = r_2$ a taxa da variação da velocidade média pode ser calculada da seguinte forma:

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

Nesse caso fazendo $\Delta r \to 0$, teremos como resultado o **gradiente da velocidade**, isto é, a taxa instantânea de variação em relação a r.

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}.$$

O fluxo sanguíneo varia bastante nos diferentes tecidos e em determinados tecidos necessitam de um fluxo bem maior do que outros. Tecidos como músculos esqueléticos apresentam grandes variações no fluxo sanguíneo através dos mesmos em diferentes situações: durante o repouso o fluxo é relativamente pequeno, mas aumenta significativamente durante o trabalho, quando o consumo de oxigênio e demais nutrientes aumenta e a produção de gás carbônico e outros elementos também aumenta.

Com isso, a seguinte lei definida por Poiseuille diz que o fluxo ϕ de um tubo cilíndrico transportando um líquido viscoso com o raio R, comprimento L, pressão ΔP e coeficiente de viscosidade η é:

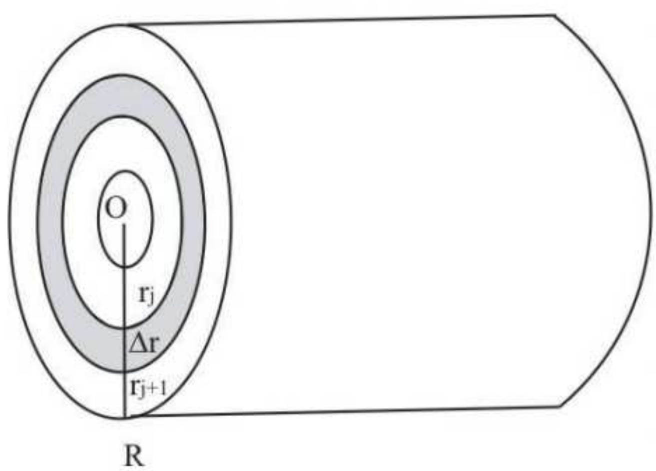
$$\phi = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P.$$

A lei acima possui uma importância extrema para o estudo do fluxo sanguíneo e será demonstrada na seção logo abaixo.

3.3 Aplicação da integral de Riemann no estudo do fluxo sanguíneo

Neste momento temos todas as ferramentas necessárias para finalmente mostrar como foi a ideia da demonstração da lei de Poiseuille. De maneira geral, nosso objetivo será calcular o fluxo sanguíneo, para tanto tenha em mente uma artéria e com isso seja $r \in [0, R]$ um intervalo que vai do centro 0 até a extremidade R e dividamos em n subintervalos iguais de comprimento Δr, de tal modo que o início do j-ésimo intervalo seja marcado por r_j, onde esses n subintervalos significam n anéis concêntricos.

Figura 11 – Artéria subdividida em anéis concêntricos.



Fonte: (FAMAT, 2007).

conforme $\Delta r \to 0$, a área do j-ésimo anel é aproximadamente igual à área de um retângulo cujo comprimento é a circunferência do menor perímetro do anel e cuja largura é Δr, e seja essa área chamada de A, temos,

$$A \approx 2\pi r_j \Delta r.$$

Para encontrar a razão com que o fluxo de sangue passa através do j-ésimo anel, basta multiplicarmos a área do j-ésimo anel pela velocidade do fluxo sanguíneo. Como a velocidade do sangue através do j-ésimo anel é aproximadamente igual a $v(r_j)$, segue-se que:

$$(2\pi r_j \Delta r)(v(r_j)) = (2\pi r_j \Delta r)(\frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 - r_j^2)) = 2\pi \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r.$$

Fazendo essa construção para o fluxo através de toda a seção teremos a soma das razões de cada um dos n anéis concêntricos, ou seja,

$$Fluxo \approx \sum_{j=1}^{n} 2\pi \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r.$$

