

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS**

**Transferência de Calor e Massa no Interior
de Sólidos com Forma Esferoidal Prolata
via Termodinâmica dos Processos
Irreversíveis**

**Autor: Vital Araújo Barbosa de Oliveira
Orientador: Antonio Gilson Barbosa de Lima**

Campina Grande, Abril de 2006.
PB - Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS

20 06 06 2808

**Transferência de Calor e Massa no Interior
de Sólidos com Forma Esferoidal Prolata
via Termodinâmica dos Processos
Irreversíveis**

Autor: Vital Araújo Barbosa de Oliveira
Orientador: Antonio Gilson Barbosa de Lima

Curso: Doutorado em Engenharia de Processos
Área de Concentração: Processos Térmicos e de Separação

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Processos.

Campina Grande, Abril de 2006.
PB – Brasil



S586e Silva Neto, Augusto Francisco da
Estudo das vulnerabilidades agro-ambientais frente aos eventos ENOS e a construção social dos riscos em municípios do Cariri Ocidental - Paraíba : uma análise comparativa / Augusto Francisco da Silva Neto. - Campina Grande, 2004. 205 f. : il.

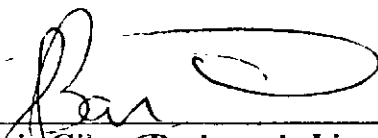
Tese (Doutorado em Recursos Naturais) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

1. Eventos ENOS 2. Impactos 3. Degradação Ambiental 4. Agropecuária - Eventos ENOS 5. Geoprocessamento 6. Tese I. Barbosa, Marx Prestes II. Universidade Federal de Campina Grande - Campina Grande (PB) III. Título

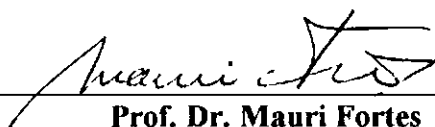
CDU 502.58:504.03/05(043)

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA TESE DE DOUTORADO DE
VITAL ARAÚJO BARBOSA DE OLIVEIRA APRESENTADA AO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS
DO CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DE CAMPINA GRANDE.

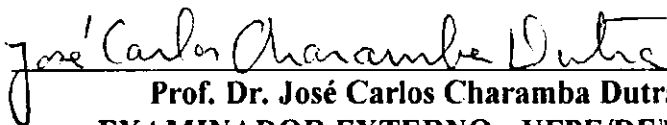
Tese de Doutorado **aprovada** em 20 de Abril de 2006.



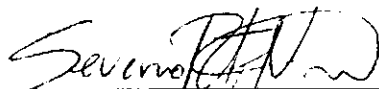
Prof. Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima
ORIENTADOR - UFCG/CCT/UAEM



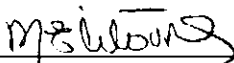
Prof. Dr. Mauri Fortes
EXAMINADOR EXTERNO - UNA



Prof. Dr. José Carlos Charamba Dutra
EXAMINADOR EXTERNO - UFPE/DEMEC



Prof. Dr. Severino Rodrigues de Farias Neto
ORIENTADOR - UFCG/CCT/UAEQ



Profa. Dra. Maria Elita Martins Duarte
EXAMINADORA INTERNA- UFCG/CTRN/UAEAg

Campina Grande, Abril de 2006.
PB, Brasil

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Luis Barbosa de Oliveira (in memorian) e Terezinha Anselmo de Oliveira; às minhas irmãs, e com amor e carinho, à minha esposa Adriana de Almeida Silva Oliveira e meus amados filhos Vallesk Stephany e Victor Luckas Almeida de Oliveira.

AGRADECIMENTOS

À Deus, o todo poderoso, por ter me concedido tanta coragem e perseverança durante o curso.

Ao professor Dr. Antonio Gilson Barbosa de Lima, pela grande dedicação e estímulo para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, esposa, filhos e irmãs pelo incentivo em todos os momentos de minha vida.

À CAPES pelo suporte financeiro concedido.

À Agência Nacional de Petróleo, FINEP, UFCG e a PETROBRÁS pela utilização dos laboratórios computacionais.

Aos professores do curso de Doutorado em Engenharia de Processos, os quais foram íntegros e literalmente competentes para transmitir o saber que se fez necessário à minha profissionalização.

Aos demais colegas de doutorado João Evangelista, Pedro Ronaldo, Yoge, Fabiana e Vilma pelo auxílio e apoio, em especial a Rossini Farias Reis (in memoriam).

À todos que colaboraram direta ou indiretamente para conclusão deste trabalho.

*Nenhum caminho é longo demais
quando um amigo nos acompanha.*

Autor desconhecido

SUMÁRIO

1	Introdução.....	1
2	Revisão bibliográfica.....	4
2.1	O Processo de secagem.....	4
2.1.1	Considerações gerais.....	4
2.1.2	Períodos de taxa de secagem e aquecimento do sólido.....	5
2.1.3	Teores de umidade.....	7
2.1.4	Mecanismos de transporte de umidade.....	8
2.1.5	Teorias de secagem.....	8
2.1.6	Encolhimento.....	11
2.1.7	Secagem Intermitente.....	14
2.2	Modelagem da secagem.....	16
2.2.1	Modelos difusivos.....	17
2.2.2	Modelos fundamentados na Termodinâmica dos processos irreversíveis.....	20
2.2.3	Modelos fundamentados numa análise concentrada.....	21
2.3	Trigo: Aspectos históricos, mercadológicos, científicos e tecnológicos.....	23
2.3.1	Histórico e mercado.....	23
2.3.2	Científico e tecnológico.....	25
3	Modelagem Matemática.....	30
3.1	Teoria de Fortes e Okos.....	30
3.2	A equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esféricas prolata.....	42
3.3	Resolução numérica das equações governantes.....	53
3.4	Modelos difusivos.....	68

3.4.1 Modelo I – Transferência simultâneo de calor e massa com condição de equilíbrio na superfície do material, sem encolhimento.....	68
3.4.2 Modelo II – Transferência simultâneo de calor e massa com condição de contorno convectiva na superfície, sem encolhimento.....	75
3.4.3 Modelo III – Transferência simultâneo de calor e massa com condição de contorno convectiva na superfície, com encolhimento.....	83
3.5 Aplicação da metodologia a secagem do grão de trigo.....	86
4. Resultados e discussões.....	90
4.1. Refinamento de malha e tempo.....	90
4.2 Resultados obtidos com o modelo I.....	93
4.3 Resultados obtidos com o modelo II.....	98
4.4 Resultados obtidos com o modelo III.....	103
4.5 Estimativa dos coeficientes de transporte (K_j ; K_v e h_m).....	110
5. Conclusões e Sugestões para futuros trabalhos.....	115
5.1 Conclusões finais.....	115
5.2 Sugestões para futuros trabalhos.....	116
Referências Bibliográficas.....	118

ABSTRACT

OLIVEIRA, Vital Araújo Barbosa de, *Transfer of heat and mass inside solids with prolate spheroidal solids through thermodynamics of the irreversible processes*, Campina Grande: Doutorado em Engenharia de Processos. Universidade, Federal de Campina Grande, 2006. 150 p. Tese (Doutorado).

A great number of studies have been led to analyze the phenomenon of transfer of heat and mass during the drying process. Some authors consider the external conditions of the air on the process, while others consider the internal conditions to the solid with emphasis to the mechanisms of humidity movement and your effects on the same. Due to your great importance, numerous mathematical models have been proposed to describe the humidity loss and heating of the solid during the drying, however few are the works that incorporate the simultaneous phenomena of transport heat and mass (l liquid and vapor) applied to solids ellipsoid. In this sense, this work has as objective develops mathematical models for the description of the changes of energy and mass during the drying process, in bodies with geometry prolate spheroidal, based on the thermodynamics of the irreversible processes. All the equations differentiate rulers they are written in the system of coordinate's prolate spheroid σ and solved numerical through numeric method of the finite volumes. As application the methodology was used to describe the drying of wheat grain. Results of the humidity tenor, temperature, liquid flow and vapor during the drying process were found. Analyses are presented on the effects of the shrink and of the coefficients of transports J_l , J_v and h_m . The obtained results are consistent and the presented model can be used to solve problems of transfer of heat and mass (liquid and vapor) simultaneous in agricultural products with the high humidity tenor, as well as geometry that varies from a circular disk to a sphere, including the prolate spheroidal.

Key Words: Drying, simulation, wheat, prolate spheroidal

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Cinética e aquecimento do sólido durante o processo de secagem.....	06
Figura 2.2	Seções longitudinal e transversal de um grão trigo.....	26
Figura 3.1	Características de um esferóide prolato sólido.....	43
Figura 3.2	Sistema de coordenadas esferoidais prolato.....	45
Figura 3.3	Configuração geométrica do problema físico.....	55
Figura 3.4	Ponto na superfície do corpo.....	64
Figura 3.5	Esquema mostrando a posição da interface i entre os pontos P e E.....	67
Figura 3.6	Diagrama do algoritmo computacional	74
Figura 3.7	Encolhimento do sólido esferoidal prolato durante o processo de difusão.....	86
Figura 4.1	Refinamento de malha para $\Delta t=1s$	91
Figura 4.2	Refinamento do tempo para uma malha 20x20 pontos nodais.....	91
Figura 4.3	Malha numérica para um sólido esferoidal prolato $L_2/L_1=2,08$	92
Figura 4.4	Comparação entre os teores de umidade médias em função do tempo de secagem neste trabalho e os reportados por Fortes et al (1981).....	93
Figura 4.5	Temperatura média de um grão de trigo ao longo do tempo (modelo I).....	94
Figura 4.6	Fluxo de líquido na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo I).....	94
Figura 4.7	Fluxo de vapor na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo I).....	95
Figura 4.8	Relação J_v/J_1 na superfície do grão de trigo em função do tempo de secagem a uma temperatura de 87,8°C (modelo I).....	95
Figura 4.9	Fluxo total de massa na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C(modelo).....	96

Figura 4.10	Distribuição do teor de umidade (base seca) dentro de um grão de trigo a 87,8°(modelo I).....	97
Figura 4.11	Distribuição de temperatura (K) no interior do grão de trigo a 87,8°(modelo I).....	98
Figura 4.12	Comparação entre os teores de umidade médias em função do tempo de secagem obtidos com o modelo II e os reportados por Fortes et al (1981)...	99
Figura 4.13	Temperatura média de um grão de trigo ao longo do tempo (modelo II).....	99
Figura 4.14	Fluxo de líquido na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo II).....	100
Figura 4.15	- Fluxo de vapor na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo II).....	100
Figura 4.16	Relação J_v/J_l na superfície do grão de trigo em função do tempo de secagem a uma temperatura de 87,8°C (modelo II).....	101
Figura 4.17	Fluxo total de massa na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C(modeloII).....	101
Figura 4.18	Distribuição do teor de umidade (base seca) dentro de um grão de trigo e a 87,8°C (modelo II).....	102
Figura 4.19	Distribuição de temperatura (K) no interior do grão de trigo a 87,8° (modelo II).....	103
Figura 4.20	Comparação entre os teores de umidade médio em função do tempo de secagem obtidos com o modelo III e os reportados por Fortes <i>et al</i> (1981).....	104
Figura 4.21	Temperatura média de um grão de trigo ao longo do tempo (modelo III).....	104
Figura 4.22	Fluxo de líquido na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo III).....	105
Figura 4.23	Fluxo de vapor na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo III).....	105
Figura 4.24	Relação J_v/J_l na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo III).....	106
Figura 4.25	Fluxo total de massa na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo III).....	106

Figura 4.26	Distribuição do teor de umidade (base seca) dentro de um grão de trigo e a 87,8°C (modelo III).....	107
Figura 4.27	Distribuição de temperatura (K) no interior do grão de trigo a 87,8°C (modelo III).....	108
Figura 4.28	Evolução da malha numérica durante o encolhimento do grão de trigo (razão de aspecto $L_2/L_1=2,08$), secando a 87,8°C(modelo III).....	109
Figura 4.29	Difusividade de massa durante a secagem de grãos de trigo na temperatura de 87,8°C.....	112
Figura 4.30	– Umidade relativa do ar durante a secagem de grãos de trigo na temperatura de 87,8°C.....	112
Figura 4.31	– Condutividade de líquido durante a secagem de grãos de trigo na temperatura de 87,8°C.....	113
Figura 4.32	– Condutividade de vapor durante a secagem de grãos de trigo na temperatura de 87,8°C.....	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Evolução do consumo per capita de trigo no Brasil.....	24
Tabela 2.2 - Consumo mundial per capita de pão (kg/hab/ano).....	24
Tabela 3.1 - Condições do ar de secagem e do grão do trigo.....	86
Tabela 4.1 – Comparação da condutividade de líquido e vapor e erro residual.....	110
Tabela 4.1 – Difusividade de umidade de produtos agrícolas para várias temperatura e geometrias.....	114

NOMENCLATURA

Letras Latinas

a - conteúdo volumétrico de ar em meio poroso, $m^3 m^{-3}$;	[-]
a' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
A_E - coeficiente da Equação 3.81a	[-]
A_i - constantes $i=0, 1, 2$	[-]
A_j - constantes $i=0, 1, 2$	[-]
A_p - coeficiente da Equação 3.81a	[-]
A_o - constante	[-]
A_p° - coeficiente da Equação 3.81a	[-]
A_w - coeficiente da Equação 3.81a	[-]
b' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
c - calor específico	[J / kg / K]
C - Calor de adsorção	[J / kg]
c_b - calor específico do meio úmido	[J / kg / K]
h_w - calor diferencial específico de sorção	[J/kg]
h_{fg} - calor latente específico de vaporização	[J / kg]
c_p - calor específico do produto	[J / kg / K]
c_l - calor específico do líquido	[kgK]

c_v - calor específico do vapor	[kg K]
c' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
D - coeficiente de difusão	[m ² / s]
d - coeficiente esferoidal	[-]
D_{atm} -coeficiente de difusão molecular da água no ar,	[m ² / s]
d' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
D_{ij} -coeficientes da Equação. 3.79a-h	[-]
D_p – diâmetro da esfera equivalente	[mm]
$\partial M / \partial t$ - taxa de difusão	[1 / s]
e,w,s,n - faces dos pontos nodais	[-]
e' - coeficiente das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
exp - exponencial	[-]
\vec{F}_k -forças externas no componente k;	[-]
f' - coeficientes das Equações 3.59a-f e 3.60a-f	[-]
\hat{f}_1 - fator de interpolação	[-]
\vec{g} - aceleração da força gravitacional	[m / s ²]
H - umidade relativa	[%]
h_c - coeficiente de transferência de calor	[W/m ² /K]
h_{fg} - calor latente de vaporização da água livre	[J / kg]
h_m - coeficiente de transferência de massa	[m / s]
h_w - calor diferencial específico de umidificação	[J / kg]
h_k - entalpia na componente k	[J / kg]
i, j - posição do ponto nodal na malha	[-]
J - jacobiano da transformação	[-]
J_p - jacobiano da transformação do produto	[-]
J_u -fluxo de energia;	[-]
\vec{J}_q - fluxo de calor	[W]
J_k -fluxo de massa dos componentes k em relação ao centro de gravidade;	[-]
k - condutividade térmica	[W / m / K]
k_i, k_j - constantes $i=0, 1, 2, \dots, n; j= 1, 2, \dots, n$	[-]

K_{ij} - $i=j$ coeficientes fenomenológicos; $i \neq j$ coeficientes combinados	[-]
k_l - condutividade térmica de líquido	[W/m/K]
k_T - condutividade térmica aparente efetiva na ausência de transporte de massa	[W / m / K]
k_t - condutividade térmica do grão.	[W / m / K]
k_v - condutividade térmica de vapor	[m ² / s]
L - comprimento focal	[m]
L_{ik} - coeficientes fenomenológicos	[-]
L_v - calor específico de evaporação	[J/kg]
L_1, L_2 - dimensões do esferóide prolato	[m]
m - massa	[kg]
M - teor de umidade	[kg / kg]
M''' - termo de geração de massa	[kg / kg/m ³]
\bar{M} - teor de umidade médio	[kg / kg]
M_{ev} - taxa de evaporação de umidade	[kg/m ³ .s]
M^* - razão de umidade	[kg / kg]
N, S, E, W, P - pontos nodais	[-]
$P\Phi$ - termo de pressão	[-]
P, P_v - pressão total, pressão parcial de vapor,	[Pa]
P_o - pressão ambiente	[Pa]
\dot{q} - geração interna de calor	[W/m ³]
r - coordenada radial esférica, raio	[m]
R_v - constante dos gases para o vapor d'água = 462,69 J.kg ⁻¹ .K ⁻¹	[J / kg / K]
R_0 - constante universal dos gases = 8314 J.kg ⁻¹ . mol ⁻¹ .K ⁻¹	[J / kg / mol / K]
S - área superficial do sólido	[m ²]
S_η - área \perp ao fluxo angular de Φ	[m ²]
S_ξ - área \perp ao fluxo radial de Φ	[m ²]
S_ζ - área \perp aos fluxos angular e radial de Φ	[m ²]
S - termo fonte	[-]
S_1^ϕ - termo fonte da massa	[-]
S_2^ϕ - termo fonte do calor	[-]
t - tempo	[s]

T - temperatura	[K]
\bar{T} - temperatura média	[K]
u, v, w - componentes do vetor velocidade	[m/s]
$\hat{U} \hat{V} \hat{W}$ - coeficientes métricos	[-]
V - volume	[m ³]
\bar{X}_i - forças motrizes	[-]
\bar{X}_q - força conjugada associada ao fluxo de calor;	[-]
\bar{X}_k - força conjugada associada a \bar{J}_k ;	[-]
\bar{X}_u - força conjugada associada ao fluxo de energia \bar{J}_u ;	[-]
x, y, z - coordenadas cartesianas	[m]

Letras Gregas

θ - temperatura do produto	[°C]
ρ - densidade (massa específica)	[kg / m ²]
ε - tortuosidade	[-]
α_{ij} - parâmetros	[-]
α - difusividade térmica	[m ² / s]
λ - função esferoidal radial	[-]
Φ - função	[-]
$\Gamma, \Gamma\phi$ - propriedade do material	[-]
η - coordenada angular ($\perp x$)	[-]
λ - função esferoidal angular	[-]
μ, ϕ, ω - coordenadas esferoidais prolato	[-]
μ_q - potencial químico	[J / kg]
θ - temperatura do produto	[°C]
σ - fator de tortuosidade para difusão de gases em meios porosos	[-]
σ - entropia	[-]
τ - função de tempo	[-]
ν_a - viscosidade cinemática do ar	[m ² / s]

υ - coeficiente de gradiente térmico	[-]
μ_k - potencial químico na componente k	[J / kg]
μ_k - viscosidade dinâmica do ar	[Pa.s]
ξ - coordenada radial	[-]
ζ - coordenada angular ($\perp z$)	[-]
∇ - gradiente	[-]
Δ, δ - Variação	[-]

Superescritos

- * - adimensional
- + - tempo posterior
- o - anterior

Subscritos

- a- ar
- abs – absoluta
- b meio úmido
- c - calor
- eq- equilíbrio
- e, w, n, s - faces dos pontos nodais
- ℓ - líquido
- m - massa
- n - convecção natural
- n, m, r, k, p - números inteiros
- o - inicial
- P - ponto nodal P
- p- produto
- ps - produto seco
- s - seco

t - tempo

u - úmido

v - vapor

vs - vapor no estado de saturação

w – água

η ; ζ ; ξ - direção perpendicular ao fluxo.

Siglas

UFCG – Universidade Federal de Campina Grande

CONAB – Companhia Nacional de Abastecimento

USDA - Departamento de Agricultura dos Estados Unidos

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Operações de desidratação ou secagem, assim como, a dinâmica do movimento de umidade em um material biológico são importantes passos nas indústrias químicas e de processamento de alimentos, como também no armazenamento e processamento de grãos e de outros produtos biológicos.

A secagem é um complicado processo que envolve fenômenos de transferência simultânea de calor, massa e momentum, gerando a necessidade de modelos efetivos para simulação do processo. O conhecimento dos mecanismos de movimento de umidade no interior dos materiais é de fundamental importância e permite descrever a migração de umidade na massa de um produto higroscópico. A fim de se modelar processos de secagem, em virtude da não-homogeneidade dos produtos, várias teorias foram propostas para descrever o transporte de umidade e calor em meios capilares porosos.

Para descrever a transferência de umidade dentro do material e explicar os efeitos de certos parâmetros na sua cinética de secagem, é necessário que o transporte de umidade dentro de uma partícula individual do material, seja muito bem representado por um modelo matemático. Sendo assim torna-se necessário inserir ao máximo todos os efeitos dentro dos modelos matemáticos para tornar possível descrever com grande realismo o fenômeno físico, e aumentar consideravelmente a confiabilidade dos resultados obtidos.

Observa-se na literatura uma preferência dos pesquisadores pelos modelos de difusão líquida aplicados na sua maioria a produtos com formas bem conhecidas tais como: esferas, cilindros, paralelepípedos, podendo as condições de contorno na superfície do corpo ser de equilíbrio ou convectiva.

Portanto, existe a necessidade de modelos que envolvam outras geometrias, tais como esferóide prolata e oblato, geometrias bem conhecidas na natureza, por exemplo: banana, casulo do bicho-da-seda, laranja, arroz, trigo, tem forma de um esferóide prolato. Enquanto que lentilha e acerola, são exemplos semelhante a um esferóide oblato (e incorporam o transporte simultâneo de calor, líquido e vapor).

Neste sentido, os modelos que se baseiam na termodinâmica dos processos irreversíveis, propõem que a água move-se em meios capilares porosos, em condições isotérmicas, sob a ação de um gradiente de potencial de transferência de massa. Esse potencial de transferência de massa foi criado por Luikov (1975), por analogia com a força motriz de transferência de calor, o gradiente de temperatura.

Procurando avançar dentro da linha de pesquisa de transferência de calor e massa, este trabalho tem como objetivos:

- Modelar e analisar o fenômeno de difusão de calor e massa (líquido e vapor) simultâneos durante a secagem de sólidos esferoidais prolatos, com e sem encolhimento;
- Apresentar solução numérica para o problema de difusão transiente, em corpos com forma esferoidal prolata, baseando-se no modelo proposto por Fortes e Okos (1982);
- Simular a distribuição do teor de umidade e temperatura no interior de corpos esferoidais prolatos e suas respectivas cinéticas de difusão;
- Aplicar os modelos desenvolvidos à secagem do trigo;
- Analisar o efeito das considerações adotadas em cada modelo sobre coeficientes de transporte;

- Obter correlações para os coeficientes de transportes em função dos parâmetros de secagem.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - O Processo de secagem

2.1.1 - Considerações gerais

Um dos melhores processos utilizados, quando se quer conservar um produto biológico ou químico por um determinado tempo, tem sido a secagem ou desidratação dos mesmos, que consiste na separação parcial de um líquido (geralmente água) da matéria sólida. Pode ser explicado como um processo de transferência de calor e massa, consistindo na remoção de parte da umidade contida no interior do produto por meio de evaporação (Fortes 1982).

A preservação de alguns alimentos, pela evaporação da umidade, permite minimizar o crescimento microbiano e previne o desenvolvimento da maioria das reações bioquímicas que ocorre na presença de umidade. Portanto, essas operações têm tido um grande avanço nas indústrias de alimento e química, como também na estocagem de determinados produtos. Durante o processo de secagem, os sólidos sofrem variações nas suas características químicas, físicas e biológicas, que dependendo da intensidade do efeito, pode ocasionar sua perda ou inutilizá-los para certas funções. Por exemplo, no caso de grãos, as características alimentícias podem ser afetadas e, no caso das sementes, a sua característica germinativa.

A secagem convectiva diferencia-se de outras técnicas de separação, tal como a secagem osmótica, entre outras, pela maneira de como a água é retirada do sólido. Na secagem convectiva, a retirada de moléculas de água se dá pela movimentação do líquido ou vapor de H₂O, graças a uma diferença de pressão parcial do vapor d'água entre a superfície do produto e o ar que o envolve. Em relação aos alimentos, a remoção de água do material deve ser feita até que não afetem de forma violenta suas características físicas, químicas e biológicas, como também suas funções alimentícias.

Na maioria das indústrias, se utiliza no processo de secagem o ar como agente de secagem, este é composto, na sua maioria, por moléculas de oxigênio e nitrogênio. No entanto, este ar pode provocar mudanças nas funções organolépticas do produto, e no caso específico das sementes, durante o processo de secagem, o aparecimento de fissuras e a perda parcial da função germinativa acontecem devido à existência de tensões termo-mecânicas sobre o material. Essas tensões podem ser minimizadas se forem feitas análises da distribuição do teor de umidade e da temperatura no interior do sólido. Portanto, para preservar ao máximo a qualidade final do produto, é necessário um estudo minucioso sobre as propriedades termodinâmicas do ar e o mecanismo de transferência de água do interior do material para superfície.

2.1.2 - Períodos de taxa de secagem e aquecimento do sólido

Diversos produtos biológicos, durante a secagem individual ou em camada delgada após atingir o ponto de maturação fisiológica, apresentam uma perda de umidade a uma taxa constante no período inicial de secagem, seguido por um período de secagem a uma taxa decrescente, conforme ilustra a Figura 2.1a-b.

A secagem à taxa constante pode ser observada em produtos nos quais a resistência interna ao transporte de umidade é menor do que a resistência externa à remoção do vapor de água na superfície do produto para o meio ambiente. Já durante o período de secagem à taxa decrescente, a superfície do produto não se encontra coberta por uma camada fina de umidade, porque a resistência interna ao transporte de água se torna maior do que a resistência externa.

Observa-se na Figura 2.1a, a cinética do teor de umidade médio, onde inicialmente tem-se o teor de umidade inicial a uma taxa de temperatura crescente. Quando acontece uma mudança na taxa de secagem constante (Figura 2.1b), para taxa de secagem decrescente obtém-se o teor de umidade crítico, continuando a esta taxa de secagem decrescente chegando ao teor de umidade de equilíbrio.

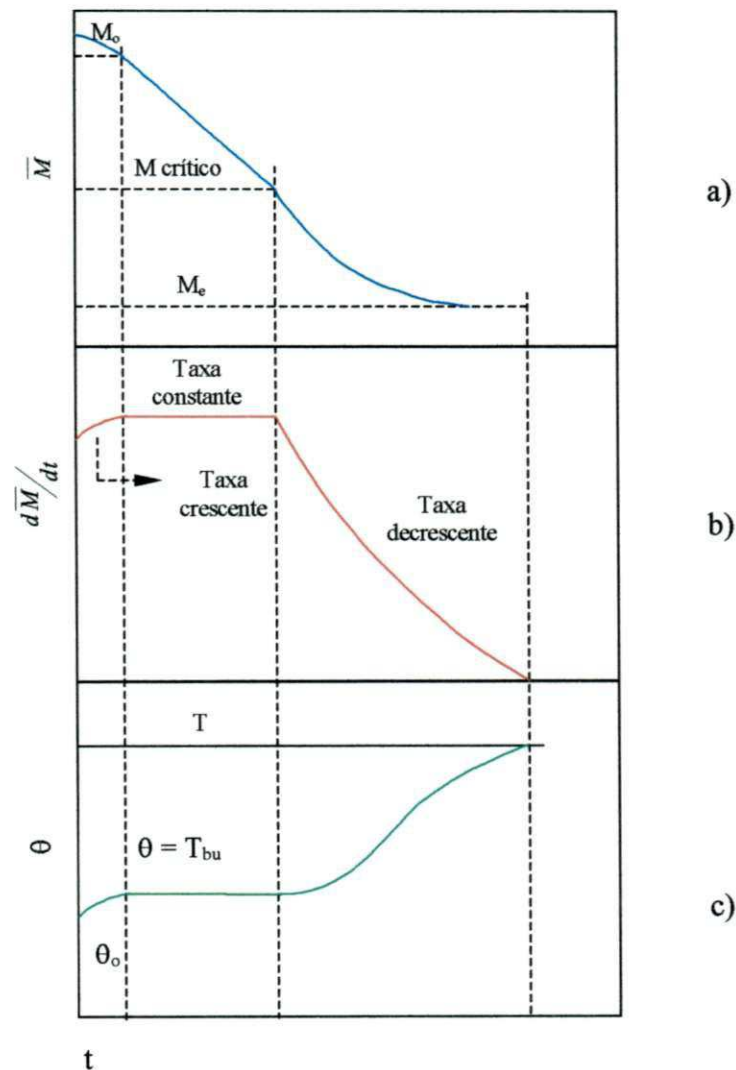


Figura 2.1 Cinética e aquecimento do sólido durante o processo de secagem.

(Fonte: Rodrigues Jr. *et al.*, 1999)

A Figura 2.1c apresenta o comportamento da temperatura do sólido durante o processo de secagem a um período (muito curto) que antecede o estágio de secagem à taxa constante, é denominada de período de acomodação, onde a temperatura do sólido alcança a temperatura de bulbo úmido do ar de secagem. Esta temperatura mantém-se constante durante o período à

taxa constante. Quando o sólido atinge o período de taxa decrescente, sua temperatura começa a aumentar até atingir a temperatura do ar de secagem.

2.1.3 - Teores de umidade

No processo de secagem, o material pode conter ou atingir os seguintes teores de umidade: teor de umidade inicial, teor de umidade crítico e teor de umidade de equilíbrio. O teor de umidade inicial consiste no valor da umidade no material no princípio do processo de secagem. Quando acontece uma mudança na taxa de secagem de constante para decrescente, têm-se o teor de umidade crítico. O teor de umidade de equilíbrio ocorre quando o material está em equilíbrio com o ar. Neste caso não existe troca de umidade entre eles, e o teor de umidade dentro do material se uniformiza. O teor de umidade de um produto é representado de duas formas:

a) Teor de umidade em base seca

É dado por:

$$M = m_a/m_s \quad (2.1)$$

onde m_a é a massa da água contida no produto e m_s é a massa do produto totalmente seco.

b) Teor de umidade em base úmida

É dado por:

$$M' = m_a/m \quad (2.2)$$

onde $m = m_a + m_s$ é a massa total do sólido em qualquer tempo durante o processo de secagem.

2.1.4 - Mecanismos de transporte de umidade

O fenômeno de migração de umidade no interior do produto biológico ainda não é bem definido pelos estudiosos. De acordo com Steffe e Singh (1980), a migração pode ser uma combinação de movimentos de umidade por difusão de líquido e de vapor, cada um predominando em certas etapas de secagem. Os seguintes mecanismos de transporte da umidade no interior dos sólidos são apresentados na literatura (Fortes e Okos, 1980; Strumillo e Kudra, 1986):

- a) Transporte por difusão líquida devido a gradientes de concentração de umidade;
- b) Transporte por difusão de vapor devido a gradientes de concentração de umidade e de pressão parcial do vapor (devido a gradientes de temperatura);
- c) Transporte por efusão, que ocorre quando o caminho livre médio das moléculas de vapor é da mesma ordem de grandeza do diâmetro dos poros;
- d) Transporte de vapor por termodifusão devido a gradientes de temperatura;
- e) Transporte de líquido por forças capilares;
- f) Transporte de líquido por pressão osmótica;
- g) Transporte de líquido devido à gravidade;
- h) Transporte de líquido e de vapor, devido à diferença de pressão total, causada por pressão externa, contração, alta temperatura e capilaridade;
- i) Transporte por difusão superficial.

Para o melhor entendimento dos mecanismos de transporte de umidade em sólidos, informações adicionais podem ser encontradas nas referências citadas acima.

2.1.5 - Teorias de secagem

Baseando-se nos mecanismos de transporte de umidade no interior do sólido, várias teorias têm sido propostas na literatura, a saber:

- a) Teoria da difusão líquida;
- b) Teoria capilar;
- c) Teoria de vaporização-condensação;
- d) Teoria de Luikov;

- e) Teoria de Krischer;
- f) Teoria de Berger e Pei;
- g) Teoria de Philip e De Vries;
- h) Teoria de Fortes e Okos.

a) Teoria da difusão líquida

A teoria de difusão líquida estabelece que a difusão de umidade no interior do sólido é devido a um gradiente de concentração no sólido. Nesta teoria, considera-se que a água migra apenas na fase líquida.

Alguns pesquisadores como Newman, Sherwood e Lewis, citados por Keey (1992), consideram a teoria de difusão líquida como principal mecanismo do fluxo de umidade no interior dos sólidos.

De acordo com Luccas (1996), no período de secagem decrescente, os processos difusivos de água no interior do material para a sua superfície controlam a operação de secagem. No caso de secagem de produtos biológicos, percebe-se que os pesquisadores têm preferência pelos modelos de difusão líquida (Steffe e Singh, 1980; Suarez e Viollaz, 1991, Queiroz e Nebra, 2001).

Discussão sobre os modelos e teorias de secagem pode ser encontrada, por exemplo, em Fortes e Okos (1980), Alvarenga et al., (1980), Fortes (1982), Parry (1985), Mariz (1986), Keey (1992), Parti (1993), Lima (1995), Lima (1999), Lima e Nebra (2000a), dentre outros.

b) Teoria capilar

A teoria capilar é baseada no conceito do potencial capilar, que pode ser definido como a diferença de pressão entre a água e o ar na interface água-ar presente em um capilar. Ceaglske e Hougen, citados por Fortes e Okos (1980), destacaram que na secagem de sólidos granulados, o fluxo de água é completamente determinado por forças capilares, sendo independentes da concentração de água. Verificou-se experimentalmente que o fluxo de umidade pode até estar na direção de incremento da umidade. Para processos de secagem de alimentos, principalmente em alta temperatura, a teoria capilar apresenta bons resultados.

c) Teoria de evaporação-condensação

Segundo a teoria de evaporação-condensação, a água, num meio poroso, migra inteiramente na fase gasosa. Segundo Henry, citado por Fortes e Okos (1980), esta teoria considera a difusão simultânea de calor e massa e, pressupõe que os poros têm uma rede contínua de espaços incluídos no sólido. Considera ainda que o balanço de calor e massa origina as equações que regem o fluxo de umidade no material. Tal balanço de massa é influenciado pelo movimento de vapor através do sólido. O balanço de energia é gerado levando em consideração o fluxo de calor por condução somado ao calor envolvido na adsorção e/ou absorção de umidade pelo sólido.

Embora muitos trabalhos anteriores ao de Henry tenham limitado o fluxo de umidade através do sólido somente na fase de vapor, sua teoria não se limitou ao vapor como única substância difusiva (Whitney e Poterfield, 1968).

Hougen *et al.*, citados por Fortes e Okos (1980), determinaram que a umidade pudesse se mover por difusão de vapor através de um sólido, desde que seja determinado no seu interior um gradiente de temperatura, que por sua vez criará um gradiente de pressão rumo à superfície de secagem. Sendo assim, na secagem de uma partícula com o ar em certa temperatura, só existirá fluxo de vapor enquanto o sólido não entrar em equilíbrio térmico com o ar; a partir daí, o fluxo de massa através do material se dará predominantemente por difusão líquida.

d) Teoria de Luikov

A teoria de Luikov é baseada nos princípios da Termodinâmica de não-equilíbrio e leva em consideração os mecanismos de difusão, efusão e convecção de água no interior do meio poroso. Portanto, as equações que define o modelo de Luikov levam em consideração que o transporte molecular de vapor d'água, ar e líquido acontecem ao mesmo tempo (Luikov, 1975).

e) Teorias de Philip e De Vries e de Berger e Pei

Tais teorias consideram que a água se move em meios porosos, basicamente por meio dos mecanismos de difusão de líquido e capilaridade. Segundo Fortes (1978), nestas teorias se propõem uma abordagem mecanística sendo que as equações de Berger e Pei são semelhantes às de Luikov.

f) Teoria de Krischer

Em sua teoria, Krischer, citado por Fortes e Okos (1980), assumiu que durante o processo de secagem, o fluxo de umidade pode se dar no estado líquido, por capilaridade, ou no estado de vapor, devido ao gradiente de concentração de vapor. Esta teoria leva em consideração a transferência de calor e massa acoplados e que pode ser aplicada em uma variedade de meios porosos. O trabalho de Krischer serve como base para teorias mais complexas tais como a de Berge e Pei (1973), e tem sido aplicada para análise em vários tipos de alimentos (Fortes e Okos, 1980).

g) Teoria de Fortes e Okos

Fortes (1978) e Fortes e Okos (1980), tendo por base os conceitos Termodinâmicos dos Processos Irreversíveis propõem que a força motriz para transferência isotérmica, tanto do líquido quanto do vapor, é um gradiente do teor de umidade de equilíbrio e não do teor de umidade, sendo isto, devido à hipótese de equilíbrio local. A força motriz para transferência de líquido e vapor, é o gradiente do potencial químico, que por sua vez é uma função da temperatura, da umidade relativa e do teor de umidade de equilíbrio. Os autores afirmam que a água em meios capilares porosos pode até mover-se em sentido contrário ao gradiente do teor de umidade, mas sempre na direção do gradiente do teor de umidade de equilíbrio.

2.1.6 - Encolhimento

Durante a secagem, principalmente de produtos com alto teor de umidade inicial, como é o caso de frutas e vegetais, o encolhimento é um fenômeno físico bastante significativo. Devido a este fenômeno, o produto sofre alterações em sua forma e dimensões originais. Diversos autores têm incluído o fenômeno do encolhimento em seus modelos,

porém, com diversas formas de tratamento. Para alguns autores, o encolhimento dos materiais submetidos à secagem pode ser considerado proporcional ao volume de água removida durante o processo (Balaban, 1989; Queiroz, 1994; Lang *et al.*, 1994; Sjöholm Gekas, 1995; Brasileiro, 1999; Lima, 1999; Gouveia *et al.*, 1999; Lima *et al.*, 2000; Júnior *et al.*, 2000, Queiroz e Nebra, 2001; Nascimento, 2002; Carmo, 2004).

