



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uma Análise dos Dados das Supernovas em Modelos Cosmológicos de Branas

José Wagner Cavalcanti Silva

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2012 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uma Análise dos Dados das Supernovas em Modelos Cosmológicos de Branas

José Wagner Cavalcanti Silva

Dissertação realizada sob a orientação do Prof.Dr. Fábio de Melo Leal Dahia, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- Fevereiro 2012 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
DIPLOMA DE MESTRADO EM FÍSICA
DIPLOMA DE MESTRADO EM FÍSICA

Uma análise dos dados das supernovas em Modelos Cosmológicos de Branas

José Wagner Cavalcanti Silva

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586a Silva, José Wagner Cavalcanti.
Uma análise dos dados das supernovas em Modelos Cosmológicos de Branas / José Wagner Cavalcanti Silva. - Campina Grande: UFCG, 2012.
86 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Fábio de Melo Leal Dahia

Referências.

1. Supernovas. 2. Dimensões Extras. 3. Branas. I. Título.

CDU 524.8(043)

UMA ANÁLISE DOS DADOS DAS SUPERNOVAS EM MODELOS
COSMOLÓGICOS DE BRANAS

JOSÉ WAGNER CAVALCANTI SILVA

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio de Melo Leal Dahia
Orientador

Prof.Dr. Francisco de Assis Brito
Examinador

Prof.Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Examinador

Ao meu avô Honório Pereira
da Silva.

AGRADECIMENTOS

O grande problema de redigir uma página com agradecimentos é deixar de citar pessoas que contribuíram, direta ou indiretamente, para a conquista de um objetivo. Muitas vezes ofertando apenas um belo sorriso de motivação ou com palavras sábias e aconselhadoras. Portanto, peço desculpas àqueles cujos os nomes não foram citados aqui, mas que, sem dúvidas, estavam gravados na minha memória e no meu coração.

Primeiramente agradeço ao Amado Mestre Jesus por sempre estar presente na minha vida através de pessoas tenras e bondosas que contribuíram para que eu conseguisse completar mais uma etapa desta minha existência física.

Deixo escrito, aqui, meu profundo agradecimento ao meu orientador Fábio Dahia pela sua inesgotável paciência que teve comigo em todo os momentos da realização deste trabalho como, também, por oferecer a oportunidade de adquirir conhecimentos novos através da sua orientação.

Agradeço, também, à todas as pessoas que fazem parte da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande.

Aos meus amigos que me acompanharam nessa etapa da minha vida acadêmica deixo, aqui, meus sinceros agradecimentos pela a forma fraternal que sempre me trataram.

Agradeço à toda minha família pelo apoio que sempre me proporcionaram e ao amor que nunca deixaram de me dar.

RESUMO

Neste trabalho discutimos os modelos de Universo que levam em consideração a existência de dimensões extras. A teoria Kaluza-Klein, o modelo ADD e os modelos de Randall-Sundrum são exemplos de teorias que procuram descrever o Universo com dimensões extras. Os modelos ADD e de Randall-Sundrum são modelos que consideram o nosso Universo como sendo uma hipersuperfície imersa em um espaço de dimensão superior. Essa hipersuperfície é o que chamamos de brana. Focalizamos nosso trabalho no modelo de Randall-Sundrum II e fizemos testes com esse modelo de brana usando os dados observacionais das supernovas tipo Ia (SNeIa) compilados por diferentes grupos de pesquisa como o Legacy Survey, Supernova Cosmology Project, ESSENCE e pelo Gold Sample Team. Com esses dados estudamos o modelo Randall-Sundrum II no contexto cosmológico, determinando os parâmetros livres do modelo como os parâmetros de densidade da matéria (Ω_m), da constante cosmológica (Ω_Λ) e de tensão (Ω_Ξ). Verificamos que os valores dos parâmetros que melhor se ajustam aos dados, no caso de seção espacial plana $k = 0$, sugerem que o Universo está numa fase de expansão acelerada.

