UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

YSMÊNIA KARLA MEDEIROS DE AZÊVEDO ALMEIDA

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE INTEGRAL DEFINIDA

CUITÉ - PB

2018

YSMÊNIA KARLA MEDEIROS DE AZÊVEDO ALMEIDA

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE INTEGRAL DEFINIDA

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande.

Orientadora: Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco

Coorientador: Prof. Ms. Leonardo Lira De Brito

CUITÉ – PB
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Rosana Amâncio Pereira – CRB 15 – 791

A447m Almeida, Ysmênia Karla Medeiros de Azevêdo.

Modelagem matemática como estratégia metodológica para o ensino de integral definida. / Ysmênia Karla Medeiros de Azevêdo Almeida. – Cuité: CES, 2018.

91 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2018.

Orientadora: Drª. Célia Maria Rufino Franco.
Coorientador: Ms. Leonardo Lira de Brito

1. Área de superfície de revolução. 2. Integral Definida. 3. Modelagem matemática. 4. Volumes de sólidos de revolução I. Título.

Biblioteca do CES - UFCG CDU 51:37

YSMÊNIA KARLA MEDEIROS DE AZÊVEDO ALMEIDA

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE INTEGRAL DEFINIDA

Monografia apresentada à Banca Examinadora, como exigência parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Campina Grande.

Aprovada em: ___/___/_____

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Célia Maria Rufino Franco (Orientadora)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

____
Prof. Ms. Leonardo Lira De Brito (Coorientador)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

____
Prof. Ms. Josevandro Barros Nascimento (Examinador)
Mestre em Ciências, Modelagem Matemática e Computacional (UFPB)

CUITÉ - PB
2018

Dedico este trabalho a uma pessoa muito especial, minha mãe Albertina, essa conquista é toda sua, te amo muito.

AGRADECIMENTOS

O início da graduação: ah, é tudo lindo, tudo flores. Errado, batalhei, chorei, sorri, fiz “bicos” para conseguir pagar as milhares de cópias que os professores pedia, junto com minha mãe vendia doces, roupas e até lavamos túmulos, sempre sorrindo, mais de cabeças erguidas, pois nos duas estávamos batalhando por um sonho, minha graduação. Foi difícil esse início? Sim, foi e muito, mais superei, consegui bolsas para poder auxiliar nos gastos. Continuar a graduação exigiu muita dedicação e determinação. Quantas vezes não pensei em desistir! Muitas. Ficar distante do meu filho por dias, ou semanas foi um dos momentos mais difíceis que passei, a dor, a tristeza e muitas vezes até arrependimento de esta continuando a graduação me fazia pensar se eu estava fazendo certo em deixar o meu filho em Natal-RN e vir para Cuité. A graduação me proporcionou novos amigos... novos conhecimentos... novas experiências... novos desafios...

Chego ao fim da graduação, depois de tantos obstáculos, e agora, paro para escrever esses agradecimentos, sinto um turbilhão de sentimentos: um nó na garganta, medo, tristeza, alegria, gratidão, satisfação, saudade, nostalgia, uma vontade de gritar, sentimentos que em transbordam lágrimas. Palavras não dão conta de representar o que sinto, mas, essa foi a forma que encontrei para materializar meus agradecimentos.

Primeiramente, sempre temos que agradecer a Deus por todas as coisas que ele nos proporciona, sejam elas coisas boas ou ruins. A batalha pode ser longa, mas para vencer cada batalha o guerreiro tem que ter forças para derrubar todos os obstáculos.

A minha mãe Albertina, que sempre batalhou, sorriu e chorou junto comigo, a ela minha eterna gratidão. O que dizer dessa mulher? Uma mãe, mãe/avó maravilhosa, guerreira e batalhadora, que nunca abaixou sua cabeça quando eu pedia sua ajuda, e nunca deixou que eu baixasse a cabeça nos momentos difíceis dessa jornada. Quando descobrimos que eu seria mãe, ela me estendeu a mão e disse que tudo ficaria bem, mostrando a todos que ela estaria sempre ao meu lado. Esse sonho é todo seu mainha, e que bom poder realizá-lo e te deixar orgulhosa por isso, o meu muito obrigado, te amo muito.

A meu pai João Batista (in memoriam), quantas vezes pensei em você, o que você diria, mas infelizmente você não está aqui para poder ver essa conquista, mas sei que onde você estiver, estará feliz por isso, te amo muito meu pai, saudades.

As minhas irmãs Betânia e Jaqueline, que puderam de alguma forma me ajudar, é nessas horas que percebemos o quanto a família é importante em nossas vidas.

Um agradecimento especial para duas pessoas que surgiram em minha vida, Justino e Vânia, pessoas de bom coração, que tornaram muito queridos na minha vida e de minha família, obrigada por tudo.

Ao meu filho João Lucas, tão pequeno e amoroso, me desculpa por ter que me ausentar algumas vezes, espero que você entenda, mas mesmo distante de você nunca deixei de te amar, prometo nuca mais sair de perto de você, és o presente mais precioso que tenho, obrigada Senhor por me dar esse filho tão lindo e amado. Mamãe te ama muito meu amorzinho.

Ao meu marido Edicarlos, muitas vezes tivemos que ficar distantes um do outro, mas mesmo de longe ele sempre me motivou e encorajou a seguir em frente, vivenciou muitas conquistas e derrotas minhas, mas, sempre me incentivou a seguir adiante, como ele dizia: “ sem dor, sem gloria”, você fez boa parte dessa graduação ser mais tranquila. Obrigada meu amor te amo muito.

A minha sogra Maria Das Dores, que se fez de mãe enquanto tive ausente para meu filho, que cuidou dele como cuidaria de um príncipe, muito obrigada, serei eternamente grata por tudo.

Aos meus familiares que realmente ficaram felizes por mim, Adriana (prima), Antonieta (tia), Antônio (padrinho), Carmelita (madrinha), Cristina (prima), Estevão (tio), Gabi (prima), João Tomé (padrinho in memoriam), Jorge (tio), Luzia (tia), Maria (tia), Maria Luisa (sobrinha), Valdemir (primo), Violeta (prima).

A Universidade Federal de Campina Grande – Campus Cuité, por proporcionar os melhores professores de matemática, Alecxandro Alves, Aluízio, Edna, Jorge, Jussié, Luando, Marciel, Maria de Jesus, Glageane, todos muito dedicados, amigos, o meu muito obrigado por todos os ensinamentos.

Tem uma professora que não está mais Lecionando em Cuité, mas que eu agradeço de coração é a professora Jaqueline Linxandrão, em um momento que estava sem saber o que fazer, ela veio conversou comigo e me guiou para os melhores professores.

A minha orientadora, professora Drª. Célia Maria, minha 1ª aula na graduação foi com ela, me lembro bem, aula de Álgebra Vetorial, sempre linda e muito inteligente. Me recebeu de braços abertos, orientando de melhor forma para realizar esse lindo trabalho, termino minha graduação com minha 1ª professora, fico sem palavras para descrever tamanho agradecimento, pelos ensinamentos e por me orientar, muito obrigada professora.

Ao meu coorientador, professor Ms. Leonardo de Lira, que se dispôs a ajudar nesse trabalho, me indicando as melhores formas de escrever (foi difícil começar a escrever, sou sincera), mas conseguimos, muito obrigado professor.

Ao meu grande amigo Josevandro Barros, ele me mostrou que amigo de verdade não é aquele que te acompanha em festas e baladas, amigo de verdade é aquele que está ao seu lado na hora em que você acha que está no fundo do poço, que estende a mão e te ajuda a vencer todas os sonhos, amigo de verdade é aquele que sonha junto contigo, fica feliz por cada vitória, e que chora junto contigo em cada derrota, você assim como eu batalhou por essa conquista. Te amo demais, sempre me lembrarei de você meu irmão.

Aos amigos de infância/vizinhos: Adyla, Biu, Diogo Leonardo, Enally, Kyara, Lourdes, Rose. E amigos que a faculdade me presenteou: Anaílde, Fabíola, Fátima, Francilene, Francisco Castro, Gerivaldo, Girleine, Giva, Jardel, João Crispim, Joardaci, Joelia, Jucileide, Jucimeri, Kalyane, Mackson, Manoel Messias, Magnólia, Marciano, Mayane, Márcio Frazão, Milagres, Milena Faccio, Nelson Júnior, Renner, Thoshiyuki, seu Vital e muitos outros.

Por fim, não menos importante, quero agradecer do fundo do meu coração as pessoas que duvidaram de mim, aquelas que disseram que eu nunca iria chegar aqui, que eu nuca iria vencer, muito obrigada mesmo, não irei citar nomes, mas não poderia deixar de agradecer.

“O correr da vida embrulha tudo. A vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem. ”
Guimarães Rosa

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo utilizar Modelagem Matemática no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, em particular, no estudo das Integrais Definidas. Foi feito um estudo bibliográfico sobre a história do cálculo, a importância da Modelagem Matemática no ensino, alguns conceitos sobre Cálculo de Integral Definida e suas aplicações no cálculo de volume e área de superfície de sólidos de revolução. Neste sentido, metodologias alternativas são utilizadas para obter resultados junto com a modelagem matemática, onde se deu na evolução de conceitos matemáticos empregados para calcular o volume e a área da superfície de uma fruta (laranja). Nos resultados obtidos, podemos ver que a margem de erro encontrada é muito pequena.

Palavras-chave: Área de superfície de revolução. Integral Definida. Modelagem Matemática. Volumes de sólidos de revolução.

ABSTRACT

This work aims to use Mathematical Modeling in the teaching of Differential and Integral Calculus, in particular, in the study of Definite Integrals. A bibliographic study on the history of calculus, the importance of Mathematical Modeling in teaching, some concepts on Calculus of Definite Integral and their applications in the calculation of volume and surface area of solids of revolution. In this sense, alternative methodologies are used to obtain results along with the mathematical modeling, where it occurred in the evolution of mathematical concepts used to calculate the volume and surface area of a fruit (orange). In the obtained results, we can see that the margin of error found is very small.

Keywords: Surface Area of Revolution. Integral Defined. Mathematical Modeling. Volumes of Revolution Solids.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADRO

LISTA DE TABELA

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Modelagem matemática vem despertando o interesse de professores e pesquisando como autores Bassanezi, 1994; Blum, 1995; Borba, Menghetti & Hermini, 1997 tem apresentado concepções sobre o ensino de modelagem matemática no ensino de aprendizagem. A comunidade de educação em matemática tem discutindo sobre o tema, podemos apresentar em termos gerais que se trata de utilizar conceitos, ideias e ou métodos matemáticos para compreender e resolver situações problemas do dia-a-dia. Barbosa (2002).

A modelagem matemática no ensino de matemática vem sendo empregada como estratégia de quebrar a forte dicotomia existente entre a matemática formal e sua utilidade na vida real. Assim, existem distintas maneiras de compreender uma atividade de modelagem para Bassanezi (2002) em suas literaturas enfatiza a construção de modelos matemáticos; Borba, Meneghetti e Hermini (1997) enfatiza a escolha do problema pelos alunos; Barbosa (2001) relaciona o envolvimento dos alunos em situações problemáticas com referência na realidade. Barbosa (2002).

Com o ensino e aprendizagem da modelagem matemática o alunado se toma consciente da aplicação da matemática para resolver e considera problemas que envolva o seu dia-a-dia. “Esse é um momento de utilização de conceitos já aprendidos. É uma fase de fundamental importância para que os conceitos trabalhados tenham um maior significado para os alunos, inclusive com o poder de torná-los mais críticos na análise e compreensão de fenômenos diários” (D’AMBRÓSIO, 1989 p.3).

Sabe-se que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral tem um índice alto de reprovações e que isto é uma dificuldade que o aluno enfrenta ao ingressar em um curso de exatas. Neste sentido, metodologias alternativas são de grande interesse para tentar solucionar esse problema. Neste trabalho, a modelagem matemática será apresentada como ferramenta a ser utilizada nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

Uma revisão bibliográfica foi feita com intuito de mostra um pouco da história do Cálculo e como Isaac Newton e Gottfried Leibniz o desenvolveram, bem como, a importância da Modelagem Matemática no ensino de Cálculo e de como ela surgiu no Brasil.

O trabalho será estruturado em cinco capítulos, sendo, no capítulo dois, apresentado um breve histórico do Cálculo Diferencial e Integral. Como as contribuições feitas por alguns matemáticos, Fermat, Arquimedes, Kepller, por exemplo, puderam de alguma forma ser de grande importância para que mais a frente Newton e Leibniz chegassem a mesma ideia sobre o cálculo. Embora os estudos de Newton e Leibniz tenham sido feito em épocas diferentes e não tiveram acesso um ao outro, eles chegaram ao mesmo conceito sobre o cálculo diferencial e integral, sendo que, Leibniz publicou primeiro essa descoberta, além de formalizar o símbolo de integral.

No capítulo três, abordaremos o tema Modelagem Matemática, como ela surgiu no Brasil, e como utiliza-la como ferramenta de ensino, para despertar a importância desse estudo para professores e alunos.

No capítulo quadro, são apresentados resultados preliminares sobre Cálculo Integral, mostrando os principais conceitos e técnicas para o cálculo de uma Integral Definida.

E no capítulo cinco e último, iremos apresentar aplicações do Cálculo Integral e o processo de Modelagem no cálculo de volume e área de superfície de um solido de revolução, com particular referência ao estudo de calcular volume e área de superfície de frutas tais como: maçã e laranja. Em seguida apresentaremos as opções e procedimento metodológico aplicado na pesquisa.

2. A HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Este capítulo será visto um pouco sobre como surgiu o cálculo, quem está por trás desse estudo que é muito importante para alguns cursos, matemática, química, engenharia, por exemplo. Os pioneiros para essa grande descoberta se dão a Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, os mesmos se utilizaram de descobertas feitas por outros matemáticos para então conseguir chegar no cálculo que conhecemos.

2.1 História do surgimento do cálculo diferencial e integral

Não é de hoje que precisamos fazer o uso da matemática para resolver alguns problemas, sendo que alguns problemas precisam de um estudo mais avançado, como o cálculo diferencial e integral, mas para isso queremos saber quem foi, ou foram os autores dessa grande descoberta que é o cálculo.

A palavra *calculus*, no latim quer dizer pedras usadas para o procedimento de contagem. Assim, nasceu o verbo *calculare* que desenvolveu os significados computar ou calcular. O que sabemos hoje sobre o surgimento do cálculo diferencial e integral damos graças a Newton e Leibniz que durante o século XVII fizeram vários estudos onde podemos notar as primeiras presenças do surgimento do cálculo (DÕR, 2017).

Tendo em vista que, antes de Newton e Leibniz chegarem ao surgimento do cálculo diferencial, muitos outros matemáticos, tais como, Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.), Pierre de Fermat (1607-1665), contribuíram de alguma forma para que tanto Newton como Leibniz chegassem a essa “exatidão”, sendo que neste trabalho vamos dar prioridade maior a Newton e Leibniz.

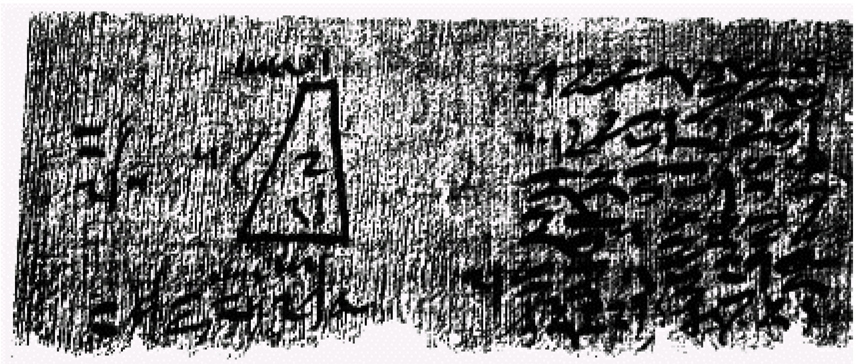
Nos livros de cálculo costumamos ver primeiro o cálculo diferencial para assim depois ver o cálculo integral, sendo que o surgimento de ambas ocorreu de forma inversa do que se ver.

> A ideia de integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mas tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra (EVES, 2004, p.417).

Mesmo antes do surgimento do cálculo, havia os problemas que precisavam ser resolvidos, uns dos primeiros problemas eram: Cálculo de área, Volume e Comprimento de arco. Esses problemas eram resolvidos sem o uso do cálculo de linha e curvas que é um método usado mais recente.

Uma prova que temos sobre o uso do cálculo muito antes de seu surgimento foi encontrado no Papiro Egípcio de Moscou (ou Golonischev), que foi escrito por uma escriba desconhecido (1890 a.C. aproximadamente), no papiro foi encontrado mais de 25 problemas, onde o problema 14 (Figura 1) mostra uma figura que supõe ser um trapézio, mas os cálculos associados mostram que se trata do tronco de uma pirâmide.

Figura 1: Papiro Egípcio de Moscou



Fonte: Disponível em:< http://jonasportal.blogspot.com.br.> Acesso em: 03 de maio de 2018

Na Grécia, o cálculo era algo muito utilizado pelos gregos há mais de 2000 anos. Os Gregos tinham muita facilidade de resolver os problemas, segundo Eves, (2004), "Os gregos tinham muita habilidade em calcular áreas de triângulos e círculos, mas caso surgisse uma figura sem essas características eles considerava o problema sem solução".