Balaban (1989) verificou a influência do encolhimento nos problemas de difusão de calor e massa no interior de alimentos e na dimensão do corpo, desenvolvendo modelos matemáticos com e sem a consideração de encolhimento. O autor por simplicidade assumiu um decréscimo linear com o teor de umidade, alertando, porém, que quando esta correlação fosse não-linear, poderia ser facilmente incorporada ao modelo. Definiu funções que expressavam o grau de encolhimento e repetiu os cálculos com diferentes níveis de encolhimento máximo: 70 % , 50 % e 30 % do volume original. Para a solução numérica, utilizou o método de diferenças finitas centrais com malha variável. Após cada passo de tempo, a distância entre os nodos era ajustada de acordo com o teor de umidade médio daquela fatia. Comparando os resultados obtidos dos modelos com e também sem a consideração de encolhimento, concluiu que estes podem apresentar diferenças significativas nos valores estimados e locais do teor de umidade e da temperatura.

Vagenas e Marinos-Kouris (1991), ao estudarem a secagem de damasco, propuseram encolhimento linear proporcional à variação do teor de umidade. Consideraram variações nas três dimensões, porém, supondo material isotrópico, ou seja, o coeficiente de encolhimento linear era o mesmo nas três direções e no interior do sólido.

Fusco *et al.* (1991) estudaram o encolhimento nos modelos de difusão, considerando diferentes geometrias. Apresentaram uma boa revisão de literatura sobre estudos do encolhimento representado pelas relações de volume com o teor de umidade e, diferentemente dos demais, optaram por uma expressão que correlacionava estas duas propriedades através de uma função do terceiro grau. Obtiveram a solução numérica do problema pelo método de diferenças finitas adotando uma malha fixa com a interface móvel, localizada no contorno do material. Em todas as geometrias estudadas, os modelos com encolhimento apresentaram melhores resultados.

Berthet *et al.* (1992) desenvolveram um modelo difusional com evaporação na superfície do material, considerando o encolhimento, ao analisarem a secagem de polímeros. Foi derivada uma expressão para o volume de uma membrana esférica em função da concentração local que levava em conta a aditividade do volume do esqueleto sólido e da umidade presente neste. A partir desta relação, calcularam o teor de umidade ao longo do raio como o produto da nova concentração pelo novo volume da membrana. Desta forma, conseguiram analisar a cinética da variação da dimensão ao longo do raio e do tempo, e concluíram que o encolhimento ocorre primeiro em pontos próximos à superfície externa do material e leva algum tempo para acontecer no interior da esfera; este tempo será maior para posições mais próximas do centro da esfera.

Queiroz (1994), a partir de dados experimentais, obtidos com a secagem de banana, reporta uma expressão linear que relaciona o raio adimensional e o teor de umidade da banana. Esse resultado é então considerado na solução da equação de difusão que descreve a transferência de umidade do interior do sólido

Sjöholm e Gekas (1995) incorporaram o efeito do encolhimento na modelagem da cinética de secagem de fatias de maçã. Os autores obtiveram uma relação entre a difusividade efetiva do produto e a razão entre o volume inicial e o volume a cada instante de secagem. Consideraram uma relação linear entre a variação de umidade e o teor de umidade do produto e concluíram que a difusividade efetiva decresce com a diminuição do teor de umidade do produto.

Lima (1999) assume que o encolhimento do material se dá de tal forma que a variação de suas dimensões seja uma função linear do teor de umidade. Uma equação relacionando, a cada instante, o volume do produto com o seu equivalente teor de umidade foi proposta. A equação de difusão que representa o processo é bidimensional e tem uma solução numérica que depende das dimensões do sólido. A cada instante, com um novo volume são encontradas, as novas dimensões do sólido. O autor trabalhou com uma geometria esferoidal prolata.

Brasileiro (1999) reporta estudos de secagem de acerola. O autor incluiu o encolhimento do produto medindo a variação de suas dimensões através de fotografias tiradas em determinados intervalos de tempo. A cinética de secagem foi modelada através do modelo exponencial simples, e o fenômeno de encolhimento foi introduzido na solução do problema

através de um fator que relaciona um raio equivalente, num determinado instante, com o raio equivalente inicial.

Afonso Jr. *et al.* (2000) estudaram o efeito da variação do teor de umidade na porosidade, massa específica e contração volumétrica de grãos de milho (*pennisetum glaucum*). A redução do teor de umidade provocou no milho, redução da porosidade e aumento da massa específica. Os autores verificaram que o volume dos grãos diminuiu com a perda de água e que a contração volumétrica é função linear do teor de umidade do grão.

Nascimento (2002) considerou o encolhimento durante a secagem de materiais cerâmicos. O modelo apresentado pelo autor é tridimensional e assume um encolhimento do material de modo que determinadas razões entre as dimensões do corpo permanecem constantes. O volume total do material cerâmico é considerado ser uma função linear do teor de umidade a cada instante de tempo durante o processo de secagem.

Carmo (2004) propôs que o encolhimento do material acontece de tal maneira que a variação de suas dimensões seja uma função linear do teor de umidade. A cada instante, um novo volume é encontrado, como também novas dimensões lineares são determinadas e que em qualquer tempo a variação de volume sofrida pelo corpo é igual ao volume da água evaporada.

2.1.7 - Secagem intermitente

Várias técnicas que visam uma possível economia de energia na realização de um processo de secagem, e minimização da perda da qualidade final, consequência do aquecimento desses produtos a altas temperaturas, especialmente em produtos biológicos têm sido aplicadas por estudiosos. Sendo assim, a escolha de uma técnica adequada consistirá no alcance desses objetivos. Uma das técnicas é a secagem intermitente que têm sido usada extensivamente na secagem de grãos e cereais (Lima, 1999).

O processo de secagem intermitente engloba períodos de secagem continuada e de repouso ou relaxamento. Este método, também chamado de têmpera, tem como objetivo uniformizar todo o teor de umidade dentro do produto, por migração de umidade e reduzir possíveis efeitos de trincas e deformação no material proveniente dos gradientes de umidade e

temperatura. O efeito do tempo de têmpera na quantidade de umidade removida do milho foi estudado por Sabbah *et al.* (1972) e Tolaba *et al.* (1997), e arroz por Steffe *et al.* (1979), Walker e Bakker-Arkema (1981) e Elbert *et al.* (1997).

A determinação do tempo de têmpera e o número de passes de tempo ótimos deste processo são fundamentais para garantir a minimização de energia como também uma melhor qualidade do produto no final da secagem. Segundo Steffe e Singh (1980a), se o tempo de têmpera é muito curto, podem ocorrer, dentro do grão, fissuras, rachaduras ou trincas, e isto afetará a qualidade do grão. Isto ocorre, principalmente, devido a gradientes de umidade e tensões térmicas geradas a partir de gradientes de temperatura. Apesar disto, existe muitas vantagens no uso de tempo de têmpera curto, tais como: minimizar danos produzidos por variações químicas e ações de insetos e microorganismos; aumento da capacidade de secagem, aumento da flexibilidade do secador, em virtude do decréscimo do tempo de secagem.

É importante salientar que a têmpera é necessária naqueles períodos onde a secagem se dá a taxa decrescente. Em alguns produtos onde, no seu interior, a resistência ao processo de secagem é grande, torna-se complicado manter determinadas condições do ar de secagem na superfície do produto, e resultam nesta região altos gradientes, tanto de umidade quanto de temperatura, causando possíveis danos nestas regiões tais como deformações e trincas. A secagem intermitente é baseada em análise empírica e poucos trabalhos são publicados, se comparado com a grande variedade de produtos biológicos existentes (Singh *et al.* 1980; Zhang e Litchfield, 1991).

Utilizando-se de análise numérica, é possível descrever o processo de secagem intermitente sob determinadas condições de contorno (Steffe e Singh, 1980; Zhang e Mujumdar 1992; Franca *et al.* 1994; Tolaba *et al.* 1997). Diversos autores têm inserido em seus estudos a secagem intermitente (Lima 1999; Cinhan e Ece, 2001; Cnossen *et al.*, 2002; Prachayawarakorn *et al.* 2003; Carmo, 2004).

Cinhan e Ece (2001) analisaram o efeito do tempo e têmpera sobre a cinética de secagem do arroz através de dados experimentais. Resultados da cinética de secagem foram obtidos utilizando-se intervalos de tempos de 0; 30 e 60 segundos. Estes resultados foram ajustados a uma curva dada pela solução analítica da equação de difusão líquida usada para

descrever o problema. Através da diferença quadrática do erro entre os pontos experimentais e o simulado, coeficientes de difusão efetiva foram determinados. Os autores concluíram que quanto maior o tempo de têmpera maior coeficiente de difusão é obtido.

Cnossen *et al.* (2002) observaram que o efeito do tratamento de têmpera sobre o aparecimento de fissuras no grão de arroz, com temperaturas do ar de secagem abaixo e também acima de uma determinada temperatura de transição (T_g), muda significativamente. T_g é a temperatura de transição entre os estados do arroz denominados de “glass” e “rubbery”. Estes estados apresentam propriedades físicas bastantes diferentes, notadamente o coeficiente de expansão térmica. Devido a estas propriedades diferenciadas, tensões dentro do grão podem causar fissuras.

Chua *et al.* (2003) reportam algumas maneiras de se implementar um processo de secagem intermitente. São elas:

a) Pelo fluxo de calor fornecido temporariamente. Isto pode ser feito interrompendo o fluxo de ar ou então só aquecendo este ar intermitentemente;

b) Através da aeração, que é um processo de resfriamento envolvendo altas temperaturas com pequenos tempos de secagem, seguindo um tempo de têmpera (“tempering”), resfriamento lento e o final da secagem;

c) Reversão periódica da direção do fluxo de ar para minimizar os gradientes de temperatura dentro do leito do secador;

d) Secagem cíclica que é um processo de secagem no qual a temperatura, umidade ou velocidade do ar de secagem varia com o tempo segundo uma senóide, onda quadrada, ou outra função qualquer.

2.2 - Modelagem da secagem

Os trabalhos reportados na literatura, que se referem à modelagem do processo de secagem, permitem que se possam listar duas formas de abordar o tema: uma se baseia principalmente nos parâmetros externos ao sólido, tais como: umidade relativa, temperatura e

velocidade do ar, correlacionando-as com a velocidade de secagem do sólido, e a outra tem como características, as condições internas e os mecanismos de transporte de umidade internamente ao sólido.

De forma geral, a modelagem deve estabelecer, entre os mecanismos de transporte de umidade dentro do sólido, aquele que for determinante. Desenvolver modelos matemáticos que descrevam um processo de secagem de maneira adequada tem sido uma preocupação constante de muitos pesquisadores por muito tempo.

Atualmente, na tentativa de correlacionar dados experimentais de secagem de um material particular a um modelo matemático, os pesquisadores da área de secagem têm divulgado uma gama de modelos que representam a cinética de secagem de um material particular. No entanto, existe ainda a necessidade de modelos melhorados para se ter um comportamento físico do problema bem próximo do real.

Para se modelar um processo de secagem é primordial o conhecimento das propriedades termodinâmicas do ar e suas mudanças no decorrer do processo. Os modelos de secagem são classificados de acordo com a espessura da camada do material ou se o material a ser seco é apenas uma partícula. Nestes casos, os modelos são em nível de camada espessa, camadas fina ou ainda em nível de partícula. Os modelos que são propostos para relatar a taxa de perda de umidade no transcorrer da secagem em sólidos no nível de partícula são:

- a) Modelos difusivos;
- b) Modelos fundamentados na termodinâmica dos processos irreversíveis;
- c) Modelos fundamentados numa análise concentrada.

2.2.1 - Modelos difusivos

Neste modelo, o transporte de massa é devido ao gradiente de umidade no interior do sólido, que se relaciona com a taxa de secagem por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M) + M'' \quad (2.2)$$

onde D é o coeficiente de difusão de massa e M'' representa o termo de geração de massa.

A equação (2.2) é denominada Lei de Fick.

O transporte de calor é definido pela lei de Fourier, dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (2.3)$$

onde k representa a condutividade térmica; ρ a densidade; c_p o calor específico do sólido e \dot{q} a geração interna de energia.

Se as propriedades ρ e c_p são constantes, esta equação pode ser escrita por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) \quad (2.4)$$

onde: $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ é a difusividade térmica.

Observe-se que esta equação é muito semelhante à equação para difusão de massa, portanto pode ser resolvida de forma similar.

Mais recentemente, alguns têm sido reportados na literatura para descrever o transporte difusivo de calor e/ou massa em sólidos com diferentes geometrias, particularmente esferoidal prolato e oblato.

Sheen e Hayakawa (1992) apresentam resultados da influência do encolhimento volumétrico, sobre o tempo de degelo de alimentos com forma esferoidal ou cilíndrica. Difusão convectiva e adsorção em partículas esferoidais oblata e prolata são apresentadas no trabalho de Couteliens *et al.* (1995).

Lima *et al.* (1999) apresentaram uma solução analítica da equação de difusão similar à apresentada por Haji-Sheikh e Sparrow (1966), sendo que desta vez a solução é mais geral, uma vez que incorpora o cálculo do valor médio da grandeza de interesse (teor de umidade).

Lima (1999) apresentou um estudo numérico/analítico da difusão de calor e massa em esferóides prolatos, considerando propriedades constantes ou variáveis, condições de contorno constante ou do tipo convectiva, com ou sem encolhimento, utilizou o método de volumes finitos via técnica de separação de variáveis. Os modelos apresentados são gerais e independentes da natureza do sólido (frutas, cereais, etc.), no entanto, o autor deu ênfase à secagem de banana.

Oliveira (2001) utilizando a técnica de separação de variáveis reporta a solução da equação de difusão para corpos com geometria esférica prolata. O problema é de condição de contorno convectiva na superfície do corpo, sendo a solução da equação dada em uma série de funções de Legendre para coordenada angular e em uma série de funções de Bessel para a coordenada radial. Com uma definição para o teor de umidade médio a cada instante do processo, o autor utilizou a solução para simular a cinética de secagem de sólidos úmidos.

Farias (2002) e Lima *et al.* (2004) apresentam uma solução analítica para o problema de difusão no interior de esferóides (prolato, oblato e esfera). Os autores utilizaram um método integral baseado em Galerkin (método GBI); este método resolve equação de difusão escrita em coordenadas cilíndricas e considera uma condição de equilíbrio na superfície. Lima e Nebra (1999) reportaram em seu trabalho a caracterização de formas geométricas de sólidos e seus efeitos no fenômeno de difusão. Os autores concluíram que a geometria elipsoidal é mais apropriada que a esférica, para análise de difusão em corpos com formas aproximadamente esféricas; que o modelo esférico apresenta uma taxa de difusão maior quando comparada à obtida com o modelo esférico e prediz zonas de altos gradientes de umidade e temperatura no interior do sólido.

Teruel *et al.* (2002) estudaram transferência convectiva de calor através da laranja. O problema foi modelado através da equação de condução bidimensional, em coordenadas esféricas prolata e condição de contorno convectiva na superfície. A solução da equação foi obtida numericamente pelo método de volumes finitos. Como resultados deste trabalho, coeficientes de transferência convectiva de calor para laranjas imersas no ar e na água foram obtidos.

Carmo (2000) e Carmo e Lima (2000) apresenta uma solução numérica para difusão de umidade em corpos esféricos oblato, com condições de contorno convectiva na

superfície do sólido. Simulações para corpos com diferentes razões de aspecto são realizadas e, a distribuição do teor de umidade no interior do sólido é mostrada e analisada.

Carmo (2004) apresenta uma solução numérica da equação de difusão que descreve a transferência de calor e massa no interior de esferóide oblato, incluindo encolhimento, considerando condição de contorno convectiva e propriedades constantes ou variáveis. A solução é obtida utilizando-se o método de volumes finitos para discretizar a equação. Vários resultados do teor de umidade médio e temperatura dentro do esferóide são apresentados e analisados. Como aplicação a metodologia foi usada para descrever a secagem de lentilha.

2.2.2 - Modelos fundamentados na Termodinâmica dos processos irreversíveis

a) Modelo de Luikov

Baseia-se na teoria de Luikov (1966), e, portanto, na termodinâmica dos processos irreversíveis. O modelo propõe que a água se move em meios porosos, em condições isotérmicas, sob a ação de um gradiente de potencial de transferência de massa.

Luikov e Mikhailov (1965) e Luikov (1975), reportaram em seus trabalhos, um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas para a temperatura, umidade e, em casos de intensa secagem, também a pressão.

Vieira e Silva (1997), utilizando em seu trabalho um modelo de Luikov modificado, que leva em consideração o acoplamento de transferência de calor e massa no interior do produto. Considerando um sólido poroso, propuseram uma solução numérica para o mesmo, utilizando a técnica de elementos de fronteira (Brebbia e Dominguez, 1989).

Alvarez *et al.* (2001) apresentaram uma solução analítica desenvolvida por Liu e Cheng para resolver as equações diferenciais parciais completas de Luikov. Os resultados demonstram que a combinação dos valores reais e raízes complexas são necessárias para produzir resultados que satisfazem todas as condições do problema. São apresentadas as distribuições de temperatura e umidade em comparação com tempos de secagens entre os quatro materiais. Foi concluído que o tempo de secagem para cerâmica diminuiu mais

rapidamente que o de madeira, e que as curvas de secagens de gesso e tijolo foram semelhantes.

Mészáros *et al.* (2002) usou um modelo matemático de transferência de calor e massa acoplados em meios porosos. Em vez das duas equações diferenciais parciais acopladas do tipo parabólico que normalmente são aplicadas, usou um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas que contêm explicitamente as constantes de tempo de relaxamento. Foi usada a teoria de onda e a termodinâmica do não-equilíbrio. Este sistema é resolvido pelo procedimento habitual da transformada de Fourier, enquanto os coeficientes de condutividade são acoplados, o coeficiente de difusão é considerado como quantidade estado-dependente.

b) Modelo de Fortes e Okos

Baseia-se na teoria de Fortes (1978), Fortes e Okos (1980, 1981) e Fortes (1982), onde foi proposto um modelo que descreve o transporte de calor e umidade (líquido e vapor) simultâneos no interior do sólido, considerando que o fenômeno de encolhimento e efeitos de pressão total é negligenciado. Este modelo será bem descrito no capítulo 3, deste trabalho.

2.2.3 - Modelos fundamentados numa análise concentrada

Diferentemente dos outros modelos apresentados, os modelos concentrados admitem que as grandezas em estudo (temperatura e/ou massa) dentro do sólido são espacialmente uniformes em qualquer tempo durante o processo transiente. Desta maneira modelos matemáticos elementares podem ser estudados para descrever o teor de umidade médio ao longo do processo de secagem (Alsina e Brasileiros 1997; Azzouz *et al.*, 1998; e Lima e Lima, 2001; Silva, 2002; Almeida, 2003).

Lewis apud Marinos-Kouris e Maroulis (1995), sugeriu que para materiais higroscópicos porosos, durante o período de taxa decrescente, a taxa do teor de umidade médio seja proporcional à diferença instantânea entre o teor de umidade médio do material e o teor de umidade de equilíbrio higroscópico. Os casos em que gradientes de umidade dentro do sólido são desprezíveis acontecem quando o processo de secagem é lento. Isto acontece, por exemplo, para secagem as baixas temperaturas e a baixa velocidade do ar de secagem, que proporcionam baixos coeficientes de transporte.

Lima e Lima (2001) e Lima (2001), apresentaram modelos matemáticos baseados numa análise concentrada que descrevem a transferência de calor e massa simultânea em corpos com geometria arbitrária, considerando existência de geração interna de massa e energia, convecção térmica e de massa, evaporação e aquecimento do vapor produzido na superfície do produto. Segundo os autores, a transferência de massa tem uma importância significativa na transferência de calor.

Silva (2002) utilizando um modelo de análise concentrada descreve o processo de secagem de sólidos, incorporando fenômenos simultâneos de transporte de calor e massa. Segundo o autor, os modelos concentrados, em resumo, descrevem as taxas de transferência de calor e massa para o sólido inteiro, ignorando a resistência interna ao fluxo de calor e massa. Este trabalho analisa a influência de diversos parâmetros adimensionais que envolvem dimensões geométricas do corpo e propriedades do ar, na cinética de secagem do sólido, com uma forma arbitrária.

Almeida (2003) modelou a secagem de um sólido com geometria arbitrária através de uma análise concentrada. O autor considerou o sólido como sendo heterogêneo constituído de dois materiais diferentes (sólido 1 e sólido 2), limitados em regiões distintas, com uma área de contato entre eles. O autor concluiu que, quanto maior fossem as diferenças entre as propriedades físicas dos sólidos 1 e 2 em relação àquelas propriedades considerando o sólido homogêneo, maior é o erro cometido na análise da transferência de calor e massa. Foi notada que a densidade tem maior influência na transferência de massa, enquanto que a condutividade térmica influi mais fortemente na transferência de calor.

2.3 - Trigo: aspectos históricos, mercadológicos, científicos e tecnológicos.

2.3.1 - Histórico e mercado

Registro da presença do trigo foi encontrado em escavações no sul da França e na Suíça fossilizado junto a ossos humanos. Esses achados e muito outros provam que, já em tempos pré-históricos, o trigo era alimento básico do homem. No Brasil provavelmente as primeiras sementes foram trazidas por Martim Afonso de Souza, em 1534, para a capitania de São Vicente (São Paulo), onde se aclimataram muito bem (Embrapa - Trigo, 2005).

Os alimentos derivados do trigo são apreciados por pessoas de todas as idades e classes sociais que consomem pães, bolos, biscoitos, tortas, etc. A parte do trigo que é usada na alimentação humana é o endosperma do fruto que se transforma em farinha pelo processo de moagem, enquanto que o endosperma submetido à pressão, quebra-se em partículas menores que serve para a alimentação de animais domésticos (bovinos, suínos, aves, etc.).

O consumo de trigo no Brasil, no ano de 2002 foi cerca de 10 milhões de toneladas e importada 7,5 milhões de toneladas, onde esta importação de trigo representa mais de um bilhão de dólares na balança de pagamentos brasileira. De acordo com a CONAB a estimativa para safra deste ano é de 6 milhões de toneladas para o consumo de 11 milhões de toneladas. O restante é importado da Argentina e dos países europeus.

A China é o maior consumidor e produtor de trigo do mundo, cerca de 20% do total. Os países da União Européia aparecem, pelas informações do USDA (Departamento de Agricultura dos Estados Unidos), em 2º lugar, mas, individualmente, a posição é da Índia, seguida da Rússia. O USDA elevou em 2,63 milhões de toneladas, para 620,89 milhões a produção mundial de trigo na safra 2004/05. O aumento foi provocado pela revisão da safra Argentina, que passou de 15 milhões para 16 milhões de toneladas, aumento de 6,67%.

A Tabela 2.1 apresenta a evolução do consumo de trigo no Brasil nos últimos anos. Para a safra de 2002 houve disponibilidade de sementes, conseqüentemente um aumento no preço do pão que gerou um decréscimo no consumo deste ano, mas voltando a crescer no ano seguinte

A Tabela 2.2 apresenta o consumo per capita mundial de pão onde a China aparece como maior consumidora, e o Brasil apresentado quase à metade de consumo da Inglaterra, ficando em 12º lugar.

Além disso, a safra dos 25 países da União Européia foi revista de 135,29 milhões para 136,73 milhões de toneladas, o que fez os estoques finais subirem para 145,29 milhões de toneladas (Embrapa - Trigo, 2005).

Tabela 2.1 – Evolução do consumo per capita de trigo no Brasil, (Embrapa - Trigo, 2005).

Ano	Consumo (kg/hab)
1996	51,25
1997	54,35
1998	49,91
1999	55,58
2000	55,51
2001	60,90
2002	57,39
2003	59,05

Tabela 2.2 - Consumo mundial per capita de pão (Embrapa - Trigo, 2005).

País	Kg/hab/ano
China	93,0
Dinamarca	74,0
Argentina	73,0
Bélgica	70,0
Grécia	70,0
Portugal	70,0
Espanha	67,0
Irlanda	65,0
Itália	60,0
França	56,0
Inglaterra	52,0
Brasil	27,0

2.3.2 - Científicos e tecnológicos

a) Estrutura do grão de trigo

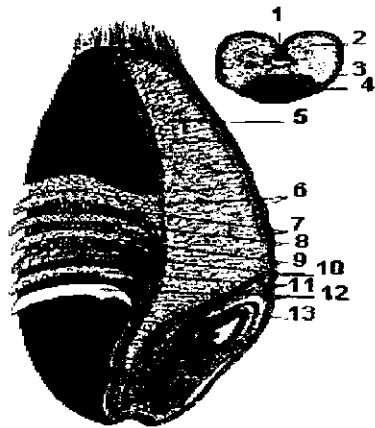
O trigo é um cereal da família das gramíneas do gênero *triticum*, que compreende cerca de vinte espécies, das quais as mais extensivamente cultivadas são: *aestivum* e *durum*. É o cereal mais importante na alimentação humana, nas regiões de clima temperado (Embrapa - Trigo, 2005).

O grão se divide praticamente em duas partes: o pericarpo e a semente. A parte mais externa é o pericarpo, que recobre toda a semente e é composto por seis camadas (epiderme, hipoderme, remanescentes da parede celular ou células finas, células intermediárias, células cruzadas e células tubulares). A semente é formada pelo endosperma e o germe, que são recobertos por três camadas: testa (onde estão os pigmentos que dão cor ao grão), camada hialina e aleurona. Do ponto de vista botânico, a aleurona é parte do endosperma, mas no processo de moagem ela faz a parte do farelo. (Embrapa - Trigo, 2005).

Os grãos de trigo têm tamanhos e cores variáveis, e o formato oval, com as extremidades arredondadas. Numa das extremidades, encontra-se o germe e na outra, cabelos finos. Ao longo do lado ventral nota-se uma reentrância, conhecida como "crease". A presença deste sulco é um fator que dificulta e particulariza o processo de moagem do trigo, uma vez que um processo simples de abrasão para a retirada da casca não seria possível (Embrapa - Trigo, 2005).

Os constituintes químicos não se distribuem uniformemente pelo grão. O pericarpo (cerca de 5% do peso do grão) é rico em pentosanas, celulose, cinzas e proteína. A aleurona (7%) é uma camada rica em cinza (fósforo, fitato), proteína, lipídios, vitaminas (niacina, tiamina, riboflavina) e enzimas. O endosperma (82%) é composto basicamente de amido, mas sua parte mais externa (subaleurona) contém mais proteína que a porção interna. O germe (3%) tem alto conteúdo de proteína, lipídio, açúcares redutores e cinzas (Embrapa - Trigo, 2005).

A Figura 2.2 mostra o grão de trigo e suas partes:



1 Crease, 2 – Endosperma, 3 – Farelo, 4 – Germe, 5 – Endosperma, 6 – Aleurona, 7 – Hialina, 8 – Testa 9 - Células Tubulares, 10 Células Cruzadas, 11 – Hipoderme, 12 – Epiderme, 13 – Germe.

Figura 2.2 – Seções longitudinal e Transversal de um grão trigo

Fonte: Embrapa - Trigo (2005).

b) secagem

No Brasil, as perdas quali - quantitativas dos grãos são basicamente devido aos fatores de colheita, secagem e armazenamento. Sob condições impróprias de secagem e armazenamento, os grãos podem ser contaminados por fungos que, além de consumirem nutrientes essenciais, reduzem sua qualidade e conduzem à produção de mico toxinas potencialmente deletérias à saúde humana e animal. Especificamente em relação ao trigo, o ponto de colheita inadequado (nível de umidade) e a secagem, sem o controle da temperatura no processo, levam alterações indesejáveis na qualidade intrínseca dos grãos, prejudicando sua utilização na alimentação animal.

A possibilidade de secagem propicia um melhor planejamento da colheita e o emprego mais eficiente de equipamentos e de mão-de-obra, mantendo a qualidade do trigo colhido.

O teor de umidade recomendado para armazenar o trigo colhido é da ordem de 13%.b.u. Desse modo, todo o produto colhido com umidade superior à indicada para armazenamento deve ser submetido à secagem. Em lotes com teor de umidade maior que 16%, recomenda-se a secagem lenta para evitar danos físicos no grão. A temperatura máxima na massa de grãos de trigo não deve ultrapassar 60 °C, para manutenção da qualidade

tecnológica do produto. Nos secadores essa temperatura é obtida mediante a entrada de ar aquecido a mais ou menos 70°C (Embrapa – Trigo, 2005).

Lang *et al.* (1994) inseriram o efeito de encolhimento no modelo de Bakker-Arkema para a secagem de grãos em camada espessa e uma melhor precisão na predição da cinética de secagem do trigo foi obtida. O encolhimento do produto foi introduzido neste modelo considerando que o número de camadas do grão permanece o mesmo, no entanto, cada uma das camadas do grão, sofre um encolhimento que varia linearmente com o teor de umidade.

Martinez *et al.* (2001) apresentam um estudo de simulação da secagem de trigo em um secador de leito vibro fluidizado. Os resultados do teor de umidade e temperatura são comparados com os dados experimentais e um bom ajuste foi obtido.

Vizcarra *et al.* (2001) analisaram a secagem de trigo em um leito vibro fluidizado. De acordo com os autores, o secador de leito vibro-fluidizado foi operado nos modos contínuo e em batelada, e que o trigo apresenta dois períodos de taxa decrescente, sendo o primeiro onde a taxa de secagem é muito rápida.

Berbert *et al.* (2001) reportaram um estudo sobre a medida do teor de umidade de trigo usando o método de radiofrequência em leito fixo e móvel. Experimentos de medição foram feitos em três variedades de trigo, variando o teor de umidade de 11,5 a 21,5 %(base úmida) e as temperaturas de 21 a 24°C. De acordo com os resultados, a técnica mostrou-se bastante viável.

Gastón *et al.* (2002) desenvolveram um modelo dimensional, usando a técnica do elemento finito para analisar isoterma da secagem de trigo em camada delgada que representa os grãos como elipsóides assimétricos. O coeficiente de difusão efetiva foi calculado minimizando a soma dos quadrados dos resíduos preditos entre o numérico e o experimental. Estimações feitas para temperaturas de ar de secagem de 35°C, 50°C, 60°C e 70°C e teores de umidades iniciais de grãos de 0,2694, 0, 2396, 0,2133 e 0,1891 (b.s), foram correlacionados da por meio de funções do tipo Arrhenius. Estas correlações previamente foram comparadas a esses mesmos dados obtidos assumindo grãos como esferas. Os resultados, todos na ordem de 10^{11} m²/s, indicaram que os coeficientes de difusão encontrados para geometria elipsoidal eram de 9 a 13% abaixo dos valores encontrados para esfera. Neste elipsóide, os efeitos

combinados para transferência de massa em área de superfície mais alta e volume maior comparados com a esfera tendem a compensar um ao outro até certo ponto. Em troca, no elipsóide seu volume é equivalente ao do grão, sendo assim o coeficiente de difusão é, em média, abaixo uns 13% que na esfera, como resultado da área de superfície maior sem a compensação de volume aumentado. Os resultados de Gastón *et al.* (2002), sugerem que a relação de coeficientes de difusão de um elipsóide para o de uma esfera esteja na ordem da esfericidade do trigo. Porém, são necessários estudos adicionais para verificar esta observação.

Vázquez *et al.* (2002) estudou a secagem de duas variedades de trigo mexicanas condicionadas a três umidades iniciais (17, 25 e 37% base seca), com ar a 40, 60, 80 e 100°C em períodos de 60 minutos cada em um sistema de leito em escada de laboratório. A cinética da secagem e energia de ativação foi determinada. Peso, dureza de trigo, proteína total, massa e volume de pão foram analisados. Os resultados mostraram que a umidade inicial e a velocidade de secagem reduziram a energia de ativação necessária para extrair a água do grão. Foi observado que o efeito de temperatura e conteúdo de umidade no grão são os fatores mais importantes para controlar danos durante a secagem. A variedade “hard” de trigo foi menos suscetível a danos devido ao aquecimento “soft”, provavelmente devido a seu teor de proteína mais alto e textura mais dura.

Fortes (2004) reporta um estudo sobre a 2ª lei da termodinâmica aplicada a processos de secagem de trigo em leito fluidizado com ar veiculado. De acordo com o autor, a apreciável diferença entre as eficiências da 1ª e 2ª leis do processo, indica para a necessidade de melhoramento no mesmo. A recirculação do ar aumenta o tempo de secagem, mas tem pequeno efeito na eficiência da 1ª e 2ª leis da termodinâmica.

Fortes e Ferreira (2004) apresentam na metodologia para análise de energia e exergia do processo de secagem, com partícula, referência a secagem de trigo em leito fluidizado. Foram analisados os efeitos da altura do leito, temperatura de ar de secagem e velocidade de fluidização nas eficiências da 1ª e 2ª leis da termodinâmica. De acordo com os autores a altura do leito afetaram fortemente suas eficiências.

Giner e Estrebou (2004) apresentam um software para simulação de secadores de fluxos cruzados. Como aplicação, apresentou resultados para a secagem de trigo. De acordo

com os autores o modelo de secagem de trigo em leito fixo foi validado com os dados experimentais, apresentado uma porcentagem de erro de 7%. Já para fluxos cruzados o erro não alcançou 8,5 %, indicando que toda a metodologia está adequada.

CAPÍTULO 3

MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 - Teoria de Fortes e Okos

Tendo por base os conceitos termodinâmicos de processos irreversíveis e desenvolvimentos recentes da abordagem mecanística, Fortes, (1978); Fortes e Okos, (1980, 1981a) e Fortes (1982), propuseram um modelo, que desconsidera o fenômeno de encolhimento e efeitos de pressão total, e assume:

- a) Existência de equilíbrio local entre as fases sólida, líquida e vapor;
- b) Validade da equação de Gibbs para condições de não-equilíbrio;
- c) Validade das leis fenomenológicas lineares;
- d) Validade das relações fundamentais de Onsager;
- e) Sólido contínuo e isotrópico;
- f) A água migra nas fases líquida e vapor;
- g) A razão de transferência de calor e massa é mais lenta que a razão de mudança de fase;
- h) Validade do princípio de Curie.

O princípio de Curie não permite a interação e acoplamento de quantidades que são características tensoriais diferentes. Portanto, este princípio não permite o acoplamento entre difusão e reação química; apesar de tal princípio ter sido sujeito a críticas (Lavenda, 1978). Maiores detalhes sobre este princípio podem ser encontrados em Luikov (1966).

Segundo Fortes e Okos (1981), a diferença fundamental entre sua teoria e as anteriores, é que a força motriz para a transferência isotérmica, tanto do líquido quanto do vapor, é um gradiente do teor de umidade de equilíbrio e não do teor de umidade, sendo isto devido à hipótese de equilíbrio local. A força motriz para a transferência de líquido e vapor é o gradiente do potencial químico, que por sua vez é função da temperatura, da umidade relativa e do teor de umidade de equilíbrio. Neste modelo, é postulado que a água em meios capilares porosos pode até mover-se no sentido contrário ao gradiente do teor de umidade, mas sempre na direção do gradiente do teor de umidade de equilíbrio. Assim, o teor de umidade de equilíbrio é apresentado como uma escolha mais natural para o potencial de transporte de massa que simplesmente o teor de umidade. Segue todo o equacionamento apresentado por Fortes e Okos (1981), por conveniência, haja vista que será usada nesta pesquisa de forma modificada e ampliada.

O teorema de Onsager somente é válido se as seguintes relações existem entre a produção de entropia, σ , os fluxos, \bar{J}_i , e as forças termodinâmicas, \bar{X}_i :

$$\sigma = \frac{dS_i}{dt} = \sum_i \bar{J}_i \bar{X}_i \quad (3.1)$$

A expressão para a produção de entropia é:

$$\sigma = \bar{J}_u \bar{X}_u + \sum_k \bar{J}_k \bar{X}_k \quad (3.2)$$

onde:

\bar{J}_u = fluxo de energia;

$\bar{X}_u = -\frac{1}{T^2} \nabla T$ = força conjugada associada ao fluxo de energia \bar{J}_u ;

\bar{J}_k = fluxo de massa dos componentes k em relação ao centro de gravidade;

$\bar{X}_k = \frac{1}{T} \left(\bar{F}_k - TV \left(\frac{\mu_k}{T} \right) \right)$ = força conjugada associada a \bar{J}_k ;

\bar{F}_k = forças externas no componente k;

∇ = nabla;

T = temperatura, K.

μ_k = potencial químico na componente k (J/kg)

É mais conveniente empregar o fluxo de calor ao invés do fluxo de energia e , por esta razão, uma mudança de fluxos e forças é desejável. A prova da invariância do caráter simétrico da matriz L_{jk} ou, em outras palavras, a validade das relações de Onsager, sob transformações lineares de forças e fluxos, mantendo a produção de entropia, dS_i/dt invariante, é dada por DeGroot (1951).