Palavras Chaves: Supernovas, Branas, Dimensões Extras.

ABSTRACT

In this work we discuss models of the Universe that take into account the existence of extra dimensions. The Kaluza-Klein theory, the ADD model and the Randall-Sundrum models are examples of theories that describe the universe with extra dimensions. In the ADD and Randall-Sundrum models our universe is considered as a hypersurface embedded in a higher dimension space . This hypersurface is what we call brane. We focus our work on the RSII model, testing this brane model by using the observational data of type Ia supernovae (SNeIa) compiled by different research groups as the Legacy Survey Supernova Cosmology Project, and the Gold Essence Sample Team . With these data we study the Randall-Sundrum II model in cosmological context, determining the free parameters of the model such as density of matter (Ω_m), the cosmological constant (Ω_Λ) and tension (Ω_Ξ). We found that the best fit values of the parameters, in the case of flat spatial section $k = 0$, suggest that the universe is in a phase of accelerated expansion.

Key Words: Supernovae, Brane, Extra Dimensions.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Universo de Cinco Dimensões e Teoria de Branas	4
2.1	Teoria Kaluza-Klein	5
2.1.1	Gravitação e Eletromagnetismo em Cinco Dimensões	6
2.1.2	Método de Compactação de Klein	7
2.1.3	Escala de Compactação	9
2.2	Modelo ADD	12
2.2.1	Confinamento dos Férmions	12
2.2.2	Potencial gravitacional em dimensões extras	20
2.2.3	Escala fundamental de comprimento da dimensão extra	23
2.3	Modelo Randall-Sundrum I	25
2.3.1	Topologia S^1/\mathbb{Z}_2	25
2.3.2	Linearização da gravidade	28
2.3.3	Espectro de massa dos grávitons	30
2.4	Modelo Randall-Sundrum II	32
2.4.1	Normalização dos modos KK	33
2.4.2	Cálculo do potencial pelo método da função de Green	34
3	Cosmologia Padrão e Cosmologia em Branas	37
3.1	Cosmologia Padrão	37
3.1.1	A Equação de Friedmann	38

3.1.2	Modelo Λ CDM	42
3.2	Medindo Distância em Cosmologia	43
3.2.1	Distância Própria	44
3.2.2	Red Shift	45
3.2.3	Distância de Luminosidade	46
3.2.4	Escalas de Magnitude e Módulo de Distância	52
3.3	Cosmologia em Brana	54
3.3.1	Equação modificada de Friedmann numa brana fina	55
3.3.2	Cenário cosmológico	58
4	Dados Observacionais das Supernovas	61
4.1	Supernovas	61
4.2	Análise dos Dados Observacionais	65
4.2.1	Método de ajuste dos dados	66
4.2.2	Gold Sample	69
4.2.3	Legacy Survey	70
4.2.4	ESSENCE	71
4.2.5	Supernova Cosmology Project	72
4.3	Dados das supernovas no cenário de branas	74
5	Considerações Finais	80
	Bibliografia	83

Lista de Figuras

2.1	Comparação entre a topologia de uma reta e um círculo	8
2.2	Dimensão extra na teoria de Kaluza-Klein	10
2.3	Torre Kaluza-Klein	12
2.4	Comportamento do potencial escalar em função do campo	13
2.5	Gráfico para o campo escalar descrevendo uma parede de domínio.	15
2.6	Densidade de energia da brana localizada em $\zeta = 0$	16
2.7	Massa topológica	22
2.8	Topologia S^1	25
2.9	Topologia S^1/\mathbb{Z}_2	26
3.1	Fluxo de energia por unidade área.	47
3.2	Escala de Magnitude Aparente	53
4.1	Supernova SN 1994D que explodiu na borda da galáxia 4526 (constelação de Virgem).	62
4.2	Supernovas tipo Ia e tipo II	63
4.3	Diagrama de Classificação das Supernovas	64
4.4	Curvas de luz	65
4.5	Dados observados e Curva de ajuste (Λ CDM) - Gold Sample.	69
4.6	Dados observados e Curva de ajuste (Λ CDM) - Legacy Survey.	71
4.7	Dados observados e Curva de ajuste (Λ CDM) - ESSENCE.	72
4.8	Dados observados e Curva de ajuste (Λ CDM) - Supernova Cosmology Project.	74
4.9	Dados observados e Curva de ajuste (Bрана) - Supernova Cosmology Project.	76
4.10	Dados observados e Curva de ajuste (Bрана) - Gold Sample.	77
4.11	Dados observados e Curva de ajuste (Bрана) - Legacy Survey.	78
4.12	Dados observados e Curva de ajuste (Bрана) - ESSENCE.	79