Por volta de 430 a.C., um filosofo do período pré-socrático chamado Antifonte, chegou a ideia que podia "exauri" a diferença entre a área de um círculo e um polígono regular inscrito nele apenas aplicando o número de lados dele, e mostrou como é possível fazer um quadrado com área igual a de qualquer polígono e fazer um quadrado com área igual a de um círculo. "Apesar disso, a abordagem do filósofo continha os primórdios do famoso Método da Exaustão Grego. " (EVES 2004).

Mas, não seria por isso que o método da exaustão seria esquecido, Arquimedes que já vinha fazendo estudos sobre o método do equilíbrio, viu que esse método da exaustão seria de grande importância para seus estudos.

Arquimedes de Siracusa, nasceu na cidade de Siracusa localizada na ilha da Sicília, nasceu por volta de 287 a.C. e morreu em 212 a.C. Arquimedes foi matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego, diante de tantos títulos ele foi o único que soube melhor manusear o método da exaustão, chegando muito próximo a atual integração.

O método da exaustão pode ser considerado como o grande motivo para o surgimento do cálculo, pois é através do método de exaustão que as descobertas, (que serão vistas mais a frente) tomam forma, chegando por fim ao cálculo.

No século XVII, Arquimedes desvendou o método do equilíbrio, que era utilizado para calcular a área de regiões limitadas por parábolas, espirais e várias outras curvas. Arquimedes utilizava o método do equilíbrio para auxiliar no cálculo de área ou volume (era uma espécie de rascunho), e depois usava o método da exaustão para que pudesse atribuir o resultado de uma forma mais detalhada, era como se ele quisesse confirmar o resultado que já tinha obtido utilizando o método anterior.

> O método de exaustão conseguia contornar o uso de “limites”. Num de seus trabalhos, no cálculo de uma área, Arquimedes chegou ao que seria hoje a serie $a + \frac{a}{4} + \frac{a}{16} + \frac{a}{64} + \cdots$ mas na matemática grega não havia fundamento que justificasse uma soma infinita. Assim, Arquimedes, depois de perceber, por meio de toda sua argucia matemática, que o resultado deveria ser $\frac{4}{3}a$. Provou por dupla redução ao absurdo que não poderia ser nem maior nem menor que este valor, logo teria que ser igual. Algo para gênios sem duvida. Ocorre que agora bem conhecida e “democrática” formula $S = \frac{a}{1-q}$ da soma de uma P.G infinita $a + a.q + a.q^2 + \cdots (0 \leq q \leq 1)$ pressupõe a ideia de limite que para os gregos era inaceitável (...) nenhum deles sonha com os “ε” e “δ” da atual teoria dos limites (HIGINO, 1990, pg.172).

Enquanto isso, muitos estavam se van glorificando, e querendo se aprimorar das conquistas de Arquimedes.

> Stevin, Kepler e Galileu necessitavam dos métodos de Arquimedes, como homens práticos que eram, mas desejavam evitar os rigores do método de exaustão. Em grande parte, foram às modificações por isso introduzidas nos antigos métodos infinitesimais que finalmente conduziram ao cálculo, e Stevin foi um dos primeiros a sugerir modificações (BOYER, 2006, pg.221).

Johann Keppler (1571-1630), no ano de 1612 estava meditando sobre os métodos de Arquimedes com relação ao volume de conoídes e esferoides, nisso

Keppler estava em meio à vários barris de vinhos, e foi ai que ao observar o formato dos barris ele começou a calcular vários tipos de sólidos de revolução.

> "... ele considerou o solido gerado por rotação de um segmento de círculo em torno de sua corda, chamando o resultado um limão se o segmento era menor que um semicírculo e uma maçã se o segmento era maior que um semicírculo". (BOYER, 2006, pg.223)

Esses sólidos desde então eram desconhecidos por Arquimedes a partir disso os resultados de Keppler foram bem utilizados pelos matemáticos daquela época até os dias de hoje.

Outro matemático que contribuiu bastante para o cálculo integral foi o inglês John Wallis (1616-1703) ele fez o uso das séries em análise, ao invés de considerar as curvas como secções de um cone, ele resolveu considerar as cônicas como curvas de segundo grau, e consequentemente explicou de forma mais sucinta o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários, e aplicando o atual símbolo do infinito ∞. (EVES, 2004).

Por volta de 1629, o francês Pierre de Fermat (1601-1665) fez duas grandes descobertas, as quais são vistas em todos os lugares. "A mais importante dessas foi descrita alguns anos depois em um tratado, também não publicado durante sua vida, chamado método para achar máximos e mínimos. " (BOYER, 2010, pg.239). Hoje esse método é conhecido como método de Fermat, mesmo não tendo noção de limites, Fermat faz com que seu método chegue na seguinte fórmula:

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

O que se assimila muito com o cálculo que se é utilizado hoje, tendo em vista que é utilizado o símbolo h ou Δx no lugar do E de Fermat.

Com o passar dos anos, enquanto desenvolvia sua geometria analítica, Fermat descobriu como achar a tangente de uma curva algébrica da forma: $y = f(x)$.

> "Se P é um ponto da curva $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ em que se procura a tangente, e se as coordenadas de P são (a, b), então um ponto vizinho da curva com coordenadas $\mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{E}$, $\mathrm{y} = \mathrm{f(a + E)}$ estará tão perto da tangente que se pode pensar nele como estando aproximadamente também sobre a tangente." (BOYER, 2010, pg.240).

A princípio, não era possível ter uma conexão entre as ideias de integral e derivadas. Mas por volta do século XVII, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), viu que essas ideias poderiam ter uma conexão melhor juntas. “Esse importante resultado é denominado Teorema Fundamental do Cálculo”. (PIEHOWIAK, 2011, pg. 191).

Ao mesmo tempo o matemático inglês, Isaac Barrow (1630-1677), conservador em matemática, que admirava os matemáticos antigos, editando obras como as de Eucides, Apolônio e Arquimedes, publicou junto com Newton duas obras intituladas: “Lectiones Opticae” em 1669 e “Lectiones Geometriae” em 1670, onde fez uma abordagem a qual se aproxima muito do cálculo diferencial utilizado hoje.

> “... considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo e aparece enunciada e provada nas Lectiones de Barrow. ” (Eves,2004, pg.435)

Ao fim de uma conferência Barrow escreve:

> “Em um suplemento a isso acrescentamos, sob forma de apêndices, um método para encontrar tangentes por cálculo frequentemente usado por nós, embora eu não saiba, depois de tantos métodos bem conhecidos e usados dados acima, se há alguma vantagem em fazê-lo. No entanto eu o faço por conselho de um amigo [que mais tarde se mostrou ter sido Newton]; e com tanto maior boa vontade por parecer ser mais proveitoso e geral que os que já discuti. ” (BOYER, 2010, pg. 267).

Logo em seguida, ele explica um método de tangentes, que é bem idêntico ao cálculo diferencial e muito semelhante ao de Fermat, sendo que Fermat usa apenas a letra E em seu método, enquanto Barrow duas quantidades que equivalem ao nosso Δx e Δy. A regra de tangentes utilizada por Barrow é da seguinte forma:

> “Se M é um ponto sobre uma curva dada (em notação moderna) por uma equação polinomial $\mathrm{f(x,y)} = 0$ e se T é o ponto de intersecção da tangente desejada MT com eixo x, então Barrow marcava um “arco infinitamente pequeno MN da curva”. Então traçava as ordenada M e N e por M uma reta MR paralela ao eixo x. Então, designado por m a ordenada conhecida em M, por t a subtangente desejada PT e por a e e os lados vertical e horizontal do triângulo MRN, Barrow observava que a razão de a para e é igual a razão de m para t. Como diríamos agora, a razão de a para e, para pontos infinitamente vizinhos, é a inclinação da curva. Para achar essa razão Barrow procedia de modo

> muito semelhante ao de Fermat. Substituía x e y em $f(x, y) = 0$ por $x + e$ e $y + a$."(BOYER, 2010, pg.267).

Por mais que o método utilizado por Barrow se assemelhe muito ao de Fermat, o mesmo não teve conhecimento as obras de Fermat, pois seu nome não é mencionado em nenhuma de suas obras, mas, pode ser que Barrow tenha visto o método de Fermat através das obras de Cavalieri, Huygnes, Gregório de St. Vincent, James Gregory e Wallis, que estão sendo citados em obras de Barrow.

Mesmo com tantas descobertas na área do Cálculo Diferencial e Integral nesta época, a ideia de limite e o teorema fundamental do cálculo já estavam sendo bem reconhecidos e outras descobertas estavam sendo publicadas, porém "... faltava a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formas e também redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria" (EVES, 2004, pg.435).

Isaac Newton e Leibniz sabiam de alguma forma que existia uma ligação entre retas tangentes e áreas entre curvas, apesar de ambos trabalharem independentemente. Suas contribuições foram de grande valor, "juntou o cálculo diferencial e integral, tornando-os a ferramenta mais poderosa que os matemáticos já tiveram para entender o universo. " (PIEHOWIAK, 2011, pg. 173).

2.2 Gottfried Wihelm Leibniz

Leibniz (Figura 2) nasceu em Leipzig em 1646, onde aos 15 anos de idade entrou na universidade e aos 17 anos de idade obteve o grau de bacharel, ele era um grande rival de Newton. Leibniz foi filosofo cientista, matemático e diplomata alemão.

Ao ler a carta de *Amos Dettonville sobre Traité des sinus du quart de cercle*, que Leibniz diz que é como ter recebido uma luz sobre si. Então percebeu que

> ... a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que formam a área. (BOYER, 2010, p. 276).

Em 29 de outubro de 1675, Leibniz criou o símbolo mais utilizado no cálculo a $\int$, um S alongado, em que ele utilizava para a soma de todas as áreas infinitesimais.

“Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como fazemos hoje, assim como escrevia $\int xdy$ e $\int ydx$ para integrais” (EVES, 2004, pg.443).

Figura 2: Gottfried Wilhelm Leibniz.

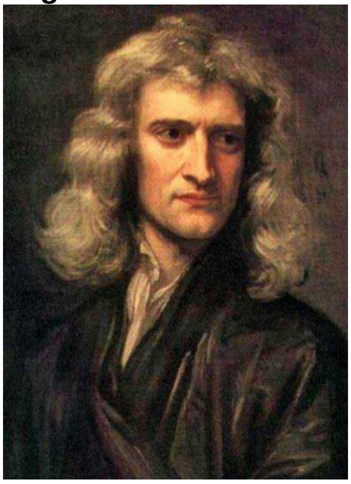
Fonte: Disponível em <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=57268659 .> Acesso em: 03 de maio de 2018.

> “Acha tangentes fez uso do calculus differentialis e para encontrar quadraturas utilizou o calculus summatorius ou calculus integralis, frases de onde resultaram expressões que usamos. ” (BOYER, 2010, pg. 277).
>
> Por volta de 1684, Leibniz fez a primeira exposição do cálculo diferencial com o artigo intitulado: *“Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur”* (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais). (BOYER, 2010, pg. 278).
>
> Dois anos mais tarde, Leibniz publicou uma explicação do cálculo integral em que mostra que as quadraturas são casos especiais do método inverso do das tangentes... onde deu ênfase à relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo. (BOYER, 2010, pg. 278).

2.3 Isaac Newton

Isaac Newton (Figura 3) foi astrônomo, alquimista, filosofo, teólogo, físico e matemático, teve uma grande contribuição para a matemática, como o método de fluxos publicado em 1736.

Figura 3: Isaac Newton.



Fonte: Disponível em <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=37337.> Acesso em: 03 maio 2018.

Isaac começou a gostar de matemática através de muitas leituras de outros matemáticos, com isso criou sua própria matemática, onde buscava provar sua teoria sobre a gravitação universal e força centrípeta (GAYO,2010), inicialmente "... descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos, como ele chamava o atual cálculo diferencial. " (EVES, 2004, p. 436).

Uma de suas descobertas mais importantes foi o método dos fluxos, pulicado em 1736. De acordo Eves

> "... uma curva gerada pelo movimento continuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo de fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. [...] essa taxa de crescimento é constante de alguma fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente a ser comparado com esse fluxo principal. " (EVES 2004, p. 439).

Eves (2004), ainda nos diz que Newton tratou de dois tipos de problemas com o método dos fluxos:

- No primeiro, considerando uma relação entre alguns fluentes, buscou uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, que é o que hoje chamamos de diferenciação.
- No segundo, estudou a relação inversa: considerando a relação entre os fluentes e seus fluxos, buscou encontrar uma relação envolvendo apenas os fluentes. É o processo de diferenciação.

Através do método dos fluxos, surgiram diversas aplicações: “Determinou máximos e mínimos, tangentes e curvas, curvatura de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas” (Eves, 2044, pg. 439-440).

> Newton não foi o primeiro a diferenciar ou a integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo. Sua descoberta constituiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas transcendentes (BOYER,2010, pg.274).

Contudo, Newton pode reconhecer que Leibiniz estaria fazendo uso de um método muito semelhante ao seu, sendo que a descoberta de Leibniz foi independente da de Newton. Sendo que Leibniz teve sua publicação impressa muito antes a de Newton.

2.4 Newton X Leibniz

> Leibniz foi o primeiro a publicar suas descobertas relativas ao cálculo diferencial e integral, porém Newton já havia desenvolvido sua teoria muitos anos antes, o que levou à disputa sobre a paternidade do cálculo. A Royal Society, composta pelos principais cientistas da Inglaterra, acusou Leibniz de plágio, o que marcou profundamente a carreira do alemão. (GAYO, 2010).

Segundo Gayo, essa é a ordem cronológica dos fatos:

Quadro 1: Cronologia Do Desenvolvimento E Publicação Do Cálculo

Ano	Desenvolvimento
1666	Ano milagroso da ciência, Isaac Newton desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral.
1676	Gottfried Willhelm Leibniz desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral com uma simbologia diferente da utilizada por Newton e sem conhecer seu trabalho.
1684	Leibniz faz sua primeira publicação sobre o assunto no periódico mensal Acta Eroditorum com o título *“Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur”* (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais)
1686	Newton publica Philosophiae naturalis principia mathematica (Princípios matemáticos da filosofia natural), obra que contém, além de Cálculo, Fundamentos da Física.

Fonte: Gayo (2010, p. 150)

Ambos matemáticos tinham representações completamente diferentes. Mesmo assim, os dois tinham muitas semelhanças em comum, como por exemplo, utilizar ou aproveitar simbologias utilizadas por outros matemáticos (GAYO, 2010, pg.151):

- A adoção das letras x e y para os eixos cartesianos (conforme Descartes);
- A extensão destes eixos para os lados negativos;
- A utilização do atual sinal de igual. (Criado por Robert Record, em 1557).

Mesmo não tendo feito sua publicação, apenas sendo o primeiro a ter o raciocínio, Newton é considerado o pai do cálculo, mas

> ... a opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético e embora inferior (...) como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. (EVES, 2004, p. 444).

Newton era um homem pouco comunicativo, o contrário de Leibniz, que trouxe consigo muitos discípulos, que estavam ansiosos para poder aprender o cálculo diferencial e integral, e poder transmitir esse conhecimento a outros discípulos, fazendo com que o nome de Leibniz fosse mais ouvido que o de Newton.

3. MODELAGEM E MODELOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo iremos ver o que é modelagem matemática, qual sua importância para o ensino de cálculo e como utilizar a modelagem matemática.

3.1 História da Modelagem Matemática

A palavra "modelagem" se refere a dar forma a um objeto reproduzindo por meio de uma imitação ou ainda representar em pequena escala um objeto interpretado de grande escala. Esse objeto torna-se o "genérico" do modelo, que pode ser qualquer tipo.

"Pela própria história verifica-se que foram várias as situações em que o homem construiu modelos para servir de instrumentos na resolução de problemas" (MARTINS, 2009, p. 32). Para ter um meio de vida melhor o homem:

> Sentiu a necessidade de quantificar, contar seus objetos, mensurar o tamanho de suas posses, dividir a terra, fazer o comércio, as trocas, o que culminou nos sistemas de contagem. Este foi o primeiro modelo utilizado pelo homem para quantificar o mundo no qual ele vivia (CIPRIANO, 2013).

A modelagem matemática começou a surgir no Brasil na década de 1970, sendo vista em alguns trabalhos feitos por professores do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica da Universidade Estadual de Campinas-SP. Os professores tinham por objetivo utilizar a modelagem para ter o incentivo no ensino da matemática.

Mas foi através dos estudos feitos pelo professor Ubiratan D'Ambrosio, na década seguinte, que a modelagem ganhou mais força. Em 1983, o professor Rodney Bassanezi apresentou em um curso de especialização para professores a ideia de modelagem como um instrumento pedagógico.

Para Bassanezi (2006, pg.16) "A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

Ao final dos anos 80 a ideia que a modelagem matemática ajudaria bastante nos ensinos foi surgindo novas pesquisas no meio acadêmico no Ensino Fundamental (Biembengut; 1990, Burak, 1987), no Ensino Médio (Biembengut, 1990; Burak, 1992) e no Ensino Superior (Borba; Meneghetti; Hermini, 1997, Jacobini, 1999) (FERREIRA,

2003) na formação de professores (Burak; 1992, Gazzeta; 1989) e na Educação de Jovens e Adultos (Monteiro, 1991) (BARBOSA, 2001).