Assim, a medida que o n cresce demasiadamente o fluxo tende a se aproximar cada vez mais do seu verdadeiro valor. Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned} Fluxo = \phi &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} 2\pi \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r && (3.1)\\ &= \int_0^R 2\pi \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 r - r^3)dr && (3.2)\\ &= 2\pi \frac{\Delta P}{4\eta l}\left(\frac{R^2}{2}r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^R && (3.3)\\ &= 2\pi \frac{\Delta P}{4\eta l}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) && (3.4)\\ &= \frac{\pi R^4}{8\eta l}\Delta P cm^3/s. && (3.5) \end{aligned}$$

A que por sua vez é a expressão matemática da **lei de Poiseuille**. Por ela podemos notar que o fluxo é inversamente proporcional a viscosidade e ao tamanho do tubo, como já mencionado, além de fazer todo sentido uma vez que quanto mais viscoso for o fluído mais difícil será o fluxo, e quanto maior for o tubo para uma mesma pressão o fluxo também tende a diminuir. E diretamente proporcional ao gradiente de pressão no tubo.

3.4 Infarto do miocárdio

Para entender melhor a aterosclerose, devemos nos imaginar dentro de uma artéria viajando pelo corpo. Lá dentro, além de encontrarmos plasma, hemácias, leucócitos e plaquetas, vamos encontrar o colesterol e existe vários tipos diferentes de colesterol. Entre eles os mais importantes são o LDL-C conhecido como colesterol ruim. Ele é responsável por entupir as artérias e o HDL-C chamado de colesterol bom, pois acredita-se que ele ajuda a remover o colesterol ruim do corpo. Se houver algum dano ao revestimento da artéria causada por exemplos, por pressão alta, as partículas do colesterol LDL tem mais probabilidade de entrar nessa parte do vaso ou artéria. Quando o LDL entra na parede danificada da artéria ele se transforma e pode levar a inflamação. Com o tempo, esse processo de oxidação e inflamação na parede da artéria cria algo chamado de placa aterosclerótica. A essa processo é dado o nome de aterosclerose.

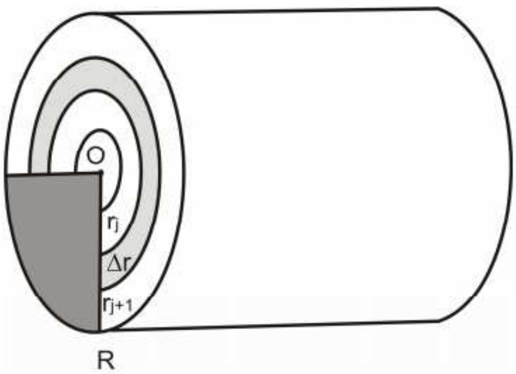
A aterosclerose pode ter uma série de consequências dependo se a placa é instável ou estável. Uma placa estável pode continuar crescendo lentamente e assim causar um aumento de pressão, mas sem necessariamente bloquear a artéria, mas às vezes mesmo uma pequena placa pode se tornar instável e nesse caso ela vai se romper e expor seu conteúdo, esse caso é bem mais perigoso que uma placa estável, pois se houver a formação de um coágulo ele pode bloquear totalmente o fluxo sanguíneo, os efeitos nesse caso são imediatos, no caso de essa artéria levar sangue ao coração vai ocorrer o infarto do miocárdio.

Conforme todo esse desenvolvimento seja de uma placa estável ou instável, sempre existe uma variação na pressão sanguínea e como uma forma de exemplificar isso considere a seguinte situação. Suponha que exista uma obstrução arterial de 25%, vamos agora calcular o fluxo sanguíneo nessa artéria. Com as mesmas suposições para quando demonstramos a lei de Poiseuille, como existe uma obstrução arterial de 25% então o perímetro nesse caso será :

$$2\pi r_j - \frac{\pi}{2} r_j \approx \frac{3\pi}{2} r_j.$$

De maneira análoga, a área do j-ésimo anel será $\frac{3\pi}{2} r_j \Delta r$.

Figura 12 – Artéria com 25% de obstrução.



Fonte: (FAMAT, 2007).