Portanto a expressão para o fluxo de calor, \bar{J}_q pode ser escrita como:

$$\bar{J}_q = \bar{J}_u - \sum_k h_k \bar{J}_k \quad (3.3)$$

Introduzindo estas transformações na Equação (3.2), as seguintes forças motrizes são obtidas:

$$\bar{X}_q = \bar{X}_u = -\frac{1}{T^2} \nabla T \quad (3.4)$$

e

$$\bar{X}_k = X_k^1 + h_k \bar{X}_u = \frac{1}{T} (\bar{F}_k - (\nabla \mu_k)_T) \quad (3.5)$$

Onde se utilizou a seguinte relação termodinâmica na obtenção da Equação (3.5):

$$(\nabla \mu_k)_T = \nabla \mu_k - X_k \nabla T \quad (3.6)$$

Denotando por ℓ e v as fases líquida e de vapor, respectivamente, as Equações gerais para o transporte de calor e massa podem ser escritas como:

$$\bar{J}_q = L_{qq} \bar{X}_q + L_{q\ell} \bar{X}_\ell + L_{qv} \bar{X}_v \quad (3.7)$$

$$\bar{J}_\ell = L_{\ell q} \bar{X}_q + L_{\ell\ell} \bar{X}_\ell + L_{\ell v} \bar{X}_v \quad (3.8)$$

$$\bar{J}_v = L_{vq} \bar{X}_q + L_{v\ell} \bar{X}_\ell + L_{vv} \bar{X}_v \quad (3.9)$$

onde:

$$\bar{X}_q = -\frac{1}{T^2} \nabla T \quad (3.10)$$

$$\bar{X}_\ell = \frac{1}{T} (\vec{g} - (\nabla \mu)_T) \quad (3.11)$$

$$\bar{X}_v = \frac{1}{T} (\vec{g} - (\nabla \mu)_T) \quad (3.12)$$

A partir da condição de equilíbrio local, tem-se que:

$$\mu_\ell = \mu_v = \mu \quad (3.13)$$

As Equações para as forças motrizes podem ser escritas na seguinte forma:

$$\bar{X}_m = \bar{X}_\ell = \bar{X}_v = \frac{1}{T} (\vec{g} - (\nabla \mu)_T) \quad (3.14)$$

Portanto, propõe-se que as forças motrizes para o transporte tanto de líquido quanto de vapor sejam as mesmas. Além disso, deve ser notado que estas forças motrizes dependem do $(\nabla \mu)_T$ e não de $\nabla \mu$.

O potencial químico total da água em um meio capilar-poroso pode ser escrito como a soma de potenciais químicos individuais:

$$\nabla \mu = \nabla \mu_s + \nabla \mu_p + \nabla \mu_o + \nabla \mu_F \quad (3.15)$$

onde, $\nabla\mu_s$, denota o componente do potencial químico, devido à tensão superficial e raio de curvatura da interface água-ar; $\nabla\mu_p$, o componente devido à pressão hidrostática da umidade adjacente à superfície da partícula causada por forças de adsorção rodeando a partícula (excluindo o efeito da tensão superficial) e por qualquer pressão transmitida de fontes externas; $\nabla\mu_o$, o componente devido à pressão osmótica do material dissolvido e, $\nabla\mu_F$, o potencial químico da água devido a sua posição no campo de adsorção, rodeando as partículas intersticiais, como também devido ao campo gravitacional.

Em virtude da complexidade da Equação (3.15), pode-se concluir que a aceitação de uma das expressões isoladas das teorias de difusão líquida, capilaridade ou vaporização-condensação é uma simplificação exagerada para o problema em vista, de uma maneira geral.

Qualquer mudança no potencial químico resulta numa mudança da pressão de vapor e, conseqüentemente, da umidade relativa de equilíbrio no interior do meio poroso. Admitindo que a mistura de ar e vapor é uma mistura de gases perfeitos, a seguinte expressão, relacionando o potencial químico total do vapor d'água em equilíbrio com a água líquida nos capilares, é postulada ser válida para toda a isoterma:

$$\mu_v - \mu_{v0} = R_v T \ln \left(\frac{P_v}{P_{v0}} \right) = R_v T \ln H \quad (3.16)$$

onde, μ_{v0} é função somente da temperatura. H deve ser tomado como a umidade relativa de equilíbrio no interior de um meio capilar-poroso e pode ser medido através de técnicas-padrão. Todos os componentes do potencial químico da Equação (3.15) devem refletir seus efeitos nos fatores que afetam a umidade relativa de equilíbrio. Exceção deve ser feita às pressões não-hidrostáticas.

Uma vez que:

$$H = H(M, T) \quad (3.17)$$

pode-se imediatamente concluir, após derivação direta da Equação (3.17), que:

$$(\nabla H)_T = \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M \quad (3.18)$$

E, das Equações (3.13), (3.16) e (3.18), obtém-se:

$$(\nabla \mu)_T = \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M \quad (3.19)$$

onde M deve ser tomado como o teor de umidade de equilíbrio em qualquer local no interior do meio poroso.

Substituindo as Equações (3.10), (3.11), (3.12), (3.14) e (3.19) nas Equações (3.7), (3.8) e (3.9), chega-se a um conjunto mais explícito de equações para os fluxos de calor, vapor e água líquida, como segue:

$$\bar{J}_q = -\frac{L_{qq}}{T^2} \nabla T - (L_{q\ell} + L_{qv}) \frac{R_v}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \frac{(L_{q\ell} + L_{qv})}{T} \vec{g} \quad (3.20)$$

$$\bar{J}_v = -\frac{L_{vq}}{T^2} \nabla T - (L_{v\ell} + L_{vv}) \frac{R_v}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \frac{(L_{v\ell} + L_{vv})}{T} \vec{g} \quad (3.21)$$

$$\bar{J}_\ell = -\frac{L_{\ell q}}{T^2} \nabla T - (L_{\ell\ell} + L_{\ell v}) \frac{R_v}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \frac{(L_{\ell\ell} + L_{\ell v})}{T} \vec{g} \quad (3.22)$$

• Abordagem mecânica

Esta abordagem é essencial para a obtenção dos coeficientes fenomenológicos. Postula-se a igualdade entre o potencial químico e o potencial de água (sucção). Postula-se a expressão para o fluxo de líquido como segue:

$$\bar{J}_\ell = -\rho_\ell k_\ell \nabla \mu \quad (3.23)$$

onde:

ρ_ℓ - densidade

k_ℓ - condutividade líquida

$\nabla\mu$ - potencial químico

A Equação (3.23) define a condutividade líquida k_ℓ . O potencial químico é tomado como sendo a força-motriz para a transferência de massa em condições isotérmicas ou não isotérmicas. A Equação (3.23) pode ser escrita de uma forma mais conveniente, para o presente estudo, na forma:

$$\bar{J}_\ell = -\rho_\ell k_\ell \frac{\partial\mu}{\partial T} \nabla T - \rho_\ell k_\ell \frac{\partial\mu}{\partial H} \nabla H \quad (3.24)$$

Por outro lado, usando as Equações (3.16), (3.24) e a relação (3.17), substituindo na Equação (3.23) e acrescentando o efeito da gravidade, obtêm-se:

$$\bar{J}_\ell = -\rho_\ell k_\ell R_v \ell n H \nabla T - \rho_\ell k_\ell \left(\frac{R_v T}{H} \right) \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \rho_\ell k_\ell \bar{g} \quad (3.25)$$

Esta é uma expressão generalizada para a equação de Darcy. A expressão para o fluxo de vapor é a mesma utilizada por Fortes (1978) e adaptada a partir das expressões clássicas (Philip e De Vries, 1957; Krischer, 1963, Luikov, 1966a):

$$\bar{J}_v = -\varepsilon a \frac{P}{P - P_v} D_{\text{atm}} \nabla \rho_v \quad (3.26)$$

Onde \bar{J}_v = Fluxo de vapor, kg/sm^2 ; ε é a tortuosidade; a é o conteúdo volumétrico de ar em meio poroso, m^3/m^3 ; P , P_v é a pressão total, N/m^2 e a pressão parcial de vapor, N/m^2 ; D_{atm} é o coeficiente de difusão molecular da água no ar, m^2/s e ρ_v é a densidade, kg/m^3 .

Define-se a condutividade de vapor como sendo:

$$k_v = -\varepsilon a \frac{P}{P - P_v} D_{\text{atm}} \quad (3.27)$$

Que, pode-se escrever:

$$\vec{J}_v = -k_v \nabla \rho_v \quad (3.28)$$

E que pode ser reescrito na forma:

$$\vec{J}_v = -k_v \nabla \left(\rho_v \frac{\rho_{v0}}{\rho_{v0}} \right) = -k_v (\rho_{v0} \nabla H + H \nabla \rho_{v0}) \quad (3.29)$$

ou ainda, acrescentando o efeito gravitacional, pode-se escrever:

$$\vec{J}_v = -k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \nabla T - k_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \rho_1 k_1 \vec{g} \quad (3.30)$$

A expressão para o fluxo de calor é a Lei de Fourier, com a condutividade térmica redefinida:

$$(\vec{J}_q)_m = -k_T \nabla T \quad (3.31)$$

onde, k_T refere-se à condutividade térmica aparente efetiva do meio poroso, válida para condições que não envolvem transporte de massa.

A inclusão de um termo que inclua o transporte de massa é discutida mais adiante.

• Avaliação dos coeficientes fenomenológicos

Comparando as equações (3.19), (3.22) com as Equações (3.25), (3.30) e (3.31), e fazendo uso das relações de Onsager obtêm-se:

$$L_{qq} = T^2 k_T \quad (3.32)$$

$$L_{q\ell} = L_{\ell q} = T^2 \rho_\ell k_\ell R_v \ell n H \quad (3.33)$$

$$L_{\ell\ell} + L_{\ell v} = T \rho_\ell k_\ell \quad (3.34)$$

$$L_{vq} = L_{qv} = T^2 k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \quad (3.35)$$

$$L_{v\ell} + L_{vv} = \frac{H k_v \rho_{v0}}{R_v} \quad (3.36)$$

Deve ser salientado que $L_{q\ell}$ e L_{qv} , os coeficientes fenomenológico que caracterizam o transporte de calor causado pelos gradientes dos potenciais de vapor e líquido foram obtidos, também, através das relações de Onsager.

Desta forma, por substituição direta destes parâmetros nas Equações (3.20) e (3.22), obtêm-se as equações finais para os fluxos de líquido, vapor e calor, como segue:

$$\begin{aligned} \bar{J}_q = & -k_T \nabla T - \left(\rho_\ell k_\ell R_v \ln H + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right) \frac{R_v T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \\ & + T \left(\rho_\ell k_\ell R_v \ln H + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right) \bar{g} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\bar{J}_\ell = -\rho_\ell k_\ell R_v \ln H \nabla T - \rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \rho_\ell k_\ell \bar{g} \quad (3.38)$$

$$\bar{J}_v = -k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \nabla T - k_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + \left(\frac{H k_v \rho_{v0}}{T R_v} \right) \bar{g} \quad (3.39)$$

onde \bar{J}_ℓ é o fluxo de líquido; ρ_ℓ é a massa específica do sólido seco; k_ℓ é a condutividade do líquido; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$ (gradiente em coordenadas cartesianas); \bar{J}_q é o fluxo de calor; H é a umidade relativa decimal; M é o teor de umidade (b.s); R_v é a constante do gás para o vapor; \bar{J}_v é o fluxo de vapor; k_v é a condutividade de vapor.

Postula-se a validade destas equações para quaisquer meios porosos, saturados ou não saturados, para condições onde o efeito de filtração (transporte molar) seja desprezível.

• Equações de conservação

Admitindo-se a inexistência de gelo e que a massa de ar seja desprezível, equações diferenciais para a transferência de massa aplicada às fases de vapor e líquido, presentes no sistema levam a:

$$\frac{\partial(\rho_s M_\ell)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}_\ell + \dot{M}_{ev} \quad (3.40)$$

e

$$\frac{\partial(\rho_s M_v)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}_v + \dot{M}_{ev} \quad (3.41)$$

onde \dot{M}_{ev} é a taxa de evaporação de umidade.

Se a massa de vapor (mas não o seu fluxo) é também suposta ser desprezível em relação à M_ℓ (Luikov, 1968b), a Equação de conservação de massa para um volume de controle elementar torna-se:

$$\frac{\partial(\rho_s M)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{J}_\ell + \vec{J}_v) \quad (3.42)$$

onde $M = M_\ell + M_v \approx M_\ell$.

Se o encolhimento do meio é desprezível, a massa específica do esqueleto sólido do meio é constante e a Equação (3.42) torna-se:

$$\rho_s \frac{\partial M}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{J}_\ell + \vec{J}_v) \quad (3.43)$$

A Equação (3.43) foi usada por Fortes (1978), para o transporte de massa no interior do grão do trigo.

A equação e balanceamento de energia podem ser obtidos estabelecendo-se que a taxa de variação da entalpia volumétrica do sistema menos o calor de adsorção é igual à divergência do fluxo de entalpia. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h_s \rho_s + h_\ell \rho_s M_\ell + h_v \rho_s M_v - \rho_s \int_0^M h_w dM \right) = -\nabla \cdot (\vec{J}_q + h_\ell \vec{J}_\ell + h_v \vec{J}_v) \quad (3.44)$$

A partir da definição de calor específico e calor de adsorção dado por:

$$C = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (3.45)$$

e

$$h_w = R_v T^2 \frac{\partial \ln H}{\partial T} \quad (3.46)$$

Segue-se que:

$$\begin{aligned} (c_s \rho_s + c_\ell \rho_s M_\ell + c_v \rho_s M_v) \frac{\partial T}{\partial t} + h_\ell \frac{\partial(\rho_s M_\ell)}{\partial t} + h_v \frac{\partial(\rho_s M_v)}{\partial t} - \rho_s h_w \frac{\partial M}{\partial t} = \\ -\nabla \cdot \vec{J}_q - \vec{J}_\ell c_\ell \nabla T - \vec{J}_v c_v \nabla T - h_\ell \nabla \cdot \vec{J}_\ell - h_v \nabla \cdot \vec{J}_v \end{aligned} \quad (3.47)$$

Multiplicando-se as Equações (3.40) e (3.41) por h_ℓ e h_v , respectivamente, adicionando-as e substituindo o resultado na Equação (3.47), obtém-se a forma final da equação de conservação de energia. A Equação resultante é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s h_w M) = -\nabla \cdot \vec{J}_q - \nabla \cdot (h_{fg} \vec{J}_v) - \vec{J}_\ell c_\ell \nabla T - \vec{J}_v c_v \nabla T \quad (3.48)$$

Onde: h_w é o calor diferencial específico de sorção; h_{fg} é o calor latente específico de vaporização; c_p é o calor específico do produto; c_ℓ é o calor específico do líquido; c_v é o calor específico do vapor e,

$$c_b = c_s + c_\ell M_\ell + c_v M_v \text{ é calor específico do meio úmido} \quad (3.49)$$

Se o processo ocorre sem encolhimento e desde que o termo referente ao transporte convectivo de calor é geralmente pequeno em comparação com o termo condutivo, pode-se escrever:

$$\rho_s c_b \frac{\partial T}{\partial t} - \rho_s h_w \frac{\partial M}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{J}_q - h_{fg} \nabla \cdot \bar{J}_v \quad (3.50)$$

Esta foi a Equação para o transporte de calor usada por Fortes (1978).

Sendo assim, as Equações (3.37), (3.39), (3.43) e (3.48) constituem o modelo de Fortes e Okos numa forma mais geral.

Como pode ser constatado, este modelo descreve mais acuradamente a física do problema, no entanto a sua aplicabilidade é grandemente limitada em virtude das equações governantes do fenômeno incluir muitos coeficientes de difícil determinação experimental.

De acordo com os autores, esta metodologia permite verificar a importância relativa dos fluxos de vapor, líquido e calor, levando-se em consideração os gradientes hídrico e térmico, para um determinado processo de transferência de calor e massa que o modelo de difusão líquida simples não apresenta, na condição de secagem. Isto possibilita determinar se existe um fenômeno dominante e no caso afirmativo, se é o de difusão de líquido ou de vapor.

Segundo Fortes (1982) estas equações já foram usadas para analisar a transferência de calor e massa em solos sob regime transiente (Fortes e Okos, 1978); para grãos de feijão preto, (Alvarenga et al., 1980); para secagem de grãos de milho e produtos extrudados (Fortes e Okos, 1981 a-b-c), desidratação de batatas (Fortes e Okos, 1978); para trigo, (Fortes, 1982); para modelagem físico-matemática do processo de seca-aeração de grãos de milho (Fortes e Okos, 1978, 1981b-c).

Contudo, apesar de sua grande importância para a área de secagem de sólidos, o modelo proposto por Fortes e Okos não contempla os efeitos da variação do volume, trincas

do sólido e os termos cruzados na perda de massa e aquecimento do sólido durante o processo de secagem.

Desta forma, a contribuição deste trabalho está relacionada com a inclusão destes efeitos e a aplicação da metodologia a sólidos esferoidais prolatos.

3.2 - A Equação de difusão de massa no sistema de coordenadas esferoidais prolatos

A equação de Fick de difusão de massa em coordenadas cartesianas para o caso tridimensional na sua forma expandida é dada por:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial M}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial M}{\partial z} \right) \quad (3.51)$$

A equação correspondente a esta em condução de calor é a lei de Fourier, que é obtida substituindo M por T (Temperatura) e D por α , a difusividade térmica, assumindo-se que as propriedades térmicas c_p e ρ sejam constantes.

Em diversos problemas físicos, as condições de contorno são tais que os valores de uma função (ou de sua derivada) são especificados em curvas ou superfícies (esferas, cilindros, etc.). Neste caso, o sistema de coordenadas cartesianas não é adequado para solucionar o problema, o que viabiliza a interligação de novos sistemas de coordenadas que sejam convenientes para descrever a fronteira do domínio a ser estudado.

A escolha de um sistema particular de coordenadas deve ser motivada pela forma geométrica do corpo em estudo e resulta numa melhor adequação e validade dos resultados obtidos.

No caso específico de elipsóides de revolução, um sistema de coordenadas que se adequou muito bem à forma do corpo é o esferoidal prolato. Um elipsóide de revolução, em que o eixo de revolução é maior que outro eixo, é chamado esferóide prolato (Figura 3.1). No caso do eixo de revolução ser o menor, o elipsóide é chamado esferóide oblato.

As relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas (x, y, z) e o esferoidal prolato (elíptico) (μ, ϕ, ω) são dadas a seguir (Haji-Sheikh e Sparrow, 1966; Magnus *et al.* 1966; Happel e Brenner, 1991):

$$\begin{aligned} x &= L \operatorname{senh} \mu \operatorname{sen} \phi \cos \omega \\ y &= L \operatorname{senh} \mu \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \omega \\ z &= L \cosh \mu \cos \phi \end{aligned} \quad (3.52a-c)$$

Na Figura 3.1, L é o comprimento focal, e é igual a $\left(L_2^2 - L_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$ sendo L_1 e L_2 os semi-eixos menor e maior da elipse, respectivamente. De acordo com a Figura 3.1, percebe-se que quando $L_2=L_1$, o esferóide será uma esfera; para $L_2 < L_1$, o esferóide é dito oblato e para $L_2 > L_1$ tem-se um esferóide prolato.

Quando a razão de aspecto L_2/L_1 tende para o valor 1,00, a forma do corpo se aproxima de uma esfera e o ponto focal tende para o centro do corpo. Quando $L_2/L_1 \rightarrow \infty$ o ponto focal desloca-se para a superfície do corpo e a forma do corpo se aproxima de um disco circular (Lima, 1999).

No limite, quando a distância interfocal tende a zero ($L_2 \rightarrow L_1$), o sistema de coordenadas esferoidais prolata se reduz o sistema de coordenadas esféricas.

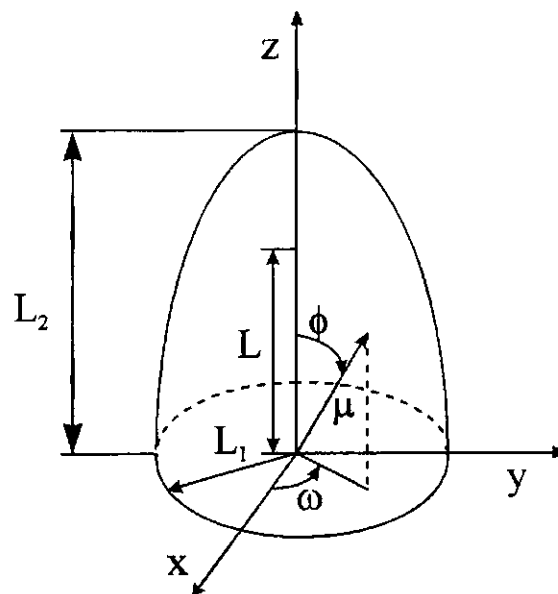


Figura 3.1- Características de um esferóide prolato sólido. Fonte: Lima (1999)

Para expressar a equação de difusão no sistema de coordenadas esferoidais prolato, considere as seguintes variáveis:

$$\xi = \cosh \mu \quad \eta = \cos \phi \quad \zeta = \cos \omega \quad (3.53)$$

Substituindo essas variáveis nas Equações (3.52a-c), têm-se as relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas e o sistema esferoidal prolato (Magnus *et al.*, 1966):

$$\begin{aligned} x &= L \sqrt{(1 - \xi^2)(\eta^2 - 1)} \zeta \\ y &= L \sqrt{(1 - \xi^2)(\eta^2 - 1)} \sqrt{(1 - \zeta^2)} \\ z &= L \xi \eta \end{aligned} \quad (3.54a-c)$$

Para obterem-se as Equações 3.54a-c, utilizaram-se as seguintes relações trigonométricas:

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1 \quad \text{e} \quad \cosh^2 \mu - \sinh^2 \mu = 1 \quad (3.55a-b)$$

O domínio das variáveis ξ , η e ζ (em termos de ω) no sistema esferoidal prolato (Figura. 3.2) é:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \xi \leq L_2/L \\ 0 &\leq \eta \leq 1 \\ 0 &\leq \omega \leq 2\pi \end{aligned} \quad (3.56a-c)$$

A Figura 3.2 verifica-se um detalhamento do sistema de coordenadas esferoidais prolato. As superfícies $\xi = \xi_0$ (constante), $\xi_0 > 1$, são elipsóides de revolução confocais alongados em torno do eixo z. A superfície $\xi = 1$ é a linha reta que une a origem ($z=0$) e o ponto focal ($z=L$). As superfícies $\eta = \eta_0$ (cte), $\eta_0 < 1$, são hiperbolóides de duas capas, com um cone assintótico que é gerado por linhas que passam pela origem e estão inclinadas com um ângulo $\phi = \cos^{-1} \eta$ em relação ao eixo z. A superfície $\eta = 1$ é parte do eixo $z > L$. As superfícies $\omega = \omega_0$ (constante) são planos que passam pelo eixo z e perpendiculares ao plano xy, formando o ângulo ω com o eixo x.

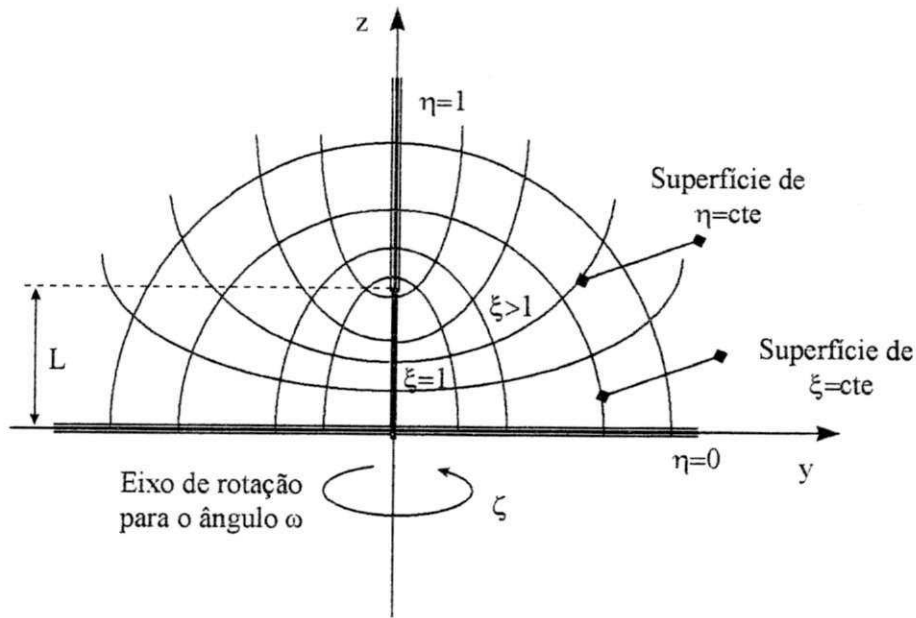


Figura 3.2 - Sistema de coordenadas esferoidais prolata. Fonte: Lima (1999)

Informações adicionais, sobre o sistema esferoidal prolato, podem ser obtidas em Page e Júnior (1938); Page (1944a); Page (1944b); Aoi (1955); Acho (1992); Do-Nhat e MacPhie (1996a) e Do-Nhat e MacPhie (1996b).

Para se obter a equação de difusão no novo sistema de coordenadas, utilizar-se-á a metodologia apresentada por Maliska (2004). A Equação geral de difusão é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \Phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\lambda u \Phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\lambda v \Phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\lambda w \Phi) = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{12} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{13} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{21} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{22} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{23} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{31} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \alpha_{32} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \alpha_{33} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) - P \Phi + S \Phi \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde J é o jacobiano da transformação, e é obtido pela seguinte relação:

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (3.58)$$

onde x , y , e z correspondem às relações da pelas Equações 3.54a-c.

Os coeficientes α_{ij} podem ser calculados, usando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \frac{a'}{J^2}; & \alpha_{22} &= \frac{b'}{J^2}; & \alpha_{33} &= \frac{c'}{J^2}; \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{d'}{J^2}; & \alpha_{31} = \alpha_{13} &= \frac{e'}{J^2}; & \alpha_{32} = \alpha_{23} &= \frac{f'}{J^2};\end{aligned}\tag{3.59a-f}$$

com:

$$\begin{aligned}a' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 \\ b' &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 \\ c' &= \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 \\ d' &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) \\ e' &= \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \\ f' &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\end{aligned}\tag{3.60a-f}$$

Os termos que contém α_{ij} , com $i \neq j$, que aparecem na equação são os termos difusivos referentes à não-ortogonalidade da malha. Desta forma, torna-se necessária a verificação da ortogonalidade do sistema de coordenadas a ser utilizada. As condições necessárias e suficientes para que um sistema de coordenadas seja ortogonal são (MacRobert, 1967):

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0\tag{3.61a}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) = 0 \quad (3.61b)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) = 0 \quad (3.61c)$$

Para que o sistema de coordenadas esférico prolato seja ortogonal estas condições tem que ser satisfeitas, nas variáveis ξ , η e ζ . Isto é verdade (conforme verificado pelo autor deste trabalho). Neste caso, os termos d' , e' e f' das Equações (3.60d-f) são eliminados da Equação (3.57). Na condição do problema ser puramente difusivo, sem termo de geração ou qualquer outro termo fonte, a Equação geral reduz-se a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \Phi}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\alpha_{33} J \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \quad (3.62)$$

Substituindo-se os valores do jacobiano J e dos coeficientes α_{ij} , com $i=j$; re-arranjando os termos, a Equação (3.62), assume a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = & \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

De acordo com a Figura 3.1, existe simetria em torno do eixo z e, este caso tem-se $\partial/\partial\omega=0$, e $\partial/\partial\zeta=0$. Assim, o terceiro termo do lado direito da Equação, se anulará e a Equação (3.63) reduz-se a:

$$\frac{\partial(\lambda\Phi)}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.64)$$

Como esta equação diferencial parcial é de segunda ordem na posição e de primeira ordem no tempo, a sua solução requer no mínimo duas condições de contorno em cada direção e uma condição inicial. São elas:

$$\Phi(\xi, \eta, t=0) = g_1(\xi, \eta) \quad (3.65a)$$

$$\Phi(\xi=L_2/L, \eta, t) = g_2(\eta, t) \quad (3.65b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\xi, \eta=0, t) = g_3(\xi, t), \quad (3.65c)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(\xi=1, \eta, t) = g_4(\eta, t) \quad (3.65d)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\xi, \eta=1, t) = g_5(\xi, t) \quad (3.65e)$$

As relações matemáticas dadas por Magnus *et al.* (1966); Brodkey (1967); Abramowitz e Stegun (1972) e Kreyszig (1988) são usadas para calcular o gradiente de Φ , as áreas de transferência de massa e o volume diferencial do sólido no novo sistema de coordenadas. Estas variáveis são obtidas como segue:

a) Volume diferencial

$$dV = \left(\frac{1}{\hat{U}\hat{V}\hat{W}} \right) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.66)$$

b) Área diferencial de fluxo de Φ

$$\begin{aligned} dS_\xi &= \frac{1}{\hat{V}\hat{W}} d\eta d\zeta \\ dS_\eta &= \frac{1}{\hat{W}\hat{U}} d\zeta d\xi \\ dS_\zeta &= \frac{1}{\hat{U}\hat{V}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.67a-c)$$

c) Gradiente de Φ

$$\nabla\Phi = \text{Grad } \Phi = \left(\hat{U} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \hat{V} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \hat{W} \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right) \quad (3.68)$$

onde os coeficientes métricos são obtidos por:

$$\frac{1}{\hat{U}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \quad (3.69)$$

$$\frac{1}{\hat{V}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.70)$$

$$\frac{1}{\hat{W}^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (3.71)$$

cujo produto de \hat{U} , \hat{V} e \hat{W} dá como resultado o jacobiano da transformação (J).

Com a substituição dos resultados, para $\Phi=M$ tem-se:

$$dV = \frac{L^3 (\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$dS_\xi = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - 1)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\eta d\zeta$$

$$dS_\eta = \frac{L^2 \sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\xi d\zeta$$

$$dS_\zeta = \frac{L^2 (\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} d\xi d\eta$$

$$\nabla\Phi = \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \frac{1}{L} \sqrt{\frac{1 - \zeta^2}{(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right)$$

Baseando-se na metodologia apresentada e considerando desprezíveis os efeitos gravitacionais podem-se escrever as Equações (3.42) e (3.48) como segue:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s M) = -\nabla \cdot \left[\rho \ell k \ell R_v \ln(H) \nabla T - \rho \ell k \ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \nabla T - k_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M \right] \quad (3.72a)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s h_w M) &= \nabla \cdot (k_T \nabla T) + \nabla \cdot \left[\left[\rho \ell k \ell R_v \ln(H) + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right] \left[\frac{R_v T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \right] \nabla M \right] + \\ &\nabla \cdot \left[h_{fg} k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \nabla T \right] + \nabla \cdot \left[h_{fg} k_v \rho_{v0} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) \nabla M \right] + \\ &+ \left[c \rho \ell k \ell R_v \ln(H) + k_v c_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right] \nabla T \cdot \nabla T + \left[c \rho \ell k \ell \frac{R_v T}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) + k_v c_v \rho_{v0} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) \right] \nabla M \cdot \nabla T \quad (3.72b) \end{aligned}$$

Numa forma mais compacta pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s M) = \nabla \cdot \left(\Gamma_1^\Phi \nabla M \right) + \nabla \cdot \left(\Gamma_2^\Phi \nabla T \right) \quad (3.73a)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_s h_w M) &= \nabla \cdot \left(\Gamma_3^\Phi \nabla T \right) + \nabla \cdot \left(\Gamma_4^\Phi \nabla M \right) + \\ &+ \nabla \cdot \left(\Gamma_5^\Phi \nabla T \right) + \nabla \cdot \left(\Gamma_6^\Phi \nabla M \right) + \Gamma_7^\Phi \nabla T \cdot \nabla T + \Gamma_8^\Phi \nabla M \cdot \nabla T \quad (3.73b) \end{aligned}$$

onde:

$$\Gamma_1^\Phi = \left(\rho \ell k \ell \frac{R_v T}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) + k_v \rho_{v0} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) \right);$$

$$\Gamma_2^\Phi = \left(\rho \ell k \ell R_v \ln(H) + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right);$$

$$\Gamma_3^\Phi = k_T;$$

$$\Gamma_4^\Phi = \left[\rho \ell k \ell R_v \ln(H) + k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right] \left[\frac{R_v T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \right];$$

$$\Gamma_5^\Phi = h_{fg} k_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \frac{d\rho_{v0}}{dT} \right);$$

$$\Gamma_6^\Phi = h_{fg} k_v \rho_{v0} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right);$$

$$\Gamma_7^\Phi = c_{\ell} \rho_{\ell} k_{\ell} R_v \ln(H) + k_v c_v \left(\rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial T} + H \left(\frac{d\rho_{v0}}{dT} \right) \right);$$

$$\Gamma_8^\Phi = c_{\ell} \rho_{\ell} k_{\ell} \frac{R_v}{H} \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right) + k_v c_v \rho_{v0} \frac{\partial H}{\partial M}.$$

Escrevendo as Equações (3.73a) e (3.73b) no sistema de coordenadas esferoidal prolato, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_s M)}{\partial t} = & \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \Gamma_2^\Phi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_2^\Phi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (3.74a)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s h_w M) = & \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[(\xi^2 - 1) \Gamma_3^\Phi \right] \frac{\partial T}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[(1 - \eta^2) \Gamma_3^\Phi \right] \frac{\partial T}{\partial \eta} \right\} + \\ & + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \left[(\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_3^\Phi \right] \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right\} + \frac{1}{L^2(\xi^2 - 1)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[(\xi^2 - 1) \Gamma_4^\Phi \right] \frac{\partial M}{\partial \xi} \right\} + \\ & + \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[(1 - \eta^2) \Gamma_4^\Phi \right] \frac{\partial M}{\partial \eta} \right\} + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \left[(\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_4^\Phi \right] \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[(\xi^2 - 1) \Gamma_5^\Phi \right] \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[(1 - \eta^2) \Gamma_5^\Phi \right] \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right\} + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \left[(\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_5^\Phi \right] \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} \right\} + \\
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[(\xi^2 - 1) \Gamma_6^\Phi \right] \frac{\partial M}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[(1 - \eta^2) \Gamma_6^\Phi \right] \frac{\partial M}{\partial \eta} \right\} + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{L^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \left[(\sqrt{1 - \zeta^2}) \Gamma_6^\Phi \right] \frac{\partial M}{\partial \zeta} \right\} + \\
& + \Gamma_7^\Phi \left[\left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \eta^2)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \zeta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} \right)^2 \right] + \\
& + \Gamma_7^\Phi \left[\left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \eta^2)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \zeta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta} \right)^2 \right] + \\
& + \Gamma_8^\Phi \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \right)^2 \frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} + \Gamma_8^\Phi \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \eta^2)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \right)^2 \frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} + \\
& + \Gamma_8^\Phi \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(1 - \zeta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \right)^2 \frac{\partial M}{\partial \zeta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \zeta}
\end{aligned} \tag{3.74b}$$

Para o caso bidimensional e devido a simetria do sólido, $\frac{\partial}{\partial \zeta} = 0$, então se obtém:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho_s M)}{\partial t} &= \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_1^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] + \\
& + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \Gamma_2^\Phi \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right) \right] + \left[\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \Gamma_2^\Phi \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.75a}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s c_b T) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s h_w M) &= \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \Gamma_3^\Phi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_3^\Phi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] \right\} + \\
\frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} &\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \Gamma_5^\Phi \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_5^\Phi \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right] \right\} + \frac{\Gamma_7^\Phi}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[(\xi^2 - 1) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right)^2 + (1 - \eta^2) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\
\frac{\Gamma_8^\Phi}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} &\left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \frac{\partial M}{\partial \xi} + (1 - \eta^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \frac{\partial M}{\partial \eta} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \Gamma_4^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_4^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \Gamma_6^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \Gamma_6^\Phi \frac{\partial M}{\partial \eta} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.75b}$$

Para determinar a perda de umidade no processo de secagem, torna-se necessário determinar o teor de umidade médio sob todo o volume do elipsóide. Sabe-se também que o teor de umidade no interior do sólido durante o estado transiente é uma função da posição e do tempo, logo, pode-se encontrar para o sólido um teor de umidade médio. Este teor de umidade médio é dado por (Whitaker, 1980):

$$\bar{M} = \frac{1}{V} \int_V M dV \tag{3.76a}$$

A temperatura média é dada por:

$$\bar{T} = \frac{1}{V} \int_V T dV \tag{3.76b}$$

3.3 - Resolução numérica das equações governantes

Obter uma solução analítica de uma equação diferencial parcial com alto nível de complexidade é muitas vezes difícil, principalmente em casos onde existem não-linearidades. Nestes casos, uma solução analítica pode ser usada para prever o fenômeno. Tendo em vista o avanço das técnicas computacionais que geram alternativas viáveis para analisar problemas de grande complexidade, vários métodos numéricos têm sido utilizados, tais como diferenças finitas, elementos finitos, elementos de fronteira e volumes finitos. Várias discussões sobre cada um destes métodos podem ser encontradas (Patankar, 1980; Shih, 1984; Minkowicz *et al.*, 1988; Brebbia, 1989, Versteeg e Malalasekera, 1995 e Maliska, 2004). Em particular, com o objetivo de otimizar a solução para o problema de difusão transiente, esta seção sumariza uma metodologia, desenvolvida neste trabalho, para a solução numérica do problema de difusão em corpos elipsoidais, utilizando-se do conceito de volumes finitos.

O método de volumes finitos requer o desenvolvimento de equações elementares, a partir da equação diferencial governante do problema. O conceito fundamental do método de volumes finitos é que qualquer quantidade continua pode ser aproximada por um modelo discreto composto de um conjunto de funções contínuas em degraus ou lineares, definidas sob um número finito de subdomínios. Os subdomínios são chamados de volumes de controle e os pontos nodais de centróide do volume de controle. Esta formulação numérica tem sido utilizada na resolução de problemas de transferência de calor e massa, em diversas geometrias.