Contudo a modelagem matemática para alguns educadores tem opiniões diferentes com relação a modelagem, alguns a defende como meio de estratégia pedagógica (ARAÚJO, 2002; BASSANEZI, 2002), para outros ela é um método de aprendizagem (BARBOSA; 2001, JACOBINI; 1999, DINIZ; 2007), dentre outros. Tais opiniões surgem através de seus estudos feitos relacionadas à modelagem matemática, cada um com seu pensamento.

Por outro lado, Biembengut e Hein (2007) afirmam que a modelagem matemática não tem uma "lei" definida, e dizem ainda mais:

> Existem regimentos internos na forma de esquemas nos quais se destacam Bassanezi, Biembengut, Barroso, Golbarg e Luna, entre outros igualmente destacados. Cada qual com sua visão adequada àquilo que lhe interessa, seja no ensino, na pesquisa ou na aplicação (p. 35).

A partir desses autores, podemos ver que a modelagem matemática pode levar a diversos caminhos (opiniões), não existe um roteiro a qual devemos nos basear para utilizar, deixando o docente "livre" respeitando sempre a realidade que se encontra ao seu redor, e fazendo um bom uso da modelagem.

3.2 Modelo Matemático

Ao longo da experiência do ser humano tem se preocupado em discutir quais os fenômenos que são vistos na natureza. Essa explicação de certos fenômenos seja da natureza ou não, esta relacionando com a resolução de problemas inerentes a eles neste sentido vem crescendo o desenvolvimento de certos tipos de modelos que os representem (NASCIMENTO, 2007).

Por volta do ano de 1798, Malthus (1766-1834) em seus estudos sobre crescimento populacional em relação ao tempo desenvolveu o modelo que aplicaria a variação da população equação (2.1) em que justificaria a frequência deste crescimento (NASCIMENTO, 2007).

$$\frac{d}{dt} = p(t) = \mathrm{n.\,p(t)} \tag{2.1}$$

Nesta observação no ano de 1907, Einsten (1879-1955) Traz a relação entre massa e energia como sendo um modelo $E = mc^2$. Para Newton (1642 -1727) começa modelar a força resultante de uma determinada massa consequência dada pela aceleração, ou seja, $F = m.a$.

O homem preocupado em estudar os fenômenos começa a estruturas determinando modelos como:

> Nessas propostas de intervenção humana para explicar os fenômenos, destaca-se a montagem de modelos. Os fenômenos e conhecimentos da realidade passam a ser divulgados por meio de conceitos e representações inerentes à Matemática. (NASCIMENTO, 2007, p.27)

O modelo distingue que sua essência e está originada desde o início do desenvolvimento da matemática nesta perspectiva têm algumas compreensões sobre modelos tanto de fenômenos naturais como científicos e religiosos (Quadro 2):

Quadro 2: compreensões sobre modelos

MODELO	COMPREENSÕES
Johannes Kepler (1571-1630)	Esse modelo apresenta em linguagem matemática a órbita elíptica que os planetas descrevem ao redor do sol, em que os raios vetores, traçados a partir do sol até o planeta, varrem áreas iguais em tempos iguais;
Darwin (1809-1882)	Como a teoria da seleção natural das espécies. Modelo que mostra a luta pela existência na natureza, modelo que vem servindo para análise e avaliação da realidade concreta, sendo utilizado também no meio científico para explicar a origem do universo;
Bíblico	Criação (criacionismo) para a origem da vida na Terra. Doutrina teológico-metafísica de inspiração judaico-cristão, segundo a qual não somente Deus tirou o universo do nada, como também criou para cada indivíduo uma alma imortal;
Cosmológicos	(Aristóteles e Copérnico), conjunto das teorias científicas que tratam das leis ou das propriedades da matéria em geral ou do universo.

Fonte: (NASCIMENTO, 2007, p.29)

Com essas abrangências de certos tipos de modelos podemos partir para uma tática de ensino-aprendizagem significativa de certo tipos de modelos.

O modelo é um conceito construindo no psicológico, momento em que nossas intuições procuram entender e expressa de forma matemática como acontecer o determinando fenômeno (GRANGER, 1969).

Granger (1969) nos coloca a entender que para desenvolver certo tipo de modelo presente na natureza ou encontramos situações problemas temos que reconhecer os processos mentais para aplicar. Assim, a semelhança no desenvolvimento do modelo traz várias concepções.

A característica dos Modelos Matemáticos está associada aos problemas tendo como características forma sobre a abstração concretizada dentro no campo da educação:

> Com isso, se no decorrer de nossa prática docente enfatizarmos o desenvolvimento do conteúdo e de exercício privilegiando aspectos formais desta disciplina, estaremos destacando uma de suas características. Enquanto que, ao enfatizarmos suas aplicações, estaremos proporcionando condições para que um outro aspecto da matemática seja trabalhado pelo aluno, fazendo com que um conceito mais amplo sobre o papel da matemática para o desenvolvimento social e científico seja elaborado por ele (MÜLLER, 1986).

Os modelos que são questionados nos campos da Educação matemática sobre a perceptiva da modelagem têm por referência aperfeiçoar as características da matemática, que torne acessível e compreensível pelos alunos.

Müller (1986) discutindo em suas pesquisas que os modelos matemática aplicado acabam dando visibilidade aos atributos da matemática assim a procedimento sobre "modelos matemáticos" coloca em questionamento a "modelagem matemática"

> Foi somente a partir da segunda metade da década de 80 que surgiram as primeiras dissertações de mestrado que passaram a explorar ou utilizar a denominação "modelagem matemática". O primeiro estudo desse período - Muller (1986) - foi produzido na FE-UNICAMP e este pode ser considerado como um trabalho que contempla a transição dos 'modelos matemáticos' para a 'modelagem matemática' no ensino da matemática (FIORENTINI, 1996, p. 5).

Müller (1986) apresenta uma mudança de "modelos" para "modelagem"

> Um modelo matemático é o sistema obtido após o terceiro estágio do processo de modelagem, ou seja, é a explicitação das relações matemáticas entre os dados iniciais do problema em questão (MÜLLER, 1986, p. 29).
>
> É importante observarmos que um modelo real se constitui na primeira tentativa de descrever o fato observado, além disso, esta etapa possui um caráter fundamental para o processo de modelagem, pois é

> através do modelo real que selecionamos as variáveis e as relações que determinarão o modelo matemático (MÜLLER, 1986, p. 67)

> Modelagem Matemática é o processo de análise dos procedimentos recorrentes envolvidos na formulação de um modelo matemático a partir de uma dada situação (BIEMBENGUT, 1990, p. 10)

Em 1980 começa a ser utilizando a expressão Modelagem matemática para direcionar ao processo de construção de um modelo (MAGNUS, 2018).

3.3 Modelagem Matemática

Estudos como BASSANEZI (2002), BEAN (2001), BIEMBEGUT e HEIN (2000), BLUM & NISS (1991). Afirmam que os modelos matemáticos sempre foram considerados muito comuns perante os meios acadêmicos científicos. Com os estudos em educação matemática em suas investigações e defendendo a construção e o desenvolvimento de modelos pelos estudantes, no qual vem sendo tratado como metodologia de ensino. Neste defende-se “que a construção de modelos – modelagem, se explorada como estratégia de ensino, pode contribuir para a aprendizagem de matemática” (NASCIMENTO, 2007, p.37).

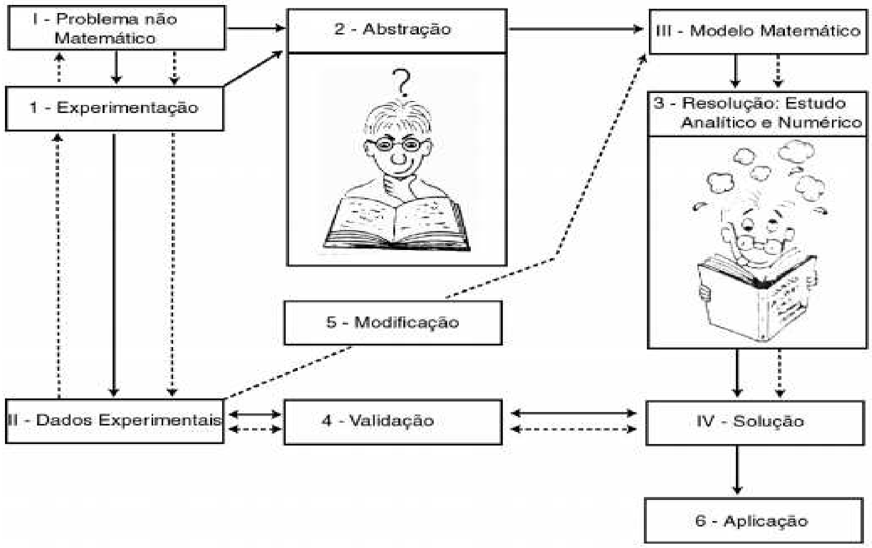
A modelagem matemática vem crescendo com um grande campo de pesquisa teórico. Segundo Souza e Barbosa (2014), afirma que as comprovações com que se menciona a respeito das decorrências do uso da modelagem no contexto acadêmico tem-se classificado na área da educação matemática.

> A modelagem vem sendo investigada como um campo metodológico de ensino e pesquisa, utilizando situações-problema que nos intrigam nas diversas áreas do conhecimento. O uso dessa prática torna-se importante, por proporcionar o surgimento de hipóteses, características, aproximações, efeitos, parâmetros, etc., que muitas vezes não estão sendo visualizados a partir da análise do fenômeno por outros meios de investigação. (NASCIMENTO, 2007 p.37).

Esses fatos na maioria das vezes tornam a investigação a partir de uma situação-problema, que é contribuída de em muitos casos de formas complexas seja pelo nível de dificuldades para identificar as variáveis existe no problema do conhecimento do mundo real. NASCIMENTO “estudar essas características e buscar uma compreensão mais clara. Essa atitude, muitas vezes, requer a construção de um modelo para a situação, no sentido de melhor entender o problema” (NASCIMENTO, 2007, p.37).

Bassanezi (2002), retrata que na modelagem matemática existem cinco níveis de etapas como a experimentação, abstração, resolução, validação e modificação neste sentido definido como (Figura 4 e Quadro 3)

Figura 4: Sequência de etapas simplificamente visualizadas no esquema:



Fonte: (Bassanezi, 2002, p.27)

Quadro 3: Etapas como a experimentação

ETAPAS	CONCEITOS
Experimentação	É uma fase essencialmente laboratorial onde se comprova a obtenção de dado. É uma fase em que a adoção de técnicas oriundas da pesquisa experimental vai dar maior grau de confiabilidade aos dados obtidos.
Abstração	É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Estabelecendo a seleção das variáveis, a problematização, formulação de hipóteses e a simplificação;
Resolução	O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente. As hipóteses são traduzidas por equações.
Validação	É o processo de aceitação ou não do modelo proposto. É o momento do teste do modelo.
Modificação	É a etapa em que se define a rejeição ou aceitação do modelo..

Fonte: (Bassanezi, 2002, p.28)

Essas características sobre modelagem como experimentação, abstração, resolução, validação e modificação são obtidas através dos modelos.

A modelagem matemática e matemática aplicada que é sugerido por Bassanessi (2002, p.16) “na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

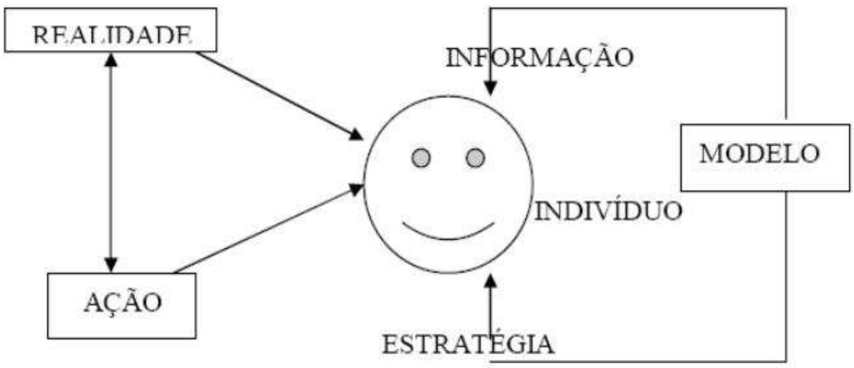
Neste caso em que a modelagem matemática procurar agrupar os conceitos da teoria e da prática, fazendo om que a compreensão seja aplicada os fatos e que o contorna e busque formas de atuar sobre ela para modificá-la. Para Bassanezi:

> “modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado e sua importância consiste em ser uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades” (BASSANEZI, 2002, p.20).

Para Bassanezi a modelagem matemática seria a ligação entre o conhecimento empírico e as estruturas formais do conhecimento matemáticos

Para D’Ambrósio, em sua publicação “Da Realidade à Ação” distingue modelagem matemática como sendo “processo mediante o qual se definem estratégias de ação”. Esta “ação” refere-se ao “processo de capacitação do aluno para análise global da realidade” (1986, p. 65). Para o autor analisa modelo sendo um argumento a qual disponibiliza ao homem a capacidade de desenvolver dedução de forma estruturada das suas realidades de mundo (Figura 5).

Figura 5: Esquema proposto.



Fonte: D"AMBROSIO (1986).

Com os aspectos das nossas investigações norteadoras para nosso trabalho em que desenvolve nas definições de analisar a modelagem matemática na aplicação dos cálculos diferencial e integral.

3.4 Modelagem Matemática no Ensino de Matemática

A modelagem matemática no ensino de matemática vem sendo empregada como estratégia de quebrar a forte dicotomia existente entre a matemática formal e sua utilidade na vida real. Assim, existem distintas maneiras de compreender uma atividade de modelagem para Bassanezi (2002), em suas literaturas enfatiza a construção de modelos matemáticos; Borba, Meneghetti e Hermini (1997), enfatiza a escolha do problema pelos alunos; Barbosa (2001), relaciona o envolvimento dos alunos em situações problemáticas com referência na realidade, Barbosa (2002).

Com o ensino e aprendizagem da modelagem matemática o alunado se toma consciente da aplicação da matemática para resolver e considera problemas que envolva o seu dia-a-dia. “Esse é um momento de utilização de conceitos já aprendidos. É uma fase de fundamental importância para que os conceitos trabalhados tenham um maior significado para os alunos, inclusive com o poder de torná-los mais críticos na análise e compreensão de fenômenos diários” (D’AMBRÓSIO, 1989, p.3).

O ensino baseado em modelagem matemática vem tornando uma forte característica no campo da educação matemática. Neste fato de ensino sobre a Modelagem Matemática centra-se no uso da aplicabilidade desenvolvendo a partir de técnica; o nível de conhecimento matemático utilizado; a relação que essa prática proporciona entre as ciências; o processor de aprendizagem matemática; um modelo pedagógico de ensino (NASCIMENTO, 2007)

Barbosa, (2003) nos reproduz as concepções de investigações em pesquisas como analisar e fixar a atividade de modelagem (Quadro 4):

Quadro 4: Pesquisas de modelagem:

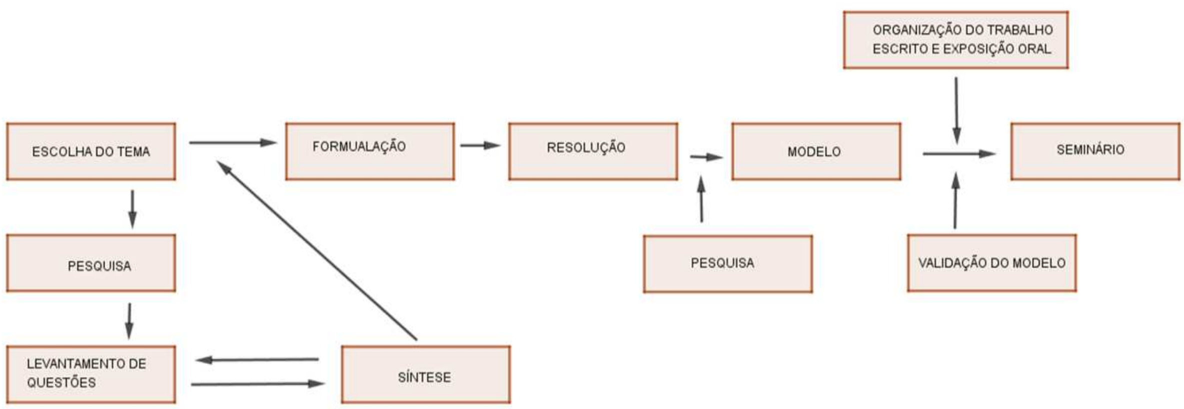
AUTOR	CONCEPÇÕES
Bassanezi (2002)	Analisa a obtenção dos modelos;
D’Ambrosio (1993) e Orey (2000)	Quando discutem a relação entre Etnomatemática e Modelagem, a tratam como ação pedagógica;
Borba, Meneghetti e Hermini (1997)	Destacam a participação do aluno no processo de aprendizagem ao utilizar essa técnica.
Barbosa (2001)	Discute a compreensão crítica que pode ser trabalhada pelo aluno na aplicação do conhecimento matemático em situações problema da realidade e o desenvolvimento de habilidades intelectuais nos educandos;
Bean (2001)	Destaca que a modelagem matemática vai exigir habilidades de raciocínio as quais diferem das mobilizadas em resolução de problemas típicos, *e “portanto é recomendável que ela seja*

	incorporada no ensino e na aprendizagem de matemática". Neste mesmo sentido, Franchi (1993) utilizou um problema "dirigido" para sistematizar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Ela problematizou um artigo de jornal com os alunos para abordar conteúdos programáticos de Estatística;
Biembengut & Hein (2000)	Preocupam-se em enriquecer o conhecimento da técnica de modelagem, tratando-a como metodologia voltada para o ensino. Suas pesquisas apresentam algumas situações reais, em que se formulam modelos matemáticos, como por exemplo, o tipo de embalagem ideal para um produto, levando-se em consideração algumas questões: que tipo de material se presta à embalagem do produto, que quantidade mínima deverá ser utilizada, qual a relação custo benefício para a elaboração da embalagem, entre outras.