Com isso, podemos obter o fluxo sanguíneo com essa obstrução:

$$\phi_1 \approx \frac{3\pi}{2} r_j \Delta r \cdot v(r_j) \tag{3.6}$$

$$\approx \frac{3\pi}{2} r_j \Delta r \frac{\Delta P_1}{4\eta l}(R^2 - r_j^2) \tag{3.7}$$

$$\approx \frac{3\pi}{2} \frac{\Delta P_1}{4\eta l}(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r. \tag{3.8}$$

Sendo η a viscosidade, ΔP_1 a pressão no local e l o comprimento da artéria obstruída. Integrando essa expressão obtemos:

$$Fluxo = \phi_1 = \frac{3\pi \Delta P_1 R^4}{32\eta l}.$$

Observando a razão entre esse resultado com a lei de Poiseuille, temos que

$$\frac{\phi}{\phi_1} = \frac{4}{3}\frac{\Delta P}{\Delta P_1}.$$

Podemos ver que a razão entre o fluxo sanguíneo ϕ e ϕ_1 é proporcional a razão entre a variação de pressão ΔP e ΔP_1. Essa proporção deixa bem evidente que conforme a obstrução aumenta a pressão também aumenta.

CONCLUSÃO

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou uma melhor compreensão referente a integral de Riemann e sua aplicação no estudo do fluxo sanguíneo. Por meio desse foi possível verificar que a matemática está presente nas mais diversas áreas, mesmo sendo complexa a sua percepção.

Observamos que foi possível utilizar a integral de Riemann por meio da lei de Poiseuille para estudar o funcionamento do sistema cardiovascular. Este trabalho também possibilitou o estudo de conteúdos vistos no curso de introdução a análise referente à parte de integrais. Com isso podemos dizer que o nosso objetivo foi alcançado de modo satisfatório.

Desenvolver esse trabalho contribuiu para mostrar que a matemática também presente em diversas áreas do conhecimento, seja ela exata ou não. As aplicações realizadas exemplificam bem isso, pois a anatomia é uma área do conhecimento não muito ligado à matemática e essa interdisciplinaridade ajuda na compreensão mútua de conteúdos.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. 2 ed. São Paulo: Editora Edgrard Blücher LTDA, 1996.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. 3 ed. São Paulo: Editora Edgrard Blücher LTDA, 2006.

BOYER, Carl B. **A History of Mathematics**. 1 ed. São Paulo: Editora Edgrard Blücher LTDA, 1996.

CAJORI, Florian. **Uma história da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTDA, 2007.

FIGUEIREDO, Djairo. **Análise I**. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A - LTC, 1996.

Fluxo Sanguíneo: Uma Aplicação da Integral de Riemann. 2007. Disponível em: <http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/ Famat_revista_09_sala_04.pdf>. Acesso em: 11 de janeiro 2017.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz **Um Curso de Cálculo: Volume I**. 5 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A - LTC, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1: Função de Uma Variável**. 9 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2007.

MACIEL, Aldo Bezerra; LIMA, Osmundo Alves. **Introdução à análise real**. Campina Grande: EDUEP, 2005.

STEWART, James. **Calculus**. 5 ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

APÊNDICE

Para entendermos os conceitos de integral de Riemann é necessário que tenhamos em mente algumas Definições, Teoremas e Corolários sobre o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Nesse sentido, apresentaremos neste capítulo alguns tópicos sobre esses temas. Todas as demonstrações mostradas nesse capítulo também pode ser encontradas no livro de análise do elon [8].

.1 $\mathbb{R}$ é um corpo

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um corpo, este é munido de duas operações chamadas de adição e multiplicação, que satisfazem a certas condições, chamadas de axiomas.

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ sua soma $x + y \in \mathbb{R}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos seu produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$. Os axiomas da adição são os seguintes:

1. **Associatividade** - Quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$;
2. **Comutatividade** - Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $x + y = y + x$;
3. **Elemento Neutro** - Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$. O elemento 0 chama-se **zero**;
4. **Simétrico** - Todo elemento $x \in \mathbb{R}$ possui um **simétrico** $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Da comutatividade, segue-se que $0 + x = x$ e $-x + x = 0$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$. A soma $x + (-y)$ será indicada com a notação $x - y$ e chamada a diferença entre x e y . A operação $(x, y) \to x - y$ chama-se subtração.