Na simulação do fenômeno de difusão em esferóide prolato sólido, foi utilizado um domínio computacional devido à simetria que existe no corpo (Figura 3.3). Desde que a equação diferencial parcial é do tipo elíptica, as condições de contorno devem ser especificadas em toda a fronteira do domínio. Além disso, pode ser observado que existe simetria nos quatro quadrantes do elipsóide formados pelos planos que passam pelos pontos $(x=0; y=0; z=0)$ e $(x=0; y=0; z=L)$. Particularmente no plano em que $\omega=90^\circ$, ocorre simetria em cada quadrante da elipse. Desta forma optou-se por adotar neste trabalho como domínio computacional o quadrante $y \geq 0$ e $z \geq 0$ no plano $\omega=90^\circ$.

Na Figura 3.3a, são mostradas linhas de ξ e η constantes, que delimitam o volume de controle associado ao ponto nodal P. Os pontos N, S, E e W são os seus pontos nodais vizinhos, norte, sul, leste e oeste, respectivamente, na nomenclatura usual. Na Figura 3.3b, são mostradas as faces do volume de controle e, w, n e s, ao redor do ponto P; as dimensões do volume de controle, $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$, bem como as distâncias entre o ponto P e seus vizinhos adjacentes.

Como foi demonstrado anteriormente, o sistema esferoidal prolato é ortogonal. Segundo Patankar (1980), esta ortogonalidade do sistema de coordenadas, e, portanto da malha numérica, é essencial para a aplicação do método de volumes finitos: quando se calcula o fluxo de Φ através da face do volume de controle, a face deve ser normal à linha que une os dois pontos nodais (por exemplo, linha PN, na Figura 3.3b).

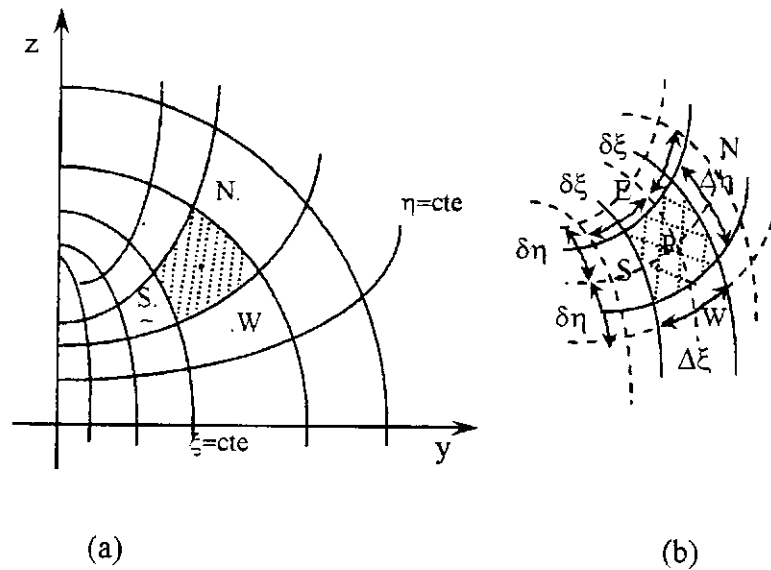


Figura 3.3 - Configuração geométrica do problema físico

A equação de difusão em coordenadas elípticas é resolvida numericamente utilizando o método de volumes de controle finitos, usando a prática B. Neste esquema, os pontos nodais estão centrados no volume de controle e a malha adotada possui volumes inteiros em todo o domínio, (Patankar, 1980 e Maliska, 2004). O procedimento foi preferido por duas razões: porque facilita a generalização da determinação dos coeficientes e por que simplifica a aplicação das condições de contorno. Aliado a estas características, o uso da prática B elimina o problema de singularidade das Equações (3.75a-b) que ocorre nos pontos $(\xi=1; \eta)$ e $(\xi; \eta=1)$.

Reescrevendo a Equação 3.75a tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_1 \phi_1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) + S_1^\phi \quad (3.77a)$$

onde:

$$S_1^\phi = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} J \Gamma_2^\phi \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma_2^\phi \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \quad (3.77b)$$

Assumindo-se uma formulação completamente implícita, isto é, todos os termos difusivos da equação são avaliados no instante $t+\Delta t$, a equação (3.77a), integrada sobre o

volume de controle (Figura 3.1), que corresponde aos pontos internos do domínio, e no tempo, será:

$$\int_{v_i} \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda \phi_1}{J} \right) dt dv = \int_{v_i} \int \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\alpha_{11} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) \right] dt dv + \int_{v_i} \int \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} J \Gamma_1^\phi \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) dt dv + \int_{v_i} \int S_1^\phi dt dv \quad (3.78a)$$

Dando como resultado:

$$\frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\lambda_p \phi_{1p} - \lambda_p^o \phi_{1p}^o}{\Delta t} \right] = \left[\left(D_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] + \hat{S}_1^\phi \quad (3.78b)$$

onde:

$$\hat{S}_1^\phi = \left[\left(D_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{44} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{44} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \quad (3.78c)$$

Assumiu-se que a integração da variável Φ no tempo é obtida a partir de um perfil do tipo degrau. Nas Equações, 3.78a-c os coeficientes D_{ij} e o jacobiano são dados por:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \Gamma_1^\phi J \alpha_{11} \Delta \eta \Delta \zeta; & D_{22} &= \Gamma_1^\phi J \alpha_{22} \Delta \xi \Delta \zeta; & \Delta V &= \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \\ D_{33} &= \Gamma_2^\phi J \alpha_{11} \Delta \eta \Delta \zeta; & D_{44} &= \Gamma_2^\phi J \alpha_{22} \Delta \xi \Delta \zeta; & J^{-1} &= \frac{L^3 (\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.79 \text{ a-h}) \\ \alpha_{11} &= \frac{L^4 (\xi^2 - 1) (\xi^2 - \eta^2)}{(1 - \zeta^2)} & \alpha_{22} &= \frac{L^4 (1 - \eta^2) (\xi^2 - \eta^2)}{(1 - \zeta^2)} \end{aligned}$$

A opção pelo uso do procedimento implícito baseia-se no fato de ser incondicionalmente estável. Entretanto, usar esta formulação não significa trabalhar com qualquer intervalo de tempo, pois o problema de acoplamento pode limitar com grande intensidade o Δt . Recomendam-se estudos de refino de tempo para determinar o intervalo de tempo mais apropriado.

Para o problema físico proposto têm-se apenas efeitos difusivos, então é mais simples utilizar uma função linear como função de interpolação espacial entre os pontos nodais. Assim, as derivadas diretas relativas ao fluxo difusivo, referentes à Figura 3.3, são avaliados, por exemplo:

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right|_n = \frac{\phi_{1N} - \phi_{1P}}{\delta \xi_n} \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right|_s = \frac{\phi_{1P} - \phi_{1S}}{\delta \xi_s} \quad (3.80a-d)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right|_e = \frac{\phi_{1E} - \phi_{1P}}{\delta \eta_e} \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right|_w = \frac{\phi_{1P} - \phi_{1W}}{\delta \eta_w}$$

Analogamente faz-se para $\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right|_n$; $\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right|_s$; $\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right|_e$; $\left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right|_w$. Na equação (3.78b) $\phi_1 = M$ e $\phi_2 = T$.

Aplicando as respectivas derivadas nas interfaces do volume de controle, fazendo as demais substituições dos coeficientes J_p , ΔV e D_{ij} , $i=j$, reorganizando e rearranjando os termos comuns, pode-se escrever a Equação 3.78b, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V \lambda_p \phi_{1P}}{J_p \Delta t} - \frac{\Delta V \lambda_p^o \phi_{1P}^o}{J_p \Delta t} = & D_{11} \left(\frac{\phi_{1N} - \phi_{1E}}{\delta \xi_n} \right) - D_{11} \left(\frac{\phi_{1P} - \phi_{1S}}{\delta \xi_s} \right) + D_{22} \left(\frac{\phi_{1E} - \phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) - \\ & - D_{22} \left(\frac{\phi_{1P} - \phi_{1W}}{\delta \eta_w} \right) + D_{33} \left(\frac{\phi_{2N} - \phi_{2P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{33} \left(\frac{\phi_{2P} - \phi_{2S}}{\delta \xi_s} \right) + D_{44} \left(\frac{\phi_{2E} - \phi_{2P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{44} \left(\frac{\phi_{2P} - \phi_{2W}}{\delta \eta_w} \right) \end{aligned} \quad (3.81a)$$

ou ainda, na forma linear como segue:

$$A_{1P} \phi_{1P} = A_{1N} \phi_{1N} + A_{1S} \phi_{1S} + A_{1E} \phi_{1E} + A_{1W} \phi_{1W} + A_{1P}^o \phi_{1P}^o + \hat{S}_{1C}^\phi \quad (3.81b)$$

sendo:

$$\hat{S}_{1C}^\phi = B_{1N} \phi_{2N} + B_{1S} \phi_{2S} + B_{1E} \phi_{2E} + B_{1W} \phi_{2W} - B_{1P} \phi_{2P} \quad (3.81c)$$

com:

$$\begin{aligned}
 A_N &= \frac{\Gamma_{1n}^\phi L (\xi_n^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}} & A_S &= \frac{\Gamma_{1s}^\phi L (\xi_s^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s \sqrt{1 - \zeta_s^2}} & A_E &= \frac{\Gamma_{1e}^\phi L (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e \sqrt{1 - \zeta_e^2}} \\
 A_W &= \frac{\Gamma_{1w}^\phi L (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w \sqrt{1 - \zeta_w^2}} & A_P &= A_N + A_S + A_E + A_W + \frac{\lambda_p \Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t \sqrt{1 - \zeta_p^2}} \\
 B_{1N} &= \frac{\Gamma_{2n}^\phi L (\xi_n^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}} & B_{1S} &= \frac{\Gamma_{2s}^\phi L (\xi_s^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s \sqrt{1 - \zeta_s^2}} \\
 B_{1E} &= \frac{\Gamma_{2e}^\phi L (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e \sqrt{1 - \zeta_e^2}} & B_{1W} &= \frac{\Gamma_{2w}^\phi L (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w \sqrt{1 - \zeta_w^2}} \\
 B_{1P} &= B_N + B_S + B_E + B_W
 \end{aligned}$$

Sendo assim, substituindo $\phi_1 = M$ e $\phi_2 = T$, pode-se escrever:

$$A_P M_P = A_N M_N + A_S M_S + A_E M_E + A_W M_W + A_P^0 M_P^0 + S_{1C}^\Phi \quad (3.82a)$$

com:

$$\hat{S}_{1C}^\Phi = B_N T_N + B_S T_S + B_E T_E + B_W T_W - B_P T_P \quad (3.82b)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_N &= \frac{\Gamma_{1n}^\phi L (\xi_n^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n} & A_S &= \frac{\Gamma_{1s}^\phi L (\xi_s^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s} & A_E &= \frac{\Gamma_{1e}^\phi L (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e} \\
 A_W &= \frac{\Gamma_{1w}^\phi L (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w} & A_P &= A_N + A_S + A_E + A_W + \frac{\lambda_p^0 \Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \\
 B_N &= \frac{\Gamma_{2n}^\phi L (\xi_n^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n} & B_S &= \frac{\Gamma_{2s}^\phi L (\xi_s^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s}
 \end{aligned}$$

$$B_E = \frac{\Gamma_{2e}^\phi L (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e}$$

$$B_W = \frac{\Gamma_{2w}^\phi L (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w}$$

$$B_P = B_N + B_S + B_E + B_W$$

$$A_P^\phi = \frac{\lambda_p^\phi \Delta \xi \Delta \eta L^3 (\xi_p^2 - \eta_p^2)}{\Delta t}$$

onde os Γ_i^ϕ são dadas na Equação (3.73) e $\lambda = \rho_s$.

Semelhante para a Equação (3.75b) tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_2 \Phi_2}{J} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \Gamma_3^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \Gamma_3^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \Gamma_5^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \Gamma_5^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) + S_2^\phi \end{aligned} \quad (3.83a)$$

onde o termo fonte é dado por:

$$\begin{aligned} S_2^\phi &= \alpha_{11} \Gamma_7^\phi \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right)^2 + \alpha_{22} \Gamma_7^\phi \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 + \alpha_{11} \Gamma_8^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \alpha_{22} \Gamma_8^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} + \\ &\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \Gamma_4^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \Gamma_4^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \Gamma_6^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \Gamma_6^\phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_1 \Phi_1}{J} \right) \end{aligned} \quad (3.83b)$$

Integrando a Equação (3.83a), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \iint_{v_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_2 \Phi_2}{J} \right) dv dt &= \iint_{v_t} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \Gamma_3^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) dv dt + \iint_{v_t} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \Gamma_3^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) dv dt + \\ &+ \iint_{v_t} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \Gamma_5^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) dv dt + \iint_{v_t} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \Gamma_5^\phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) dv dt + \iint_{v_t} S_2^\phi dv dt \end{aligned} \quad (3.84a)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\int \int_{v,t} S_2^\Phi dvdt &= \int \int_{v,t} \left[\alpha_{11} \Gamma_7^\Phi \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right)^2 \right] dvdt + \int \int_{v,t} \left[\alpha_{22} \Gamma_7^\Phi \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] dvdt + \\
&+ \int \int_{v,t} \left[\alpha_{11} \Gamma_8^\Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right] dvdt + \int \int_{v,t} \left[\alpha_{22} \Gamma_8^\Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right] + \\
&+ \int \int_{v,t} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \Gamma_4^\Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \right] dvdt + \int \int_{v,t} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \Gamma_4^\Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \right] dvdt + \\
&+ \int \int_{v,t} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha_{11} \Gamma_6^\Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \right] dvdt + \int \int_{v,t} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha_{22} \Gamma_6^\Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \right] dvdt + \int \int_{v,t} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\lambda_1 \Phi_1}{J} \right) \right] dvdt
\end{aligned} \tag{3.84b}$$

O resultado da integração das Equações (3.83a) e (3.83b) é:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{J_p} [\lambda_{2P} \Phi_{2P} - \lambda_{2P}^0 \Phi_{2P}^0] &= \left[\left(D_{aa} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{aa} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta t + \\
\left(D_{bb} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left[\left(D_{bb} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \Delta t &+ \left[\left(D_{cc} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{cc} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta t + \\
\left(D_{dd} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left[\left(D_{dd} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \Delta t &+ \hat{S}_2^\Phi
\end{aligned} \tag{3.85a}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_2^\Phi &= \left[D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right] \Delta t + \\
\left[D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2e}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2e}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right] \Delta t &+ \\
\left[D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right] \Delta t &+ \\
+ \left[D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right] \Delta t &+ \\
+ \left[\left(D_{kk} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{kk} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta t &+ \left[\left(D_{ll} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{ll} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \Delta t + \frac{\Delta V}{J_p} [\lambda_{1P} \Phi_{1P} - \lambda_{1P}^0 \Phi_{1P}^0]
\end{aligned} \tag{3.85b}$$

as derivadas e parâmetros são dados como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \Big|_n &= \frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_e} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \Big|_s &= \frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1s}}{\delta \xi_s} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \Big|_e &= \frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \Big|_w &= \frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1w}}{\delta \eta_w} & \Phi_1 &= M; \Phi_2 = T & \lambda_1 &= \rho_s h_w; \lambda_2 = \rho_s c_b \\ \Delta V &= \Delta \xi \Delta \eta & J^{-1} &= \frac{L^3 (\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} & c_b &= c_s + c_\ell M_\ell + c_v M_v \end{aligned}$$

Analogamente faz-se para: $\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \Big|_n; \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \Big|_s; \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \Big|_e; \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \Big|_w$. Substituindo estes

resultados na Equação (3.85a), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{J_p} [\lambda_{2P} \Phi_{2P}] - \frac{\Delta V}{J_p} [\lambda_{2P}^0 \Phi_{2P}^0] &= \left[D_{aa} \left(\frac{\Phi_{2N} - \Phi_{2P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{aa} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2S}}{\delta \xi_s} \right) \right] \Delta t + \\ &+ \left[D_{bb} \left(\frac{\Phi_{2E} - \Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{bb} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2W}}{\delta \eta_w} \right) \right] \Delta t + \left[D_{cc} \left(\frac{\Phi_{2N} - \Phi_{2P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{cc} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2S}}{\delta \xi_s} \right) \right] \Delta t \\ &+ \left[D_{dd} \left(\frac{\Phi_{2E} - \Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{dd} \left(\frac{\Phi_{2P} - \Phi_{2W}}{\delta \eta_w} \right) \right] \Delta t + \\ &+ \left[D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right] \Delta t + \\ &+ \left[D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right] \Delta t + \tag{3.86} \\ &+ \left[D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - 2D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} + D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}}{\delta \xi_n} \right] \Delta t + \\ &+ \left[D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - 2D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} + D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}}{\delta \eta_e} \right] \Delta t + \\ &+ \left[D_{ii} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{ii} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1S}}{\delta \xi_n} \right) \right] \Delta t + \left[D_{jj} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{jj} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1W}}{\delta \eta_w} \right) \right] \Delta t + \\ &+ \left[D_{kk} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) - D_{kk} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1S}}{\delta \xi_n} \right) \right] + \\ &+ \left[D_{\ell\ell} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) - D_{\ell\ell} \left(\frac{\Phi_{1P} - \Phi_{1W}}{\delta \eta_w} \right) \right] \Delta t + \frac{\Delta V}{J_p} [\lambda_{1P} \Phi_{1P}] - \frac{\Delta V}{J_p} [\lambda_{1P}^0 \Phi_{1P}^0] \end{aligned}$$

ou ainda, na forma linearizada:

$$A_{2P}\Phi_{2P} = A_{2N}\Phi_{2N} + A_{2S}\Phi_{2S} + A_{2E}\Phi_{2E} + A_{2EW}\Phi_{2W} + A_{2P}^0\Phi_{2P}^0 + \hat{S}_{2C}^\Phi \quad (3.87)$$

onde:

$$A_{2N} = \frac{L(\Gamma_{3n}^\Phi + \Gamma_{5n}^\Phi)(\xi_n^2 - 1)\Delta\eta}{\delta\xi_n} \quad A_{2S} = \frac{L(\Gamma_{3s}^\Phi + \Gamma_{5s}^\Phi)(\xi_n^2 - 1)\Delta\eta}{\delta\xi_s} \quad A_{2E} = \frac{L(\Gamma_{3e}^\Phi + \Gamma_{5e}^\Phi)(1 - \eta_e^2)\Delta\xi}{\delta\eta_e}$$

$$A_{2W} = \frac{L(\Gamma_{3w}^\Phi + \Gamma_{5w}^\Phi)(1 - \eta_w^2)\Delta\xi}{\delta\eta_w} \quad A_{2P}^0 = \frac{\lambda_{2P}^0\Delta\xi\Delta\eta L^3(\xi_P^2 - \eta_P^2)}{\Delta t}$$

$$A_{2P} = A_N + A_S + A_E + A_W + \frac{\lambda_{2P}\Delta\xi\Delta\eta L^3(\xi_P^2 - \eta_P^2)}{\Delta t} - S_{2P}^\Phi$$

onde:

$$\hat{S}_2^\Phi = S_{2C}^\Phi + S_{2P}^\Phi$$

e

$$S_{2P}^\Phi = - \left\{ D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta\xi_n} \right) + D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta\eta_e} \right) - D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta\xi_n} \right) - D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta\eta_e} \right) \right\} \quad (3.88a)$$

e

$$S_{2C}^\Phi = \left[D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta\xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta\xi_n} \right] + \left[D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta\eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta\eta_e} \right] + \left[D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta\xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta\xi_n} - 2D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta\xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta\xi_n} \right] + \quad (3.88b)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - 2D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right] + \left[\frac{(D_{ii} + D_{kk})}{\delta \xi_n} \Phi_{1N} + \frac{(D_{ii} + D_{kk})}{\delta \xi_s} \Phi_{1S} \right] + \\
& + \left[\frac{(D_{jj} + D_{ll})}{\delta \eta_e} \Phi_{1E} + \frac{(D_{jj} + D_{ll})}{\delta \eta_w} \Phi_{1W} \right] - \left[\frac{(D_{ii} + D_{kk})}{\delta \xi_n} + \frac{(D_{ii} + D_{kk})}{\delta \xi_s} + \frac{(D_{jj} + D_{ll})}{\delta \eta_e} + \frac{(D_{jj} + D_{ll})}{\delta \eta_w} \right] + \\
& + \frac{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_{IP}}{J_P \Delta t} \Phi_{1P} - \frac{\Delta \xi \Delta \eta \lambda_{IP}^0}{J_P \Delta t} \Phi_{1P}^0
\end{aligned}$$

ou ainda

$$S_{2C}^{\Phi} = B_{star} + B_{2N} \Phi_{1N} + B_{2S} \Phi_{1S} + B_{2E} \Phi_{1E} + B_{2W} \Phi_{1W} - B_{2P} \Phi_{1P}$$

onde:

$$\begin{aligned}
B_{2N} &= \frac{\left(\Gamma_{4_{2n}}^{\phi} + \Gamma_{6_{2n}}^{\phi} \right) \left(\xi_n^2 - 1 \right) \Delta \eta}{\delta \xi_n} & B_{2S} &= \frac{\left(\Gamma_{4_{2s}}^{\phi} + \Gamma_{6_{2s}}^{\phi} \right) \left(\xi_s^2 - 1 \right) \Delta \eta}{\delta \xi_s} \\
B_{2E} &= \frac{\left(\Gamma_{4_{2e}}^{\phi} + \Gamma_{6_{2e}}^{\phi} \right) \left(1 - \eta_e^2 \right) \Delta \xi}{\delta \xi_e} & B_{2W} &= \frac{\left(\Gamma_{4_{2w}}^{\phi} + \Gamma_{6_{2w}}^{\phi} \right) \left(1 - \eta_w^2 \right) \Delta \xi}{\delta \xi_w} \\
B_P^0 &= \frac{\rho_p^0 h_w^0 \Delta \xi \Delta \eta L^2 \left(\xi_p^2 - \eta_p^2 \right)}{\Delta t} \\
B_{2P} &= B_{2N} + B_{2S} + B_{2E} + B_{2W} - \frac{\rho_p h_w \Delta \xi \Delta \eta L^2 \left(\xi_p^2 - \eta_p^2 \right)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{star} &= \left[\Gamma_{7n}^{\phi} \left(\xi^2 - 1 \right) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} \right] + \left[\Gamma_{7n}^{\phi} \left(1 - \eta^2 \right) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} \right] + \\
& \left[\Gamma_{8n}^{\phi} \left(\xi^2 - 1 \right) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - 2 \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right] + \Gamma_{8e}^{\phi} \left(1 - \eta^2 \right) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_e} - \\
& - 2 \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^*}{\delta \xi_e}
\end{aligned}$$

(3.89)

$$S_{2P}^{\Phi} = - \left[\Gamma_{7n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \right] - \left[\Gamma_{7n}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{2E}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \right] + \quad (3.90)$$

$$\left[\Gamma_{8n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \right] + \Gamma_{8e}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \eta \Delta \xi \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right)$$

onde os Γ_i^{Φ} são dados na Equação (3.73b) e

$$\begin{aligned} D_{aa} &= \Gamma_3^{\Phi} J \alpha_{11} \Delta \eta & D_{bb} &= \Gamma_3^{\Phi} J \alpha_{22} \Delta \xi; & D_{cc} &= \Gamma_5^{\Phi} J \alpha_{11} \Delta \eta; \\ D_{dd} &= \Gamma_5^{\Phi} J \alpha_{22} \Delta \xi; & D_{cc} &= \Gamma_{7p}^{\Phi} J_p \alpha_{11p} \Delta \eta \Delta \xi; & D_{ff} &= \Gamma_{7p}^{\Phi} J_p \alpha_{22p} \Delta \xi \Delta \eta; \\ D_{gg} &= \Gamma_{8p}^{\Phi} J_p \alpha_{11p} \Delta \eta \Delta \xi & D_{hh} &= \Gamma_{8p}^{\Phi} J_p \alpha_{22p} \Delta \xi \Delta \eta; & D_{ii} &= \Gamma_4^{\Phi} J \alpha_{11} \Delta \eta \\ D_{ii} &= \Gamma_4^{\Phi} J \alpha_{11} \Delta \eta & D_{jj} &= \Gamma_4^{\Phi} J \alpha_{22} \Delta \xi; & D_{kk} &= \Gamma_6^{\Phi} J \alpha_{11} \Delta \eta; \\ D_{ll} &= \Gamma_6^{\Phi} J \alpha_{22} \Delta \xi \alpha_{22} = L^4 (1 - \eta^2) (\xi^2 - \eta^2) \\ \alpha_{11} &= L^4 (\xi^2 - 1) (\xi^2 - \eta^2) & \alpha_{22} &= L^4 (1 - \eta^2) (\xi^2 - \eta^2) \end{aligned}$$

Os coeficientes A_k , com $K \neq P$, refletem a contribuição dos diferentes nodos, devido ao transporte difusivo de Φ dos pontos vizinhos na direção do nodo P . O termo A_p^o reflete a influência da variável Φ no tempo anterior, sobre seu valor no tempo presente.

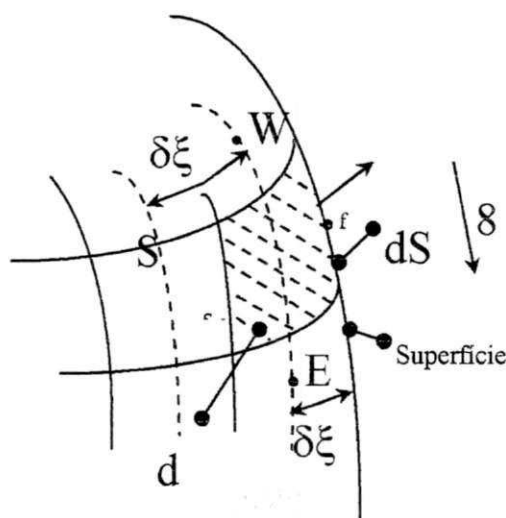


Figura 3.4 – Ponto na superfície do corpo

As Equações (3.82a) e (3.87) são aplicadas a todos os pontos internos no domínio computacional, exceto os pontos de fronteira (Figura 3.4), que são os volumes de controle adjacentes à superfície do corpo (volumes de fronteira). Para estes volumes, o procedimento adotado é o da integração das equações de conservação, considerando-se as condições de contorno existentes.

Em outras palavras, realizar um balanço da propriedade em estudo, para o volume de controle de fronteira, incorporando a condição de contorno à equação aproximada do volume de fronteira.

Neste caso as seguintes equações discretizadas são válidas:

◆ **Para massa:**

$$\frac{\Delta V}{J_p} \left[\frac{\lambda_p \phi_{1p} - \lambda_p^o \phi_{1p}^o}{\Delta t} \right] = \left[\phi'' ds_\xi - \left(D_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{22} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] + \hat{S}_1^\phi \Delta V \quad (3.91)$$

onde:

$$\hat{S}_1^\phi = \left[\left(D_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] + \left[\left(D_{44} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_c - \left(D_{44} \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \quad (3.92)$$

• **Para calor :**

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{J_p} \left[\lambda_{2P} \Phi_{2P} - \lambda_{2P}^o \Phi_{2P}^o \right] &= \left[\phi'' ds_\xi - \left(D_{aa} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta t + \\ &\left(D_{bb} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left[\left(D_{bb} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \Delta t + \left[\left(D_{cc} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{cc} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta t + \\ &\left(D_{dd} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left[\left(D_{dd} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \Delta t + \hat{S}_2^\Phi \end{aligned} \quad (3.93)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_2^\Phi = & \left[D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{ee} \left(\frac{\Phi_{2N}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^0}{\delta \xi_n} \right] \Delta t + \\
& + \left[D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2e}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{ff} \left(\frac{\Phi_{2e}^* - \Phi_{2P}^*}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^0}{\delta \eta_e} \right] \Delta t + \\
& + \left[D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - D_{gg} \left(\frac{\Phi_{1N} - \Phi_{1P}}{\delta \xi_n} \right) \frac{\Phi_{2P}^0}{\delta \xi_n} \right] \Delta t + \\
& + \left[D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2E}^*}{\delta \eta_e} - D_{hh} \left(\frac{\Phi_{1E} - \Phi_{1P}}{\delta \eta_e} \right) \frac{\Phi_{2P}^0}{\delta \eta_e} \right] \Delta t + \\
& + \left[\left(D_{kk} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_n - \left(D_{kk} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right) \Big|_s \right] \Delta t + \left[\left(D_{ll} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_e - \left(D_{ll} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \Big|_w \right] \Delta t + \frac{\Delta V}{J_p} [\lambda_{1P} \Phi_{1P} - \lambda_{1P}^0 \Phi_{1P}^0]
\end{aligned} \tag{3.94}$$

onde Φ^* é o fluxo de Φ por unidade de área, obtido a partir da condição de contorno imposta ao problema físico.

De acordo com as condições de contorno, devem-se agora especificar os fluxos difusivos em f. Três tipos de condições de contorno são possíveis: Φ prescrito, fluxo de Φ prescrito e convecção.

- Φ prescrito

Neste caso, o valor de Φ^* será:

$$\Phi^* = \Gamma_n^\Phi \frac{(\Phi_n - \Phi_p)}{\delta \xi_n} \frac{1}{dS_\xi} \tag{3.95}$$

onde Φ_n é a propriedade específica na fronteira.

- Fluxo de Φ prescrito

Neste caso, o valor de Φ^* deve ser substituído pelo valor prescrito do fluxo de fronteira.

$$\Phi'' dS_\xi = \text{valor desconhecido} = D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n \quad (3.96)$$

- Convecção

Para esta situação, o fluxo difusivo que atravessa a fronteira é igualado ao fluxo convectivo na vizinhança da mesma, e fora domínio em estudo, Isto é:

$$\Phi'' dS_\xi = D_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_n = \text{fluxo convectivo, função de } \Phi_n \quad (3.97)$$

Para problemas de difusão com Γ^Φ variável, de acordo com a Figura 3.5, o procedimento para obter o seu valor nas interfaces do volume de controle é assumir uma variação de Γ^Φ entre os pontos P e seu vizinho em qualquer direção (N, S, E ou W), expressa por (Patankar, 1980):

$$\Gamma_i^\Phi = \left(\frac{1 - \hat{f}_i}{\Gamma_P^\Phi} - \frac{\hat{f}_i}{\Gamma_E^\Phi} \right)^{-1} \quad (3.98)$$

onde \hat{f}_i é o fator de interpolação, dado por: $\hat{f}_i = \frac{(\delta d)_i^+}{(\delta d)_i}$

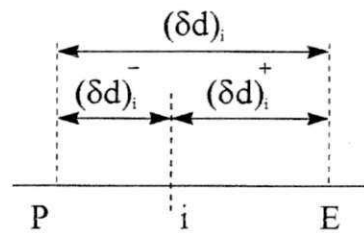


Figura 3.5 - Esquema mostrando a posição da interface i entre os pontos P e E.

Se a interface i está situada no ponto médio que une os pontos P e E (malha uniforme), então $\hat{f}_i = 0,5$ e, portanto Γ_i^Φ é dado pela média harmônica de Γ_P^Φ e Γ_E^Φ . Isto é:

$$\Gamma_i^\Phi = \frac{2\Gamma_P^\Phi \Gamma_E^\Phi}{\Gamma_P^\Phi + \Gamma_E^\Phi} \quad (3.99)$$

Esta é uma formulação mais efetiva, uma vez que, se Γ_p^Φ ou Γ_E^Φ forem zero, não haverá fluxo de Φ e, portanto Γ_i^Φ será nulo, o que é fisicamente realista.

Utilizando os resultados obtidos nesta seção, a seguir são apresentados alguns modelos de difusão, para as condições de contorno antes mencionadas.

3.4 - Modelos Difusivos

3.4.1 - Modelo I – Transferência simultâneo de calor e massa com condição de equilíbrio na superfície do material, sem encolhimento.

O problema em estudo envolve a determinação de transferência de calor e massa no caso bidimensional em produtos com geometria elipsoidal. Este modelo é constituído das Equações 3.75a e 3.75b. Para a formulação matemática deste problema, foram adotadas as seguintes considerações:

• Transferência de massa

- a) o produto é homogêneo e isotrópico;
- b) a transferência de massa na partícula individual acontece por difusão, sob taxa sempre decrescente;
- c) os perfis do teor de umidade são considerados simétricos em torno do eixo z (a umidade inicial está uniformemente distribuída no produto);
- d) as propriedades termofísicas são variáveis durante o processo, isto é, são dependentes da posição e do seu teor de umidade no interior do material;
- e) o encolhimento volumar do material é desprezível durante o processo;
- f) não há efeito de capilaridade;
- g) o processo ocorre sob condições de equilíbrio na superfície, com teor de umidade constante e igual ao teor de umidade de equilíbrio do produto nas condições do ar de secagem.

• **Transferência de calor**

a) a distribuição de temperatura inicialmente é uniforme e simétrica em torno do eixo z, durante o processo;

b) a transferência de calor dentro do material é por condução e na superfície do material tem-se condição de temperatura constante.

As condições de contorno são expressas pelas equações:

► **massa**

• **inicial:**

$$M(\xi; \eta; t=0) = M_0 = \text{cte} \quad (3.100)$$

• **Superfície livre:** O teor de umidade na superfície é constante e igual ao teor de umidade de equilíbrio.

$$M(\xi; \eta; t) = M_e = \text{cte}, \text{ com } \xi = \frac{Lz}{L} \text{ na superfície do sólido.} \quad (3.101)$$

• **Plano de simetria:** os gradientes angulares e radiais do teor de umidade são iguais a zero nos planos de simetria.

$$\frac{\partial M(\xi; l; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(l; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.102)$$

► **calor**

♦ **inicial:**

$$T(\xi; \eta; t=0) = T_0 = \text{cte} \quad (3.103)$$

♦ **Superfície livre:** A temperatura na superfície é constante e igual a temperatura do ar de secagem.

$$T(\xi = \xi_0; \eta; t) = T_e = \text{cte, com } \xi = \frac{L_2}{L} \text{ na superfície do sólido.} \quad (3.104)$$

♦ **Plano de simetria:** Os gradientes angular e radial de calor são iguais a zero.

$$\frac{\partial M(\xi; 1; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(1; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.105)$$

A solução numérica deste modelo é representada pela solução das Equações (3.82a) e (3.87). No que se refere aos pontos de simetria estes não entram no conjunto de equações a ser resolvido. Logo após o sistema de equações ter sido solucionado, sua estimativa é feita. Para este caso, assume-se que o fluxo de umidade que sai do ponto adjacente ao ponto de simetria é igual ao fluxo de umidade que chega neste ponto. Assim, pode-se expressá-las como segue:

► **Massa**

■ **Para os pontos em $\eta=0$ ($0 < y < L_1$):**

$$(\bar{J}_e + \bar{J}_v)_{\text{W}} = (\bar{J}_e + \bar{J}_v)_{\text{e}} \quad (3.106)$$

Discretizando e re-arranjando os termos, tem-se:

$$M_{\text{W}} = \left[\left[1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{1\text{e}}^{\Phi} \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1\text{p}}^{\Phi} \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)} \right] M_{\text{P}} - \frac{\left(\frac{\Gamma_{1\text{e}}^{\Phi} \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1\text{p}}^{\Phi} \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)} M_{\text{E}} - \frac{\left(\frac{\Gamma_{2\text{e}}^{\Phi} \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1\text{p}}^{\Phi} \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)} (T_{\text{E}} - T_{\text{P}}) \right] \quad (3.107)$$

■ Para os pontos em $\eta=1$ ($L < z < L_1$):

$$(\bar{J}_e + \bar{J}_v)|_w = (\bar{J}_e + \bar{J}_v)|_e \quad (3.108)$$

Discretizando e re-arranjando os termos, tem-se:

$$M_E = \left[1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{1w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1p}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)} M_P - \frac{\left(\frac{\Gamma_{1w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1p}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)} M_W - \frac{\left(\frac{\Gamma_{2w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1p}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)} (T_p - T_w) \right] \quad (3.109)$$

■ Para os pontos em $\xi=1$ ($0 < z < L$):

$$(\bar{J}_e + \bar{J}_v)|_s = (\bar{J}_e + \bar{J}_v)|_n \quad (3.110)$$

Discretizando e re-arranjando os termos, tem-se:

$$M_S = \left[1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{1n}^\Phi \sqrt{\xi_n^2 - 1}}{\delta\eta_n \sqrt{\xi_n^2 - \eta_p^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1p}^\Phi \sqrt{\xi_s^2 - 1}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_s^2 - \eta_p^2}} \right)} M_P - \frac{\left(\frac{\Gamma_{1n}^\Phi \sqrt{\xi_n^2 - 1}}{\delta\eta_n \sqrt{\xi_n^2 - \eta_p^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1p}^\Phi \sqrt{\xi_s^2 - 1}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_s^2 - \eta_p^2}} \right)} M_N + \frac{\left(\frac{\Gamma_{1n}^\Phi \sqrt{\xi_n^2 - 1}}{\delta\eta_n \sqrt{\xi_n^2 - \eta_p^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{1p}^\Phi \sqrt{\xi_s^2 - 1}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_s^2 - \eta_p^2}} \right)} (T_N - T_p) \right] \quad (3.111)$$

► Calor

• Para os pontos em $\eta=0$ ($0 < y < L_1$):

$$\bar{J}_q|_w = \bar{J}_q|_e \quad (3.112)$$

Discretizando e re-arranjando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}
 T_w = & \left[1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{3e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)} \right] T_p - \left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{3e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)} \right] T_E - \\
 & - \left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{4e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)} \right] (M_p - M_E) + \frac{\Gamma_{4w}^\Phi}{\Gamma_{3w}^\Phi} (M_w - M_p)
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

• Para os pontos em $\eta=1$ ($L < z < L_1$):

$$\bar{J}_q|_e = \bar{J}_q|_w \tag{3.114}$$

Discretizando e re-arranjando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}
 T_e = & \left[1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{3w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)} \right] T_p - \left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{3w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)} \right] T_w + \\
 & + \left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{4w}^\Phi \sqrt{1-\eta_w^2}}{\delta\eta_w \sqrt{\xi_p^2 - \eta_w^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{4e}^\Phi \sqrt{1-\eta_e^2}}{\delta\eta_e \sqrt{\xi_p^2 - \eta_e^2}} \right)} \right] (M_w - M_p) + \frac{\Gamma_{4e}^\Phi}{\Gamma_{3e}^\Phi} (M_p - M_e)
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

• Para os pontos em $\xi=1$ ($0 < z < L$):

$$\bar{J}_q|_s = \bar{J}_q|_n \tag{3.116}$$

Discretizando e re-arranjando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}
T_s = & \left[1 + \frac{\left(\frac{\Gamma_{3n}^\Phi \sqrt{\xi_n^2 - 1}}{\delta\eta_n \sqrt{\xi_n^2 - \eta_p^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3s}^\Phi \sqrt{\xi_s^2 - 1}}{\delta\eta_s \sqrt{\xi_s^2 - \eta_p^2}} \right)} \right] T_P - \left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{3n}^\Phi \sqrt{\xi_n^2 - 1}}{\delta\eta_n \sqrt{\xi_n^2 - \eta_p^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3s}^\Phi \sqrt{\xi_s^2 - 1}}{\delta\eta_s \sqrt{\xi_s^2 - \eta_p^2}} \right)} \right] T_N - \\
& - \left[\frac{\left(\frac{\Gamma_{4n}^\Phi \sqrt{\xi_n^2 - 1}}{\delta\eta_n \sqrt{\xi_n^2 - \eta_p^2}} \right)}{\left(\frac{\Gamma_{3s}^\Phi \sqrt{\xi_s^2 - 1}}{\delta\eta_s \sqrt{\xi_s^2 - \eta_p^2}} \right)} \right] (M_P - M_N) + \frac{\Gamma_{4s}^\Phi}{\Gamma_{3s}^\Phi} (M_S - M_P) \quad (3.117)
\end{aligned}$$

Para a solução do sistema de equações gerados a partir da solução numérica, foi desenvolvido um código computacional no Software Mathematica[®].