Fonte: (NASCIMENTO, 2007, p.41)

Biembengut e Hein (2000, p. 26), sugere um esquema na dinâmica de ensino de modelagem matemática (Figura 6):

Figura 6: Esquema de Dinâmica da modelagem matemática no ensino



Fonte: (BIEMBENGUT E HEIN, 2000, p. 26).

Sobre o desenvolvimento do esquema de dinâmica de ensino de e modelagem matemática traçado por Biembengut e Hein (2000), justifica a importância para investigação mais detalhada da obtenção dessa metodologia. Assim os autores trazem questionamentos sobre objetivos que podem ser desenvolvidos para atingir no ensino através da modelagem matemática:

- Aproximar da matemática, conhecimentos de uma outra área;

- Enfatizar a importância da matemática para a formação do aluno;
- Despertar o interesse pela matemática ante a aplicabilidade;
- Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
- Desenvolver habilidades para resolver problemas;
- Estimular a criatividade no sentido de forçar o aluno a buscar outras soluções para um determinado problema (BIEMBENGUT e HEIN, 2000, p. 18)

Apesar dos reforços sobre a investigação da modelagem matemática e das contribuições que dos conhecimentos como tática de ensino podemos acreditar que ainda necessita de novas pesquisas na educação matemática. Para Bean (2001) quando destaca que:

> Em Educação Matemática, nos trabalhos acadêmicos, o conceito de modelagem matemática não está bem definido. Tanto na fala de educadores, como na literatura nacional e internacional, esta falta de clareza, reside em parte, na complexidade de transferir ou adaptar a atividade do modelador (matemático, engenheiro, biólogo, etc.) ao campo do ensino de matemática onde atua o professor de matemática. (BEAN, 2001, p. 56).

Esse questionamento é baste relevante, pois analisamos nas pesquisas controvérsias quando as definições e conceitos de modelagem em que gera variam concepções tanto do termo quanto do método (NASCIMENTO, 2007).

A modelagem matemática por muitos educadores é confundida como técnica de resolução de problemas, metodologia de problematização e aprendizagem na análise de problemas, porém precisamos ressaltar o ensino de matemática e das ciências (NASCIMENTO, 2007).

Bean (2001), vem discutindo essa inquietação quando afirma que a essência do ensino de modelagem matemática esta relacionando com as características que são solucionando através de hipóteses, ou seja, uma aproximação simplificada que após são associadas e afirmadas por meio da interpretação matemática.

A resolução de problema, problematização ou aprendizagem usando problema tem característica e concepção bem distintas como afirmando por Nascimento (2007).

> Os processos aqui apresentados como: resolução de problemas, metodologia de problematização e aprendizagem baseada em problemas, diferem do processo de modelagem matemática, pois a resolução de problemas consiste em um processo que geralmente começa com situações complexas, não bem definidas, que envolvem objetos e/ou sistemas, como por

> exemplo, a construção de um edifício. Já a metodologia de problematização é semelhante às etapas de modelagem. Os alunos buscam um problema, conjecturam, analisam informações, elaboram soluções e aplicam as soluções à realidade, sem, no entanto, conviver com as exigências da modelagem. Por fim, a aprendizagem baseada em problemas consiste em um processo de curta duração elaborado para uma disciplina, em que se busca trabalhar com problemas diretamente ligados aos temas do curso – sendo um modelo de proposta curricular (NASCIMENTO, 2007, p.41)

A diferença nos enfoques da aplicação da matemática como resolução de problema, problematização ou aprendizagem fundamentada em situações problemas está sendo interpretada de maneira equivocada como modelagem matemática pelos educadores.

O que diferencia a modelagem matemática de outras táticas para o ensino e aprendizagem de matemática são as metodologias de aplicadas nas hipóteses e das aproximações simplificada que são analisadas modelada para tornar o desenvolvimento do modelo (BEAN, 2001).

D'AMBROSIO (1986), relaciona a modelagem como um "procedimento rico" no qual as situações reais vão atravessar com respostas efetivas e não como uma simples resolução formal para um problema fictício.

Quando a modelagem matemática é utilizada como metodologia de ensino desenvolve agilidades intelectuais nos alunos. Neste sentido acreditamos que neste processo de ensino-ensino e aprendizagem em matemática com o desenvolvimento intelectual do educado podemos destacar Nascimento (2001) onde ele diz que:

- Agir matematicamente sobre os problemas da realidade;
- Aplicar os conhecimentos matemáticos de forma satisfatória e autônoma;
- Utilizar-se de receitas próprias para elaborar a solução de problemas;
- Entender as idéias básicas da matemática;
- Adquirir experiências quanto ao uso do conhecimento matemático, a partir de novos problemas;
- Adquirir o hábito de pesquisar os novos conhecimentos;
- Realizar tomada de decisão no sentido de direcionar o rumo da investigação de um problema;
- Valorizar o conhecimento que adquire;
- Saber transformar problemas da realidade em problemas matemáticos;
- Reconhecer as potencialidades da matemática;
- Buscar mecanismos para agir matematicamente sobre um problema (NASCIMENTO, 2001, p.45)

Quando aplicamos os conhecimentos matemáticos e usamos diversos argumentos em nosso dia a dia torna-se um elemento extraordinário neste sentido percebemos que a modelagem matemática é pouco tratada de ensino de matemática.

As literaturas e as pesquisas desta que o uso da modelagem matemática esta elevando a compreensão e entendimento de problema do mundo real além de contribuir para os conhecimentos relacionados a outras áreas das ciências.

3.5 Modelagem Matemática No Ensino E Da Aprendizagem Do Cálculo

Para Newton e Leibniz nas concepções e no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral colocaram representações para problemas cuja origem não estava relacionada no contexto matemático são nitidamente entendidas nas atividades humanas notamos que matemática tem seus desenvolvimentos intensamente acoplados a problemas não necessariamente matemáticos. Caraça (1998), menciona que "Sem dúvida a Matemática possui problemas próprios, que não têm ligação imediata com outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro ramo qualquer da Ciência, na vida real".

Em condições gerais o desenvolvimento de uma atividade relacionada com a modelagem matemática e o cálculo diferencial e integral o aluno pode despertar suas criatividades, conjecturar e construir os seus conhecimentos críticos além de observar aplicação do cálculo passando ser mais motivador para o seu ensino (DE ALMEIDA et al., 2010).

Na bibliografia autores como (Franchi, 1993; Vilarreal, 1999; Araújo, 2002; Biembengut, 1997; Barbosa, 2004) encontramos trabalhos associados entre o cálculo diferencial e integral e a modelagem matemática. Essas pesquisas aparecem explorando o modelo de um acontecimento que torna uma experiência importante que está direcionada no processo de aprendizagem.

Além dessas pesquisas, vários outros autores desenvolvem pesquisas tais como:

Quadro 5: Pesquisas desenvolvidas por autores.

Autor/ Ano	Concepção Da Modelagem E Cálculo
Dolis (1989)	defende uma proposta de abordagem alternativa para o ensino de Cálculo na perspectiva da Modelagem Matemática.

Almeida (1993)	presenta a Modelagem como metodologia alternativa para o ensino de Matemática nos cursos e Ciências Aplicadas a partir de problemas motivadores. Faz um levantamento de programas de Matemática nos cursos de Biologia de universidades brasileiras, a fim de mapear as estruturas matemáticas ensinadas e propor problemas motivadores para a aplicação da modelagem.
Franchi (1993)	discute os problemas relativos ao ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia, em particular nos cursos de engenharia mecânica. Propõe a Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do cálculo. Discute as vantagens da sua utilização e exemplifica por meio de experimentos realizados com alunos de engenharia.
Gaertner (1994)	Analisa o processo ensino-aprendizagem da disciplina "Matemática aplicada à administração" no curso de Administração de Empresas e propõe como estratégia a Modelagem Matemática. Seu intuito é atender aos anseios do administrador e mostrar que a Modelagem é uma alternativa viável para melhorar o processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina
Gambá (1996)	Aborda a relação entre trabalho e ensino, focando a Matemática nos cursos de Contabilidade. Considera Modelagem Matemática uma alternativa para o ensino da Matemática nos cursos de Contabilidade.
Biembengut (1997)	Analisa Gestão da Qualidade, Modelagem Matemática e História do Ensino de Matemática nos cursos de Engenharia do Brasil. Propõe um plano de implantação e gerenciamento de qualidade para o ensino em geral e para os cursos de Engenharia, além de um método de ensino-aprendizagem e programa alternativo de Matemática no curso de Engenharia.
Leal (1999)	Apresenta o método de Modelagem Matemática como forma alternativa de ensinar Matemática no curso de Ciências Econômicas. Conclui que o método de Modelagem Matemática, ao contextualizar não a partir do conteúdo (trabalho), mas a partir da realidade do aluno (trabalhador), segue os princípios da Ergonomia e pode servir de modelo para toda forma de adaptação de conteúdos diversos (Física, Química, etc.) à realidade do estudante.
Macedo Filho (2001)	Apresenta a Modelagem Matemática como metodologia de ensino da Matemática nos cursos de Ciências Administrativas. Sugere um Modelo Matemático Motivador com o qual introduz o conceito de integral mediante o problema de Custo de Estocagem, questão diretamente ligada à Administração de Empresas.
Macintyre (2002)	Procurou determinar e desenvolver novas tecnologias e formas pedagógicas que levasse o aluno a sentir prazer, não ansiedade e insegurança, à medida que adquire novos conhecimentos matemáticos com experiências práticas e reais dentro de sua futura profissão. Os resultados da pesquisa apontam melhor desempenho nas turmas em que a Modelagem Matemática foi empregada, proporcionando sensação de prazer e maior participação nas aulas.
Gomes (2002)	Teve por objetivo encontrar uma prática pedagógica que correspondesse ao perfil do formando em Agronomia. Para tanto, experimentou uma nova abordagem metodológica, transformando o método da Modelagem Matemática (como uma das alternativas para o Ensino de Matemática) para outra área do conhecimento.

Araújo (2002)	Investiga as discussões surgidas entre alunos de Cálculo Diferencial e Integral I ao desenvolverem projetos de Modelagem Matemática em ambientes computacionais. Aponta o ambiente de ensino e aprendizagem de Cálculo – área em que atuam a Modelagem Matemática e as Tecnologias Informáticas - como fértil em possibilidades de constituir cenários de investigação, que discutam as questões levantadas pela Educação Matemática Crítica
Franchi (2002)	Investiga aspectos relativos ao currículo de Matemática para cursos de Engenharia, buscando identificar as competências desejáveis ao profissional de Engenharia da atualidade. Apresenta uma proposta curricular de Matemática para cursos de Engenharia na qual a Modelagem Matemática e a Informática sejam indicadas para o trabalho integrado de objetivos, métodos e conteúdos e componentes curriculares.
Ferruzzi (2003)	Enfatiza a preocupação com o processo de ensinoaprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de Tecnologia em Eletrotécnica e reconhece a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática.
Stahl (2003)	Apresenta uma pesquisa que trata da utilização da Modelagem Matemática, aplicada a fenômenos ambientais, como meio de transformação de atitudes docentes e discentes no processo de enino-aprendizagem da disciplina de Cálculo Numérico.
Rilho (2005)	Investiga a aprendizagem de derivadas a partir do estudo de fundos de investimento. Apoia-se principalmente na visão teórica de Ubiratan D'Ambrosio e de Rodney Bassanezi a respeito do verdadeiro papel da educação, em particular da Modelagem Matemática, na formação da pessoa cidadã. Propõe, recorrendo a uma ação planejada que envolve o uso da Modelagem, transformar o processo unilateral de ensino num sistema colaborativo em que o professor e alunos interajam efetivamente.

Fonte: (BELTRÃO, 2009, p.93)

Ao analisarmos todos os trabalhos comentados no quadro percebemos que está associado a modelagem matemática sendo com uma estratégia, metodologia ou ainda opção transitável para o ensino de cálculo diferencial e integral e para o ensino da matemática.

A modelagem matemática nos providência um percurso metodológico junto com uma contextualização por meio de uma problematização das ideias no qual temos como a potência do cálculo diferencial e integral torne um instrumento expressiva. Para Meyer:

> "A inserção cultural e histórica da Matemática a faz especialmente mais rica quando os alunos podem vê-la não como uma região estanque de conhecimentos, mas como uma ferramenta eficiente e direta em todas as áreas. Além disso, as assim chamadas "Soluções" matemáticas nem sempre são obtidas ou eleitas com a precisão da teoria: números em forma decimal, raízes obtidas por processos

> iterativos, funções calculadas com suas expansões polinomiais, todos esses processos tornam as soluções aproximadas, mas suficientemente aproximadas como para garantir uma certa precisão dos resultados apresentados ao final do processo. Se é necessário conviver com essa inexatidão, também é necessário aprender a criticar cada procedimento - e isto os alunos aprendem a fazer" (Meyer, 1998, p.69).

Ao usarmos a modelagem matemática nas aulas de cálculo diferencial e integral passamos a ter estratégias de ensino-aprendizagem no qual estabelecemos uma maneira criativa, contextualizada e motivadora para os alunos devidos todo envolvimento deste com o tema e coma situação sugerida Spina (2002).

Quando usamos a modelagem matemática como opção pedagógica sobre os conceitos de cálculo as atividades de modelagem tornam facilitador a compreensão dos conceitos presentes no cálculo diferencial e integral.

4. SOMA DE RIEMANN E INTEGRAL DEFINIDA

Neste capítulo, apresentamos o conceito de Integral de uma função real definida e limitada em um intervalo fechado. Estudaremos também algumas técnicas de integração que são resultados preliminares para desenvolvimento do próximo capítulo.

4.1 Somas de Riemann

A notação sigma permite expressar uma grande soma em forma compacta.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

A letra grega maiúscula Σ significa "soma". O índice k diz onde começa a soma (no número sob o Σ) e onde ela termina (no número acima do Σ). Quando o símbolo ∞ aparece acima do Σ, isso indica que os termos continuam indefinidamente.

Propriedades:

Sejam a_k, b_k e c números reais:

1. $\sum_{k=1}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

Alguns exemplos são apresentados na Tabela 1:

Tabela 1: Notação sigma

A soma em notação sigma	A soma escrita, um termo para valor de k	O valor da soma
$\sum_{k=1}^{5} k$	1+2+3+4+5	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1)$+$(-1)^2(2)$+$(-1)^3(3)$	-1+2-3=-2
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

Fonte: THOMAS, George B. (2002)

Observação 4.1: O limite inferior do somatório não precisa ser 1(um); pode ser qualquer número inteiro.

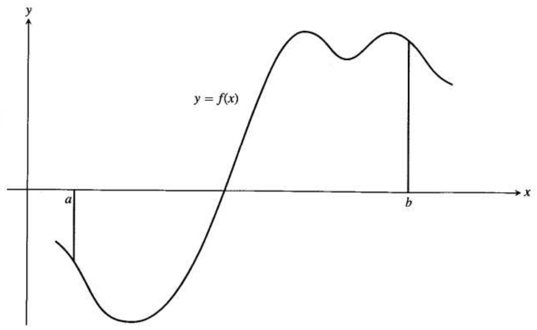
As somas nas quais estamos interessados são chamadas somas de Riemann, em homenagem a Georg Friedrich Bernhard Riemann. As somas de Riemann são construídas de um modo particular. Vamos descrever a construção formalmente, em um contexto mais geral que não nos limita a funções não negativas.

Começamos com uma função contínua e arbitraria $f(x)$ definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Assim como a função traçada na Figura 7, ela pode ter valores negativos e positivos.

Depois dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos escolhendo $n-1$ pontos, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, entre a e b, sujeito apenas a condição de que

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

Figura 7: Uma função contínua típica y=f(x) ao longo de um intervalo [a, b].



Fonte: THOMAS, George B. (2002)

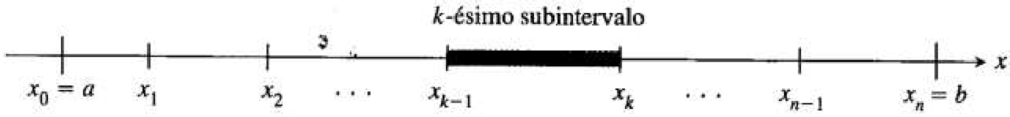
Para tornar a notação coerente, denotamos a por x_0 e b por x_n. O conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$ é chamado partição de $[a, b]$.

A partição P define n subintervalos fechados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

O subintervalo típico $[x_{k-1}, x_k]$ é chamado k-ésimo subintervalo de P (Figura 8).