Note que, somando-se y a ambos os membros da igualdade a seguir temos

$$x - y = z \Rightarrow x - y + y = z + y \Rightarrow x - 0 = z + y \Rightarrow x = z + y.$$

De maneira análoga, se $x = y + z$ então, somando-se $-y$ a ambos os membros da igualdade temos que $x - y = z$. Assim concluímos que,

$$x - y = z \Leftrightarrow x = y + z.$$

Donde podemos perceber a unicidade do elemento neutro. De fato se para algum $x \in \mathbb{R}$ e algum $\theta \in \mathbb{R}$ temos $x + \theta = x$ então $\theta = x - x$, ou seja, $\theta = 0$. Observamos também que cada $x \in \mathbb{R}$ possui um único simétrico já que se $x + y = 0$, então, $y = 0 - x$, ou seja, $y = -x$.

Também temos que $-(-x) = x$, pois $(-x) + x = 0$. Por fim, da igualdade $x + z = y + z$ obtemos $x = y$, de fato, somando $-z$ a ambos os membros da igualdade

$$x + z = y + z \Rightarrow x + z - z = y + z - z \Rightarrow x + 0 = y + 0 \Rightarrow x = y.$$

A isso foi dado o nome de **Lei do corte**.

A seguir apresentaremos os axiomas da multiplicação:

1. **Associatividade** - dados quaisquer x, y, z em $\mathbb{R}$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
2. **Comutatividade** - sejam quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale $x \cdot y = y \cdot x$;
3. **Elemento Neutro** - existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. O elemento 1 chama-se **um**.
4. **Inverso Multiplicativo** - todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$ possui um inverso multiplicativo x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$;

Por comutatividade, segue-se que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$.

Através dos axiomas acima podemos concluir, em particular, que os elementos de $\mathbb{R}$ distintos de 0 formam um grupo abeliano[1] em relação a multiplicação.

Dados x e y em $\mathbb{R}$, com $y \neq 0$, escreve-se também x/y em vez de $x \cdot y^{-1}$. A operação $(x, y) \to x/y$, é chamada de **divisão** e o resultado x por y é chamado de **quociente**. Não se divide por zero: x/0 não tem sentido.

Se $y \neq 0$, tem-se $x/y = z \Leftrightarrow x = y \cdot z$. Daí se deduz a Lei do Corte: Se $z \neq 0$ e $x \cdot z = y \cdot z$, então $x = y$. Se $x \cdot y = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então, tomando $x = 1$ obtemos $y = 1$. Isto prova a unicidade do elemento neutro.

Sabendo-se apenas que $x \cdot y = x$ para um certo x, há duas possibilidades: se $x \neq 0$ então $y = 1$, pela lei do corte. Se $x = 0$ então y pode ser qualquer valor real pois, como veremos logo abaixo, $0 \cdot y = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por fim, se $x \cdot y = 1$ então, como veremos a seguir, $x \neq 0$ e $y \neq 0$ concluímos que $y = x^{-1}$ o que prova a unicidade do elemento inverso.

As operações de adição e multiplicação podem ser relacionadas através do seguinte axioma.

Distributividade - Dados x, y, z quaisquer, em $\mathbb{R}$, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Resulta desse axioma que $x \cdot 0 = 0$ para $x \in \mathbb{R}$, com efeito

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x \cdot (0 + 1) = x \cdot 1 = x,$$

[1] Chamado também de grupo comutativo, é um grupo $(G, *)$ em que $a * b = b * a$ para quaisquer a e $b \in G$, onde $*$ simboliza uma operação entre dois elementos do conjunto.

logo pelo elemento neutro da soma e pela lei do corte temos que $x \cdot 0 = 0$.