Um fluxograma de operação do programa, na forma de diagrama de blocos é apresentado na Figura 3.6, o qual contempla este e os demais modelos que serão tratados posteriormente.

Em todos os casos analisados foi utilizado o método de Gauss-Siedel para a solução do sistema de equações geradas, com um critério de convergência de 10^{-8} kg/kg, para o teor de umidade e 10^{-8}°C para a temperatura.

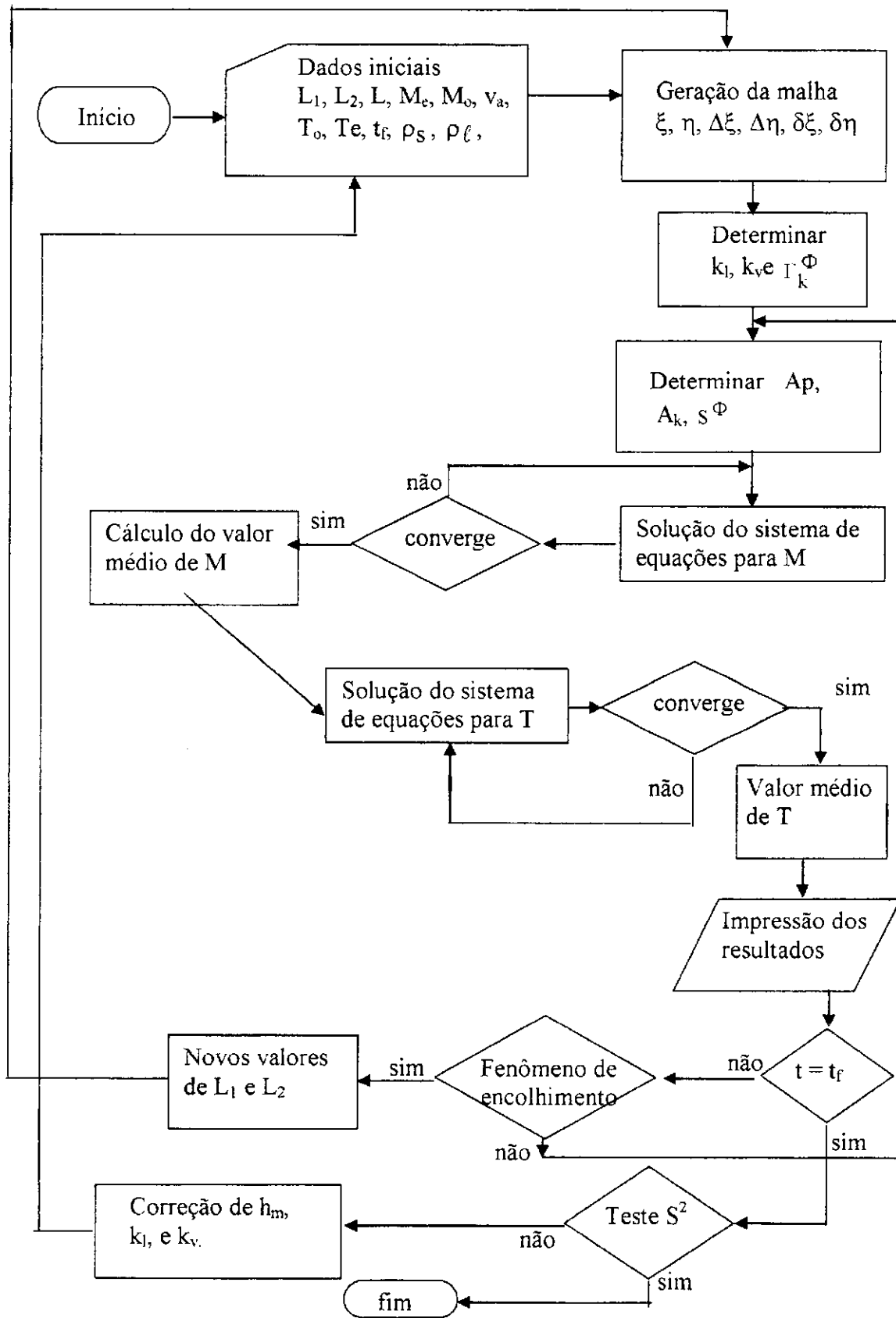


Figura 3.7 - Diagrama do algoritmo computacional

3.4.2 - Modelo II - Transferência simultânea de calor e massa com condição de contorno convectiva na superfície, sem encolhimento.

Neste modelo, serão asseguradas as considerações de \underline{a} até \underline{f} para massa e \underline{a} para temperatura apresentadas no modelo I e acrescentadas estas:

g) o movimento de umidade é por difusão de líquido e vapor dentro do sólido e que a evaporação ocorre somente na superfície.

• Transferência de calor

Substitui a consideração \underline{b} do modelo I por:

b) a transferência de calor dentro da partícula é por condução e na superfície do material é por convecção;

As condições iniciais, de contorno e de simetria para este modelo, são assim expressas:

► Massa

• Inicial:

$$M(\xi, \eta, t = 0) = M_0 \quad (3.118)$$

• **Simetria:** Os gradientes angulares e radiais do teor de umidade são iguais a zero nos planos de simetria.

$$\frac{\partial M(\xi; 1; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(1; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.119)$$

• **Superfície livre:** O fluxo difusivo é igual ao fluxo convectivo do teor de umidade na superfície do esferóide prolato.

$$\left. (\bar{J}_\ell + \bar{J}_v) \right|_{\xi = \frac{L_2}{L}} = h_m(M - M_e) \text{ com } T = T_a \text{ e } H = H_a \quad (3.120)$$

Qualquer termo desta igualdade representa o fluxo de umidade por unidade de área (M'').

► **Calor**

◆ **Inicial**

$$T(\xi; \eta; t = 0) = T_0 = \text{cte} \quad (3.121)$$

◆ **Plano de simetria:** Os gradientes angular e radial de calor são iguais à zero.

$$\frac{\partial M(\xi; 1; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(\xi; 0; t)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial M(1; \eta; t)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.122)$$

◆ **Superfície livre:** O fluxo difusivo é igual ao fluxo convectivo de calor na superfície do sólido, somadas a energia para evaporar a água e a energia para aquecer o vapor de água produzido na evaporação.

$$\bar{J}_q \left|_{\xi = \frac{L_2}{L}} = h_c(T_s - T_a) + h_{fg}\bar{J}_\ell + (\bar{J}_\ell + \bar{J}_v)c_v(T_s - T_a) \quad (3.123)$$

Vale salientar que qualquer um dos termos acima da igualdade representa o fluxo de calor por unidade de área (q'').

• **Formulação Numérica**

A formulação numérica para os pontos internos (exceto os pontos imediatamente próximos à fronteira do corpo), segue o mesmo procedimento apresentado no modelo I. Para os pontos de fronteira o procedimento é descrito a seguir:

• massa

$$M'' = \left(\bar{J}_l + \bar{J}_v \right) \Big|_{\xi = \frac{L_2}{L}} = h_m [(M_f - M_e)] \quad (3.124)$$

(I) (II) (III)

onde o M_f é o teor de umidade de fronteira.

Igualando-se as Equações (II) e (III), isolando-se o M_f , e substituindo na Equação (II), tem-se:

$$M'' = \frac{M_p - M_e}{\frac{1}{\left(\frac{\Gamma_1^\Phi}{\delta \xi_n L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 - 1}{\xi_n^2 - \eta_p^2}} \right)} + \frac{1}{h_m \rho_s}} + \frac{(\Gamma_2^\Phi \nabla T) \left(\frac{1}{h_m \rho_s} \right)}{\frac{1}{\left(\frac{\Gamma_1^\Phi}{\delta \xi_n L} \sqrt{\frac{\xi_n^2 - 1}{\xi_n^2 - \eta_p^2}} \right)} + \frac{1}{h_m \rho_s}} \quad (3.125)$$

Substituindo a Equação (3.125) na Equação (3.91), eliminando e rearranjando alguns termos do resultado obtido, tem-se a equação na sua forma discretizada, dada pela Equação (3.82a), sendo os coeficientes A_E , A_W , A_S , A_P , B_N , B_E , B_W e B_P , iguais aos apresentado como antes e:

$$A_p = \frac{\rho_p \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_n^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} + \frac{L \Delta \eta \sqrt{(\xi_n^2 - 1)(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}{\frac{\Gamma_1^\Phi}{\delta \xi_n L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + \frac{1}{h_m \rho_s}} + \sum A_k \quad (3.126)$$

e

$$\hat{S}_{1c}^\phi = B_N T_N + B_S T_S + B_E T_E + B_W T_W - B_P T_P + \overline{SM}$$

com

$$\overline{SM} = \left[\frac{\frac{\Gamma_2^\phi}{\Gamma_1^\phi} (T_f^* - T_p^*) L \Delta \eta \sqrt{(\xi_n^2 - 1)(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}{\frac{1}{\frac{\Gamma_1^\phi}{\delta \xi_n L} \sqrt{(\xi_n^2 - 1)}} + \frac{1}{h_m \rho_s}} \right] + \left[\frac{L \Delta \eta \sqrt{(\xi_n^2 - 1)(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}{\frac{1}{\frac{\Gamma_1^\phi}{\delta \xi_n L} \sqrt{(\xi_n^2 - 1)}} + \frac{1}{h_m \rho_s}} \right] M_e \quad (3.127)$$

Sendo assim, as Equações referentes a este modelo podem ser reunidas como segue:

$$A_P M_P = A_E M_E + A_W M_W + A_N M_N + A_S M_S + A_P^0 M_P^0 + \hat{S}_{lc}^\phi \quad (3.128)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{\Gamma_{1e}^\phi \Delta \xi (1 - \eta_e^2)}{\delta \eta_e} & A_W &= \frac{\Gamma_{1w}^\phi \Delta \xi (1 - \eta_w^2)}{\delta \eta_w} & A_N &= 0 \\ A_S &= \frac{\Gamma_{1s}^\phi \Delta \eta (\xi_s^2 - 1)}{\delta \xi_s} & A_P^0 &= \frac{\rho_p^0 \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi_n^2 - \eta_p^2)}{\Delta t} \\ B_N &= \frac{\Gamma_{2n}^\phi L (\xi_n^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n} & B_E &= \frac{\Gamma_{2e}^\phi L (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e} \\ B_S &= \frac{\Gamma_{2s}^\phi L (\xi_s^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s} & B_W &= \frac{\Gamma_{2w}^\phi L (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w} \\ B_P &= B_N + B_S + B_E + B_W \end{aligned}$$

A quantidade \overline{SM} é o termo fonte. Ele contém o teor de umidade na superfície do sólido que é adicionado aos pontos nodais que precedem à fronteira do mesmo. Somente para estes pontos, os coeficientes A_N são iguais a zero. Para os demais, \overline{SM} é igual a zero e A_N é dado pela expressão apresentada acima. Os métodos de solução deste conjunto de equações e o critério de convergência são idênticos ao utilizado no modelo I, assim como a determinação do teor de umidade médio.

Os pontos de simetria estimados são semelhantemente ao equacionamento apresentado no modelo I. Para os pontos situados na superfície do material tem-se, após a discretização da equação de condição de contorno na superfície, o teor de umidade nesses pontos pode ser calculado pela expressão:

$$M_f = \frac{\left(\frac{\Gamma_1^\Phi}{\partial \xi_n} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \right) M_p + \frac{\Gamma_2^\Phi}{\partial \xi_n} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} (T_p^* - T_f) + h_m M_e}{h_m + \frac{\Gamma_1^\Phi}{\partial \xi_n} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}} \quad (3.132)$$

◆ calor

Para transferência de energia, segue o conjunto de Equação a ser obtido:

$$q'' = \bar{J}_q \Big|_{\xi = \frac{L_2}{L}} = h_c (T_a - T_f) + h_{fg} \bar{J}_\ell + (\bar{J}_\ell + \bar{J}_v) c_v (T_a - T_f) \quad (3.133)$$

(I) (II) (III)

Igualando-se os termos da Equação acima e isolando T_f e substituindo na Equação (I), tem-se:

$$q'' = \frac{1}{h_c + \frac{\Gamma_3^\Phi}{\sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}} \frac{\partial \xi L}{\partial \xi}} \frac{T_a - T_p}{\partial \xi L} + \frac{h_{fg} \left[\rho_\ell K_\ell R_V \ln(H) \frac{\partial T}{\partial \xi} + \rho_\ell K_\ell R_V \ln(H) \frac{\partial T}{\partial \xi} \right]}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_c + \frac{\Gamma_3^\Phi}{\sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}} \frac{\partial \xi L}{\partial \xi}}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h_{ig} \left[\rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right]}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\partial \xi}} + \frac{h_{ig} \left[\rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right]}{h_c} \\
& - \frac{1}{h_c} + \frac{\partial \xi L}{\Gamma_3^\Phi \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}} + \\
& \frac{h_{ig} \left[\rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right]}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\partial \xi}} - \frac{\Gamma_4^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi}}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\partial \xi_n}} \frac{\left(\Gamma_2^\Phi \frac{\partial T}{\partial \xi} + \Gamma_i^\Phi \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \left(\frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \right) C_v (T_a - T_f)}{h_c} \\
& + \frac{1}{h_c} + \frac{\partial \xi L}{\Gamma_3^\Phi \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}} - \frac{1}{h_c} + \frac{\partial \xi L}{\Gamma_3^\Phi \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}}}
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Substituindo a Equação (3.134) na Equação (3.93), obtêm-se a Equação (3.87), aplicados para os pontos de fronteira, onde os coeficientes A_{2E} , A_{2W} , A_{2S} e A_{2P}^o são iguais aos apresentados antes e A_{2p} e \hat{S}_2^ϕ dados por:

$$A_{2p} = \sum A_K + A_{2P}^o - \hat{S}_{2P}^\phi \tag{3.138}$$

$$\hat{S}_2^\phi = S_{2P}^\phi + S_{2C}^\phi \tag{3.135}$$

$$A_{2N} = 0$$

onde:

$$S_{2P}^{\phi} = \left[\Gamma_{7n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{2N}^* - \phi_{2P}^*}{(\delta \xi_n)} \right) \right] + \left[\Gamma_{7e}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{2E}^* - \phi_{2P}^*}{(\delta \eta_e)} \right) \right] +$$

$$\left[\Gamma_{8n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{1N} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_n)} \right) \right] +$$

$$+ \left[\Gamma_{8e}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{1E} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_e)} \right) \right]$$

$$S_{2C}^{\phi} = - \left[\Gamma_{7n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{2N}^* - \phi_{2P}^*}{(\delta \xi_n)^2} \right) \right] - \left[\Gamma_{7e}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{2E}^* - \phi_{2P}^*}{(\delta \eta_e)^2} \right) \right] +$$

$$\left[\Gamma_{8n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{1N}^* - \phi_{1P}^*}{(\delta \xi_n)^2} \right) \right] - \left[\Gamma_{8e}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{1E}^* - \phi_{1P}^*}{(\delta \eta_e)^2} \right) \right] +$$

$$+ \left[\Gamma_{4n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \eta \left(\frac{\phi_{1N} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_n)} \right) - \left(\frac{\phi_{1P} - \phi_{1S}}{(\delta \xi_s)} \right) \right] +$$

$$+ \left[\Gamma_{4n}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \xi \left(\frac{\phi_{1E} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_e)} \right) - \left(\frac{\phi_{1P} - \phi_{1W}}{(\delta \xi_w)} \right) \right] + \left[\Gamma_{6n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \eta \left(\frac{\phi_{1N} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_n)} \right) - \left(\frac{\phi_{1P} - \phi_{1S}}{(\delta \xi_s)} \right) \right] +$$

$$+ \left[\Gamma_{6n}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \xi \left(\frac{\phi_{1E} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_e)} \right) - \left(\frac{\phi_{1P} - \phi_{1W}}{(\delta \xi_w)} \right) \right] +$$

$$+ \left(\frac{\rho_{1p} h_w \phi_{1p} \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi^2 - \eta^2)}{\Delta t} - \frac{\rho_{1p}^o h_w^o \phi_{1p} \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi^2 - \eta^2)}{\Delta t} \right)$$

(3.136)

e

$$S_{2C} = \sum B_n + B_{star} - B_p^o \phi_p^o \quad (3.139)$$

onde:

$$B_E = \frac{(\Gamma_{4e}^{\Phi} + \Gamma_{6e}^{\Phi})(1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e} \quad B_W = \frac{(\Gamma_{4w}^{\Phi} + \Gamma_{6w}^{\Phi})(1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w}$$

$$B_N = \frac{(\Gamma_{4n}^{\Phi} + \Gamma_{6n}^{\Phi})(\xi_n^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n} \quad B_S = \frac{(\Gamma_{4s}^{\Phi} + \Gamma_{6s}^{\Phi})(\xi_s^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s}$$

$$B_p^o = \frac{\rho_p^o h_w^o \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi^2 - \eta^2)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}
B_{1P} &= B_{1E} + B_{1W} + B_{1N} + B_{1S} - \frac{\rho_p h_w \Delta \xi \Delta \eta L^2 (\xi^2 - \eta^2)}{\Delta t} \\
B_{star} &= \left[\Gamma_{7n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{2N}^* - \phi_{2P}^*}{(\delta \xi_n)} \right) \frac{\phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} \right] + \left[\Gamma_{7e}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{2E}^* - \phi_{2P}^*}{(\delta \eta_e)} \right) \frac{\phi_{2E}^*}{\delta \xi_e} \right] + \\
&\left[\Gamma_{8n}^{\Phi} (\xi^2 - 1) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{1N} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_n)} \right) \frac{\phi_{2N}^*}{\delta \xi_n} - 2 \left(\frac{\phi_{1N} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_n)} \right) \frac{\phi_{2P}^*}{\delta \xi_n} \right] + \\
&+ \left[\Gamma_{8e}^{\Phi} (1 - \eta^2) \Delta \xi \Delta \eta \left(\frac{\phi_{1E} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_e)} \right) \frac{\phi_{2E}^*}{\delta \xi_e} - 2 \left(\frac{\phi_{1E} - \phi_{1P}}{(\delta \xi_e)} \right) \frac{\phi_{2P}^*}{\delta \xi_e} \right]
\end{aligned} \tag{3.140}$$

e

$$S_{1C}^{\phi} = B_{1N} \phi_{2N} + B_{1S} \phi_{2S} + B_{1E} \phi_{2E} + B_{1W} \phi_{2W} - B_{1P} \phi_{2P} \tag{3.141}$$

com:

$$\begin{aligned}
B_{1N} &= \frac{\Gamma_{2n}^{\phi} L (\xi_n^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_n} & B_{1S} &= \frac{\Gamma_{2s}^{\phi} L (\xi_s^2 - 1) \Delta \eta}{\delta \xi_s} \\
B_{1E} &= \frac{\Gamma_{2e}^{\phi} L (1 - \eta_e^2) \Delta \xi}{\delta \eta_e} & B_{1W} &= \frac{\Gamma_{2w}^{\phi} L (1 - \eta_w^2) \Delta \xi}{\delta \eta_w} \\
B_{1P} &= B_{1N} + B_{1S} + B_{1E} + B_{1W}
\end{aligned}$$

Os pontos de simetria são estimados semelhantemente ao equacionamento apresentado no modelo I. para os pontos situados na superfície do material tem-se, após a discretização da equação de condição de contorno na superfície e que a temperatura nesses pontos pode ser calculada pela expressão:

$$\begin{aligned}
T_f &= h_c T_a - h_c \frac{h_c T_a}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\alpha_{\xi_n}} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + h_c} \\
&+ \frac{h_{fg} \left[\rho_\ell K_l R_v \ln(H) \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right]}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\alpha_{\xi_n}} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + h_c} \\
&+ \frac{\left[\Gamma_2^\Phi \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \Gamma_1^\Phi \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] c_v (T_a - T_f)}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\alpha_{\xi_n}} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + h_c} + \frac{\Gamma_4^\Phi \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial M}{\partial \xi}}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\alpha_{\xi_n}} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + h_c} + \\
&+ \frac{\left[\frac{\Gamma_3^\Phi}{\alpha_{\xi_n}} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \right] T_p}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\alpha_{\xi_n}} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + h_c} - \frac{h_{fg} \left[\rho_\ell K_l R_v \ln(H) \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \rho_\ell k_\ell \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right]}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\alpha_{\xi_n}} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + h_c} \\
&- \frac{\left[\Gamma_2^\Phi \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \Gamma_1^\Phi \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right] c_v (T_a - T_f)}{\frac{\Gamma_3^\Phi}{\alpha_{\xi_n}} \frac{1}{L} \sqrt{\frac{(\xi_n^2 - 1)}{(\xi_n^2 - \eta_p^2)}} + h_c}
\end{aligned}
\tag{3.142}$$

3.4.3 - Modelo III - Transferência simultânea de calor e massa com condição de contorno convectiva na superfície, com encolhimento.

Toda a formulação numérica para os pontos internos, inclusive os pontos imediatamente próximos à fronteira do corpo, segue o mesmo procedimento apresentado no modelo II.

O fenômeno encolhimento durante o processo de secagem em materiais sólidos é

produtos biológicos com alto teor de umidade, tais como em frutas e verduras. Portanto, este fenômeno pode ter um efeito importante na difusão de massa, e conseqüentemente na taxa de retirada de umidade.

Neste modelo, além das considerações do modelo II, foram assumidos que:

a) o encolhimento durante a secagem, devido à perda de umidade é proporcional à variação do teor de umidade médio do sólido;

b) o material encolhe elasticamente, com encolhimento igual ao volume de água evaporada, dada em termos do teor de umidade.

As condições inicial, de simetria e de contorno para este modelo, são as mesmas apresentadas no modelo II. De acordo com listado acima, o encolhimento volumar existe, e então o volume do corpo muda a cada intervalo de tempo.

• O encolhimento do sólido

A determinação do volume do corpo em qualquer instante baseia-se no trabalho de Lang e Sokhansanj (1996). Os autores assumiram que o material se contrai linearmente com o teor de umidade. Os autores propõem a seguinte Equação para a determinação do volume do corpo em um instante qualquer:

$$\frac{(V)_t}{(V)_{t=0}} = \left[\frac{1 - \bar{M}_0}{1 + (\gamma - 1)\bar{M}_0} \right] \left[\frac{1 + (\gamma - 1)\bar{M}}{1 - \bar{M}} \right] \quad (3.143)$$

onde $\gamma = \frac{\rho_d}{\rho_l}$, é a densidade específica do grão, sendo ρ_d a densidade do produto e ρ_l a densidade da água.

O significado físico do encolhimento, está associado com a variação máxima do volume sofrida por um sólido durante o processo de secagem contemplando este fenômeno. Assim, por exemplo, se seu valor for de 40 %, significa que o volume do corpo ao final do

processo, quando este atinge seu teor de umidade de equilíbrio, será exatamente 60% do seu valor inicial.

De acordo com os itens a e b, das considerações adotadas para este modelo, pode ser verificado que a variação do volume sofrida pelo corpo, é igual ao volume da água evaporada num certo intervalo de tempo. Em adição, se o teor de umidade é dado em termos de base seca e sabendo-se que a variação do volume sofrida pelo corpo é igual a massa de água evaporada dividida pela densidade da água.

Durante o processo de secagem assumiu-se que o encolhimento é isotrópico e que a taxa de variação de L_1 relaciona-se à taxa de variação de L_2 , de tal forma que a relação L_2/L_1 permanece constante durante todo o processo. Assim o coeficiente angular da reta apresentada na Figura 3.7 é constante em cada instante de tempo. Isto é:

$$\text{Tg}\hat{\theta} = (L_2 / L_1)_t = \text{cte.} \quad (3.144)$$

Por outro lado, conhecendo o volume de um elipsóide:

$$(V)_t = \frac{4}{3} \pi (L_2)_t (L_1)_t^2 \quad (3.145)$$

E usando a Equação 3.110, podem-se determinar as dimensões do corpo em qualquer instante do processo.

A área superficial de esferóide prolato ($L_2 > L_1$) é dada por (Polya e Szego, 1945):

$$(S)_t = 2\pi(L_2)_t(L_1)_t^2 \left\{ \frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} + \frac{\arcsen \left[\sqrt{-\left[\frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} \right]^2 - 1} \right]}{\sqrt{-\left[\frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} \right]^2 - 1}} \right\} \quad (3.146)$$

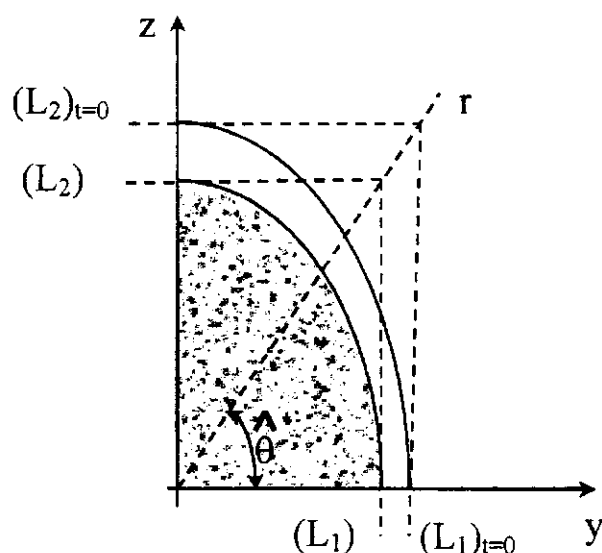


Figura 3.7-Encolhimento do sólido esférico prolatado durante o processo de difusão

Fonte: Lima (1999).

3.5 – Aplicação da metodologia a secagem de grãos de trigo

A formulação numérica da equação de difusão de calor requer o conhecimento prévio de algumas propriedades físicas do trigo e do ar de secagem. Na Tabela 3.1, são apresentados às condições do ar de secagem bem como os teores de umidade inicial (M_o), de equilíbrio (M_e) e final (M_f) do grão de trigo e, em seguida as equações usadas para encontrar o erro residual.

Tabela 3. 1 – Condições do ar de secagem e do grão de trigo.

Ar			Trigo							t (min)
T (°C)	H (%)	v (m/s)	M_o (b.s)	L_1 (mm)	L_2 (mm)	M_f (b.s)	M_e (b.s)	T_o (°C)	T_e (°C)	
87,8	5,6	1,71	0,2110	1,575	3,276	0,127	0,0165	26,0	87,8	1020

Os dados sobre a secagem do trigo apresentados na Tabela 3.1, foram retirados do trabalho de (Fortes *et al.* 1981). Os métodos experimentais utilizados na obtenção destes dados são descrito no referido trabalho.

As seguintes equações para o calor específico, isoterma de sorção, calor latente de vaporização, densidade do sólido seco, constante do vapor aplicada ao vapor, calor de sorção, densidade do vapor saturado e condutividade térmica do grão de trigo foram usadas (Fortes *et al.*, 1981):

$$c_b = \{1,394 + 0,0409[(100 \times M)/(1 + M)]\} \times 10^3 \text{ (J/kgK)}$$

$$h_{fg} = \left(3,11 \times 10^6 - 2,38 \times 10^3 \times T \right) + \left(\frac{R_v \times T^2 \times \frac{\partial H}{\partial T}}{H} \right) \text{ (J/kg);}$$

$$H = 1 - \text{Exp} \left[- 5869 \times \left(T^{-0,7750} \times M \left(5203 \times T^{-1,363} \right) \right) \right] \text{ (decimal);}$$

$$\rho_s = 1265 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

$$R_v = 462,69 \text{ (J/kg/K)}$$

$$h_w = R_v \frac{T^2}{H} \frac{\partial H}{\partial T} \text{ (J/kg),}$$

$$\rho_{v0} = 2,54 \times 10^8 / T \exp(-5200/T) \text{ (kg/m}^3\text{);}$$

$$k_t = [0,1170 + 0,0011319 \times (100 \times M)/(1 + M)] \text{ W(mK)}$$

Os valores das propriedades do ar e da água consideradas para este trabalho, são:

$$c_a = 1041,992 \text{ J/kg} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$c_v = 1919,849 \text{ J/(kgK)}$$

$$k_a = 0,029380 \text{ W/(m.K)}$$

$$c_\ell = 4218,709 \text{ J/(kgK),}$$

$$\mu_a = 20,6473 \times 10^{-6} \text{ Pas ;}$$

$$\rho_\ell = 1000 \text{ kg/m}^3\text{;}$$

$$\rho_a = 0,964790 \text{ kg/m}^3$$

$$D_{va} = 34,05357 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$v_a = 1,71 \text{ m/s}$$

O teor de umidade médio do grão de trigo é obtido pela seguinte Equação:

$$\bar{M} = 0,0921326 \times \text{Exp}(0,0001058t) + 0,122217 \times \text{Exp}(-0,0016447t)$$

Ajustados aos dados experimentais de Fortes *et al.* (1981), usando o Software Statistica®.

Com respeito ao coeficiente de transferência de calor convectivo, o mesmo é obtido considerando o grão de trigo como esfera de igual volume de um elipsóide de dimensões $L_1=1,574$ mm e $L_2=3,276$ mm, como segue:

$$h_c = \frac{k_a}{d_p} (2 + 0,6R_e^{1/2} P_r^{1/3}) \quad (3.147)$$

onde o número de Reynolds e o número Prandtl são dados pelas seguintes expressões:

$$R_e = \frac{\rho_a v_a d_p}{\mu_a} \quad (3.148)$$

$$P_r = \frac{c_a \mu_a}{k_a} \quad (3.149)$$

As equações referentes às condutividades de líquido e vapor neste trabalho são:

$$k_\ell = a_1 \times 4,366 \times 10^{-18} H^3 \times \exp(-1331/T)$$

$$k_v = a_2 \times 6,982 \times 10^{-9} \times (T - 273,16)^{0,41} (H^{0,1715} - H^{1,1715})$$

O ponto de partida foi à expressão matemática de k_ℓ e k_v reportada por Fortes *et al.* (1981), para k_ℓ e k_v aplicados a trigo assumindo forma igual a uma esfera. Estas equações foram corrigidas para um esferóide prolato multiplicando estas equações por um parâmetro constante a ser obtido (a_1 e a_2).

Neste trabalho os valores dos parâmetros a_1 , a_2 e h_m (coeficiente de transferência de massa), foram obtidos por ajuste entre os dados numéricos e experimentais do teor de umidade, usando a técnica do erro quadrático mínimo.

Os desvios entre os valores experimentais e simulados bem como a variância foram calculados como segue:

$$\text{ERMQ} = \sum_{i=1}^n (\bar{M}_{i,\text{Num}} - \bar{M}_{i,\text{Exp}})^2 \quad (3.150)$$

$$\bar{S}^2 = \frac{\text{ERMQ}}{(n - \hat{n})} \quad (3.151)$$

onde n é o número de pontos experimentais e \hat{n} é o número de parâmetros encontrados (Figliola e Beasley, 1995).

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 - Refinamento de malha e tempo

A aplicação do método numérico de volumes finitos é condicionada pelo número de pontos que irá ser utilizado na malha numérica e do intervalo de tempo Δt entre dois valores consecutivos no tempo, da variável em estudo, para um mesmo ponto de malha. Para verificar a independência dos resultados obtidos com o intervalo de tempo e o tamanho da malha, foram verificados quatro padrões de malha (10x10; 20x20; 30x30; 40x40 pontos nodais) e quatro intervalos de tempo (0,5; 1,0; 5,0; 10s), com razão de aspecto $L_2/L_1 = 2,08$, fixo.

Foi observado que as quatro malhas apresentaram resultados semelhantes para o teor de umidade médio em vários instantes de secagem como mostra a Figura 4.1. No início do processo de secagem, a malha 10x10 pontos nodais apresentou uma pequena discrepância em relação às outras três malhas; portanto a mesma foi excluída. Para as outras três, os resultados encontrados foram praticamente idênticos, entretanto pelo motivo da malha 20x20 pontos nodais apresentar um menor tempo computacional, esta malha foi escolhida.

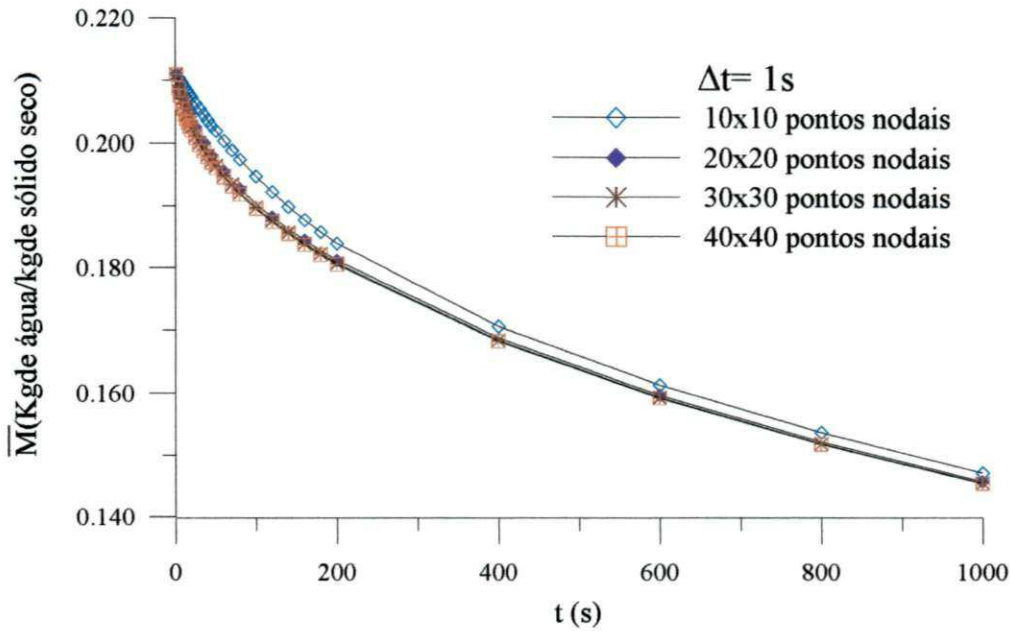


Figura 4 1– Refinamento da malha para um $\Delta t=1s$

Fixado o número de pontos da malha, obtiveram-se resultados para diferentes intervalos de tempo ($\Delta t=0,5; 1,0; 5,0; 10s$), como mostra a Figura 4.2. Não foram observadas grandes discrepâncias entre os casos avaliados, dessa forma, tendo em vista que o processo considerado é transiente, de aquecimento rápido e altamente não-linear, a escolha de um menor intervalo de tempo é mais apropriada. Com base nestas observações, uma malha 20x20 pontos nodais e um intervalo de tempo $\Delta t=1,0s$, foram utilizados para gerar todos os resultados apresentados neste trabalho.