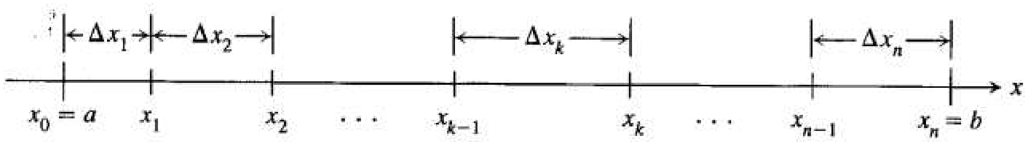
Figura 8: Representação da partição na reta real



Fonte: THOMAS, George B. (2002)

O comprimento do k-ésimo subintervalo é dado por: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Figura 9).

Figura 9: Representação da partição k-ésima da reta real.

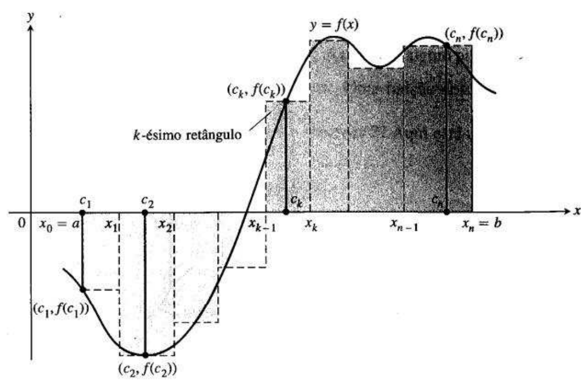


Fonte: THOMAS, George B. (2002)

Em todos os subintervalos selecionamos algum número. Denote o número escolhido do k-ésimo subintervalo por c_k.

Depois, em cada subintervalo construímos um retângulo com uma base no eixo x e que toca a curva em $(c_k, f(c_k))$. Esses retângulos podem estar tanto acima como abaixo do eixo (Figura 10).

Figura 10: Representação de retângulos que permitem fazer uma aproximação para o cálculo da região que fica entre o gráfico da função y=f(x) e o eixo x.



Fonte: THOMAS, George B. (2002)

Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_k).\Delta x_k$. Esse produto pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo de $f(c_k)$, já que $\Delta x_k > 0$.

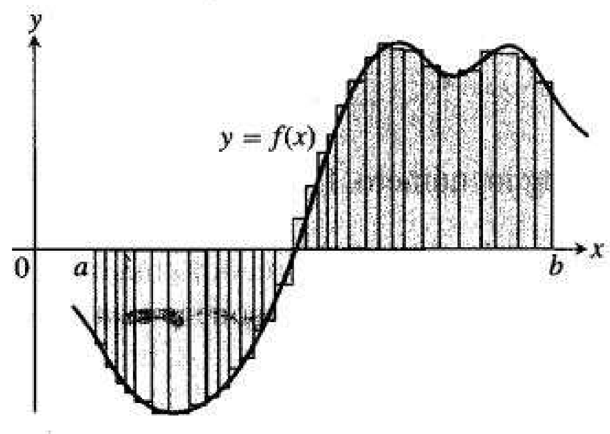
Por fim, tomamos a soma desses produtos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k).\Delta x_k$$

Essa soma, que depende da partição de P e da escolha dos números c_k, é uma soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$.

À medida que as partições de $[a, b]$ se tornam cada vez menores esperamos que os retângulos definidos pelas partições aproximem a região entre o eixo x e o gráfico de f com precisão cada vez maior (Figura 11). Portanto, esperamos que as somas de Riemann associadas tenham um valor-limite.

Figura 11: Partições menores criam mais retângulos com bases menores.



Fonte: THOMAS, George B. (2002)

Apesar do potencial para variação nas somas $\sum f(c_k)\,.\,\Delta x_k$ conforme as partições mudam e os c_k são escolhidos arbitrariamente nos subintervalos de cada partição, as somas sempre tem o mesmo limite para $\|P\| \to 0$ quando f é continua em $[a, b]$.

4.2 Integral Definida

Definição 4.1: Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. A integral definida de f de a até b, denotada por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

É definida por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \tag{4.1}$$

desde que o limite do segundo membro exista.

Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Na notação $\int_a^b f(x)dx$, os números a e b são chamados limites de integração (a = limite inferior e b = limite superior). Temos também que $\int$ é o sinal de integração, $f(x)$ é a função integrando e dx indica a variável de integração.

Observação 4.2: Quando cada partição tem n subintervalos todos com o mesmo comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ também se escreve:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Exemplo 4.1: O intervalo $[-1,3]$ é dividido em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x = \frac{4}{n}$. Seja m_k o ponto médio do k-ésimo subintervalo. Expresse o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (3(m_k)^2 - 2m_k + 5)\Delta x$$

como integral.

Solução: Como os pontos médios m_k foram escolhidos a partir dos subintervalos do particionamento, esta expressão é certamente um limite das somas de Riemann. (Os pontos escolhidos não precisam ser pontos médios; poderiam ter sido escolhidos arbitrariamente a partir dos subintervalos). A função que está sendo integrada é $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ ao longo do intervalo $[-1,3]$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (3(m_k)^2 - 2m_k + 5)\Delta x = \int_{-1}^{3} (3x^2 - 2x + 5)dx$$

Se f é integrável em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds$$

Isto é, podemos usar qualquer símbolo para representar a variável independente.

Quando a função f é continua e não negativa em $[a, b]$, a definição da integral definida coincide com a definição da área. Portanto, neste caso, a integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

É a área da região sob o gráfico de f de a até b.

Sempre que utilizamos um intervalo $[a, b]$, supomos $a < b$. Assim, em nossa definição não levamos em conta os casos em que o limite inferior é maior que o superior.

Definição 4.2:

a) Se $a > b$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Se a integral a direita existir.

b) Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

É muito importante saber quais funções são integráveis. Uma ampla classe de funções usadas no cálculo é a classe das funções continuas.

Teorema 4.1: Se f é continua sobre $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Demonstração: [ver livro de Análise Real vol. 1, Elon Lages, pg. 127].

O teorema anterior garante que o limite (4.1) existe quando a função f é continua no intervalo fechado $[a, b]$. Uma condição suficiente para uma função ser integrável em $[a, b]$ é que ela seja continua em $[a, b]$. No entanto, esta condição não é necessária já que as funções descontinuas podem ou não ser integráveis. Entre as funções descontinuas e integráveis estão as funções continuas por partes (são descontinuas em um número finito de pontos em $[a, b]$).

Exemplo 4.2 (Uma função descontínua e integrável): A função

$$f(x) = \begin{cases} 0, se\ x \neq 0 \\ 1, se\ x = 0 \end{cases}$$

é integrável no intervalo $[-1,1]$.

Exemplo 4.3 (Uma função não integrável): A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, se\ x\ \text{é}\ racional \\ 0, se\ x\ \text{é}\ irracional \end{cases}$$

não é integrável no intervalo $[0,1]$.

4.2.1 Propriedades da Integral Definida:

- $\int_a^b C dx = C(b-a)$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- Se $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Se $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Definição 4.3: Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Dizemos que um numero I é a integral definida de f em $[a,b]$ e que I é o limite das somas de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$ se a seguinte condição é satisfeita: Dado qualquer numero $\varepsilon > 0$, existe um numero correspondente $\delta > 0$, tal que, para qualquer partição P de $[a,b]$ com $\|P\| < \delta$ e qualquer escolha de c_i em $[x_{i-1}, x_i]$, tem-se

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

Observação: Quando cada partição tem n subintervalos todos com o mesmo comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ também escrevemos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$$

Teorema 4.2: (Teorema Fundamental do cálculo – 1ª Parte) Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função continua. Se F é qualquer antiderivada de f em $[a,b]$ então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

é comum usar a notação

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ou ainda,

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$$

Exemplo 4.4: Calcule

$$\int_{-1}^{3} (x^3 + 1)dx$$

usando uma primitiva.

Solução: Uma primitiva simples de $x^3 + 1$ é $\left(\frac{x^4}{4}\right) + x$. Então,

$$\int_{-1}^{3} (x^3 + 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left(\frac{81}{4} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

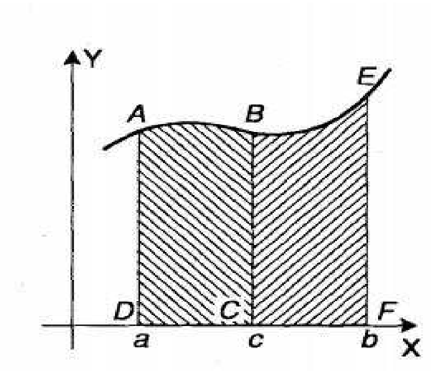
$$= 24$$

Teorema 4.3: (Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas) Se f é continua em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Temos que $f(c)$ é o valor médio da função f em $[a, b]$. Se $f(x) \geq 0$, o teorema do valor médio para integrais garante que a área sob o gráfico de f de a até b é igual a área do retângulo de base $(b - a)$ e altura $f(c)$ (Figura 12).

Figura 12: Área positiva.



Fonte: FLEMMING, Cálculo A pg: 264.

Teorema 4.4: (Teorema Fundamental do cálculo – 2ª Parte) Seja f continua em $[a, b]$ e considere a função $F(x)$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in [a, b]$. Então $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.

Usa-se também a notação

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Exemplo 4.5: Determine

$$\frac{d}{dx}\int_{-\pi}^{x} \cos(t)\, dt$$

usando o Teorema 4.4:

Solução:

$$\frac{d}{dx}\int_{-\pi}^{x} \cos(t)\, dt = \cos(x)$$

4.3 Mudanças de Variável em Integrais Definidas

Se g' é continua no intervalo $[a, b]$ e f é continua na imagem de g, então as integrais da forma

$$\int_a^b f\big(g(x)\big).\, g'(x)dx$$

podem ser calculadas por dois métodos distintos.

1º Método: Determina-se a integral indefinida:

$$\int f\big(g(x)\big).\, g'(x)dx = \int f(u)du = F(x) + C$$

por meio da substituição

$$u = g(x), \qquad du = g'(x)dx$$

depois de calcular $\int f(u)\, du$ retorna-se á variável inicial x e usa-se a relação

$$\int_a^b f\big(g(x)\big).\, g'(x)dx = F(x)\Big|\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}$$

Neste caso, não levamos em conta o efeito da substituição nos limites de integração.

2º Método: Fazendo a substituição:

$$u = g(x), \qquad du = g'(x)dx$$

na integral definida $\int_a^b f\big(g(x)\big).\, g'(x)dx$ e levando em consideração o efeito da substituição nos limites de integração obtém-se:

$u = g(a)$ se $x = a$

$u = g(b)$ se $x = b$

Assim,

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(b)}^{g(a)} f(u)du$$

que é calculada usando a 1ª parte do teorema fundamental do cálculo.

Exemplo 4.6: Calcule a integral:

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}$$

Solução: Fazendo $u = 2x + 1$ então $du = 2dx$, temos:

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \int_0^4 \sqrt{u}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{3}\left[(3^2)^{3/2} - (1)^2\right]$$

$$\frac{26}{3}.$$

4.4 Técnicas de Integração

4.4.1 Integração por Partes

Se f e g são funções deriváveis de x, a regra do produto diz que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Em termos de integrais indefinidas, essa equação se torna

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx$$

ou

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

assim,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx - \int f'(x)g(x)dx$$

o que leva à fórmula da integração por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'^{(x)}g(x)dx \tag{4.1}$$

seja $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então,

$$du = f'(x)dx \;\; e \; dv = g'(x)dx$$

e substituindo em (4.1), obtemos:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{4.2}$$

Supondo que tanto f' quanto g' sejam contínuas ao longo do intervalo $[a, b]$, o Teorema Fundamental do Cálculo nos leva a fórmula de integração por partes para integrais definidas:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)| \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{4.3}$$

ou

$$\int_a^b udv = uv| \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} - \int_a^b vdu$$

Se $u = f(x)$ e $v = g(x)$.

Exemplo 4.7: Calcular a integral:

$$\int xcoxdx$$

Solução: Façamos $u = x$, $du = dx$, $dv = cosxdx$, $v = \int cosdx = senx$, então temos:

$$\int xcosxdx = \int udv = uv - \int vdu$$

$$= xsenx - \int senxdx$$

$$= xsenx - (-cosx) + c$$

$$xsenx + cosx + c.$$

4.4.2 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Uma função racional é da forma $\frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$. Quando o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$, a função racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ é chamada função racional própria.

Vamos descrever um método para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, onde $\frac{p(x)}{q(x)}$ é uma função racional própria. A ideia básica é escrever a função racional dada como uma soma de frações mais simples. Para isto, usaremos alguns resultados importantes da Álgebra, que serão apresentados a seguir.

Proposição 4.1: Se $q(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, $q(x)$ pode ser expresso como um produto de fatores lineares e/ou quadráticos, com todos os coeficientes reais.

Definição 4.4: Um polinômio é irredutível se não puder ser escrito como o produto de dois fatores lineares com coeficientes reais.

Proposição 4.2: Toda função racional própria pode ser expressa como uma soma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x) \tag{4.4}$$

onde $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ são funções racionais da forma

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad ou \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} \tag{4.5}$$

nos quais os denominadores são fatores de $q(x)$.

A soma (4.4) é a decomposição em frações parciais de $\frac{p(x)}{q(x)}$ e cada termo $F_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ é uma fração parcial.

Exemplo 4.8: A função racional

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3}$$

pode ser escrita como

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}$$

No caso do exemplo acima, o método das frações parciais consiste em achar constantes A e B tais que

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$$

Diretrizes para obter a decomposição de uma função racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ em frações parciais

I. O grau de $p(x)$ deve ser menor que o grau de $q(x)$. Se não for, divida $p(x)$ por $q(x)$ e trabalhes com o resto.

II. Devemos fatorar $q(x)$ completamente em fatores lineares $(ax+b)^k$ e/ou quadráticos irredutíveis $(ax^2+bx+c)^k$, onde k é um inteiro não negativo.

III. As formas das respectivas frações parciais são asseguradas por resultados da Álgebra e não serão demonstradas:

- Fatores Lineares: Para cada fator da forma $(ax+b)^m$, onde m é a maior potência de $ax+b$ que divide $q(x)$, associe a soma de m frações parciais
$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(ax+b)^m}$$
- Fatores Quadráticos: Para cada fator da forma $(ax^2+bx+c)^n$, onde n é a maior potência de ax^2+bx+c que divide $q(x)$, associe a soma de n frações parciais
$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

IV. $A_1, A_2, \dots, A_m$, $B_1, B_2, \dots, B_n$ e $C_1, C_2, \dots, C_n$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo 4.9: Utilizando o exemplo anterior calcule:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx$$

Solução:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{3}{x-3}dx$$

$$= 2ln|x+1| + 3ln|x-3| + c.$$

4.4.3 Integrais Trigonométricas

4.4.3.1 Produtos de Potências de Senos e Cossenos

Vamos calcular integrais da forma

$$\int sen^m x \, . \, cos^n x dx \qquad (4.6)$$

onde m e n são inteiros não negativos (positivos ou zero). Os três casos possíveis estão descritos a seguir.

Caso 1: Se m é impar, escrevemos $m = 2k+1$ e usamos a identidade $sen^2x = 1 - cos^2x$ para obter

$$sen^m x = sen^{2k+1}x = (sen^2x)^k senx = (1 - cos^2x)^k senx$$

Então, realizamos a substituição $u = cosx, du = -senxdx$.

Caso 2: Se m é par e n é impar, escrevemos $n = 2k+1$ e usamos a identidade $cos^2x = 1 - sen^2x$ para obter

$$cos^n x = cos^{2k+1}x = (cos^2x)^k cosx = (1 - sen^2x)^k cosx$$

Então, realizamos a substituição $u = senx, du = cosxdx$.

Caso 3: Se tanto m quanto n são pares em (4.6), usamos as identidades trigonométricas

$$sen^2x = \frac{1 - cos2x}{2} \;\; e \;\; cos^2x = \frac{1 + cos2x}{2}$$

Que são consequência da fórmula do cosseno da soma:

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = cosxcosx - senxsenx$$

Exemplo 4.10: Calcule a integral

$$\int sen^2xdx$$

Solução:

$$\int sen^2xdx = \int \frac{1 - cos2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1 - cos2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}sen2x + c\right]$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen2x + c$$

4.4.3.2 Integrais de Potências de tgx e secx

Para integrar potências maiores, usamos as identidades

$$sec^2x = 1 + tg^2x \;\; e \;\; tg^2x = sec^2x - 1$$

e integramos por partes quando necessário, a fim de reduzir maiores a potência menores.

4.4.3.3 Produtos de Senos e Cossenos

Se um integrando tem uma das formas

$$sen(mx)\cos(nx)\,, \qquad sen(mx)sen(nx), \qquad \cos(mx)\cos(nx)$$

pode-se aplicar integração por partes duas vezes para calcular tais integrais. Neste caso, é mais simples usar as identidades:

$$sen(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[sen(a + b) + sen(a - b)]$$

$$sen(a)sen(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos(\mathrm{a})\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

4.4.3.4 Integração por Substituição Trigonométrica

Utiliza-se substituição trigonométrica para calcular integrais envolvendo expressões do tipo

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \sqrt{a^2 + x^2}, \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

Onde a é uma constante positiva.

Caso 1: A função integrando envolve $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Neste caso, usamos $x = asen\theta$. Então, $dx = acos\theta d\theta$. Supondo que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, tem-se:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sen^2x}$$

$$= \sqrt{a^2(1 - sen^2x)}$$

$$= \sqrt{a^2cos^2x}$$

$$= acos\theta.$$

Caso 2: A função integrando envolve $\sqrt{a^2 + x^2}$.