No entanto, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x \cdot y = 0$, segue-se $x = 0$ ou $y = 0$. De fato, se for $y \neq 0$, então multiplicando $x \cdot y = 0$ por y^{-1}, temos $x \cdot y \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1}$ e, portanto, $x = 0$. Assim, no conjunto $\mathbb{R}$, tem-se $x \cdot y \neq 0$ sempre que ambos os fatores forem distintos de zero.

.2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado

Dizer que $\mathbb{R}$ é um **corpo ordenado** significa que $\mathbb{R}$ possui um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ chamado conjunto dos números reais positivos de $\mathbb{R}$, tal que as condições a seguir são satisfeitas:

1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos, ou seja, $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$;

2. Dado $x \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Definindo o conjunto $\mathbb{R}^-$ como sendo o conjunto dos números $-x$ onde $x \in \mathbb{R}^+$, a condição 2, garante que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ e os conjuntos $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os números $y \in \mathbb{R}^-$ chamam-se **negativos**.

Definição .2 (Relação de Ordem) *Dado um conjunto ordenado, no nosso caso $\mathbb{R}$, escrevemos $x < y$ e diz-se que x* ***é menor do que y*** *quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $y = x + z$ onde z é positivo.*

Observação .1 *Escreve-se também $y > x$ e diz-se que* ***y é maior que x****. Isoladamente, $x > 0$ significa que $x \in \mathbb{R}^+$, isto é, que x é positivo, enquanto $x < 0$ quer dizer que x é negativo, ou seja, $x \in \mathbb{R}^-$.*

Proposição .1 *Valem as seguintes propriedades da relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$:*

1. ***Transitividade****: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;*

2. ***Tricotomia****: dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das alternativas $x = y$ ou $x < y$ ou $y < x$;*

3. ***Monotonicidade da adição****: se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$;*

4. ***Monotonicidade da multiplicação****: se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $x \cdot z < y \cdot z$. Se $z < 0$ então $x < y$ implica $y \cdot z < x \cdot z$.*

Demonstração. Vamos demostrar as propriedades acima:

1. $x < y$ e $y < z$ significa afirmar que $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z - y \in \mathbb{R}^+$. Pela primeira condição de corpo ordenado concluímos que $(z - y) + (y - x) \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $z - x \in \mathbb{R}^+$, o que significa $x < z$.

2. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, ou $y - x \in \mathbb{R}^+$, ou $y - x = 0$ ou $y - x \in \mathbb{R}^-$. No primeiro caso tem-se $x < y$, no segundo $x = y$ e no terceiro $y < x$. Estas possibilidades se excluem mutuamente, pela segunda condição de corpo ordenado.

3. Se $x < y$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$, donde $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $x + z < y + z$.

4. Se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{R}^+$. Logo $(y - x) \cdot z \in \mathbb{R}^+$, isto é, $y \cdot z - x \cdot z \in \mathbb{R}^+$, o que significa $x \cdot z < y \cdot z$. Se $x < y$ e $z < 0$, então $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $-z \in \mathbb{R}^+$, logo $(y - x) \cdot (-z) \in \mathbb{R}^+$, isto é, $(xz) - (yz) \in \mathbb{R}^+$ o que significa $y \cdot z < x \cdot z$.

■

A relação de ordem em $\mathbb{R}$, definida acima, permite apresentar o **valor absoluto** (ou **módulo**) de um número real $x \in \mathbb{R}$ assim: $|x| = x$, se $x > 0$, $|0| = 0$ e $|x| = -x$, se $x < 0$. Em outras palavras, $|x| = max\{x, -x\}$ é o maior dos números reais x e $-x$.