Capítulo 1

Introdução

Um dos grandes objetivos da física é conseguir escrever todas as forças fundamentais da natureza em uma única equação. A ideia de tentar unificar as leis da natureza em uma única teoria não é uma elaboração dos físicos contemporâneos. No século XIX, James Clerk Maxwell, por exemplo, com a sua teoria eletromagnética, mostrou que a eletricidade e o magnetismo eram aspectos diferentes de um mesmo fenômeno, que é o eletromagnético. Neste mesmo trabalho grandioso, Maxwell mostrou que a luz era uma onda eletromagnética e como consequência os fenômenos óticos poderiam, também, ser explicados pela sua teoria. Portanto, a teoria eletromagnética proposta por Maxwell é uma teoria que unificou a descrição dos fenômenos elétricos, magnéticos e óticos.

Atualmente, qualquer tipo de interação entre corpos pode ser descrito em termos de algumas das forças fundamentais; nuclear forte, nuclear fraca, eletromagnética e gravitacional [1]. Uma maneira bastante interessante e inusitada de se tentar resolver o problema da unificação de todas as forças fundamentais tem ganhado muita atenção por parte dos físicos contemporâneos. Uma ideia simples, mas que suas consequências podem trazer a quebra de muitos paradigmas científicos, é a de adicionar mais dimensões espaciais ao Universo. Surgem muitas pesquisas acerca da forma de como a inserção de dimensões extras podem realizar a proeza da unificação das forças fundamentais. Por mais estranho que pareça essa ideia de se trabalhar com um espaço com um maior número de dimensões, ela não é recente.

Em nosso trabalho iremos discutir as teorias que levam em conta dimensões espaciais extras para o nosso Universo. Inciaremos com a teoria de Kaluza-Klein que considera uma

quinta dimensão, quatro espaciais e uma temporal, em que a dimensão espacial extra possui a topologia de círculo e que possui um comprimento da ordem do comprimento de Planck [2]. Com um comprimento dessa ordem a dimensão extra não seria detectável pelos nossos instrumentos deixando, desse modo, a teoria compatível com a observação [2]. Em seguida discutiremos o modelo ADD que considera que as dimensões extras não necessitam ser de pequena escala, como a da ordem do comprimento de Planck, porque sobre as partículas atua um mecanismo que as mantém confinadas numa hipersuperfície quadridimensional chamada de brana [3]. Entretanto, para que a teoria seja compatível com as observações, precisa-se considerar duas dimensões extras para o espaço [3]. Vamos discutir, ainda, os dois modelos propostos por Lisa Randall e Raman Sundrum. O primeiro modelo, conhecido como RSI, procura mostrar que uma dimensão extra compacta de grande escala (quando comparada com o comprimento de Planck) pode ser compatível com as observações contanto que o espaço tenha uma geometria “warped” [4]. Nesse modelo existem duas branas paralelas e o comprimento da dimensão extra está relacionado com a distância que separa as duas branas. O segundo modelo, conhecido como RSII, proposto por Randall-Sundrum procura mostrar que pode-se retirar uma das branas de cena fazendo com que a dimensão extra não possua limites, ou seja, a dimensão extra não seja compacta [5].