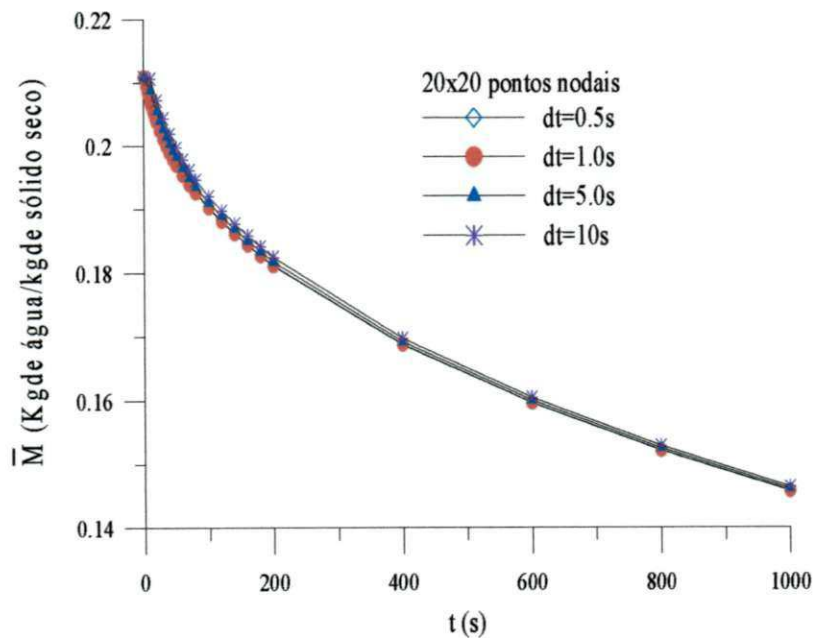


Figura 4.2 – Refinamento do tempo para uma malha 20x20 pontos nodais

Na Figura 4.3, ilustra-se no plano z-y a malha numérica. Verificou-se que no plano zy, os volumes de controle não são igualmente espaçados, concentrando-se mais na superfície do corpo com relação à ξ e no eixo y, com relação à coordenada angular η , caracterizando uma malha gerada como uma malha irregular. Contudo, no plano $\xi\eta$, esta malha é regular e ortogonal.

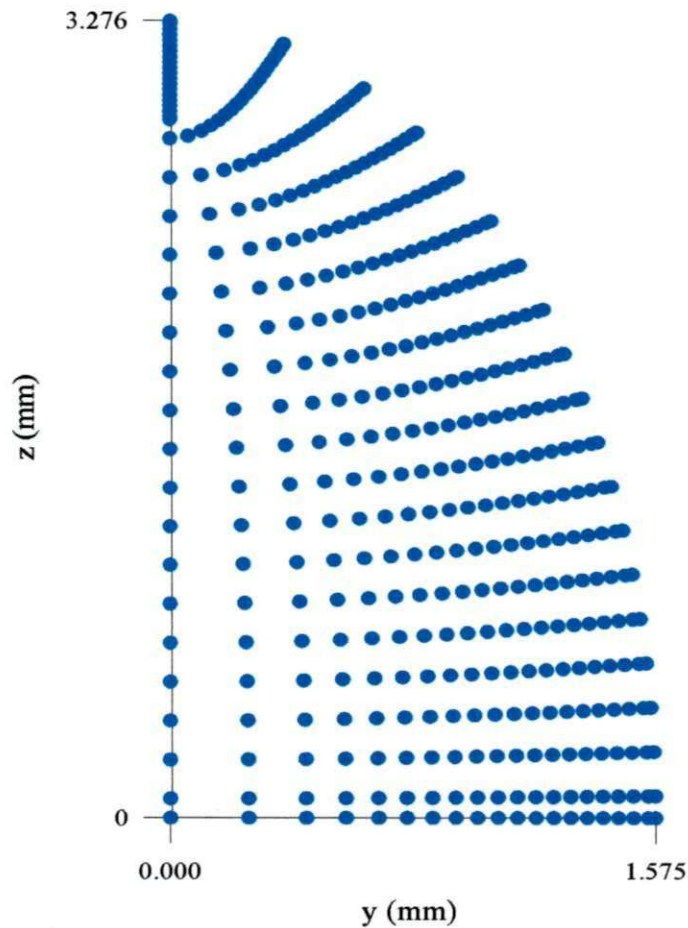


Figura 4.3 - Malha numérica para um sólido esferoidal prolato $L_2/L_1=2,08$

Lima (1999) reporta que os valores de fronteira têm forte influência no espaçamento da malha, nos pontos nodais imediatamente próximos à superfície do corpo, apesar do caráter elíptico da equação de difusão. Especialmente nestes pontos, é crucial ter um bom controle sobre o espaçamento da malha, principalmente se existem altos gradientes e necessitam de solução mais precisa. Além do mais, os pontos $(\xi=1; \eta)$, $(\xi; \eta=0)$ são pontos singulares; embora exista um considerável espaçamento dos primeiros pontos nodais em relação a estes pontos, isto é benéfico para a solução, pois quanto mais próximos estiver destes pontos, menos preciso será o resultado obtido.

4.2 - Resultados obtidos com o modelo I

O modelo I apresentado neste trabalho trata da transferência simultânea de calor e massa no interior do sólido, com condição de contorno de equilíbrio na superfície do produto. Para encontrar estes resultados foram utilizados programas computacionais implementados no Software Mathematica[®]. A validação deste modelo foi feita por comparação com resultados experimentais da secagem de grão de trigo (considerado como uma esfera), reportados por (Fortes *et al*, 1981). Verificou-se que, como ilustra a Figura 4.4, uma boa concordância foi obtida. Algumas discrepâncias ocorreram em tempos longos de processo em virtude da condição de contorno utilizada.

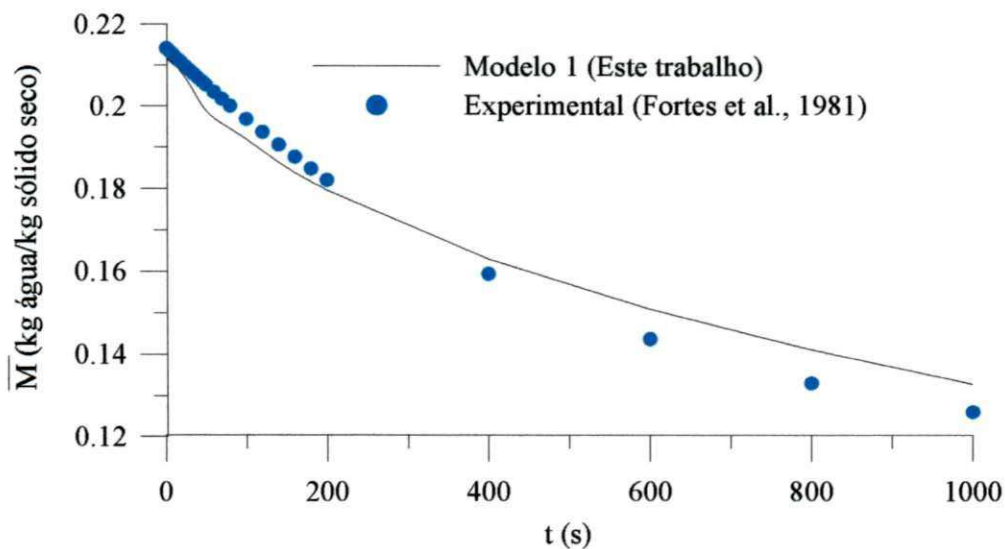


Figura 4.4 - Comparação entre os teores de umidade médio em função do tempo de secagem obtidos com o modelo I e os reportados por Fortes *et al.* (1981)

A Figura 4.5 representa o aquecimento de um grão de trigo ao longo do tempo de secagem. Como é verificada, a temperatura média do grão de trigo alcança a temperatura de equilíbrio em um pequeno intervalo de tempo (≈ 50 s), devido à pequena dimensão apresentada pelo grão, e à condição de contorno utilizada.

Nas Figuras 4.6 e 4.7, 4.8 e 4.9 estão apresentado o comportamento dos fluxos de líquido e de vapor, durante o processo de secagem na superfície do grão de trigo. Verificou-se que o comportamento do fluxo de líquido e de vapor são idênticos àqueles apresentados pelas condutividades efetivas de líquido e vapor, respectivamente, já reportado por Fortes (1982).

Entende-se por condutividade efetiva, por exemplo, de transporte de líquido sob gradiente hídrico (K_{tm}) o termo que aparece multiplicando o termo do gradiente de umidade na Equação (3.38), Isto é:

$$K_{tm} = \rho_l k_l \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M}$$

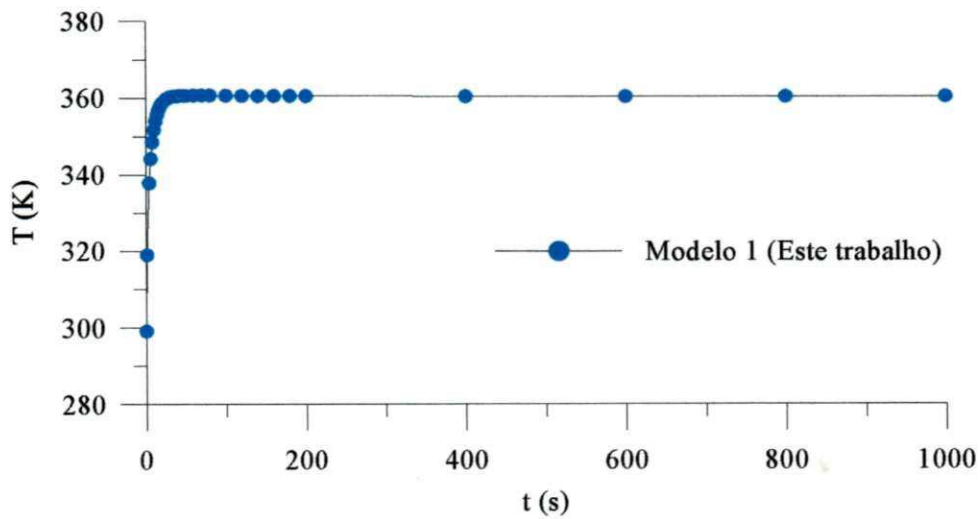


Figura 4.5 - Temperatura média de um grão de trigo ao longo do tempo (modelo I)

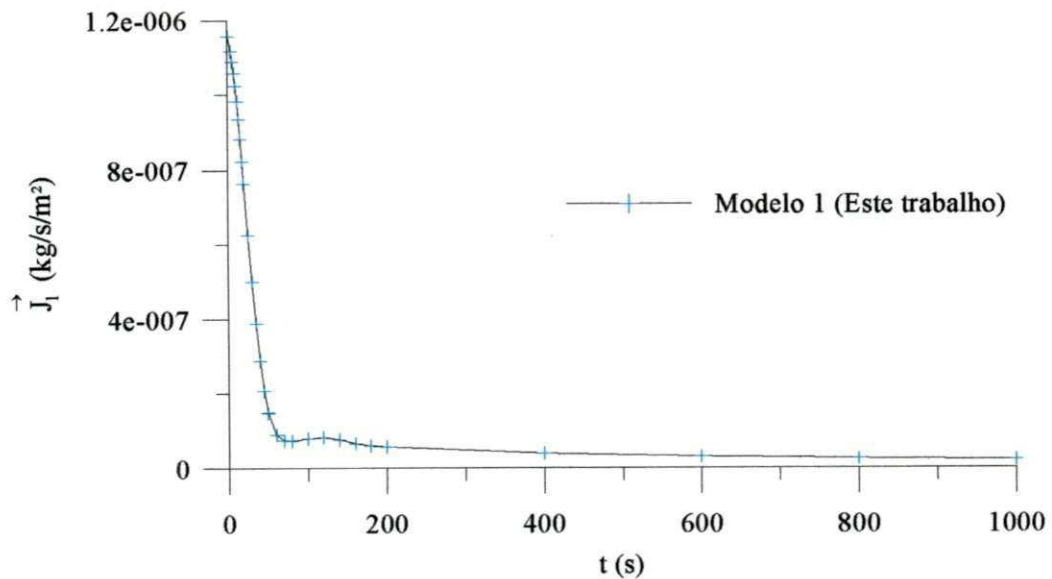


Figura 4.6 - Fluxo de líquido na superfície do grão de trigo a uma temperatura de $87,8^\circ\text{C}$ (modelo I)

Os resultados numéricos mostram que o fluxo de vapor é dominante na superfície do corpo, nas condições de secagem utilizadas neste trabalho. No entanto nas regiões mais úmidas o fluxo de umidade se dá predominantemente na fase líquida.

De forma geral com a modelagem matemática apresentada, pode-se prever dentro o fluxo de líquido ou de vapor, qual é o mecanismo dominante para migração de umidade no interior do sólido.

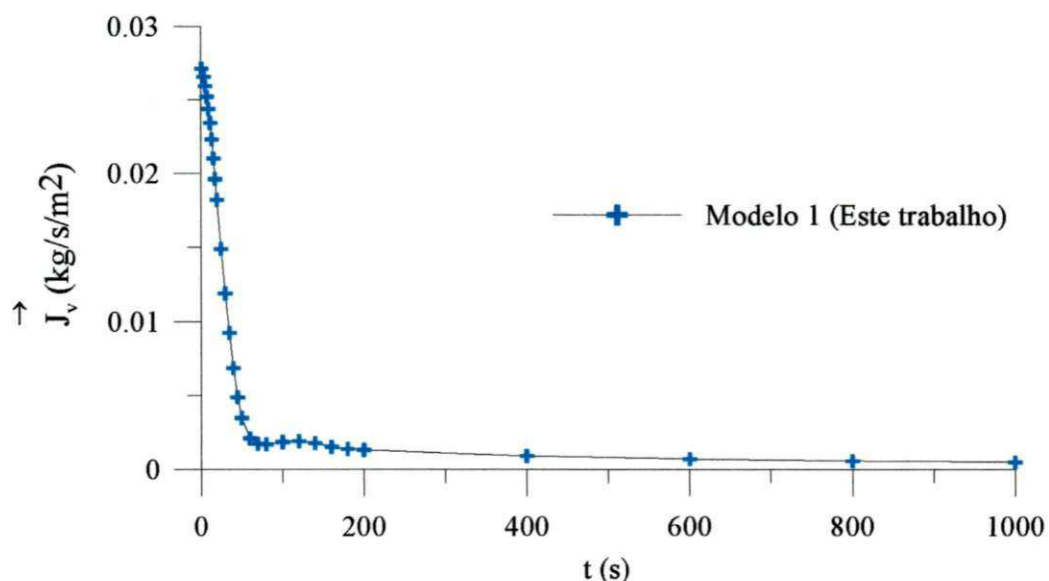


Figura 4.7 - Fluxo de vapor na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo I)

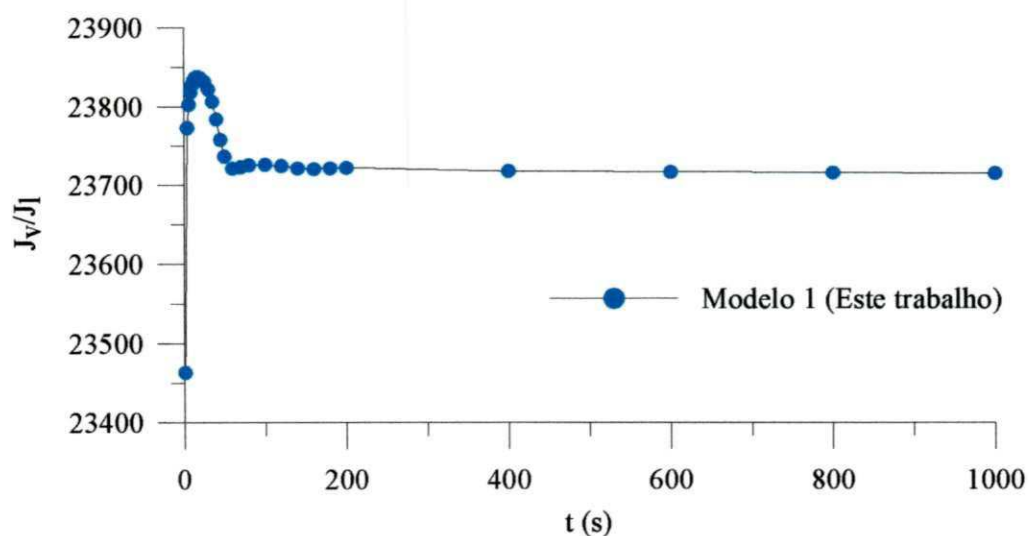


Figura 4.8 – Relação J_v/J_l na superfície do grão de trigo em função do tempo de secagem a uma temperatura de 87,8°C (modelo I).

A Figura 4.8 evidencia uma saída considerável de fluxo de massa no início do processo e atingindo rapidamente o equilíbrio, devido a condição de contorno utilizada neste modelo. (A relação $J_v/J_\ell > 2,3 \times 10^4$, diferentemente do resultado $J_v/J_\ell > 10$, apresentado por Fortes *et al.* 1981).

Observa-se na Figura 4.9, no início do processo um decréscimo acentuado do fluxo total de massa na superfície do grão de trigo, atingindo o equilíbrio logo após. Mais uma vez este fenômeno está ligado a condição de contorno utilizada que é a de equilíbrio na superfície. Do exposto, pode-se escrever que a consideração de que o fluxo de líquido ou vapor nos modelos matemáticos é dominante para migração de umidade do grão de trigo são irreal; ambos os fluxos coexistem simultaneamente em determinadas proporções, dependendo do teor de umidade do grão de trigo e da temperatura e umidade relativa do ar de secagem.

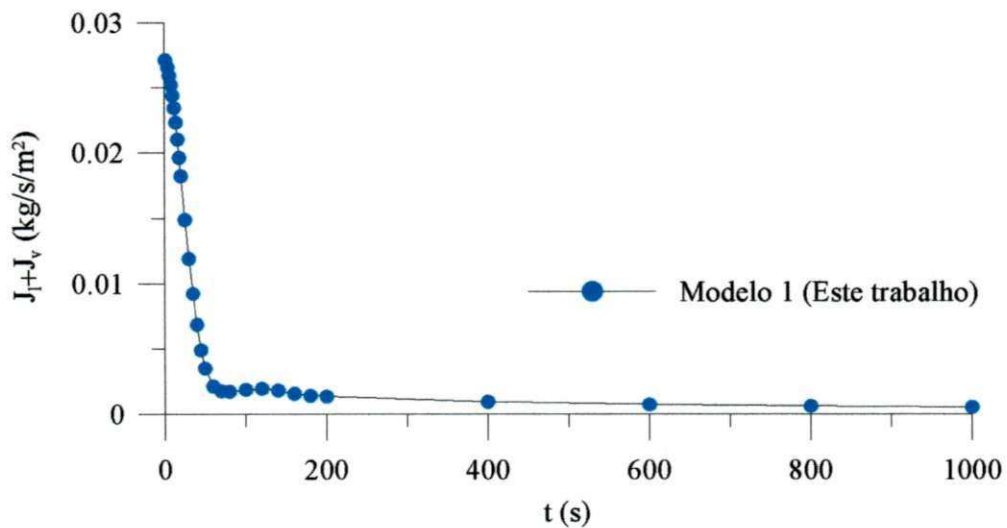


Figura 4.9 – Fluxo total de massa na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo I).

A distribuição do teor de umidade dentro do material é muito importante para analisar a evolução das tensões hidro-mecânicas desenvolvidas no corpo devido aos altos gradientes de umidade. As Figuras 4.10a – c mostram a distribuição do teor de umidade dentro de um grão de trigo em três tempos de processos ($t=100s$; $600s$ e $1000s$), respectivamente.

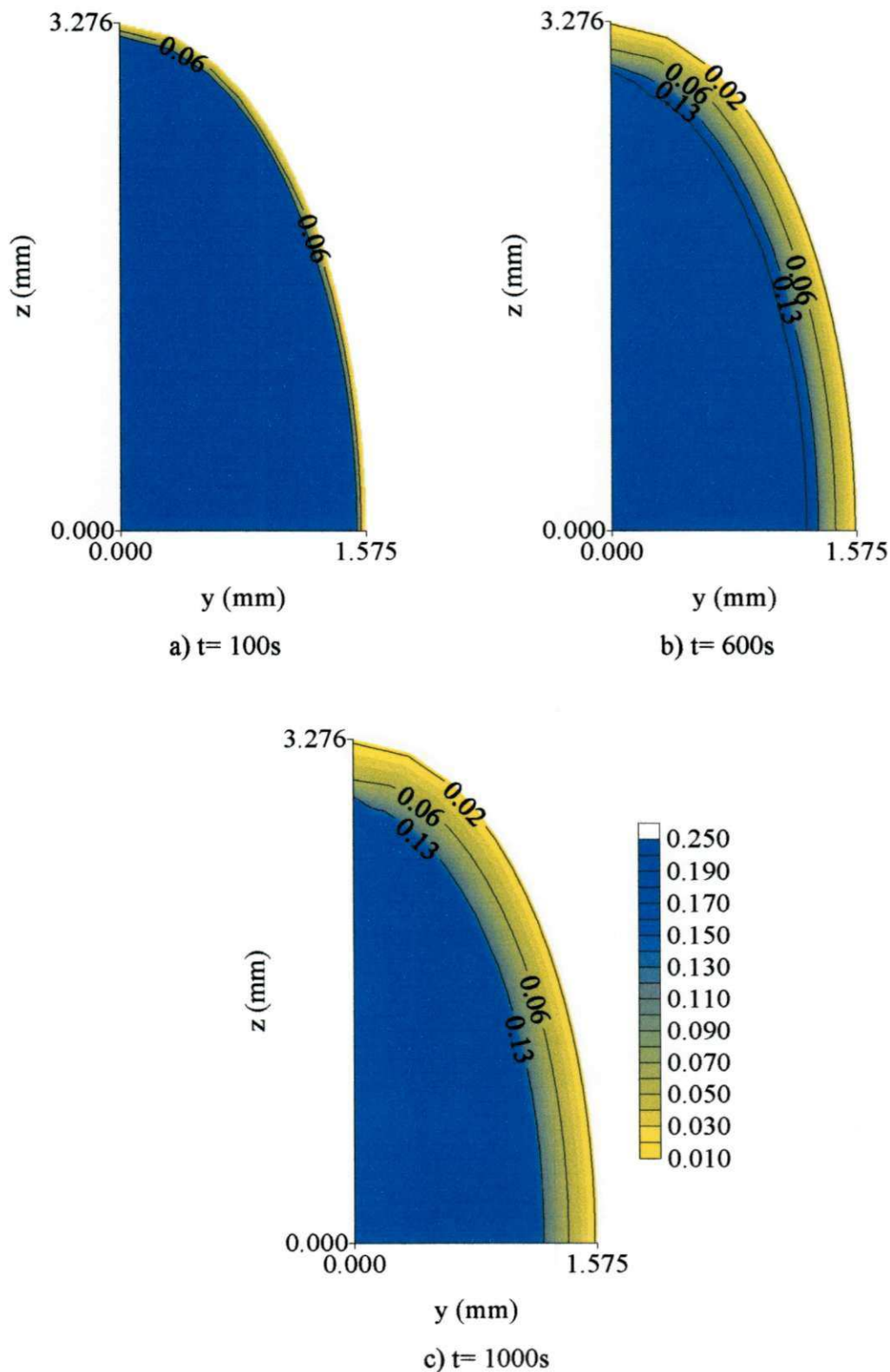


Figura 4.10- Distribuição do teor de umidade (base seca) dentro de um grão de trigo a 87,8°C (modelo I)

Pode ser observado que o teor de umidade cresce do centro para a superfície do grão e também com o aumento do tempo de processo de secagem.

Na Figura 4.11a–b apresenta a distribuição de temperatura no interior do grão de trigo para vários instantes de secagem. Percebe-se que a temperatura decresce da superfície para o centro do grão e com o aumento do tempo de processo de secagem.

Verifica-se ainda que os maiores gradientes ocorrem nas proximidades da superfície e do ponto focal do sólido, tendendo a uma temperatura de equilíbrio com o aumento do tempo de secagem.

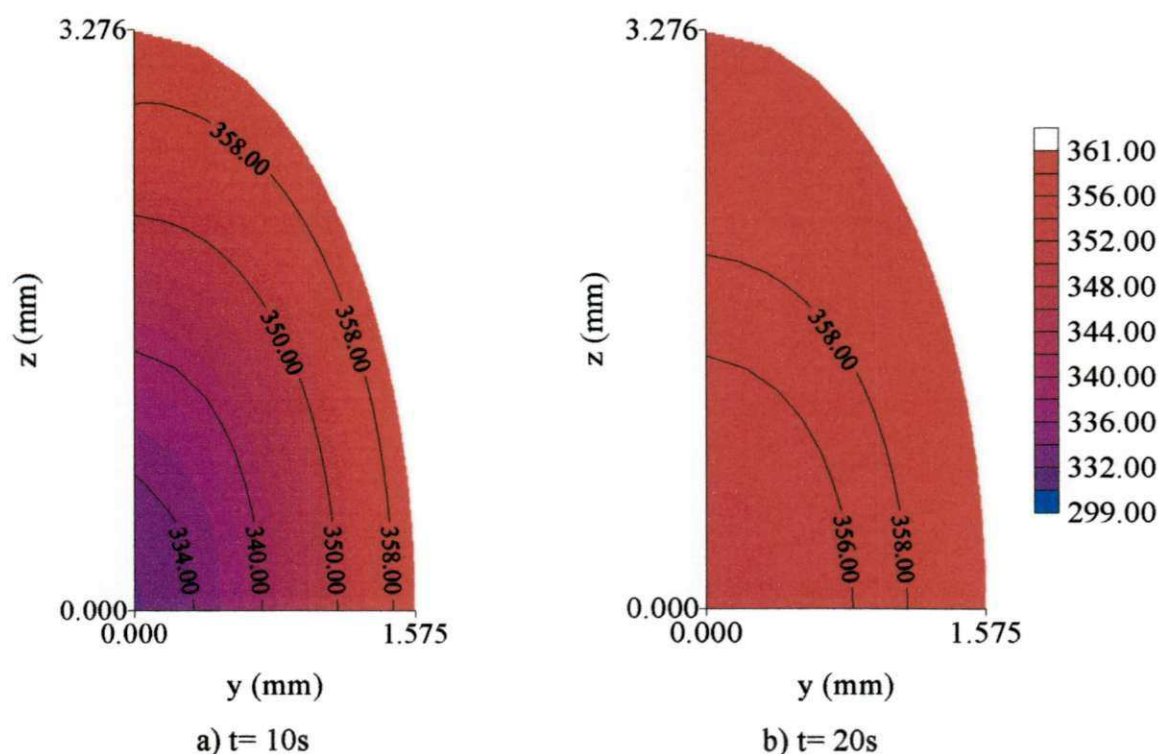


Figura 4.11 – Distribuição de temperatura (K) no interior do grão de trigo a 87,8°C (modelo I)

4.3 - Resultados obtidos com o modelo II

O modelo II apresentado neste trabalho também trata de transferência simultânea de calor e massa no interior do sólido, mas desta feita com condição de contorno convectiva na superfície.

Observa-se na Figura 4.12, uma melhor concordância em relação ao modelo I, entre o resultado deste trabalho e o experimental de (Fortes *et al.*, 1981).

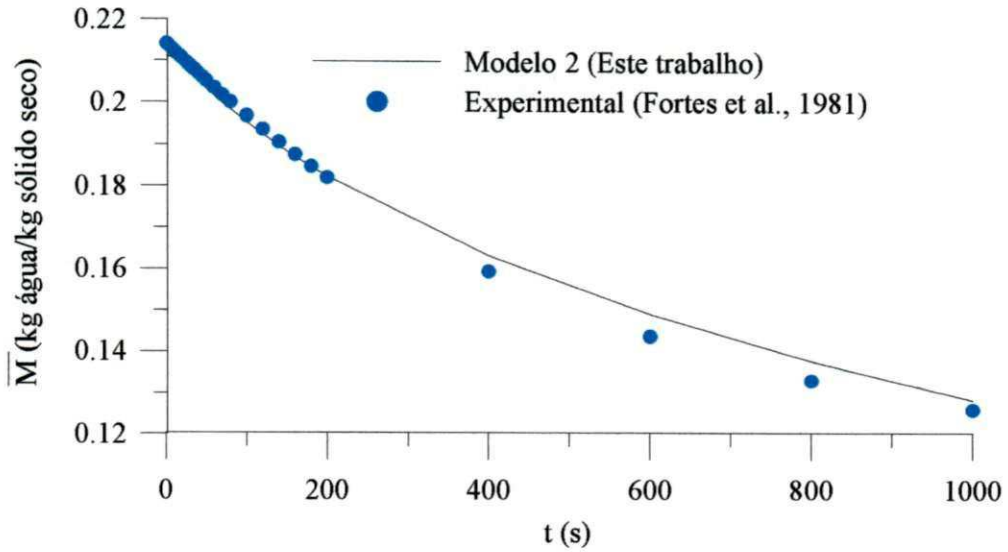


Figura 4.12 - Comparação entre os teores de umidade médio em função do tempo de secagem obtidos com o modelo II e os reportados por Fortes *et al.* (1981).

A Figura 4.13 mostra o aquecimento de um grão de trigo ao longo do tempo de secagem. Como era de esperar, a temperatura média do grão de trigo alcança a temperatura de equilíbrio em um intervalo de tempo maior que o modelo I, devido à condição de contorno utilizada.

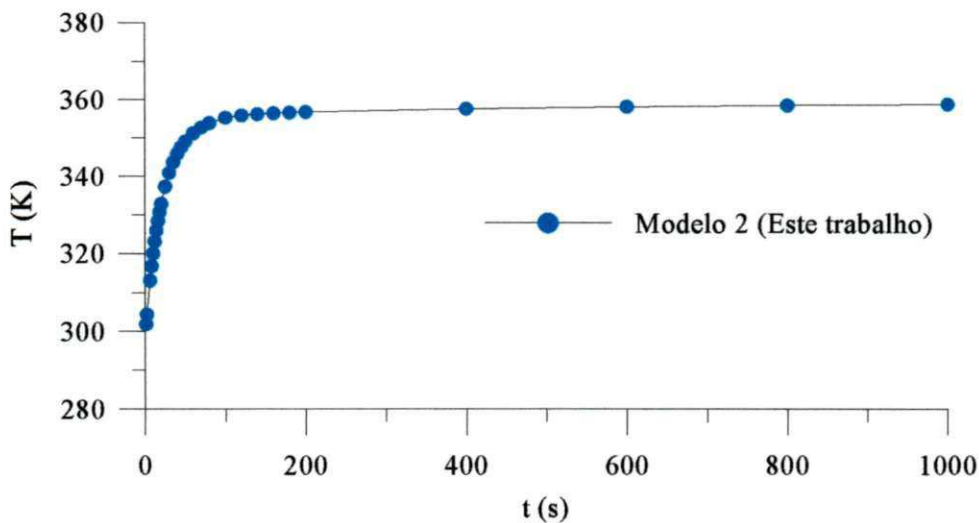


Figura 4.13- Temperatura média de um grão de trigo ao longo do tempo (modelo II).

As Figuras 4.14; 4.15; 4.16 e 4.17 mostram o comportamento dos fluxos de líquido e de vapor durante o processo de secagem no interior do grão de trigo. É observável nas figuras, uma perturbação no início do processo. Isto é devido ao fato de no início do processo haver uma pequena película não contínua de líquido na superfície do grão instabilidade do produto como também a um ajustamento de todo equacionamento desse modelo, que por ser

complexo e altamente não-linear dificulta a sua convergência. Isto foi minimizado pelo o uso de um baixo valor de $\Delta t = 1s$, nas simulações. Neste modelo, tanto o fluxo de líquido quanto o de vapor apresentaram resultados menores do que os obtidos com o uso do modelo I.

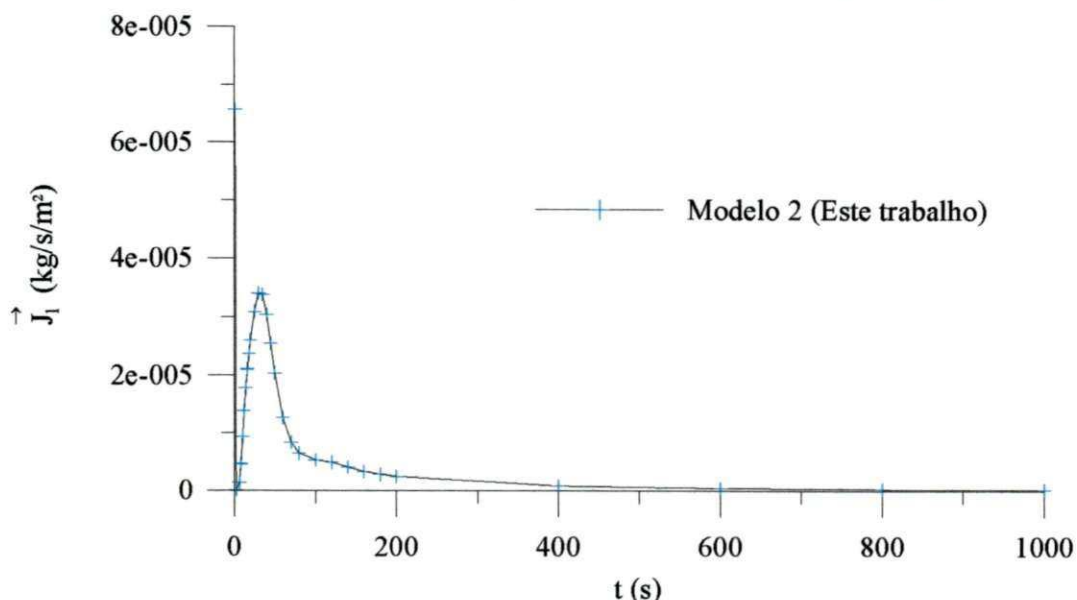


Figura 4.14 - Fluxo de líquido na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo II).

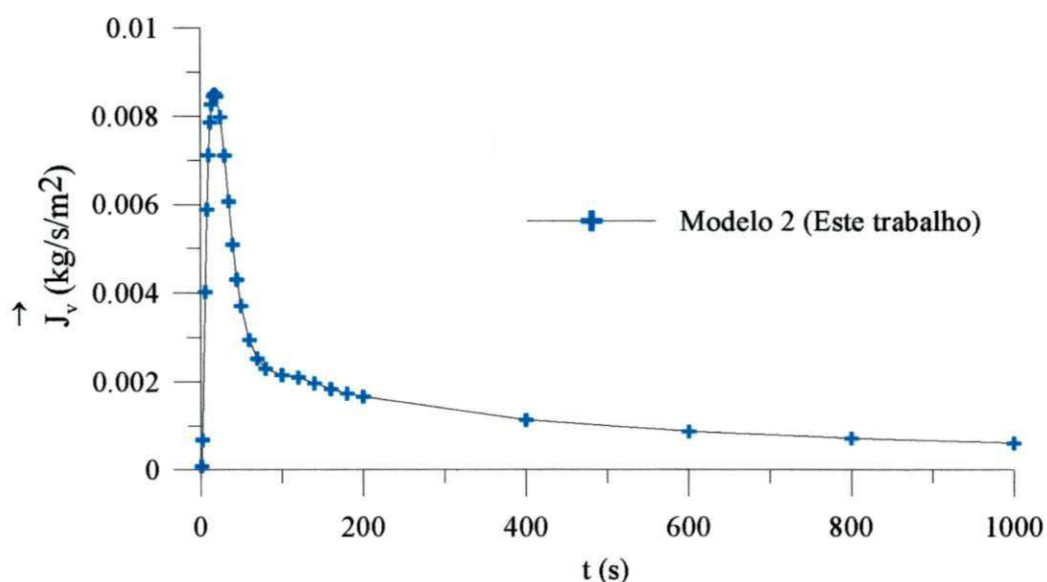


Figura 4.15 - Fluxo de vapor na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo II).

Diferentemente do que ocorreu no modelo I, onde os coeficientes de transporte de massa e calor são infinitos e a condição de contorno de equilíbrio na superfície, a Figura 4.16 evidencia que no início do processo houve um rápido decréscimo da relação J_v/J_l , já que neste

modelo o coeficiente de transporte de massa é finito e a condição de contorno usada é a convectiva.

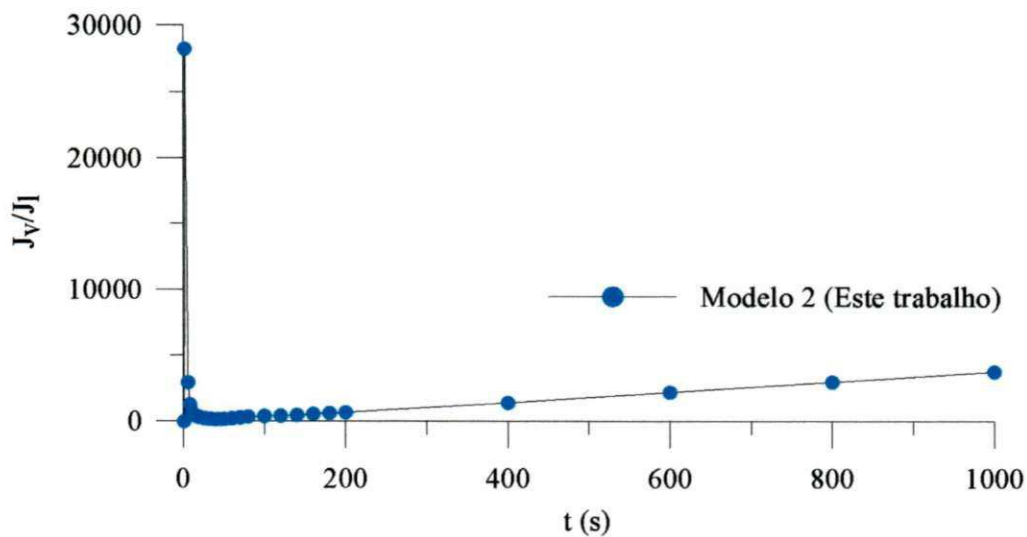


Figura 4.16 - Relação J_v / J_l na superfície do grão de trigo em função do tempo de secagem a uma temperatura de $87,8^\circ\text{C}$ (modelo II).