Teorema .1 *Se $x, y \in \mathbb{R}$ então $|x + y| \leq |x| + |y|$ e $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.*

Demonstração. Somando membro a membro as desigualdades $|x| \geq x$ e $|y| \geq y$ vem $|x| + |y| \geq x + y$. Analogamente, de $|x| \geq -x$ e $|y| \geq -y$ resulta $|x| + |y| \geq -(x + y)$. Logo $|x| + |y| \geq |x + y| = max\{x + y, -(x + y)\}$. Para provar que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, basta mostrar que estes dois números têm o mesmo quadrado, já que ambos são ≥ 0. Ora o quadrado de $|x \cdot y|$ é $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$, por outro lado $(|x| \cdot |y|)^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = x^2 \cdot y^2$. ■

Teorema .2 *Sejam $a, x, \delta \in \mathbb{R}$. Tem-se $|x - a| < \delta$ se, e somente se, $a - \delta < x < a + \delta$.*

Demonstração. Como $|x - a|$ é o maior dos dois números $x - a$ e $-(x - a)$, afirma que $|x - a| < \delta$ equivale a dizer que se tem $x - a < \delta$ e $-(x - a) < \delta$, ou seja, $x - a < \delta$ e $x - a > -\delta$. Somando a, vem: $|x - a| < \delta \Leftrightarrow x < a + \delta$ e $x > a - \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$. ■

.3 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

A seguir, veremos algumas definições necessárias para a compreensão dos resultados que serão apresentados mais adiante.

Definição .3 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se **limitado superiormente** quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$. Cada $b \in \mathbb{R}$ com esta propriedade chama-se uma **cota superior** de X.*

Definição .4 *O conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se **limitado inferiormente** quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ com essa propriedade chama-se uma **cota inferior** de X.*

Definição .5 *Um conjunto X de $\mathbb{R}$ chama-se **limitado** quando é limitado superiormente e inferiormente, isto é, quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x \leq b$ para todo $x \in X$.*

Observação .2 *A definição .5. é equivalente a dizer que, existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k$, para todo $x \in X$.*

Definição .6 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado superiormente e não-vazio. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ chama-se **supremo** do conjunto X quando b é a menor das cotas superiores de X em $\mathbb{R}$. Mais precisamente, b é o supremo de X quando cumpre as seguintes condições:*

1. *Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;*
2. *Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.*

A condição acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$2'$. Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$.

Com efeito, $2'$ nos diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X, ou ainda que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$. Denotamos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X.

Definição .7 *Um elemento $a \in \mathbb{R}$ chama-se ínfimo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, limitado inferiormente e não vazio, quando a é a maior das cotas inferiores de X. Mais explicitamente, a é ínfimo de X, e escrito da forma $a = \inf X$, quando cumpre as seguintes condições:*

1. *Para todo $x \in X$, tem-se $a \leq x$;*
2. *Se $c \leq x$ para todo $x \in X$, então $c \leq a$.*

Assim como no supremo podemos reformular a segunda sentença da seguinte forma:

2'. Se $a < c$, então existe $x \in X$ tal que $x < c$.

De fato, $2'$ diz que nenhum número maior do que a é cota inferior de X. Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

Definição .8 *Dizemos que $\mathbb{R}$ é **completo** quando todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui um supremo $b = \sup X \in \mathbb{R}$.*

.4 Resultados sobre supremo e ínfimo

Os resultados a seguir são importantes para a definição de integral de Riemann.

Lema .1 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então $supA \leq infB$. A fim de ser $supA = infB$ é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$.*

Demonstração. Como para todo $y \in B$ e para todo $x \in A$ tem-se, $x \leq y$, então todo $y \in B$ é cota superior de A, logo $\sup A \leq y$, assim $\sup A$ é cota inferior de B, portanto $\sup A \leq \inf B$. Supondo que vale a desigualdade estrita $\sup A < \inf B$ então $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$. daí temos que, $y - x \geq \inf B - \sup A = \varepsilon$ para quaisquer $x \in A, y \in B$. Reciprocamente supondo $\sup A = \inf B$ então, para todo $\varepsilon > 0$ dado , $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ não é cota superior de A e $\inf B + \frac{\varepsilon}{2}$ não é cota inferior de B, logo existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $supA - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq supA = infB \leq y < infB + \frac{\varepsilon}{2}$, com isso temos que $y - x < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} - \sup A + \frac{\varepsilon}{2} = \epsilon$. ■