Neste caso, usamos $x = atg\theta$. Então, $dx = asec^2\theta d\theta$. Supondo que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2tg^2\theta}$$

$$= \sqrt{a^2(1 + tg^2\theta)}$$

$$= \sqrt{a^2sec^2\theta}$$

$$= asec\theta.$$

Caso 3: A função integrando envolve $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Neste caso, usamos $x = asec\theta$. Então,$dx = sec\theta tg\theta d\theta$. Supondo que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$, temos:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 sec^2\theta - a^2}$$

$$= \sqrt{a^2(sec^2\theta - 1)}$$

$$= \sqrt{a^2 tg^2\theta}$$

$$= atg\theta.$$

Exemplo 4.11: Calcule a integral

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2x^2} dx$$

Solução: Façamos $x = 3sen\theta$, $dx = 3cos\theta d\theta$

assim,

$$\sqrt{9 - x^2} = 3cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

logo,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2x^2} dx = \int \frac{3cos\theta}{2.9sen^2\theta}\ .3cos\theta d\theta$$

$$= \int \frac{9}{18} . \frac{cos^2\theta}{sen^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int cotg^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int (cosec^2\theta - 1) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(-cotg\theta - \theta) + c.$$

escrevendo este resultado em termos da variável x.

como $x = 3sen\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos $sen\theta = \frac{x}{3} \Longrightarrow \theta = arcsen\frac{x}{3}$

pelo caso 1, temos:

$$cotg\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta} = \frac{\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

dai,

$$cotg\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - arcsen\frac{x}{3}\right) + c$$

5. MODELO DA INTEGRAL DEFINIDA E O PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo iremos estudar aplicações da Integral Definida no cálculo de áreas de uma região no plano, volume de sólidos de revolução e área de superfícies de revolução. O processo de modelagem se dará na evolução destes conceitos matemáticos utilizados para resolver problemas tais como: calcular o volume de uma fruta (maçã, laranja); calcular a área de superfície de uma laranja.

5.1 Área de uma região no plano

5.1.1 Áreas sob curvas:

Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0 \; \forall \, x \; \in [a,b]$, a área da região limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo x é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Se $f(x) \leq 0 \; \forall \, x \; \in [a,b]$, então a área da região limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo x é dada por:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

Exemplo 5.1: Calcule a área da região limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo x.

Solução: Temos que no intervalo $[-2,2]$ f é continua e $f(x) \geq 0$. Assim:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$

$$= 4x - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} u.a.$$

5.1.2 Áreas entre curvas:

Consideremos duas funções f e g contínuas no intervalo $[a, b]$, tal que $f(x) \geq g(x)\ \forall\ x\ \in [a, b]$. A área da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

5.1.2.1 Integração em y:

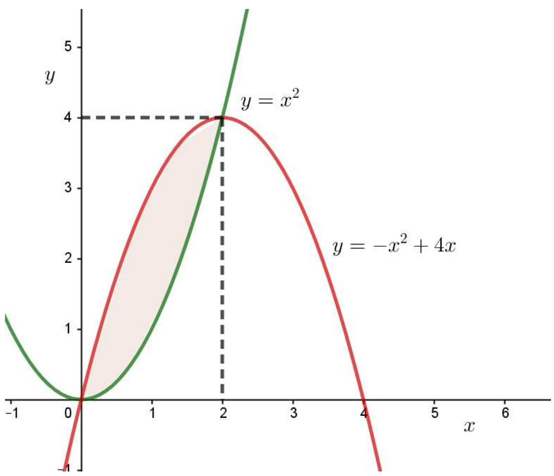
Consideremos agora uma região compreendida entre os gráficos de duas funções $x = f(y)$ e $x = g(y)$, com f e g continuas e $f(y) \geq g(y)\ \forall\ y\ \in [c, d]$. Neste caso, a área da região limitada pelas curvas $x = f(y)$ e $x = g(y)$ e as retas $y = c$ e $y = d$ é dada por:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

Exemplo 5.2: Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solução: Se esboçamos o gráfico (Figura 13) podemos notar que:

Figura 13: Comportamento das funções.



Fonte: Autora.

$f(x) = x^2$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, e vértice na origem;

$f(x) = -x^2 + 4x$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo e vértice $V = (2,4)$.

Notemos que no intervalo $[0,2], -x^2 + 4x \geq x^2$, assim:

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 4x - x^2)dx$$

$$= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx$$

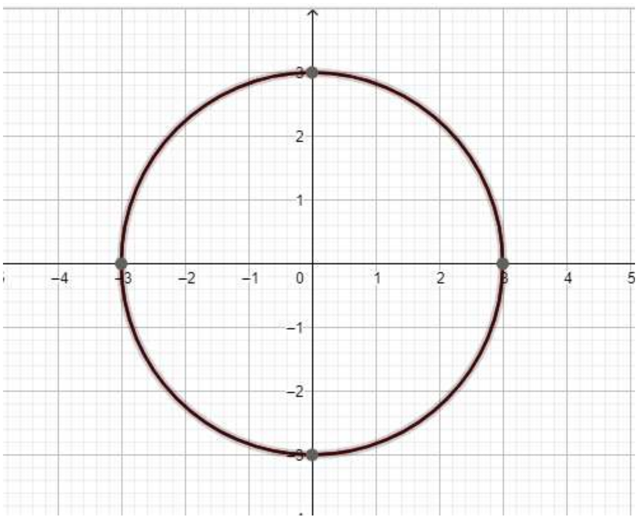
$$= -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \Big|_0^2$$

$$= -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}\ u.a.$$

Exemplo 5.3: Encontre a área da região delimitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

Solução: Esboçando o gráfico da circunferência (Figura 14), vemos que em $[-3,3]$, $\sqrt{9 - x^2} \geq -\sqrt{9 - x^2}$, assim:

Figura 14: Gráfico da circunferência.



Fonte: Autora

$$A = \int_{-3}^{3} \left[\sqrt{9 - x^2} - (-\sqrt{9 - x^2})\right] dx = \int_{-3}^{3} 2\sqrt{9 - x^2}dx$$

vamos resolver a integral indefinida fazendo uma substituição trigonométrica:

$x = 3sen\theta \Rightarrow dx = 3cos\theta d\theta$ e $\sqrt{9 - x^2} = 3cos\theta$ com $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int 2\sqrt{9 - x^2}dx = \int 2.3cos\theta . 3cos\theta d\theta = 18 \int cos^2\theta d\theta$$

$$= 18 \int \left(\frac{1 + cos2\theta}{2}\right) d\theta = 9 \left[\int 1d\theta + \int cos2\theta d\theta\right]$$

$$= 9\left(\theta + \frac{1}{2}sen\theta\right) + c = 9\left(\theta + \frac{1}{2}2sen\theta cos\theta\right) + c$$

$$= 9\theta + 9sen\theta cos\theta$$

voltando a variável x, temos:

$x = 3sen\theta \Rightarrow sen\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \theta = arcsen\frac{x}{3}$ e pelo triângulo $sen\theta = \frac{x}{3}, cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$.

assim,

$$\int 2\sqrt{9 - x^2}dx = 9arcsen\frac{x}{3} + 9\frac{x}{3}\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} + c$$

$$= 9arcsen\frac{x}{3} + x\sqrt{9 - x^2} + c$$

logo,

$$\int_{-3}^{3} 2\sqrt{9 - x^2}dx = 9arcsen\frac{x}{3} + x\sqrt{9 - x^2}\Big|_{-3}^{3}$$

$$= 9arcsen1 + 3.0 - 9arcsen1 - 3.0$$

$$= 9arcsen1 - 9arcsen(-1)$$

$$= 9.\frac{\pi}{2} - 9.\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 9\pi\, u.a.$$

5.2 Volume de um Sólido De Revolução

5.2.1 Método das Fatias

Definição 5.1: Uma seção transversal de um sólido S é a região plana formada pela interseção entre S e um plano.

Da geometria clássica, sabemos que o volume de um cilindro que tem uma área de base A e altura h é:

$$V = A.h$$

Essa equação serve de base para definir o volume de muitos sólidos não cilíndricos usando o método das fatias.

Se a seção transversal do sólido S em cada ponto x no intervalo $[a,b]$ é uma região de $A(x)$, e A é uma função contínua de x, pode-se definir e calcular o volume do sólido S como uma integral definida como veremos a seguir.

Dividindo $[a,b]$ em n subintervalos de largura Δx_i e fatiando o sólido por planos perpendiculares ao eixo x nos pontos de partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Aproxima-se a fatia situada entre o plano em x_{i-1} e o plano em x_i por um sólido cilíndrico com área de base $A(x_i)$ e altura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. O volume V_i desse sólido cilíndrico é $A(x_i).\Delta x_i$, aproximadamente o mesmo valor da fatia:

Volume da i-ésima fatia é aproximadamente $V_i = A(x_i).\Delta x_i$

O volume V do sólido inteiro S é, então, aproximado pela soma desses volumes cilíndricos:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} A(x_i).\Delta x_i$$

que é uma soma de Riemann para a função $A(x)$ em $[a,b]$. Espera-se que as aproximações dessas somas melhorem à medida que aumenta-se o número de fatias, isto é, fazendo $n \to \infty$. Assim, tem-se:

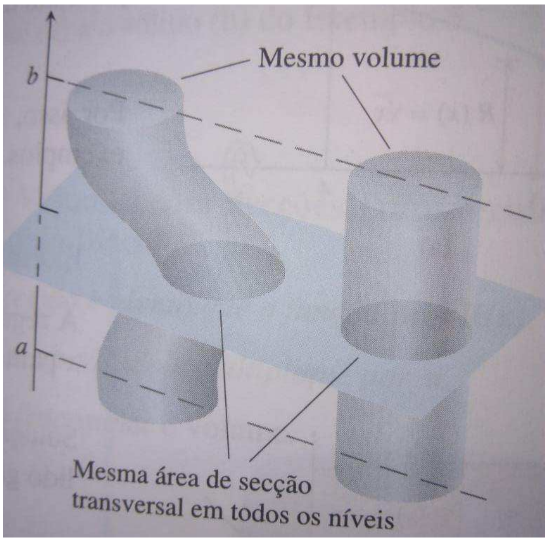
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i).\Delta x_i = \int_a^b A(x)dx$$

Definição 5.2: O volume de um sólido compreendido entre os planos $x = a$ e $x = b$ e cuja área de seção transversal por x é uma função integrável $A(x)$ é:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Exemplo 5.4 (Teorema de Cavalieri): O teorema do volume de Cavalieri diz que sólidos com mesma altura e com áreas das secções transversais iguais em cada altura têm o mesmo volume (Figura 15). Isso se segue imediatamente à definição de volume, pois a função área de secção transversal $A(x)$ e o intervalo $[a, b]$ são iguais para ambos sólidos.

Figura 15: Teorema de Cavalieri: esses sólidos têm o mesmo volume. Você mesmo pode ilustrar isso usando pilhas de moedas.



Fonte: THOMAS, George B. (2002), pg.399.

Exemplo 5.5 (Volume de uma Cunha): Uma cunha foi obtida por meio do corte de um cilindro de raio 3 por dois planos. Um deles é perpendicular ao eixo do cilindro. O segundo cruza o primeiro formando um ângulo de 45° no centro do cilindro. Determine o volume da cunha.

Solução:

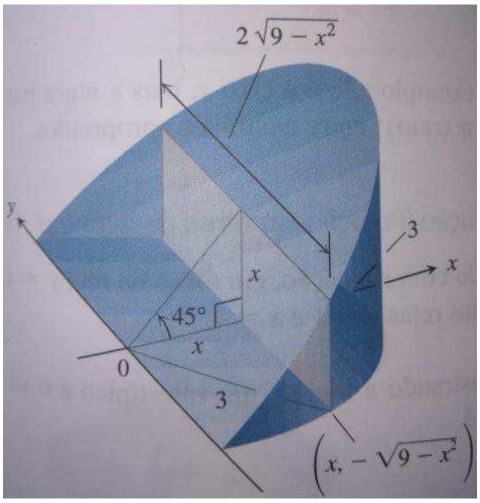
Passo 1: (Um esboço) Desenhamos a cunha e esboçamos uma secção transversal típica perpendicular ao eixo x (Figura 16).

Passo 2: Uma fórmula para $A(x)$. A secção transversal em x é um retângulo de área

$$A(x) = (altura)(largura) = (x)(2\sqrt{9 - x^2})$$

$= 2x\sqrt{9 - x^2}$ unidades ao quadrado.

Figura 16: A cunha fatiada perpendicularmente ao eixo x. As secções transversais são retângulos.



Fonte: THOMAS, George B. (2002), pg.399.

Passo 3: Os limites de integração: Os retângulos vão de $x = 0$ a $x = 3$.

Passo 4: Integre para determinar o volume.

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^3 2x\sqrt{9 - x^2}dx$$

Seja $u = 9 - x^2$ e $du = -2xdx$, integre e substitua novamente:

$$= -\frac{2}{3}(9 - x^2)^{3/2}\Big|_0^3$$

$$V = \frac{2}{3}(9)^{3/2}$$

$$= 18\, u.c.$$

5.2.2 O método do disco

Definição 5.3: Um sólido de revolução é obtido através da rotação de uma região do plano xy em torno de uma reta chamada eixo de rotação. Para determinar o volume de um sólido de revolução observa-se que a seção transversal $A(x)$ é um disco e, portanto, $A(x) = \pi(raio)^2$.

Caso 1: O volume do sólido obtido com a rotação, em torno do eixo x, de uma região compreendida entre o eixo x e a curva $y = R(x)$, $a \leq x \leq b$ é:

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

onde $R(x)$ é o raio da seção transversal, que corresponde a distância entre a fronteira da região bidimensional e o eixo de revolução.

Exemplo 5.6: O círculo $x^2 + y^2 = a^2$ é gerado em torno do eixo x para gerar uma esfera. Determine seu volume.

Solução:

$$V = \int_{-a}^{a} \pi[f(x)]^2 dx = \int_{-a}^{a} \pi(\sqrt{a^2 - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) dx = \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$= \pi \left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right)\right]$$

$$= \pi \left(2a^3 - \frac{2a^3}{3}\right) = \pi \left(\frac{6a^3 - 2a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^3 u.v.$$

Caso 2: O volume do sólido obtido com rotação, em torno de eixo y, de uma região compreendida entre o eixo y e a curva $x = R(y), c \leq y \leq d$ é:

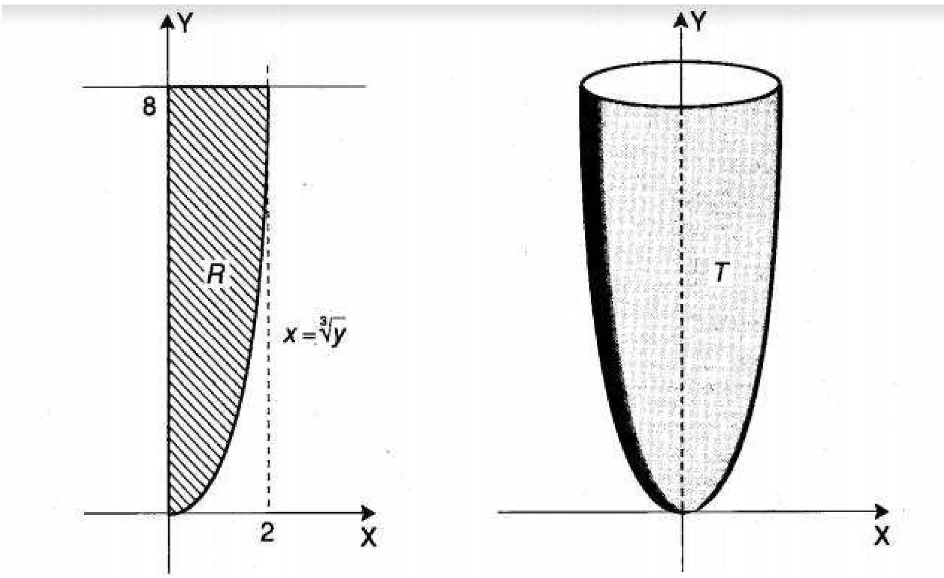
$$V = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy$$

onde $R(y)$ é o raio da seção transversal, que corresponde a distância entre a fronteira da região bidimensional e o eixo de revolução.

Exemplo 5.7: Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região definida pela curva $y = x^3$ e pelas retas $x = 0$ e $y = 8$ em torno do eixo y.

Solução: Podemos ver a região R e o sólido de revolução T, gerado pela rotação de R em torno do eixo dos y (Figura 17).

Figura 17: Sólido de Revolução



Fonte: FLEMMING, Cálculo A pg:352.

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

$$= \pi \int_0^8 [\sqrt[3]{y}]^2 dy$$

$$= \pi \cdot \frac{3}{5} y^{5/3} \Big|_0^8$$

$$= \frac{3\pi}{5} 8^{5/3}$$

$$= \frac{96\pi}{5}\ u.v$$

Caso 3: O volume do sólido obtido com a rotação, em torno da reta $y = L$, de uma região compreendida entre a reta $y = L$ e a curva $y = R(x), a \leq x \leq b$ é:

$$V = \int_a^b \pi [R(x) - L]^2 dx$$

Caso 4: O volume do sólido obtido com a rotação, em torno da reta $x = M$, de uma região compreendida entre a reta $x = M$ e a curva $x = R(y), c \leq y \leq d$ é:

$$V = \int_c^d \pi[R(y) - M]^2 dy$$

Exemplo 5.8: Determine o volume do sólido gerado pela rotação da região definida pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = 1$ e $x = 4$ em torno da reta $y = 1$.