É observável na Figura 4.17 que nos instantes iniciais a secagem é mais acentuada e se ajustando logo em seguida, isto é devido mais uma vez a condição de contorno utilizada e o coeficiente de transporte de massa que influência bastante o processo.

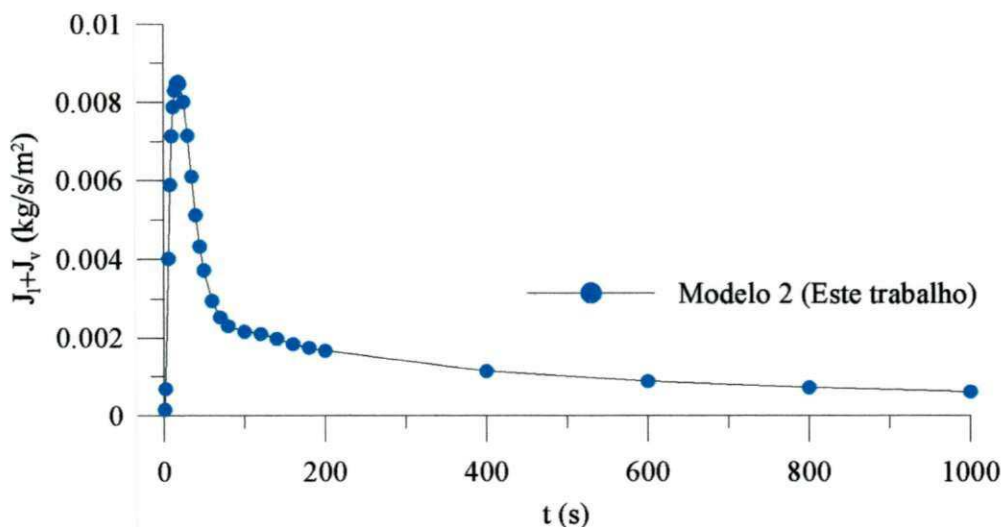
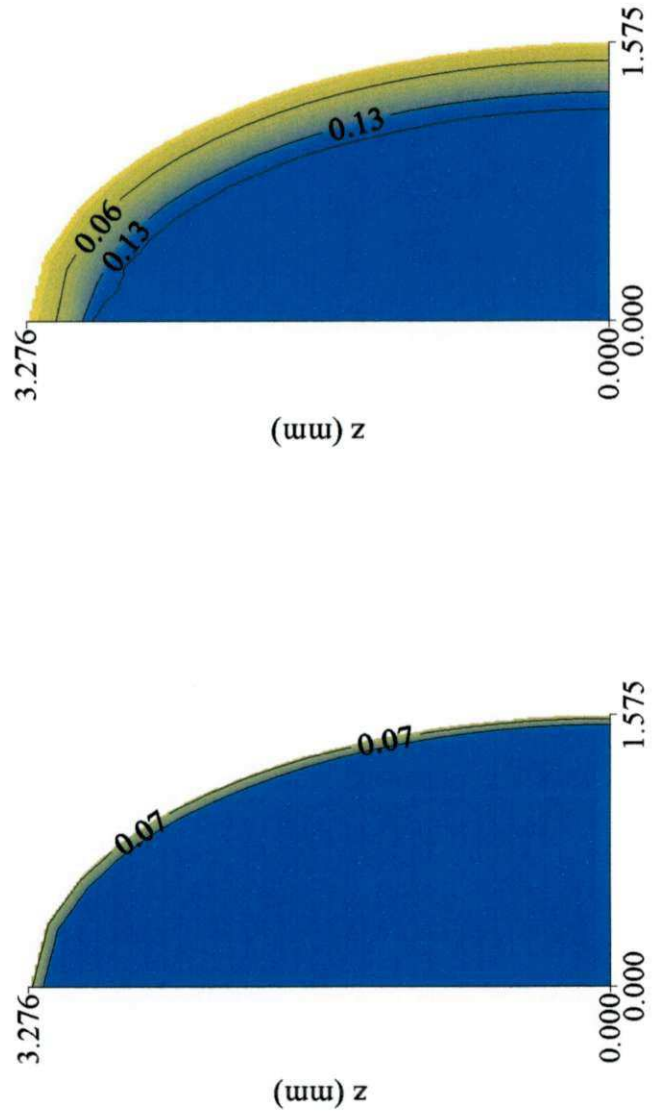


Figura 4.17 - Fluxo total de massa na superfície do grão de trigo a uma temperatura de $87,8^\circ\text{C}$ (modelo II).

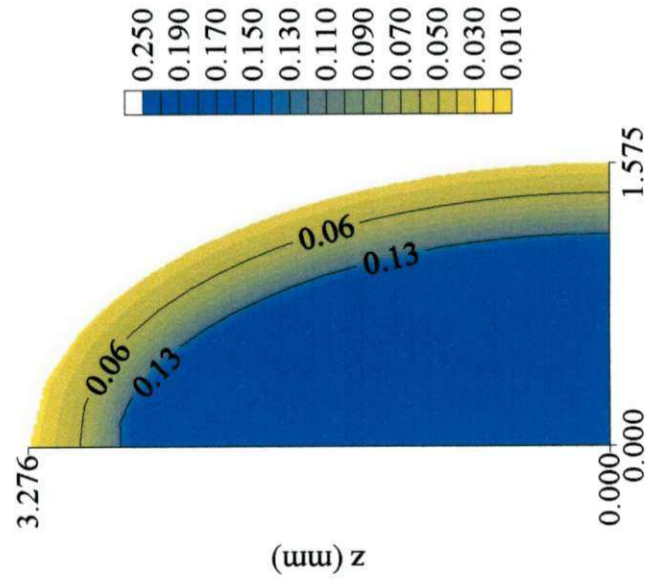
Em relação às Figuras 4.18a – c que mostram a distribuição do teor de umidade dentro de um grão de trigo em três tempos de processos ($t=100\text{s}$; 600s ; 1000s), respectivamente, percebe-se uma secagem mais lenta em relação ao modelo I, pois neste modelo considera o h_m

finito, com condição de contorno convectiva, diferentemente do modelo I influenciando bastante no processo de secagem.



a) $t=100s$

b) $t=600s$



c) $t=1000s$

Figura 4.18- Distribuição do teor de umidade (base seca) dentro de um grão de trigo a $87,8^{\circ}C$ (modelo II).

A Figura 4.19a–b apresenta a distribuição de temperatura no interior do grão de trigo para vários instantes de secagem. Percebe-se que a temperatura decresce da superfície para o centro do grão e com o aumento do tempo de processo de secagem.

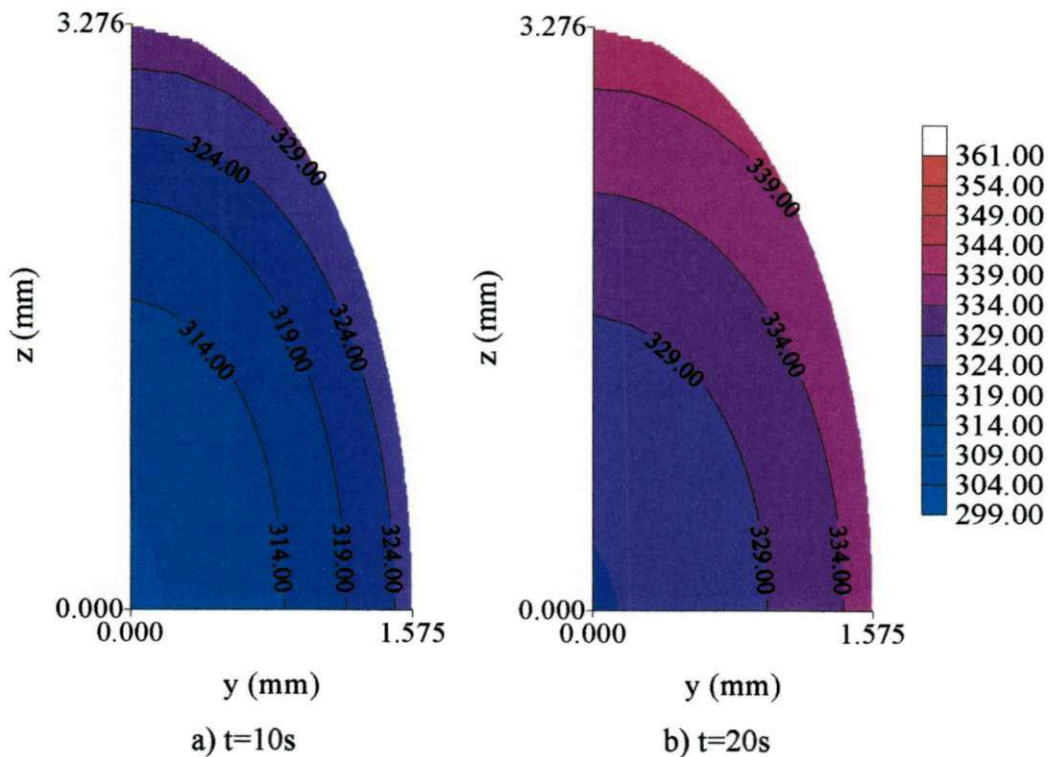


Figura 4.19 – Distribuição de temperatura (K) no interior do grão de trigo a $87,8^{\circ}\text{C}$. (modelo II).

Verifica-se ainda que os maiores gradientes ocorrem nas proximidades da superfície e do ponto focal do sólido, tornando esta área mais susceptível a tensões térmicas, que contribuem para o surgimento de trincas, deformações, fissuras, além de afetar as suas funções organolépticas, reduzindo desta forma sua qualidade.

4.4 - Resultados obtidos com o modelo III

Uma importante abordagem utilizada neste modelo é a consideração do efeito do encolhimento sobre a cinética de secagem, que aproxima bastante a simulação do processo real. Na Figura 4.20, vê-se a comparação dos resultados do teor de umidade preditos por este trabalho com os dados experimentais reportado na literatura por Fortes *et al.* (1981).

Analisando as cinéticas de secagens com os outros modelos apresentados neste trabalho, é visível uma melhor concordância, devido ao valor do h_m finito, como também a

condição de contorno utilizada e a consideração da variação do volume do grão durante o processo.

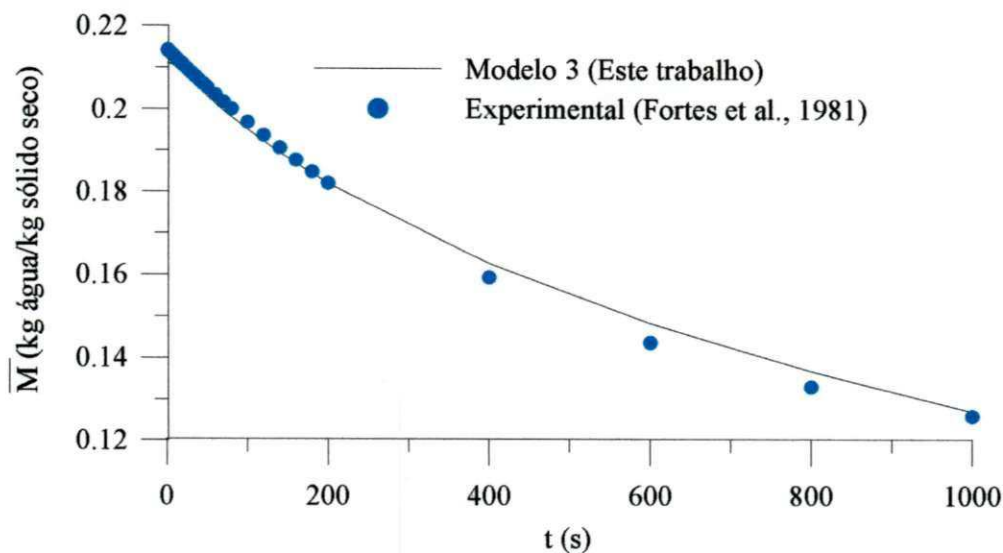


Figura 4.20 - Comparação entre os teores de umidade médio em função do tempo de secagem obtidos com o modelo III e os reportados por Fortes *et al.* (1981).

A Figura 4.21 mostra o aquecimento de um grão de trigo ao longo do tempo de secagem. Como era de esperar, a temperatura média do grão de trigo alcança a temperatura de equilíbrio em um intervalo de tempo maior que o modelo I, devido a condição de contorno utilizada e os ajustes feitos nos coeficientes, contudo nenhuma mudança foi observada com relação ao modelo II.

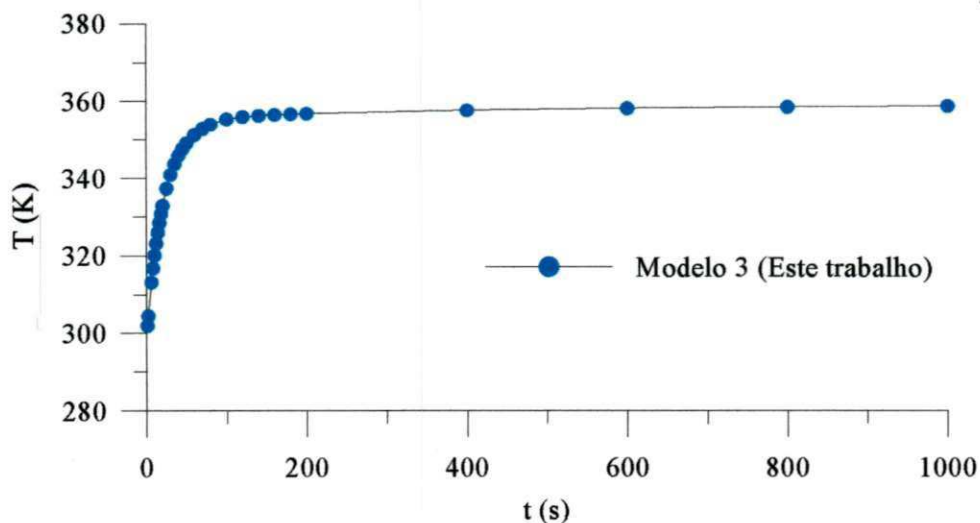


Figura 4.21- Temperatura média de um grão de trigo ao longo do tempo (modelo III)

As Figuras 4.22, 4.23, 4.24 e 4.25 mostram o comportamento dos fluxos de líquido e de vapor durante o processo de secagem no interior do grão de trigo. Mais uma vez pode ser notado nas figuras uma perturbação no início do processo, devido a um ajustamento de todo equacionamento desse modelo. Os fluxos de líquido e vapores na superfície do material foram praticamente os mesmos que os obtidos com o uso do modelo II.

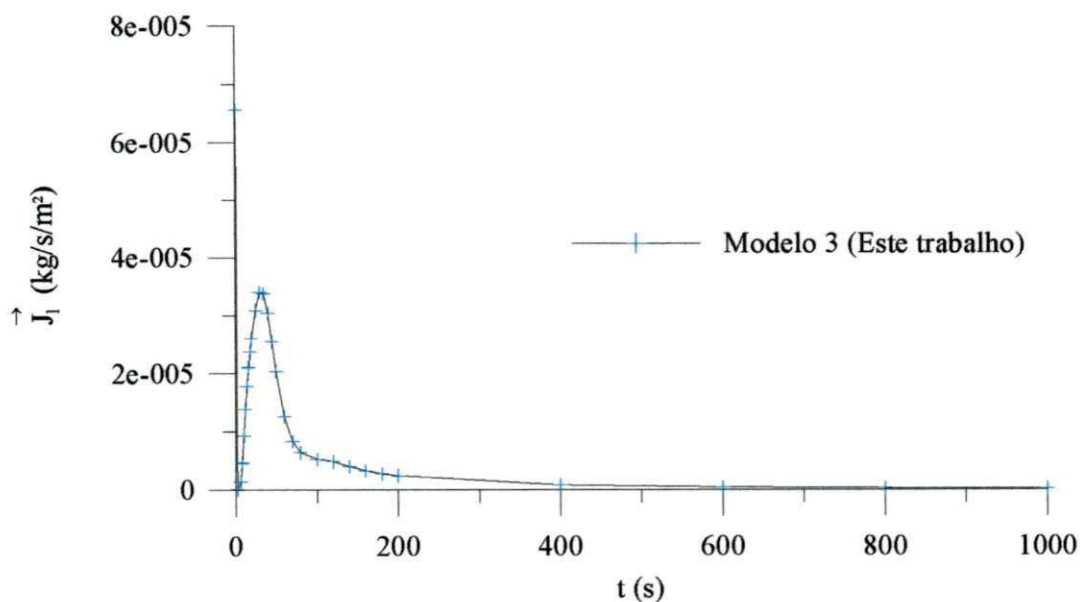


Figura 4.22 - Fluxo de líquido na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo III).

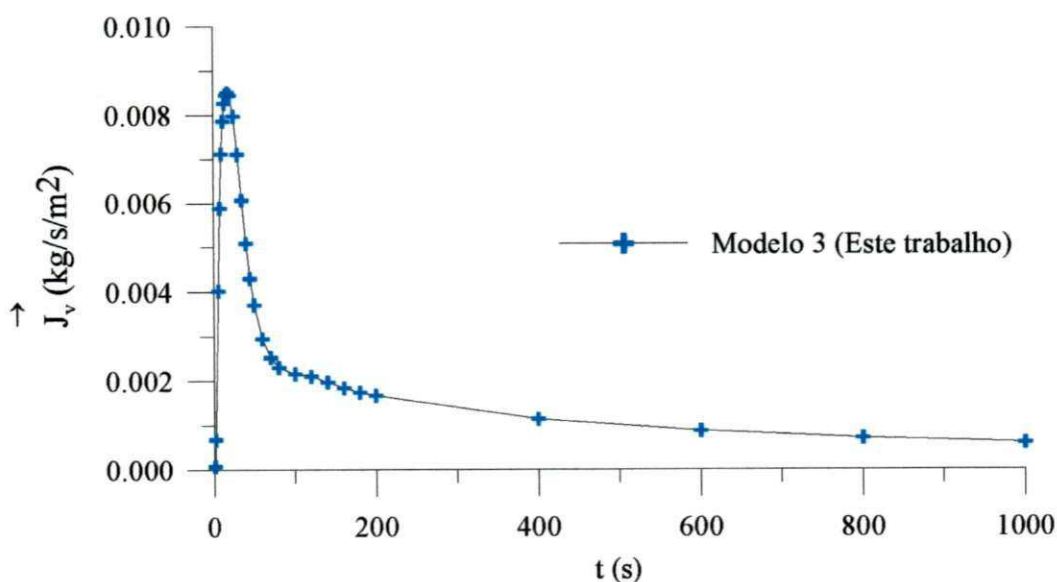


Figura 4.23 - Fluxo de vapor na superfície do grão de trigo a uma temperatura de 87,8°C (modelo III).

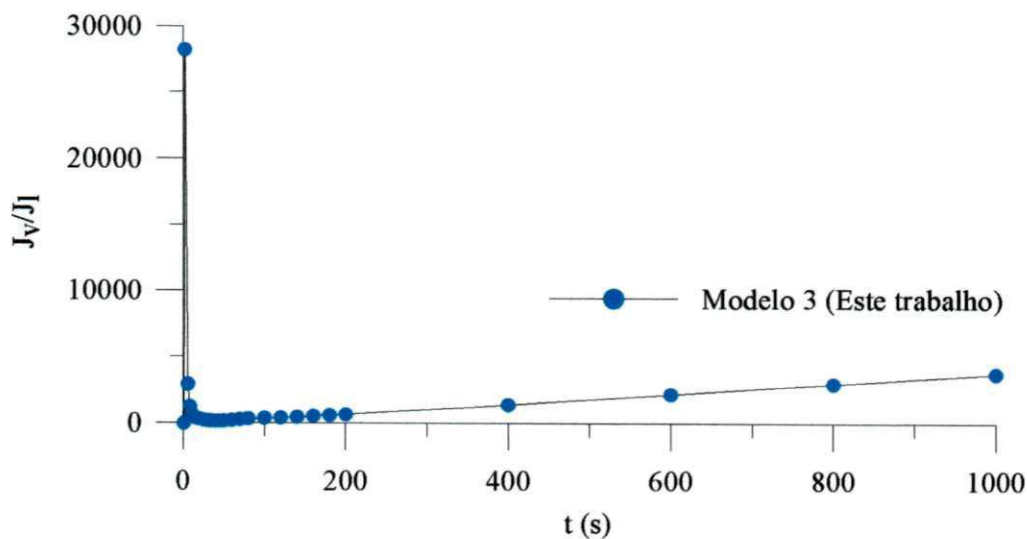


Figura 4.24 – Relação J_v / J_l na superfície do grão de trigo a uma temperatura de $87,8^\circ\text{C}$ (modelo III).

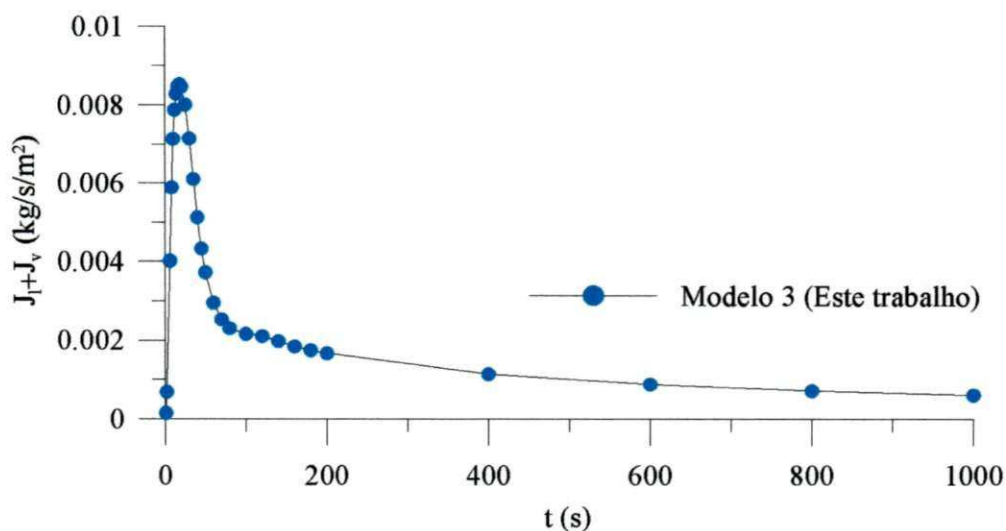


Figura 4.25 – Fluxo total de massa na superfície do grão de trigo a uma temperatura de $87,8^\circ\text{C}$ (modelo III).

Nas Figuras 4.26a-c são apresentadas a distribuição do teor de umidade dentro de um grão de trigo em três tempos de processos ($t= 100\text{s}$; 600s ; 1000s), respectivamente. Nestas figuras, estão mostrados pontos no interior do sólido que têm o mesmo teor de umidade; são linhas de iso - umidade. Além do mais, quanto maior o tempo de secagem pode haver um decréscimo na razão de umidade média. Segundo o modelo de encolhimento apresentado neste trabalho a perda de umidade é proporcionalmente linear à variação do teor de umidade médio do sólido.

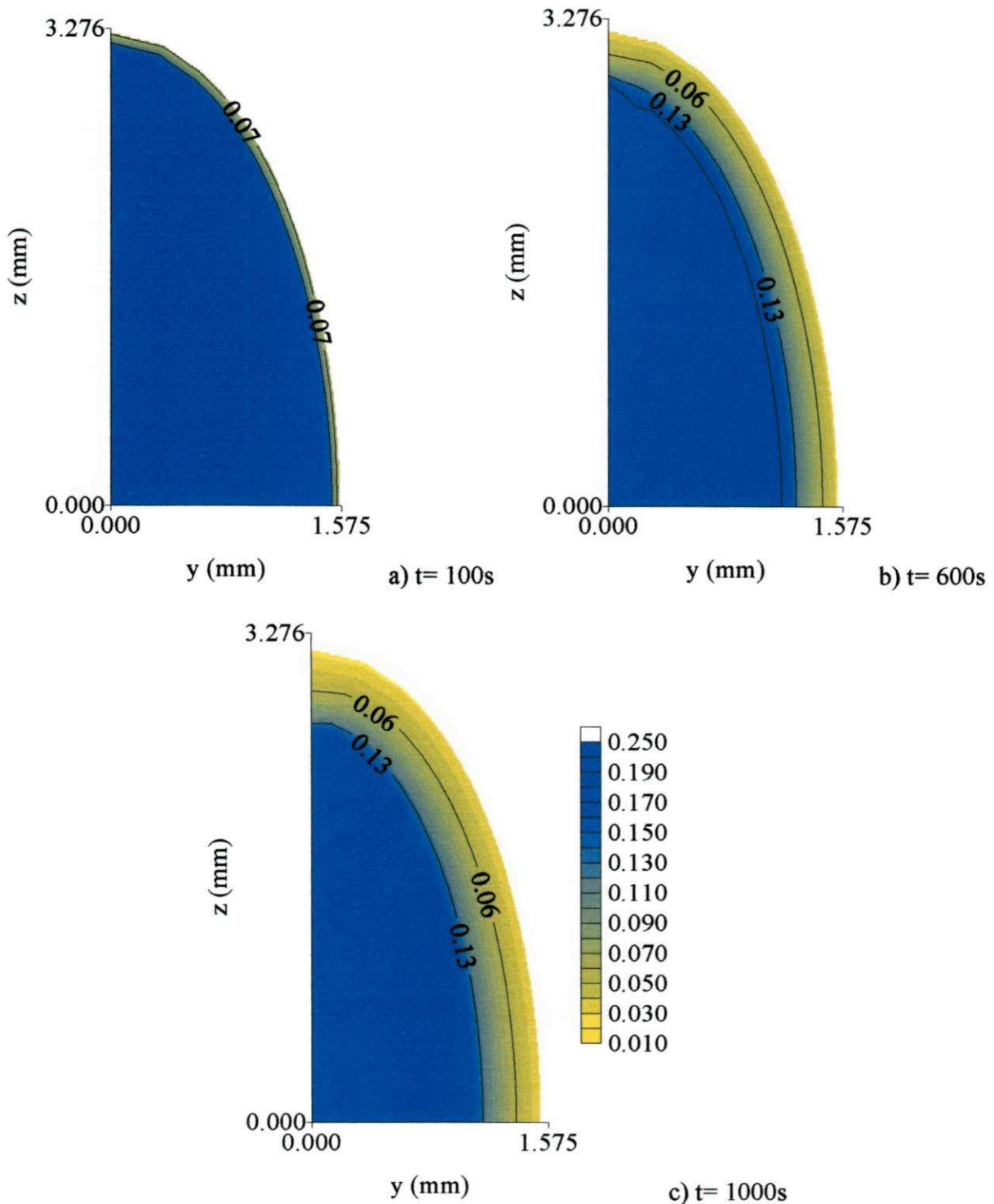


Figura 4.26- Distribuição do teor de umidade (base seca) dentro de um grão de trigo e a 87,8°C (modelo III).

Para o tempo 1000s (Figura 4.26c), pode-se notar que o efeito do encolhimento sobre a secagem é mais acentuado, e a redução nas dimensões do sólido normalmente acelera o processo de secagem. Outro aspecto é que o tempo total de secagem é sempre menor, quando o encolhimento do produto é considerado na modelagem matemática. O estudo do fenômeno

de deformações e variações dimensionais é de grande importância para melhor compreender o processo de secagem, fornecer subsídios para realizar uma secagem ótima e prevenir trincas no interior do sólido, durante o processo. Pode ser observado que o teor de umidade decresce do centro para a superfície do grão e com o aumento do tempo de processo de secagem. Verifica-se ainda, que a secagem é mais rápida na área próxima ao ponto focal e que os maiores gradientes de umidade ocorrem nas proximidades da superfície do grão, diminuindo com o aumento do tempo de secagem. Sendo assim, estas regiões são mais suscetíveis a trincas, fissuras e deformações que podem comprometer a qualidade do produto biológico. Também pode ser visto que uma frente de evaporação móvel acontece da superfície para o centro do grão.

Apresenta-se na Figura 4.27a–b apresenta a distribuição de temperatura no interior do grão de trigo para os tempos 10s e 20 s. Como era de se esperar o comportamento da temperatura no interior do corpo é semelhante ao comportamento do teor de umidade, ou seja, nas regiões próximas ao centro do trigo a temperatura de equilíbrio demora mais a ser atingida. Para o tempo de 20s uma situação semelhante é apresentada. Neste tempo a temperatura de equilíbrio do trigo já está próxima de ser atingida.

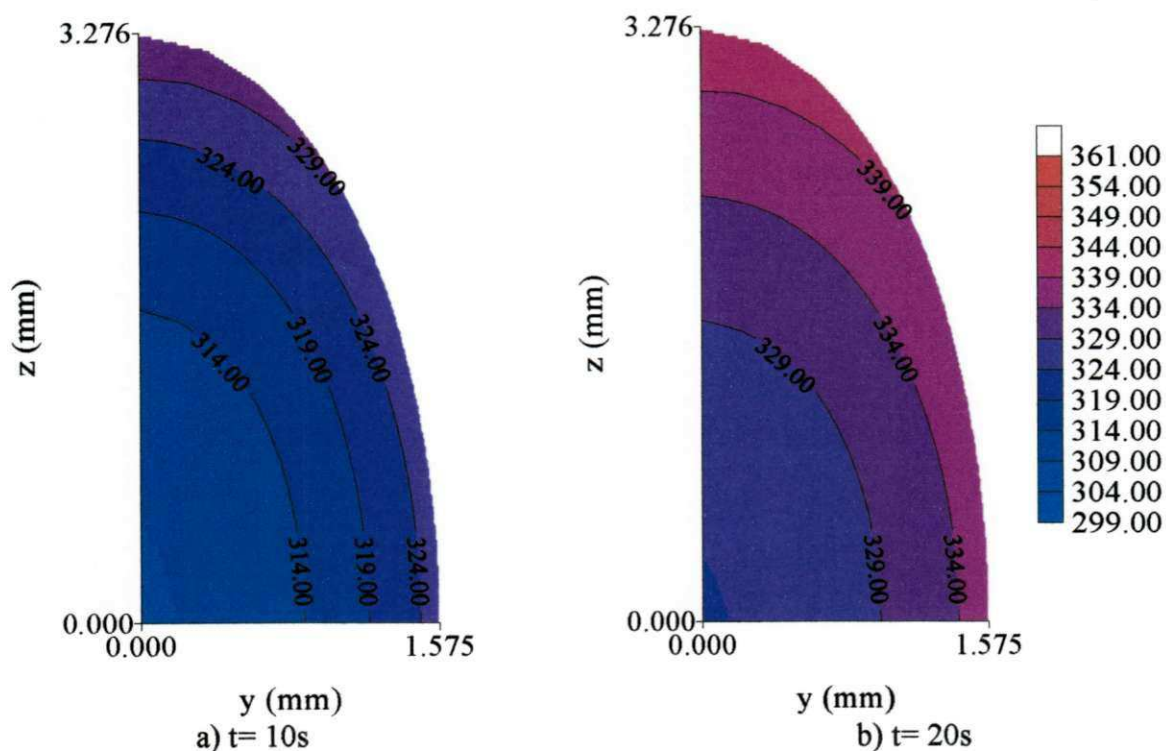


Figura 4.27 – Distribuição de temperatura (K) no interior do grão de trigo a $87,8^{\circ}\text{C}$ (modelo III)

A Figura 4.28 ilustra a malha numérica utilizada na formulação para dois intervalos de tempo ($t= 100s$ e $1000s$). Percebe-se que este tipo de malha é conveniente por se adequar à forma do corpo.

É evidente a significativa influência do encolhimento na taxa de remoção de umidade.

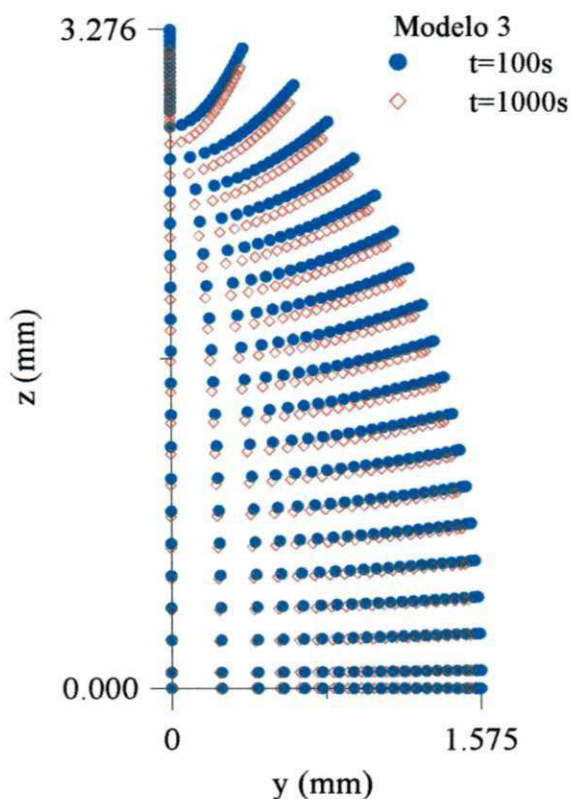


Figura 4.28 – Evolução da malha numérica durante o encolhimento do grão de trigo (razão de aspecto $L_2/L_1=2,08$), secando a $87,8^\circ C$ (modelo III).

O modelo que considera o fluxo de calor e massa acoplados resulta num aquecimento mais lento do sólido. Nestas circunstâncias, se o modelo considerar as condutividades ou a difusividade de massa (líquido e vapor), dependente da temperatura do sólido, o acoplamento entre o calor e massa terá considerável influência nos resultados da cinética de secagem (Lima, 1999).

4.5 - Estimativa dos coeficientes de transporte (k_ℓ, k_v, h_m)

Os coeficientes de transportes k_ℓ, k_v e h_m , foram estimados a partir da minimização do erro entre os valores do teor de umidade simulados e experimentais. A Tabela 4.1 apresenta os valores dos coeficientes de transporte bem como o erro relativo para cada modelo apresentado. A pequena discrepância indica que os modelos apresentam um bom ajuste com os dados experimentais.

Tabela 4.1 – Comparação da condutividade de líquido e vapor e erro residual

Modelos	Este trabalho				Fortes <i>et al.</i> (1981)		ERMQ ($\times 10^{+4}$)	\bar{S}^2 ($\times 10^{+3}$)
	a_1	a_2	$h_m \times 10^{-6}$ (m/s)	h_c (W/m ² K)	a_1	a_2		
I	19,610	2,68	-----	-----	1	1	5,7484	1,5494
II	26,08	3,38	2,1	85,4467	1	1	1,40396	0,0054
III	33,95	3,31	2,1	85,4467	1	1	1,27244	0,0049

Na Tabela 4.1, os parâmetros a_1 , refere-se a relação entre k_ℓ obtido neste trabalho com o k_ℓ reportado por Fortes *et al.*, (1981). Já o parâmetro a_2 , refere-se à relação entre o k_v obtido neste trabalho com o k_v reportado por Fortes *et al.* (1981). É importante comentar que o coeficiente de transferência de massa reportado por Fortes *et al.* (1981), difere daquele obtido neste trabalho. Estes coeficientes têm características diferentes. Enquanto o h_m em Fortes *et al.* (1981) é obtido a partir de uma equação dependente da pressão de vapor na superfície do grão de trigo, neste trabalho o h_m é obtido a partir de um equacionamento que é função do teor de umidade na superfície do grão de trigo, conforme apresentado na Equação (3.120).

Em geral, a comparação entre os coeficientes de transportes reportados na literatura e a encontrada neste trabalho é difícil, devido aos métodos de cálculos usados, composição distinta, estrutura física e química do material. Para uma comparação mais quantitativa dos valores dos fluxos de líquido e vapor obtidos neste trabalho, podem-se observar os resultados encontrados por Fortes *et al.* (1981). Estes autores consideram o trigo como uma esfera. A diferença encontrada entre os valores, pode ser atribuída principalmente à geometria e a

condição de contorno usado por cada pesquisador. No entanto, os termos adicionais incorporados ao modelo apresentado neste trabalho podem também ter influência no resultado. Vale salientar que durante o processo de secagem é visível o fenômeno do encolhimento nos grãos. Isto modifica a forma do corpo, diminui a área de transferência de calor e aumenta a aspereza superficial do produto. Esta última característica será um aumento do nível de turbulência na camada limite e favorece a mudança de temperatura entre o ar de secagem e o material, que podem modificar os coeficientes de transporte ao longo do processo.

Para relacionar a teoria de Fortes e Okos com a teoria de difusão líquida, considera-se que o problema no qual se tenha inexistência de fluxo de vapor e geração de massa, efeitos gravitacionais desprezíveis e que o gradiente de temperatura não tenha efeito sobre o fluxo de líquido. Desta forma a Equação (3.38), assume a forma:

$$\hat{J}_l = \rho_l k_l \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M \quad (4.1)$$

e, portanto, a Equação (3.42) será escrita como segue

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\rho_l k_l \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M} \nabla M}{\rho_s} \right) \quad (4.2)$$

Comparando-se esta Equação com a Equação (2.2), verifica-se que o coeficiente de difusão será:

$$D = \left(\frac{\rho_l k_l \frac{R_v T}{H} \frac{\partial H}{\partial M}}{\rho_s} \right) \quad (4.3)$$

As Figuras 4.29 e 4.32 apresentam o valor do coeficiente de difusão de massa, umidade relativa e condutividades de líquido e de vapor, em função do teor de umidade para a temperatura de 87,8 °C. Verifica-se que na Figura 4.29, diferentemente do valor de D obtido

pela teoria da difusão líquida, o coeficiente de difusão aumenta com a diminuição do teor de umidade até certo valor ($\approx 0,10$ b.s), para então, a partir daí seguir um comportamento esperado, isto é, de decréscimo com a diminuição do teor de umidade. Já a condutividade de líquido decresce durante a secagem, enquanto a condutividade de vapor tem um comportamento inverso, atingindo um máximo em 0,03 b.s.