Lema .2 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos limitados e $c \in \mathbb{R}$. São também limitados os conjuntos $A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$ e $c.A = \{c.x; x \in A\}$. Além disso, tem-se $sup(A + B) = supA + supB$, $inf(A + B) = infA + infB$ e $sup(c.A) = c.supA$, $inf(c.A) = c.infA$, caso seja $c \geq 0$. Se $c < 0$ então $sup(c.A) = c.infA$ e $inf(c.A) = c.supA$.*

Demonstração. Para facilitar o entendimento vamos dividir o lema em partes e mostrar uma a uma. Façamos $a = \sup A$, $b = \sup B$, $d = \inf A$ e $e = \inf B$.

1. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

   Para todo $x \in A$ tem-se $x \leq a$ e para todo $y \in B$ temos $y \leq b$, logo $x + y \leq a + b$. Assim $a + b$ é cota superior de $A + B$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $a - \frac{\varepsilon}{2} < x$ e $b - \frac{\epsilon}{2} < y$, somando membro a membro as duas últimas desigualdades obtemos $a + b - \varepsilon < x + y$. Isto mostra que $a + b$ é a menor das cotas superiores de $A + B$, ou seja, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2. $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

   Para todo $x \in A$ tem-se $x \geq d$ e para todo $y \in B$ temos $y \geq e$, logo $x + y \geq d + e$. Assim $d + e$ é cota inferior de $A + B$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $x < d + \frac{\varepsilon}{2}$ e $y < e + \frac{\varepsilon}{2}$, somando membro a membro as duas últimas desigualdades obtemos $x + y < d + e + \varepsilon$. Isto mostra que $d + e$ é a maior das cotas inferiores de $A + B$, ou seja, $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

3. $\sup(c.A) = c. \sup A$.

A igualdade acima é trivial se $c = 0$. Se $c > 0$, dado qualquer $x \in A$ tem-se $x \leq a$, logo $cx \leq ca$. Portanto ca é cota superior do conjunto $c \cdot A$. Além disso, dado qualquer número f menor que ca, temos que $f/c < a$, logo existe $x \in A$ tal que $f/c < x$. Portanto $f < cx$. Isto mostra que $c \cdot a$ é a menor das cotas superiores de $c \cdot A$, ou seja, $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.

4. $\inf(c.A) = c. \inf A$.

   A igualdade acima é trivial se $c = 0$. Se $c > 0$, dado qualquer $x \in A$ tem-se $d \leq x$, logo $cd \leq cx$. Portanto cd é cota inferior de $c \cdot A$. Além disso, dado qualquer número f maior que cd, temos $f/c > d$, logo existe $x \in A$ tal que $f/c > x$. Assim $f > cx$. Isto mostra que $c \cdot d$ é a maior das cotas inferiores de $c \cdot A$, ou seja, $\inf(c.A) = c. \inf A$.

5. Se $c < 0$ então, $\sup(c.A) = c. \inf A$.

   Dado qualquer $x \in A$ tem-se $x \leq a$, porém $ca \leq cx$. Portanto ca é cota inferior do conjunto $c \cdot A$. Além disso, dado qualquer número f maior que ca, temos $f/c < a$, logo existe $x \in A$ tal que $f/c < x$. Logo $f > cx$. Isto mostra que ca é a maior das cotas inferiores de $c \cdot A$, ou seja, $\sup(c.A) = c. \inf A$.

6. Se $c < 0$ então, $\inf(c.A) = c. \sup A$.

   Dado qualquer $x \in A$ tem-se $d \leq x$, porém $cx \leq cd$. Portanto cd é cota superior do conjunto $c \cdot A$. Além disso, dado qualquer número f menor que cd, temos $f/c > d$, logo existe $x \in A$ tal que $f/c > x$. Portanto $f < cx$. Isto mostra que cd é a menor das cotas superiores de $c \cdot A$, ou seja, $\inf(c.A) = c. \sup A$.