Solução:

$$V = \int_1^4 \pi[R(x)]^2 dx$$

$$= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2\,.\,\frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}\ u.c.$$

5.2.3 O método do Anel

Definição 5.4: Se a região que giramos para gerar um sólido não atingir ou cruzar o eixo de revolução, o sólido resultante terá um orifício no meio. As secções transversais perpendiculares ao eixo de revolução serão anéis e não discos. As dimensões de um anel típico são (Figura 18):

Raio externo: $R(x)$ e Raio interno: $r(x)$

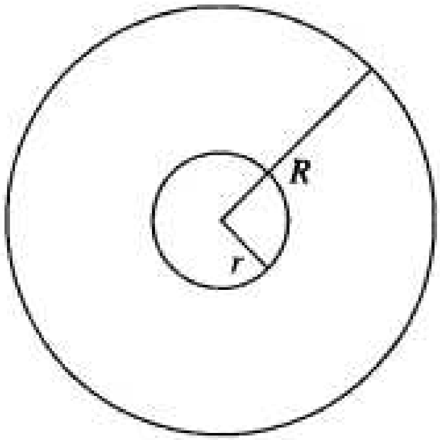
A área do anel é:

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

De acordo com a definição de volume, temos:

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - r(x)^2) dx$$

Figura 18: A área de um anel é $\boldsymbol{\pi R^2} - \boldsymbol{\pi r^2}$



Fonte: THOMAS, George B. (2002)

Exemplo 5.9 Secção transversal em forma de anel (rotação em torno do eixo y): A região compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$ no primeiro quadrante gira em torno do eixo y para gerar um sólido. Determine o volume do sólido.

Solução:

Passo 1: Desenhe a região e esboce um segmento de reta através dela perpendicularmente ao eixo de revolução, nesse caso o eixo y (ver Figura 19).

Passo 2: A reta e a parábola se cortam em $y = 0$ e $y = 4$, portanto os limites de integração são $c = 0$ e $d = 4$.

Passo 3: Os raios da arruela gerada pelo segmento de reta são $R(y) = \sqrt{y}$, $r(y) = \frac{y}{2}$ (Figuras 19 e 20).

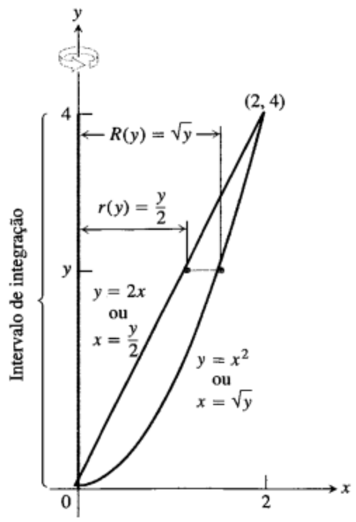
Passo 4: Integre para determinar o volume:

$$V = \int_c^d \pi([R(y)^2] - [r(y)^2])dy$$

$$= \int_0^4 ([\sqrt{y}]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2)dy$$

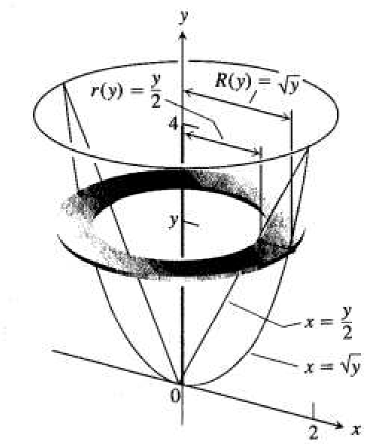
$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi \; u.c.$$

Figura 19: A região, os limites de integração e os raios do exemplo.



Fonte: THOMAS, George B. (2002)

Figura 20: A arruela gerada pelo segmento de reta da figura anterior.



Fonte: THOMAS, George B. (2002)

5.2.4 Área de uma superfície de revolução

Definição 5.5: Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, onde f e f' são funções continuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. A área da superfície de revolução S, gerada pela rotação da curva C ao redor do eixo dos x, é definida por:

$$A = \lim_{máx\Delta x_i \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\sqrt{1 + [f'(d_i)]^2}\Delta x_i \qquad (5.1)$$

A soma que aparece em (5.1) não é exatamente uma soma de Riemann da função $f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, pois aparecem dois pontos distintos c_i e d_i. No entanto, é possível mostrar que o limite em $(**)$ é a integral desta função. Temos, então:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad (5.2)$$

Observamos que, se ao invés de considerarmos uma curva $y = f(x)$ girando em torno do eixo dos x, considerarmos uma curva $x = g(y), y \in [c, d]$ girando em torno do eixo dos y, a área será dada por:

$$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

Exemplo 5.10: Calcule a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo dos x, da curva dada por $y = 4\sqrt{x},\ \frac{1}{4} \leq x \leq 4$.

Solução: Temos:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$= 2\pi \int_{1/4}^{4} 4\sqrt{x}\ .\ \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 8\pi \int_{1/4}^{4} \sqrt{x+4} dx$$

$$= 8\pi \frac{(x+4)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{1/4}^{4}$$

$$= \frac{16\pi}{3}\left(8^{3/2} - \left(\frac{17}{4}\right)^{3/2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(128\sqrt{2} - 17\sqrt{17}\right) u.a.$$

5.5 Modelagem no Estudo de Integrais Definidas

O exemplo a seguir, extraído da literatura (Bassanezi, 2002) ilustra o processo de modelagem que se dá na evolução do conceito de Integral Definida empregada para resolver o problema de calcular o volume de uma maçã.

5.5.1 Calculando o Volume de uma Maçã.

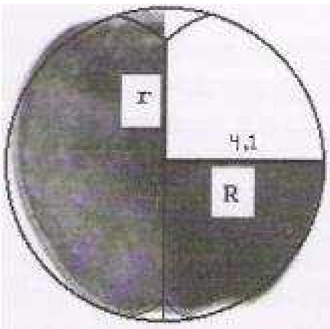
Problema: Como calcular o volume de uma maçã?

A princípio no livro o autor vem falando sobre a plantação das mudas, escolha de terreno, colheitas, entre outros, no nosso caso só iremos falar sobre a aplicação utilizando o cálculo.

Então vamos aos estudos, primeiro precisamos saber como calcular o volume da maçã.

1. Utilizando a fórmula da esfera.
   - Perímetro: $P = 2\pi R = 24cm \Rightarrow r = 3.8197cm$ (medido com o auxilio de um barbante que circula a maçã (Figura 21).
   - Volume: $V = 4\pi r^3/3$

Figura 21: Medindo a circunferência da maçã com um barbante.



Fonte: Bassanezi,2006, pg. 238.

Aplicando na fórmula do volume temos:

$$V_{maçã} = 4 \times 3.1416 \times \frac{(3.8197)^3}{3} = 233.44cm^3$$

Cortando-se a mação ao meio (no sentido longitudinal), mede-se o raio r do círculo inscrito na face plana da maçã: $r = 2.3cm$, e obtem-se um valor mínimo para o volume da maçã:

$$V_{min} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 50.96cm^3$$

Tomando a média, entre o máximo (anterior) e este mínimo, tem-se:

$$V_{maçã} \approx \frac{233.44 + 50.96}{2} = 141.72cm^3$$

2. Fatiando a maçã:
   i. Retângulos internos:

$$V = \sum_{i=1}^{19} \pi\Delta(r_i)^2 = 176.93cm^3$$

Usamos Δ= $0.2cm$ e $\frac{3.8}{0.2} = 19$ fatias.

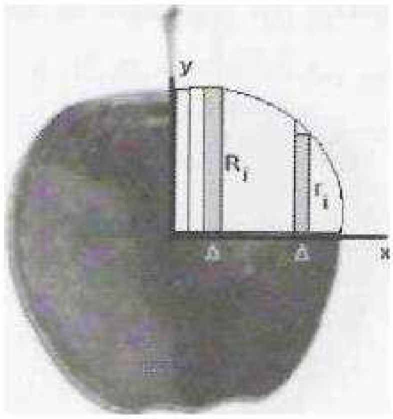
   ii. Retângulos externos:

$$V = \sum_{i=1}^{19} \pi\Delta(r_i)^2 = 188.03cm^3$$

Volume total aproximadamente $\frac{176.93+188.03}{2} = 182.48cm^3$.

3. Usando integração
   i. Aproximando a configuração do corte central da maçã por uma circunferência.

Figura 22: Fatiando a maçã.



Fonte: Bassanezi,2006, pg. 240.

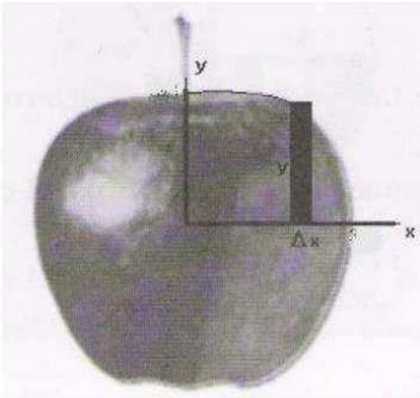
O volume de cada fatia é dado por

$$V_i = \pi y^2 \Delta x$$

Volume total:

$$V = 2\int_0^{3.8} \pi y^2 dx = 2\pi\,(-\frac{x^3}{3} + 14.44)\Big|_0^{3.8} \Rightarrow V = 229.85147 cm^3$$

Figura 23: Usando a integração para calcular o volume da maçã.



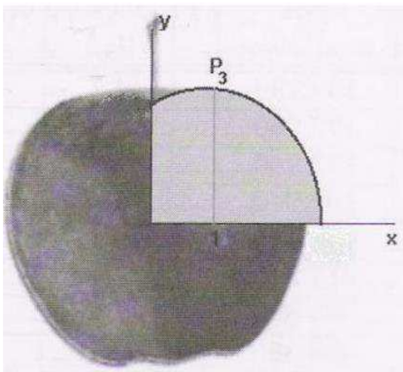
.

Fonte: Bassanezi,2006, pg. 240.

ii. Aproximando por parábola $y = ax^2 + bx + c$
Pontos dados da curva: $P_1 = (3.8{,}0), P_2 = (0{,}2.1)$ e $P_3 = (1{,}3)$
P_2 nos dá $y = ax^2 + bx + 2.1$. P_1 e P_3 fornecem o sistema

$$\begin{cases} 14.44a + 3.8b = -2.1 \\ a + b \qquad\quad = 0.9 \end{cases}$$

Figura 24: Aproximando o formato da maçã por uma parábola



Fonte: Bassanezi,2006, pg. 241.

De onde $a = -0.5188$ e $b = 1.4188$ e, portanto, $y = -0.5188x^2 + 1.4188x + 2.1$ usando integral, podemos determinar o volume do sólido de revolução da parábola ("aproximadamente" metade do volume da maçã). Assim,

$$V_{maçã} = 2\pi \int_0^{3.8} (-0.5188x^2 + 1.4188x + 2.1)^2 dx = 142.404cm^3$$

Observação 5.1: Os modelos matemáticos empregados para a avaliação do volume de uma maçã obedecem a uma sequência gradual em termos de complexidade conceitual. Isto não implica necessariamente que o grau de aproximação do resultado obtido seja proporcional a complexidade do modelo. Neste caso especifico, um processo mecânico seria o mais indicado para a avaliação, tanto em termos de simplicidade como de precisão: Mergulha-se a maçã em um recipiente cheio de água e o volume do liquido deslocado é igual ao volume da maçã.
Neste caso, o volume encontrado foi de $179cm^3$.

Essa aplicação que acabamos de ver foi retirada do livro Bassanezi, utilizando os mesmos dados que está descrito no livro. A partir dessa aplicação, que foi utilizada como um exemplo, vamos agora calcular o volume e a área de uma laranja, utilizando de alguns métodos do que o autor utilizou para calcular o volume da maçã.

5.5.2 Modelando o Volume de uma Laranja.

- 1º Método (Experimento):

Utilizando um processo mecânico pode-se obter o volume da laranja: Mergulha-se a laranja num recipiente cheio de água e o volume do líquido deslocado corresponde ao volume da laranja. Materiais utilizados (Figura 25):

1. Uma laranja;
2. Um recipiente graduado;
3. Água.

Figura 25: Materiais utilizados

Fonte: Autora

Antes de colocar a laranja dentro do recipiente iremos medir a quantidade da água que tem dentro do recipiente (Figura 26), que no caso foi:$200ml$.

Figura26: Quantidade de água no recipiente.

Fonte: Autora

Após colocar a laranja dentro do recipiente com água, nota-se que a água se deslocou, e novamente iremos ver quantos ml está marcado, que no caso foi $425ml$ (Figura 27). Portanto, temos uma diferença de $225cm^3$, correspondente ao volume da laranja.

Figura27: Laranja imergida no recipiente com água.

Fonte: Autora

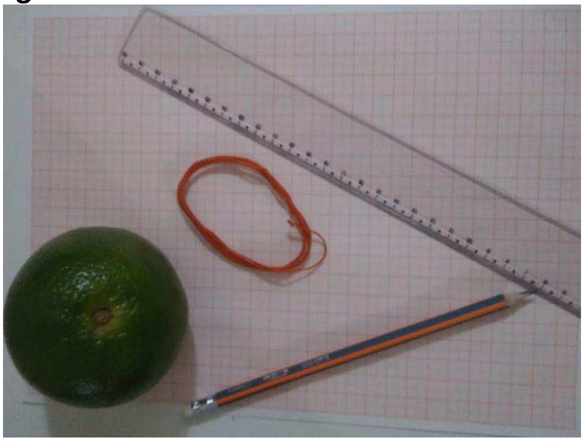
- 2º Método: Utilizando o Volume da Esfera:

Agora, vamos avaliar o volume de uma laranja empregando modelos matemáticos. Para tanto, os materiais utilizados são (Figura 28):

1. Uma laranja;
2. Uma régua;
3. Um pedaço de barbante;

4. Uma caneta;
5. Folhas milimetradas.

Figura 28: Materiais utilizados



Fonte: Autora

Envolvendo a laranja (ainda inteira) em um barbante obtem-se uma circunferência. Para isso, tomamos a medida do barbante e, com o auxílio da régua, encontra-se o comprimento que foi de $25.1cm$. Mas,

Perímetro: $P = 2\pi r$

Substituindo $25.1cm$ em P, encontra-se o raio:

$$r_{maior} = \frac{P}{2\pi} \Longrightarrow r_{maior} = \frac{25.1cm}{2\pi} \Longrightarrow r_{maior} = 3.994cm.$$

Volume da esfera: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Substituindo os valores temos:

$$V_{máx} = \frac{4\pi(3.994)^3}{3} = 266.87cm^3.$$

Agora, cortando a laranja ao meio, foi utilizado novamente um barbante e a medida foi realizada, sendo que essa medida será interna, ou seja, sem a medida da casca da laranja (Figura 29). Fazendo o mesmo processo que o anterior, colocando o barbante na régua, tem $22.8cm$.

$$r_{menor} = \frac{22.8cm}{2\pi} = 3.6287cm.$$

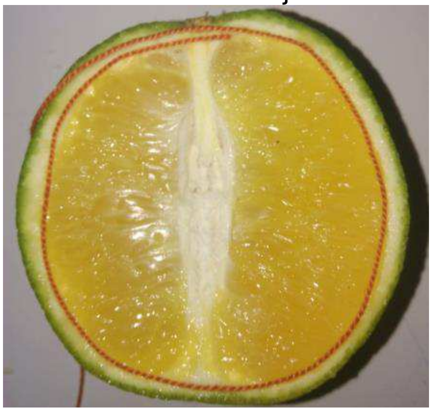
$$V_{mín} = \frac{4\pi(3.6287)^3}{3} = 200.144cm^3.$$

Logo, o volume da laranja é:

$$V_{laranja} = \frac{V_{máx} + V_{mín}}{2}$$

$$V_{laranja} = \frac{266.87 + 200.144}{2} = 233{,}507cm^3.$$

Figura 29: Medida da laranja interna.