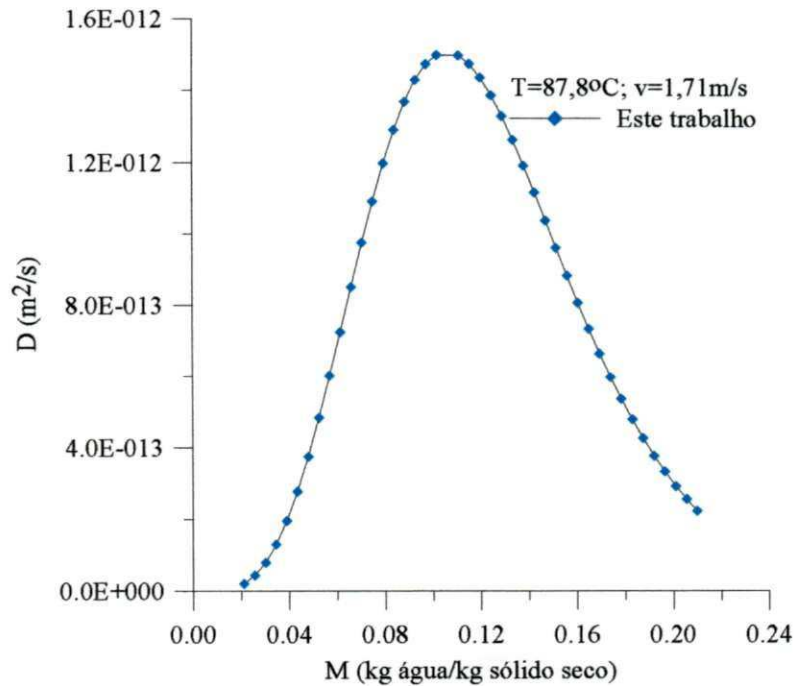


Figura 4.29 – Difusividade de massa durante a secagem de grãos de trigo à T=87,8°C.

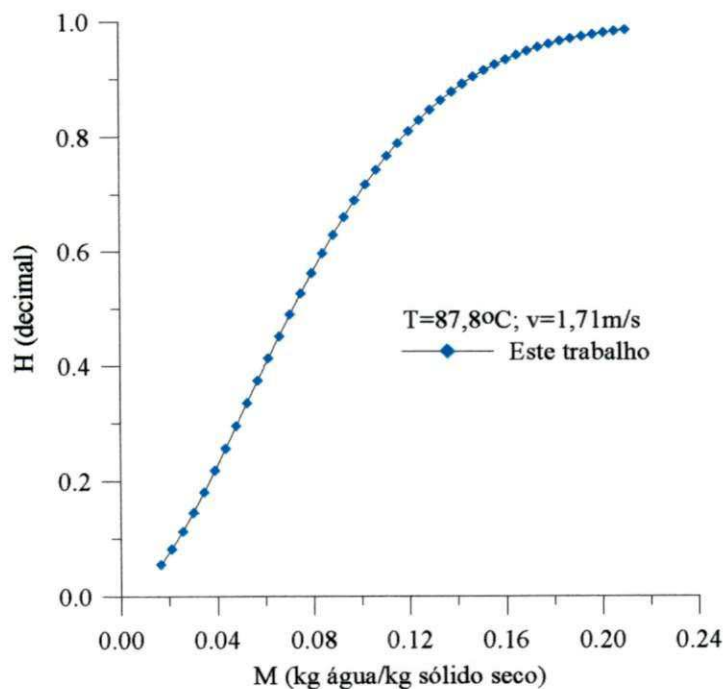


Figura 4.30 – Umidade relativa do ar durante a secagem de grãos de trigo a T=87,8°C.

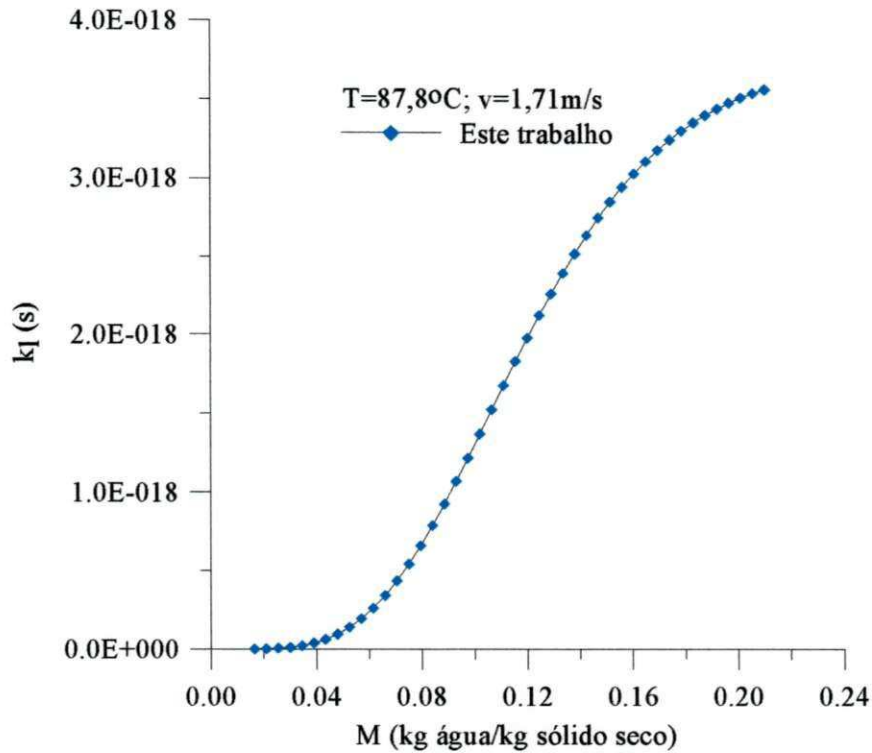


Figura 4.31 – Condutividade de líquido durante a secagem de grãos de trigo à $T=87,8^\circ\text{C}$.

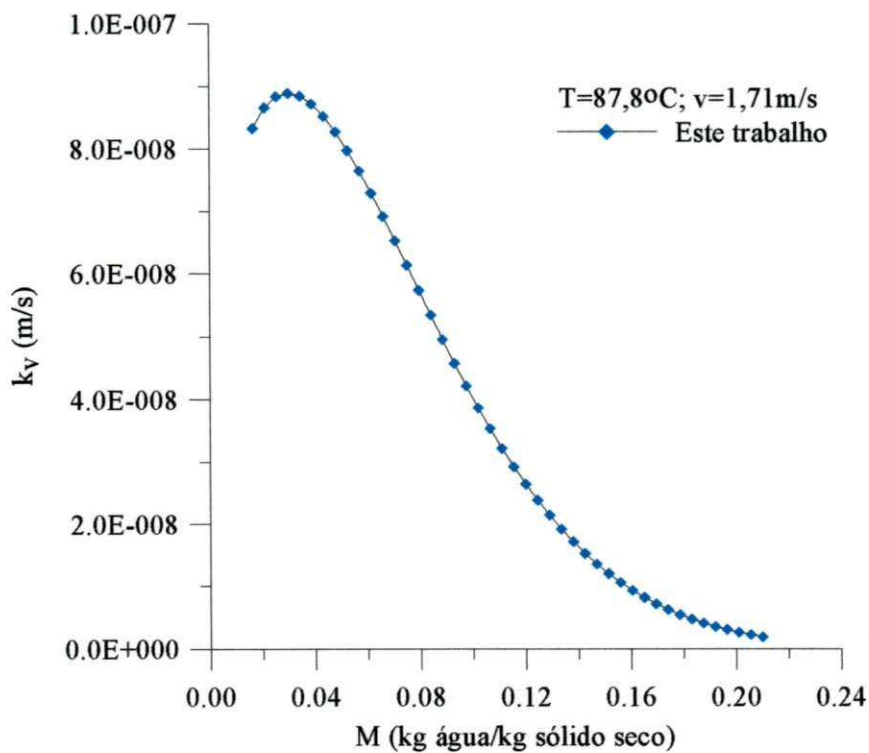


Figura 4.32 – Condutividade de vapor durante a secagem de grãos de trigo à $T=87,8^\circ\text{C}$.

A Tabela 4.2 contém alguns resultados do coeficiente de difusão reportados na literatura, para alguns produtos agrícolas.

Tabela 4.2 - Difusividade de umidade de produtos agrícolas para várias temperatura e geometrias.

Produto (Geometria)	M (b.s.)	T (°C)	D×10 ⁺¹² (m ² /s)	Referência
Trigo (Esferóide prolato)	0,27	70	63,40	Gaston <i>et al.</i> (2002)
Trigo (Esfera)	0,27	70	68,80	Gaston <i>et al.</i> (2002)
Trigo (Esfera)	0,36	67,5	49,94	Silva e Nebra (1988)
Trigo (Cilindro infinito)	0,36	67,5	62,33	Silva e Nebra (1988)
Trigo (Cilindro finito)	0,36	67,5	41,39	Silva e Nebra (1988)
Trigo (Esfera)	0,24	40	8,63	Cihan e Ece (2001)
Trigo (----)	0,2	50	1866,73	Zogzas <i>et al.</i> (1996)
Trigo (Esfera)	0,22	87,8	599,94	Fioreze (1986)
Trigo (Esferóide prolato)	0,22	87,8	325,77	Lima (1999)
Arroz (Esfera)	0,31	54,8	20,28	Steffe e Singh (1980a)
Milho (Esfera)	0,33	90	281,67	Donzeles <i>et al.</i> (1983)
Lentilha (Esfera)	0,66	60	3890,00	Karatas (1997)
Lentilha (esferoide oblato)	0,24	60	10,00	Carmo (2004)

Como esperado, pela Tabela 4.2, houve discrepância entre os valores dos coeficientes de difusão, talvez estejam relacionadas com o modelo utilizado, propriedades físicas do ar de secagem, como também a geometria considerada.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

5.1 - Conclusões

Considerando os resultados obtidos da simulação da secagem em corpos com geometria elipsoidal, pode-se concluir que:

- O tratamento matemático utilizado para se obter a solução numérica da equação de difusão em coordenadas esferoidais prolatos com condição de equilíbrio e convectiva na superfície, foi adequado. A partir da solução, é possível obter a distribuição interna da grandeza requerida (por exemplo, teor de umidade ou temperatura), bem como a sua cinética de difusão, em corpos com geometrias esféricas e elipsoidais.

- O método de volumes finitos mostrou-se adequado para discretizar a equação de difusão no sistema de coordenadas esferoidal prolato, que possibilitou predizer o fenômeno de difusão transiente no interior de um sólido com geometria esférica ou elipsoidal. Os modelos apresentados são versáteis, podendo ser com condição de contorno constante ou do tipo convectiva, e também com outras condições de contorno sob pequenas modificações.

- altos gradientes de umidade e temperatura ocorrem próximo à superfície do sólido e, principalmente em áreas próximas ao ponto focal.

- A consideração do encolhimento do sólido no equacionamento, altera sua taxa de secagem;

- As condutividades de líquido e de vapor apresentaram resultados superiores aos reportados na literatura, considerando o grão de trigo esférico.

- O grão de trigo atinge a temperatura do ar de secagem em ≈ 100 s

- O modelo de Fortes e Okos, ao considerar a inexistência do fluxo de vapor no sólido, tende para o modelo de difusão líquida, apresentando um coeficiente de difusão de massa próximo dos resultados reportados na literatura, contudo tendo um comportamento bem diferente do observado ao se usar o modelo de difusão líquida, isto é, aumentado com o decréscimo do teor de umidade na faixa de 0,21 à 0,10 em base seca.

- Pelo fato do trigo apresentar uma alta taxa de secagem no início do processo, todos os modelos apresentam uma boa aproximação entre os valores teóricos e experimentais, uma vez que consideram as propriedades físicas do produto variáveis. No entanto o modelo que inclui os fenômenos convectivo e de encolhimento é mais realista fisicamente que as demais fornecendo resultados mais confiáveis dos coeficientes de transporte, inclusive apresentando um menor erro relativo.

- Como o grão de trigo tem o teor de umidade baixo, o mecanismo de migração dominante é o fluxo de vapor, na superfície do produto. Observa-se que $J_v / J_\ell > 10^4$, em média.

5.2 - Sugestões para futuros trabalhos

Através dos resultados obtidos até o presente momento e, considerando que os mesmos foram satisfatórios, será dada continuidade a este trabalho com as seguintes etapas:

- Modelar e estudar numericamente a secagem intermitente de corpos com geometria elipsoidal, utilizando o modelo proposto, determinando inclusive, o mínimo tempo de têmpera requerido na secagem;
- Aplicar os modelos numéricos desenvolvidos   secagem de outros produtos agrícolas, tais como: arroz, soja, feijão;
- Aplicar os modelos numéricos desenvolvidos a produtos com teores de umidade alto, como frutas e vegetais;
- Ampliar os modelos para os casos onde se tem efeitos eletromagnéticos (secagem com microondas, infravermelho e outros) e aplicá-lo a situa es práticas;
- Estudar os efeitos de tensões termo-mecânicas em produtos biológicos com geometria elipsoidal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abramowitz, M.; Stegun, I. A. **Handbook of mathematical functions**. New York: Dover Publications, Inc., USA, p. 752-772, 1972.

Acho, T. M. Scalar wave scattering of a prolate spheroid as a parameter expansion of that of a sphere. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. L, n. 3, p. 451-468, 1992.

Afonso Júnior, P. C.; Correa, P. C.; Andrade, E. T. Análise da variação das propriedades físicas e concentração dos grãos de milho (*Pennisetum Glaucum*), durante o processo de secagem. **Revista Brasileira de Armazenamento de Viçosa**. 25(1). p.15-21. 2000.

Alassar, R. S. Heat conduction from spheroids. **Journal of Heat Transfer**, v. 121, n. 2, p. 497-499, 1999.

Almeida, G. S. **Transferência de calor e massa em sólidos heterogêneos com geometria arbitrária: uma análise concentrada**. Campina Grande. Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Campina Grande, 78 p. Dissertação (mestrado), 2003.

Alsina, O L. S., Brasileiro, I. M. N. Drying kinetics of west indian cherry. In: Inter-American Drying Conference (IADC), Itu. **Proceedings...** v. B, p. 434-440. 1997.

Alvarenga, L. C.; Fortes, M.; Pinheiro Filho, J. B.; Hara, T. Transporte de umidade no interior de grãos de feijão preto sob condições de secagem. **Revista Brasileira de Armazenamento**, v.5, n.1, p. 5-18, junho de 1980.

Álvarez, G. Medina, J.C.; Lira, L. **Aplicacion de las soluciones reales y complejas de las ecuaciones de Luikov de transferencia de matéria y energia (Application of the real and complex solutions to the Luikov equations of heat and mass. transfer** Informacion Tecnologica, Engineering Village2.v 12, n 6, p 61-68, (espanhol), 2001.

Aoi, T. On spheroidal functions. **Journal of Physical Society of Japan**, v. 10, n.2, p.130-141, 1995.

Azzouz, S.; Jomaa, W.; Belghith, A. Drying kinetic equation of single layer of grapes. In: International Drying Symposium (**Drying'98**), Thessaloniki: Proceedings... v.B, p. 988-997, 1998.

Balaban, M. Effect of volume change in foods on the temperature and moisture content predictions of simultaneous heat and moisture transfer models. **Journal Food Processing Engineering**, v. 12, n. 1, p. 67-68, 1989.

Berbett, P.A.; Sterring, B. C.; Sousa, E. F.; Molina, M. B.; Queiroz, D. M.; Melo, E. C. A radiofrequency method for on-line moisture content measurement of wheat. **2nd. Interamerican Drying Conference**. Boca del Rio, Mexico, pp. 317-319, 2001.

Berger, D., Pei, D. C. T. Drying of hygroscopic capillary porous solids: A theoretical approach, In. **J. Heat Mass Transfer**, v. 16, p.293-302, 1973.

Berthet, D.; Bakhouya, A.; Bouzon, J.; Vergnaud, J. M. Drying of polymers. Modeling with diffusion-evaporation and shrinkage. In: Mujumdar, A. S. ed. **Drying'92**. Elsevier Science. Publishers B. V., 1992.

Brasileiro, I. M. N. **Cinética de secagem de acerola “In Natura” em monocamada.** Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Química, 75 p. Dissertação (mestrado), 1999.

Brebia, C. A., Dominguez, J. **Boundary elements: an introductory course.** New York: McGraw-Hill Company, 292 p, 1989.

Brodkey, R. S. **The phenomena of fluid motions.** London: Addison-Wesley Publishing Company, p.18-23, 1967.

Carmo, J. E. F. **Difusão em sólidos esferoidais oblato: modelagem e simulação.** Campina Grande, Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 76 p. Dissertação (mestrado), 2000.

Carmo, J. E. F. **Fenômenos de difusão transiente em sólidos esferoidais oblato, Estudo do caso: Secagem de lentilhas.** Campina Grande, Departamento de Engenharia de Processo, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, 140 p. Tese (Doutorado), 2004.

Carmo, J. E. F; Lima, A. G. B. **Mass transfer in oblate spheroidal solids.** In: Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences (ENCIT 2000), Porto Alegre: Proceedings..., CD-ROM, 2000a

Chua, K. J., Mujundar, A. S., Chou, S. K. Intermittent drying of bio-products- on overview **Bioreource Thecnology** , v.90, p.285-295, 2003.

Cinhan, A., Ece, M. C. Liquid difusión model for intermittent drying of roug rice. **Journal of Food Engineering**, v.49, p.327-331, 2001.

Cinhan, A,Ece, M.C., Liquid diffusion model for intermittent drying of roug rice. **Journal of Food Engeneering.** v.49, p.327-331, 2001.

Crossen A. G., Jiménez., M. J. Siebenmorgen. Rice fissuring response to high drying and tempering temperature. **Journal of Food Engineering**, v. 59, p. 61-69, 2002.

Couteliens, F.A.; Burganos, V. N.; Payatakes, A. C. Convective diffusion and adsorption in a swarm of spheroidal particles. **AIChE Journal**, v. 41, n.3, p. 1122-1134, 1995.

Crank, J. **The mathematics of diffusion**. Oxford Science Publications, New York, USA, 414p, 1992.

DeGroot, S. R. **Thermodynamics of irreversible processes**. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1951.

Do-Nhat, T., MacPhie, R. H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. **Quarterly Applied Mathematics**, v. LIV, n. 4, p. 677-685, 1996a.

Do-Nhat, T.; MacPhie, R. H. On the accurate computation of the prolate spheroidal radial functions of the second kind. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. LIV, n. 4, p.721-725, 1996b.

Donzeles, S.M.L.;Filho, J.B.P.; Fortes,M. Curvas de Quebra e de Secagem de milho, em Camadas finas, na faixa de temperatura de 45 a 150° C. **Revista Brasileira de Armazenamento de Viçosa**. 8(1.2). p.11-17. 1983.

Elbet, G., Tolaba, M. P., Suárez, C. **Effects of drying and tempering on head parboiled rice yield**. In: Inter-American Drying Conference(IADC), Itu. Proceedings... v.B, p. 502-507, 1997.

Embrapa - Trigo, Publicações On-line. Disponível em <<http://cnpt.embrapa.br/i-mecan.htm>> acesso em 04.01.2005.

Farias S.N. **Secagem de sólidos esferoidais usando o método de Galerkin**. Universidade Federal de Campina Grande. 60 p, Dissertação (Mestrado), 2002.

Feng, Z.; Michaelides, E. E. Unsteady heat and mass transfer from a spheroid. **AIChE Journal**. v. 43 n.3, 1997.

Figliola, R. S. and Beasley, D. E. **Theory and Design for Mechanical Measurements**, 607p. John Wiley & Sons, New York, 1995.

Fioreze, R. **The intermittent drying agricultural crops with particular reference to energy requirements**. Granfield Institute of Thechnology, Silsoe College, 153p. Tese (Doutorado), 1986.

Fortes, M. Second-law modeling of deep bed drying processes with a simulation study of wheat air-recirculated fluidized-bed drying. 14 th International Drying Symposium (**IDS' 2004**). São Paulo, Brazil, vol A, p18-32, 2004.

Fortes, M. **A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media with special reference to drying of grains and foods**. Purdue University, 226p. (Tese de Doutorado), 1978.

Fortes, M., Okos, M. R. **Advances in drying**. Washington: Hemisphere Publishing Corporation Chapter Five: Drying theories: their bases and limitations as applied to foods and grains, v.1, p. 119-154, 1980.

Fortes, M., Okos, M. R. Non-equilibrium thermodynamics approach to heat and mass transfer in corn kernels. **Transactions of the ASAE**, v. 24, p. 761-769, 1981a.

Fortes, M., Okos, M. R. Heat and massa transfer in hygroscopic capillary extruded products. **A.I.Ch.E. Journal**, 27(20): 255-261. 1981c.

Fortes, M., Okos, M.R., Barret Jr., J. R. Heat and mass transfer analysis of intra-kernel wheat drying and rewetting. **Journal Agricultural Engineering Research**, v.26, p.109-125, 1981b.

Fortes, M.; Ferreira, W. R. Second-law analysis of drying: modeling and simulation of fluidized bed grain drying. 14 th International Drying Symposium (**IDS' 2004**). São Paulo, Brazil, vol A, pp301-308, 2004.

Fortes, M.; Okos, M. R. A non-equilibrium thermodynamics approach to transport phenomena in capillary porous media. **Transactions of the ASAE**, v.24, p. 756-760, 1981.

Fortes, Mauri **Um estudo fundamental das equações de transporte de massa e energia em meios capilares porosos**. Belo Horizonte: Departamento de Engenharia Térmica, Universidade Federal de Minas Gerais, 100 p. Tese (Livre Docência), 1982.

Franca, A. S., Fortes, M., Haghghi, K. Numerical simulation of intermittent and continuous deepbed drying of biological materials, **Drying Technology**, v. 12, n.7, p.1537-1560, 1994.

Fusco, A J.; Avanza, J. R.; Aguerre, R. J.; Gabitto, J. F. Diffusional model for drying with volume change. **Drying Technology**, v. 9, n. 2, pp. 397-417, 1991.

Gastón, A. L.; Abalone, R. M.; Giner, S. A. Wheat drying kinetics. Diffusivities for sphere and ellipsoid by finite elements. **Journal of Food Engineering** v.52, p.313-322, 2002

Giner, S.A; Estrebou, C. A. Visual software (Flux) for simulation of Cross flow dryer performance and effect on quality. Examples for wheat. 14 th International Drying Symposium (**IDS' 2004**). São Paulo, Brasil, vol A, pp. 605-612, 2004.

Gouveia, J. P. G. Almeida, F. A C.; Murr, F. E. X. Estudo da difusividade e do encolhimento do gengibre durante a secagem. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**. v.1 n.1, p.51-58, 1999.

Haji-Sheikh, A., Sparrow, E. M. Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid. **Transactions of the ASAE: Journal of Heat Transfer**, v.88, n.3, p.331-333, 1966.

Happel, J.; Brenner, H. **Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 553 p. 1991.

Igathinathane, C.; Chattopadhyay, P. K. Surface area of general ellipsoid shaped food materials by simplified regression equation method. **Journal of Food Engineering**, v. 46, p. 257-266. 2000.

Jomaa, W.; Puiggali, J. R. Drying of shrinkage materials: modeling with shrinkage velocity. **Drying Technology**, v. 9, n. 5, p. 1271-1293, 1991.

Karatas, S. Determination of Moisture Diffusivity in laird lentil. **Drying Technology**, 15(1), 183-199, 1997.

Keey, R. B. **Drying of loose and particulate materials**. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 502 p.1992.

Keltner, N. R. Transient heat flows in half-space due to an isothermal disk on the surface. **Journal Heat Transfer**. Aug., p. 412-414, 1973.

Kreyszig, E. **Advanced engineering mathematics**. 6. ed. New York: John Wiley & Sons, p. 498-504. 1988.

Krischer, O. **Die Wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik**. Kap. IX. Springer, Berlin. 1963.

Lang, W.; Sokhansanj, S. Dinâmica shrinkage and variable parameters in Bakker- Arkema's mathematical simulation of wheat an canola drying. **Drying Technology** 12(7), p. 1687-1708, 1996.

Lang, W.; Sokhansanj, S.; Rohani, S. Dinâmica shrinkage and variable parameters in Bakker-Arkema's mathematical simulation of wheat and canola drying. **Drying Technology** 12(7), p. 1687-1708, 1994.

Lavenda, B. H. **Thermodynamics of Irreversible Processes**; John Wiley and Sons, New York. 1978.

Lima, A G. B. **Estudo da secagem e dimensionamento de secador de casulos do bicho-da-seda**. Campina Grande: Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 190 p. Dissertação (Mestrado), 1995.

Lima, A G. B.; Nebra, S. A.; Sakanaka, P. H., Analytical solution of mass diffusion equation applied to ellipsoid of revolution, **Proceedings** of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, November 22-26, Águas de Lindóia, Brazil, vol. 1, CD-ROM, 1999.

Lima, A. G. B. Nebra, S. A., Theoretical analysis of the diffusion process inside prolate spheroidal solids. **Drying Technology**, v. 18, n. 1-2, p. 21-48, , 2000a.

Lima, A. G. B.; Nebra, S. A. **caracterização de formas geométricas de sólidos e seus efeitos no fenômeno difusional**. Anais do XXVII Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola (Conbea'99), Pelotas, Brasil, v. 1, CD-ROM, 1999.

Lima, A. G. B.; Queiroz, M. R.; Nebra, S. A., Simultaneous moisture transport and shrinkage during drying of solids with ellipsoidal configuration. **Proceedings** of the International Drying Symposium (IDS'2000), Noordwijkerhout, Holanda, vol. 1, CD-ROM, 2000.

Lima, A.G.B. **Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem de banana**. Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 265p. Tese (doutorado) , 1999.

Lima, D. R., Farias, S. N., Lima A. G. B. Mass transport in spheroids using the Galerkin method. **Brazilian Journal of Chemical Engineering**, v. 21, n. 4, p. 667-680, 2004.

Lima, L. A. **Difusão em sólidos com geometrias arbitrárias: uma abordagem concentrada**. Campina Grande: Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 60p. Relatório Técnico - Científico (PIBIC/UFPB/CNPq), 2001.

Lima, L. A. Lima. A. G. B. **Transferência de calor e massa durante a secagem de sólidos com forma arbitrária: uma abordagem concentrada**. Anais do XXX Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola (Conbea'2001), Fox do Iguaçu, Brasil, v. 1, CD-ROM, 2001 .

Luccas, V. **Obtenção de fatias de banana desidratada crocantes através da pré-secagem a altas temperaturas e curto tempo em leito fluidizado**, Campinas, Faculdade de Engenharia Química, Universidade Estadual de Campinas, 104p. Dissertação (mestrado), 1996.

Luikov, A. V. **Heat and mass transfer in capillary porous bodies**. New York: Pergamon Press Ltd., 523p. 1966.

Luikov, A. V. **Heat and mass Transfer in capillary- Porous Bodies**. Pergammon Press. Oxford. 1966a.

Luikov, A. V. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies: review. **International Journal heat and mass transfer**, v.18, p.1-14, 1975.

Luikov, A. V.; Mikhailov, Yu. A. **Theory of energy and mass transfer**. Oxford: Pergamon Press Ltd., 392 p.1965.

MacRobert, T. M. **Spherical harmonics: an elementary treatise on harmonic function with application**. Oxford: Pergamon Press, 1967, 349 p.

Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Soni, R. P. **Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics**. Berlin: Springer-Verlag, p.472-495, 1966.

Maliska, C.R. **Computational Heat Transfer and Fluid Mechanics**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC (em Português), 2004.

Marinos-Kouris D.; Maroulis, B. **Transport properties in the drying of solids. Handbook of Industrial Drying**. New York: Marcel Dekker Inc. v. 1, p.113-150, 1995.

Mariz, T. F. **Secagem da casca de caroço de algodão em leito fixo**. Campina Grande: Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, 139 p. dissertação (Mestrado), 1986.

Martinez, C.; Perez, C.; Viscarra, M.; Ruiz, R. Simulation of a vibrofluidized bed dryer. 2nd. **Interamerican Drying Conference**. Boca Del Rio, Mexico, pp. 135 – 141, 2001.

Mészáros Cs., Farkas I., Bálint Á, Buzás J. Modelling Of The Coupled Heat And Mass Transfer Through PorousMedia Based Of The Wave Theory Of The Non-EquilibriumThermodynamics **Drying' 2002-Proceedings** of the 13th International Drying Symposium (IDS' 2002),Beijing, China, 27-30, vol. A, pp. 490, 2002.

Minkowycz, W. J., Sparrow, E. M., Schneider, G. E., Pletcher, R. H. **Handbook of numerical heat transfer**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1024p, 1988.

Misra, R. N.; Young, J. H. Numerical solution of simultaneous diffusion and shrinkage during soybean drying. **Trans. ASAE**, v. 23, n. 5, p. 1277-1282, 1980.

Nascimento, J.J. S. **Transient Diffusion Phenomenon in Parallepipeds Solids. Cases Studiend: Drying of Ceramics Material**. (Tese de Doutorado), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Brasil, 2002.

Nogueira, R. I. **Processo de secagem de banana (Musa acuminata subgrupo Cavendish cultivar nanica) parâmetros ótimos na obtenção de banana-passa**. Campinas: Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas. 154p. Dissertação (Mestrado), 1991.

Norminton, E. J.; Blackwell, J. H. Transient heat flow from constant temperature spheroids an thin circular disk. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, v. XVII, Part. 1, p. 65-72, 1964.

Oliveira, V.A. B **Difusão em sólidos esferoidais prolatos: uma solução analítica**. . Campina Grande, Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba. 76 p. Dissertação (mestrado), 2001.

Page, L.; Júnior, N. I. A. The electrical oscillations of a prolate spheroid. **The Physical Review**, May, v.53, p.819-831, 1938.

Paje, L. The electrical oscillations of a prolate spheroid: Paper II. Prolate spheroidal wave functions. **The Physical Review**, v. 65, n. 3 e 4, p. 98-110, 1944a.

Paje, L. The electrical oscillations of a prolate spheroid: Paper III. The antenna problem. **The Physical Review**, v. 65, n. 3 e 4, p. 111-117, 1944b.

Parry, J. L. Mathematical modelling and computer simulation of heat and mass transfer in agricultural grain drying. A review. **Journal of Agricultural Engineering Research**, v. 32, p. 1-29, 1985.

Parti, M. Evaluation of selected mathematical models for grain drying. In: **Proceedings of the International Drying Symposium (IDS'90/CHISA'90)**, Parham, v. 3, p. 153-162, 1990.

Parti, M. Selection of mathematics models for drying grain in thin-layers. **Journal of Agricultural Engineering Research**, v.54, p. 339-352, 1993.

Patankar, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**, New York: Hemisphere Publishing Corporation, 197 p. 1980.

Philip, J.R., D.A. De Vries. **Moisture movement in porous materials under temperature gradients**. *Trans.Am.Geophys. Union*, 38(2): 222-232, 594. 1957.

Pólia, G., Szego, G. Inequalities for capacity of condenser. **American Journal of Mathematics**, vol.LXVII, p.1-32, 1945.

Prachayawracorn, S., Soponronnarit, S., Wetchacama, S., Chinnabum, K. Methodology for enhancing drying rate and improving maize quality in fluidized-bed dryer. **Journal of Stored Products Research**, v.40, p.379-393, 2003.

Queiroz, M. R. **Estudo teórico-experimental da cinética de secagem de bananas**. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 176p. Tese (Doutorado) , 1994.

Queiroz, M. R.; Nebra, S. A. Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of bananas. **Journal of Food Engineering**. v. 47, p. 127-132. 2001.

Rodrigues Júnior A.; Innocentini, M. D.; Pandolfelli, V. C. **Variáveis críticas no processo de secagem de concretos cerâmicos**. *Cerâmica*, v. 45, n. 292-293, 1999.

Sabadini, E., Carvalho, B. C. Jr., Sobral, P. J. A., Hubinger, M. D. Mass transfer and diffusion coefficient determination in salted and dried meat pieces. In: Inter-American Drying Conference (IADC), Itu. *Proceedings...* v. B, p. 441-447. 1997.

Sabbah, M. A., Foster, G.H., Haugh, C. G., Peart, R. M. Effect of tempering after drying on cooling shelled corn. **Transaction of the ASAE**, v. 15, n4, p.763-765, 1972.

Sarker, N. N., Kunze, O. R., Stroubolis, T. Finite element simulation of rough rice drying. **Drying Technology**, v.12, n.4, p. 761-775, 1994.

Sheen, S.; Hayakawa, K. Parametric analysis for frozen spheroidal (prolate and oblate) or finitely cylindrical food. **Journal of Food Science**, v.57, n.1, p. 236-248, 1992.

Shin, T. **Numerical heat transfer**. Washington: Hemisphere Publishing Corp., 536p. 1984.

Silva, A.M., The calculation of moisture Distribution in a Drying Process. **Drying' 2002- Proceedings** of the 13th International Drying Symposium (IDS' 88), Versarilles-France, Sep, vol. I, p.145-150, 1988.

Silva, J. B., **Secagem de Sólidos em Camada Fina via análise concentrada: Modelagem e simulação**. Campina Grande. Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Campina Grande, 78 p. Dissertação (mestrado) 2002.

Singh, R. P., Wang, C.Y., Zuritz, C. A numerical approach to simulate rice drying, In: International Drying Symposium (IDS 80), Montreal: **Proceedings...** v. 1, p.227-232, 1980.

Sjöholm, I.; Gekas, V. Apple Shrinkage Upon **Drying**. **Journal of Food Engineering**. v.25, p.123-130, 1995.

Sokhansanj, S. Prediction of heat and mass transfer within a grain kernel – a finite element application, In: International Drying Symposium (IDS'80), Montreal: **Proceeding...** v.2, p.229-232, 1980.

Sokhansanj, S., Patil, R. T. Kinetics of dehydration of green alfafa. **Drying Technology**, v.14. n.5, p. 1197-1234, 1996.

Steffe, J. T.; Singh. R. P. Liquid diffusivity of rough rice components. **Transactions of the ASAE**, v.23, n.3, p. 767-774, 1980a.

Steffe, J. T.; Singh. R. P. Theoretical and practical aspects of rough rice tempering. **Transactions of the ASAE**, v. 23, p. 775-782, 1980.

Steffe, J. T.; Singh. R. P., Bakshi, A. S. Influence of tempering time and cooling on rice milling yields and moisture removal. **Transactions the ASAE**, v.22, p.1214-1218 e 1224, 1979.

Strumillo, C.; Kudra, T. **Drying: principles, science and design**. New York: Gordon and Beach Publishing, 448 p. 1986.

Suarez, C.; Viollaz, P.E. **Shrinkage effect on drying behavior or potato slabs**. J. Food Eng. v. 13, n. 2, p. 103-114, 1991.

Teruel, B., Cortez, L., Lima, A.G.B. Transferência de calor durante o resfriamento de frutas com ar forçado e com água. **Brazilian Journal of Food Technology**, v.5, p.131-138, 2002.

Tolaba, M. P., Aguerre, R. J., Suarez, C. **Drying of corn with tempering: simulation and experimental verification**. In: Inter-American Drying Conference (IADC), Itu. Proceedings, v. B, p. 516-523, 1997.

Vagenas, G. K.; Marinos-Kouris, D. Drying kinetics of apricots. **Drying Technology**. v. 9, n. 3, p. 735-752, 1991.

Vázquez, L. , M. Vizcarra , A. Salazar , A. Castillo , I. Guerrero **International Journal of Food Properties**, Publisher: Taylor & Francis, volume 4, n 3, p. 419-420, 2002.

Versteeg, H. K.; Malalasekera, W. **An Indroduction to computational fluid dynamics- the finite volume method**. London: Prentice Hall, p.257, 1995.

Vieira, W. G.; Silva, L. H. M. Modeling drying process of granular cereal: a boundary element approach. In: Inter-American Drying Conference (IADC),Itu. **Proceedings...** v.B, p. 347-355, 1997.

Vizcarra, M.; Perez, C.; Martinez, C. Ruiz, R. Wheat drying analysis in a vibrofluidized bed. **2nd. Interamerican Drying Conference**. Boca Del Rio, Mexico, pp. 227-233, 2001.

Walker, L. P., Bakker- Arkema, F. W. Energy efficiency in concurrent flow rice drying. **Transactions of the ASAE**, v. 24, p. 1352-1356, 1981.

Whitaker, S. O, **Advances in Drying**, Ed. A. S. Mujumdar, Hemisphere Publishing Corporation, New York. Chapter two: Heat and mass transfer in granular porous media, p.23-61, 1980.

Whitney J. D.; Porterfield, J. C. Moisture movement in porous, hygroscopic solid, **Trans.ASAE**, v11, p. 716-723, 1968.

Zhang Q., Litchfield, J. B., An optimization of intermittent corn drying in a laboratory scale thin layer dryer. **Drying Technology**, v.9, n.2, p. 383-395, 1991.

Zhang, D., Mujumdar, A. S. Deformation and stress analysis of porous capillary bodies during intermittent volumetric thermal. **Drying Technology**, v. 10, n.2, p.421-443, 1992.

Zogzas, N. P., Maroulis, Z. B., Marinos-Kouris, D. Moisture diffusivity data compilation in foodstuffs. **Drying Technology**, v. 14, n.10, p.2225-2253, 1996.