■

Corolário .1 *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funções limitadas. Para todo* $c \in \mathbb{R}$ *são limitadas as funções* $f + g, cf : X \to \mathbb{R}$. *Tem-se além disso,* $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$, $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$, $\sup(cf) = c \cdot \sup f$, *e* $\inf(cf) = c \cdot \inf f$ *quando* $c \geq 0$. *Caso* $c < 0$, *tem-se* $\sup(cf) = c \cdot \inf f$ *e* $inf(cf) = c \cdot \sup f$.

Demonstração. Sejam $A = f(X), B = g(X), C = (f + g)(X) = \{f(x) + g(x); x \in X\}$. Vamos mostrar os seguintes resultados utilizando o Lema .2:

1. $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.

   Note que $C \subset A + B$, logo $\sup(f + g) = \sup C \leq \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \sup f + \sup g$;

2. $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$.

   Como $C \subset A+B$, temos $\inf(f+g) = \inf C \geq \inf(A+B) = \inf A+\inf B = \inf f+\inf g$;

3. $\sup(cf) = c \cdot \sup f$.

   Sendo $c \geq 0$, temos $\sup(cf) = \sup\{c \cdot f(x); x \in X\} = \sup(cA) = c \cdot \sup A = c \cdot \sup f$;

4. $\inf(cf) = c \cdot \inf f$.

   sendo $c \geq 0$, temos $\inf(cf) = \inf\{c \cdot f(x); x \in X\} = \inf(cA) = c \cdot \inf A = c \cdot \inf f$;

5. $\sup(cf) = c \cdot \inf f$.

   sendo $c < 0$, temos $\sup(cf) = \sup\{c \cdot f(x); x \in X\} = \sup(cA) = c \cdot \inf A = c \cdot \inf f$;

6. $\inf(cf) = c \cdot \sup f$.

   sendo $c < 0$, temos $\inf(cf) = \inf\{c \cdot f(x); x \in X\} = \inf(cA) = c \cdot \sup A = c \cdot \sup f$.

■

Definição .9 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita limitada, se existe uma constante $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.*

Lema .3 *Dada $f : X \to \mathbb{R}$ limitada, sejam $m = \inf f, M = \sup f$ e $w = M - m$, então $w = sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$.*

Demonstração. Dados $x, y \in X$ arbitrários, para fixar ideias suponha $f(x) \geq f(y)$. Então $m \leq f(y) \leq f(x) \leq M$, donde $|f(x) - f(y)| \leq M - m = w$. De fato, como $f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)|$, segue que $|f(x) - f(y)| \leq M - m = w$. Por outro lado, para todo $\varepsilon > 0$ dado podemos achar $x, y \in X$ tais que $f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}$ e $f(y) < m + \frac{\varepsilon}{2}$. Então, $|f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y) > M - m - \varepsilon = w - \varepsilon$. Assim, w é a menor das cotas superiores do conjunto $\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$. Por fim, $w = sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$.

■

Lema .4 *Sejam $A' \subset A$ e $B' \subset B$ conjuntos limitados de números reais. Se, para cada $a \in A$ e cada $b \in B$ existem $a' \in A'$ e $b' \in B'$ tais que $a \leq a'$ e $b' \leq b$, então $supA' = supA$ e $infB' = infB$.*

Demonstração.

1. $\sup A' = \sup A$.

   Observe que o $\sup A$ é uma cota superior de A'. Além disso, se $c < \sup A$ existe $a \in A$ com $c < a$, logo existe $a' \in A'$ com $c < a \leq a'$. portanto c não é cota superior de A'. Assim, $\sup A$ é a menor das cotas superiores de A', isto é, $\sup A = supA'$.

2. $\inf B' = \inf B$.

   De maneira análoga, perceba que o $\inf B$ é uma cota inferior de B'. Além disso, se $c > \inf B$ existe $b \in B$ com $c > b$, logo existe $b' \in B'$ com $b' \leq b < c$, portanto c não é cota inferior de B'. Assim, $\inf B$ é a maior das cotas inferiores de B', isto é, $\inf B' = \inf B$.

$\blacksquare$