Fonte: Autora

- 3º Método: Utilizando o Método do Disco:

Aproximando a laranja por um sólido de revolução obtido pela rotação da circunferência:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

em torno do eixo x. Isolando y^2 temos:

$$y^2 = r^2 - x^2$$

assim:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

considerando o raio maior $r = 3.994cm$, obtido experimentalmente, tem-se:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$

$$= \pi \int_{-3.9}^{3.9} (3.9)^2 - x^2 dx$$

$$= \pi \times \left[15.21 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3.9}^{3.9}$$

$$= \pi \times \left[\left((15.21 \times 3.9) - \frac{(3.9)^3}{3} \right) - \left(\left(15.21 \times (-3.9)\right) - \frac{(-3.9)^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \times [39.546 - (-39.546)]$$

$$V = 248.475cm^3$$

- 4º Método: Volume da Cunha da Laranja (Método do Disco):

  Temos que:

$$A(x) = (altura)(largura)$$

$$= 2x\sqrt{(3.9)^2 - x^2}cm^2.$$

Os limites de integração vão de $x = 0$ a $x = 3.9$. Integrando para determinar o volume, temos:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^{3.9} 2x\sqrt{(3.9)^2 - x^2}dx$$

vamos chamar $u = (3.9)^2 - x^2$, $\frac{du}{dx} = -2x$, $dx = -\frac{du}{2x}$

fazendo as substituições temos:

$$= \int_0^{3.9} 2x\sqrt{u}\left(-\frac{du}{2x}\right)$$

simplificando:

$$= \int_0^{3.9} -\sqrt{u}du$$

$$= -\frac{u^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{3.9}$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Bigg|_0^{3.9}$$

voltando as substituições:

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{((3.9)^2 - x^2)^3}\Bigg|_0^{3.9}$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{((3.9)^2 - (3.9)^2)^3}\right) - \left(\sqrt{((3.9)^2 - (0)^2)^3}\right)\right]$$

$$= -\frac{2}{3}(0 - 59.319)$$

$$= 39.5479cm^3.$$

Agora vamos fazer uma análise de um dos métodos utilizados no volume da maçã: Pegando o resultado do experimento $225cm^3$ e comparando com o resultado do Método do Disco $248.475cm^3$ temos:

$$248.475cm^3 - 225.00cm^3 = 23.475cm^3$$

$$\frac{23.475cm^3}{225.00cm^3} = 0.10433$$

$$0.10433cm^3 \times 100\% = 10.4333\%$$

Onde 10.4333% é a margem de erro.

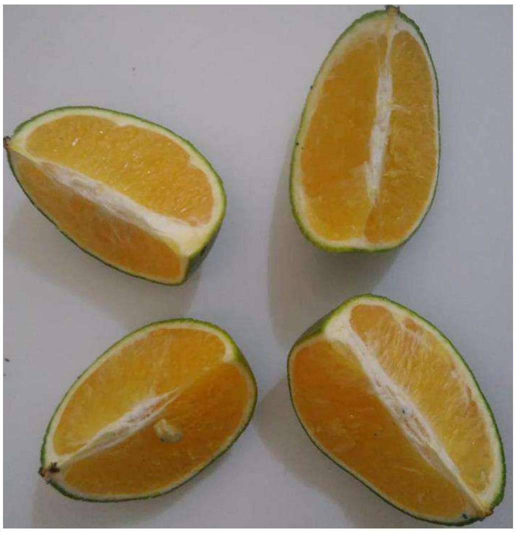
5.5.3 Modelando da Área da Superfície de uma Laranja

Neste caso, vamos novamente aproximar a laranja por uma esfera de raio $r = 3.994cm$.

- 1º Método: Utilizando a folha Milimetrada:

A laranja foi cortada em 4 partes (Figura 30).

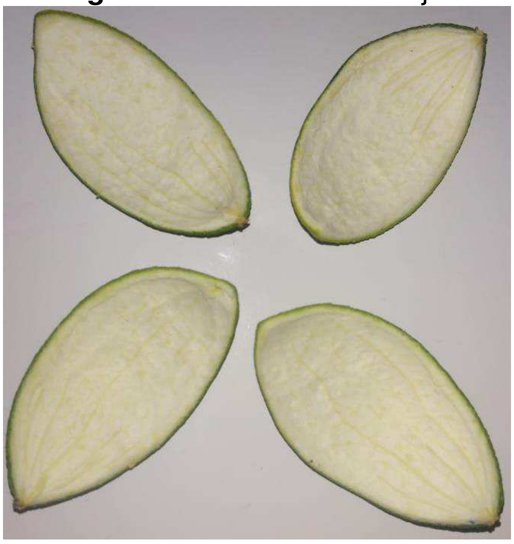
Figura 30: Laranja cortada em 4 partes



Fonte: Autora

Em seguida retira a sua casca (Figura 31).

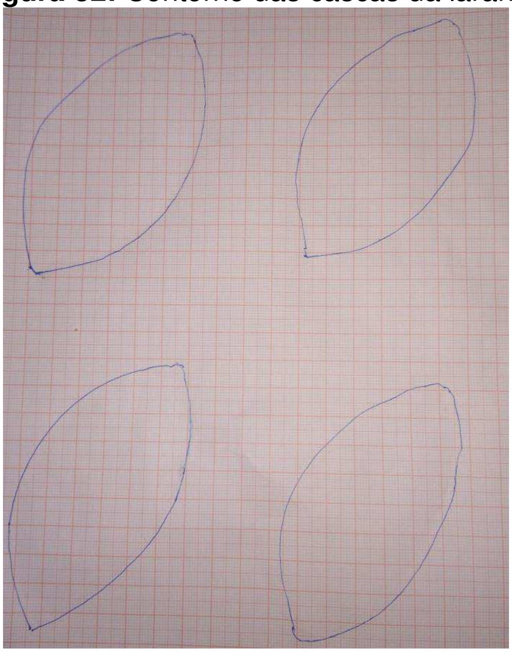
Figura 31: Cascas da laranja.



Fonte: Autora

Em seguida, sobrepomos na folha milimetrada fazendo o contorno de cada pedaço da casca da laranja (Figura 32).

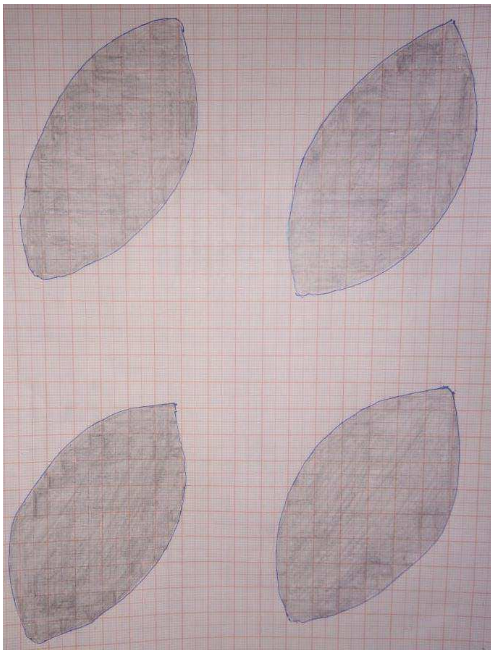
Figura 32: Contorno das cascas da laranja



Fonte: Autora

Após isto, foi feita a contagem dos quadradinhos internos desse desenho (Figura 33).

Figura 33: Contagem dos quadrados internos do contorno.



Fonte: Autora

Após fazer essa contagem temos o seguinte resultado:

$$A_{laranja} = casca_1 + casca_2 + casca_3 + casca_4$$

$$A_{laranja} = 42.36 + 39.62 + 38.95 + 37.0 = 157.93cm^2.$$

- 2º Método: Utilizando a área da superfície da esfera:

$$A = 4\pi r^2$$
$$= 4\pi(3.9)^2$$
$$= 191.134cm^2.$$

- 3º Método: Utilizando Integral Definida:

$$A(x) = \int_a^b f(x).\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \quad (1)$$

onde $f(x) = \sqrt{(3,9)^2 - x^2}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}2x[(3.9)^2 - x^2]^{-\frac{1}{2}} = -x[(3.9)^2 - x^2]^{-1/2}$ e $[f'(x)]^2 = x^2[(3.9)^2 - x^2]^{-1} = \frac{x^2}{(3.9)^2 - x^2}$. Fazendo essas substituições na equação (1), temos:

$$A = 2\pi \int_0^{3.9} \sqrt{(3.9)^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{(3.9)^2 - x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^{3.9} \sqrt{[(3.9)^2 - x^2]\left(1 + \frac{x^2}{(3.9)^2 - x^2}\right)}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^{3.9} \sqrt{[(3.9)^2 - x^2] + x^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^{3.9} \sqrt{(3.9)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^{3.9} 3.9\,dx$$

$$= 2\pi(3.9x)\Big|_{0}^{3.9}$$

$$= 2\pi[(3.9 \times 3.9) - (3.9 \times 0)]$$

$$= 2\pi 15.21$$

$$= 95.56cm^2$$

$$95.56 \times 2 = 191.12cm^2.$$

Agora vamos fazer uma análise de um dos métodos utilizados no volume da maçã: Pegando o resultado do experimento $157.93cm^2$ e comparando com o resultado do Integral Definida $191.12cm^2$ temos:

$$191.12cm^2 - 157.93cm^2 = 33.19cm^2$$

$$\frac{33.19cm^2}{157.93cm^2} = 0.2101$$

$$0.2101cm^2 \times 100\% = 21.0156\%$$

Onde 21.0156% é nossa margem de erro.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora os estudos de Newton e Leibniz tenham sido feito em épocas diferente e não tiveram acesso um ao outro, eles chegaram ao mesmo conceito sobre o Cálculo Diferencial e Integral, sendo que, Leibniz concretizou primeiro essa descoberta, além de formalizar o símbolo da integral.

A Modelagem Matemática mostra como podemos transformar um estudo que pode ser de difícil entendimento para uma forma melhor de ser vista ou uma forma mais concreta para a compreensão dos alunos. A Modelagem Matemática no ensino de cálculo faz com que o aluno desperte o seu interesse em buscar novos meios para solucionar os problemas estudados, problemas estes, que podem ser eles relacionados com seu dia-a-dia ou não.

A partir das aplicações foi possível concluir que o uso da modelagem matemática para o ensino do cálculo de integrais pode ser bem proveitoso, pois através de vários métodos que foi utilizado para calcular o volume e a área da laranja, mesmo antes da integral, pode-se ter uma noção do resultado, e após o uso da integral fazer a comparação dos resultados.

No cálculo do volume da laranja, baseamos no experimento da imersão da laranja, $225cm^3$, após ver os outros resultados utilizando formulas notamos uma pequena diferença de aproximadamente $25cm^3$ a mais.

No cálculo da área da laranja, baseamos no experimento do contorno da casca na folha milimétrica, onde chegamos ao resultado de $157.93cm^2$, após ver os resultados dos outros métodos que foram utilizados formulas e integral vemos que a diferença é de aproximadamente $62cm^2$ a menos e $35cm^2$ a mais, neste caso, essa diferença não quer dizer que o resultado esteja errado, pois vamos levar em conta que, na folha milimétrica podemos considerar alguns quadradinhos incompletos a mais ou a menos, onde seu resultado final não pode ser considerado 100%.

Portanto, podemos considerar que o uso da modelagem matemática no ensino do cálculo é de suma importância, pois mostra que outros métodos além da integral podem ajudar a encontrar resultados.

7. REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de, SILVA, Karina Pessôa da, VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. Edição: 1, 2ª reimpressão. São Paulo: contexto, 2016.

ANDRADE, Mirian Maria. **Ensino E Aprendizagem De Estatística Por Meio Da Modelagem Matemática**: Uma Investigação Com O Ensino Médio. Rio Claro - SP. 2008.

ANDRADE, M.M. I**ntrodução a Metodologia do Trabalho Científico: Elaboração de trabalhos na graduação**; 10. ed. São Paulo. Atlas, 2010. Atlas, 2006.

ARAUJO, J. de L. **Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos**. Tese de Doutorado, Unesp, IGCE, Rio Claro, 2002, 173p.

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática**: as discussões dos alunos. 2002. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP-Rio Claro, 2002.

BADIOU. A. **Sobre o Conceito de Modelo. Librairie François Maspero**, Paris, Editorial Estampa, Lda., Lisboa, 1972

BARBOSA, J.C. **Modelagem Matemática em cursos para não-matemáticos**. In: Disciplinas Matemáticas em cursos superiores, CURY, H.N. (org), EDIPUCRS, Porto Alegre, 2004, pp 85-110

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem matemática e os futuros professores. **Reunião Anual da ANPED**, v. 25, 2002.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2001. 1 CD-ROM

BARBOSA, A. C. M. **"Uma Introdução ao Estudo de Funções Utilizando Softwares Educativos"**. *Boletim Gepem*, Rio de Janeiro: Seropédica, Fev-Jul, n. 42, 2003.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2001. 1 CD-ROM

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. & FERREIRA, JR, W. *"Equações diferenciais com aplicações"*. São Paulo: Harbra, 1988.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Edição: 3. São Paulo: contexto, 2006.

BEAN, D. *"O que é modelagem matemática?"* In: Educação Matemática em Revista. São Paulo, SBEM. ano 8, n. 9/10, p. 49-57, abril, 2001

BELTRÃO, Maria Eli Puga et al. Ensino de cálculo pela modelagem matemática e aplicações: teoria e prática. 2009.

BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N. *"Modelagem matemática no ensino".* São Paulo: Contexto. 2000.

BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade no Ensino de Matemática na Engenharia: uma proposta metodológica e curricular**, Tese de Doutorado (Doutorado em Engenharia de Produção) UFSC, SC, 1997, 250p

BIEMBENGUT, MARIA SALLET E HEIN, NELSON. **Modelagem matemática no ensino** – 4ª ed – São Paulo: Contexto, 2005.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Sobre Modelagem Matemática do Saber e seus Limites. In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAUJO, J.L. (orgs). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007, p. 33-47.

BIEMBENGUT, M. S.. **Modelação matemática como método de ensino - aprendizagem de matemática em cursos de 1. e 2. graus.** 1990. 210 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1990

BLUM, W. & NISS, M. "**Applied Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction". *Educational Studies in Mathematics, Dordrecth***, v. 22, n.1, 1991

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. **Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas.** Revista de Educação Matemática da SBEM-SP, [São José do Rio Preto], n. 3, 1997.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
BURAK, D. **Modelagem Matemática**: ações e interações no processo de ensinoaprendizagem. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BURAK, D. **Modelagem Matemática**: uma metodologia alternativa par ao ensino da matemática na 5a . série. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1987.

CALDEIRA, A. D. (2009). **Modelagem matemática: um outro olhar**. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n. 2.

CARAÇA, B.J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa, Gradiva, 1998

CARVALHO. J. P. **O Cálculo na Escola Secundária** – Algumas Considerações Históricas.Cadernos Cedes 40, 1996.

CIPRIANO, T. S.. **Modelagem Matemática como Metodologia no Ensino Regular**: estratégias e possibilidades. 55p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de ciências exatas – ICE, Departamento de Matemática - DEMAT, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2013.

D’AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e Debates. SBEM. Ano II**, v. 2, 1989.

D'AMBROSIO, U. **Da Realidade à Ação:** reflexões sobre educação e matemática. 2. ed. São Paulo: Unicamp, 1986

DE ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; FATORI, Luci Harue; SOUZA, Luciana Gastalfi Sardinha. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. **Revista Ciência e Tecnologia**, v. 10, n. 16, 2010.

DINIZ, L.N., **O Papel das Tecnologias da Informação e Comunicação nos Projetos de Modelagem Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP/Rio Claro, 2007.

DÖR, Raquel Carneiro. **Análises de aprendizagens em cálculo diferencial e integral**: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira. 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FERREIRA, D. H.L. **O Tratamento de Questões Ambientais através da Modelagem Matemática. Um Trabalho com Alunos do Ensino Fundamental e Médio.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESPRio Claro, 2003.

FULINI, Márcio Antônio. **Historia do cálculo diferencial e integral**. 2016

FLEMMING, Diva Marilia, GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**. Edição: 6. Editora: Prentice Hall Brasil. 2006.

FLORIANI, I. A.. **A Educação Matemática no Processo de Formação do Professor das Séries Iniciais.** Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Regional de Blumenau. Blumenau, 1997.

FRANCHI, R.H. **A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia.** Dissertação de Mestrado, Unesp, Rio Claro, 1993, 148p.

GAYO Jairo. **Fundamentos e história da matemática.** Indaial: Uniasselvi, 2010.

GAZZETA, M. **A Modelagem como Estratégia de Aprendizagem na Matemática em Cursos de Aperfeiçoamento de Professores.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

GRANGER, G. G. **"A razão".** 2ª ed. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1969
HIGINO. H. H. in IEZZI, G. et al. **Matemática** – 3ª série 2º Grau. 8.ed. São Paulo : Atual, 1990, p. 172.

JACOBINI, O.R. **A Modelação Matemática Aplicada no Ensino de Estatística em Cursos de Graduação.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP-Rio Claro, 1999.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1**. Funções de uma variável. Ed. 9. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

MÜLLER, I. **Mapeamento da Modelagem Matemática no Ensino Catarinense**. 128f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pós-Graduação em Educação. Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, SC, 2005.·.

MÜLLER, M. C.. **Modelos matemáticos no ensino da matemática**. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1986

MAGNUS, Maria Carolina Machado et al. **Modelagem matemática na educação matemática brasileira: histórias em movimento**. 2018.

MARTINS, E. A.. **Modelagem Matemática**: uma proposta metodológica para tornar a aula espaço de problematização, pesquisa e construção. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Pós-Graduação em Educação. Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2009.

MEYER, J. F. da C. A. **Modelagem Matemática: do fazer ao pensar**. Anais do VI ENEM, 1998, Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

MONTEIRO, **A. O ensino de matemática para adultos através do método Modelagem Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1991.

NASCIMENTO, Ross Alves do. **Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções**. 2007.

PIEHOWIAK, Ruy. **Equações diferenciais**. Indaial: Uniasselvi, 2008.

SOUSA, E.G.; BARBOSA, J.C. **Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na Modelagem Matemática**. Zetetiké- FE/Unicamp. v. 22, n. 41, 2014

SPINA, Catharina de Oliveira Corcoll. **Modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o Ensino Médio.** 2002.

THOMAS, George B. **Cálculo**. Volume 1. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2002.

VILLARREAL,M. **O pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias informáticas**. 1999, Tese de Doutorado (Doutorado em Educação Matemática), UNESP- RC.