É claro que uma teoria que postula a existência de dimensão extra é, embora compatível com os dados observacionais, diferente de uma teoria formulada no espaço-tempo quadridimensional e, portanto, deve conter previsões diferentes das teorias usuais. Neste trabalho estamos interessados em estudar os efeitos da dimensão extra no cenário cosmológico do modelo RSII. Com esse fim, faremos, ainda, uma breve revisão da cosmologia padrão em que discutiremos sobre o modelo Λ CDM que é o modelo mais aceito para explicar a fase acelerada que se encontra o nosso Universo [6, 7, 8, 9]. Discutiremos a cosmologia do ponto de vista do modelo de brana e veremos as modificações causadas nas equações cosmológicas devido à introdução de uma dimensão espacial extra. Como veremos, a evolução do fator de escala definido na brana será descrito por uma equação semelhante à equação de Friedmann, mas que contém modificações, chamada, por isso, de equação de Friedmann modificada [10, 11, 12]. Essa equação possui três parâmetros de densidade: Ω_m (parâmetro de densidade

de matéria); Ω_Λ (parâmetro de densidade da constante cosmológica) e Ω_Ξ (parâmetro de densidade da tensão da brana) - que devem ser determinados com base nas observações [13]. Neste trabalho, iremos usar os dados provenientes de supernovas para a determinação daqueles parâmetros.

Para destacar a importância das supernovas para a cosmologia, faremos uma discussão desse fenômeno descrevendo os seus tipos e suas características.

Toda essa abordagem feita será necessária para atingirmos o objetivo do nosso trabalho que é o de analisar os dados observacionais das supernovas no contexto do modelo de brana e verificarmos se esse modelo, assim como o modelo Λ CDM, indica que o Universo está numa fase de expansão acelerada.

Capítulo 2

Universo de Cinco Dimensões e Teoria de Branas

Neste capítulo, entre suas seções, iremos tratar dos principais aspectos da teoria de um espaço-tempo pentadimensional, com a introdução, proposta pelo matemático alemão-polonês Theodor Franz Edward Kaluza em 1921, de uma dimensão espacial extra ao espaço-tempo quadridimensional (três dimensões espaciais e uma temporal), obtendo um espaço com cinco dimensões, quatro delas espaciais e uma temporal e o mecanismo de compactação, desenvolvido pelo matemático sueco Oscar Klein em 1926, para explicar o fato de não percebermos uma quarta dimensão espacial. Com a introdução de mais uma dimensão espacial, a teoria de Kaluza-Klein, como atualmente é conhecida, acopla a teoria da relatividade geral com a teoria eletromagnética. Vamos apresentar, também, o mecanismo adotado nesta teoria para manter a dimensão espacial extra escondida, pois, não observamos uma quinta dimensão e a teoria precisa ser compatível com a observação.

Nas seções subsequentes, iremos discutir alguns modelos de brana, iniciando com o modelo proposto por Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali o qual é conhecido na literatura especializada por modelo ADD [3]. Esse modelo tem como base mostrar que um Universo com um maior número de dimensões, compactadas e de grande escala, pode ser compatível com os dados empíricos. Nesta seção, abordaremos o mecanismo de confinamento da matéria na brana. Vale ressaltar, também, que o modelo ADD é conhecido como um modelo de dimensão

extra de grande escala, quando comparado com o modelo de Kaluza-Klein.

Em seguida apresentaremos os modelos propostos por Lisa Randall e Raman Sundrum, que possuem duas versões [4, 5]. Uma delas, o modelo Randall-Sundrum I, considera duas branas imersas em um espaço ambiente de cinco dimensões, chamado de *Bulk*, em que a distância entre as duas branas faz com que a dimensão extra, neste modelo, ainda seja compacta [4]. Na outra versão, o modelo Randall-Sundrum II, uma das branas é retirada do cenário e a dimensão extra não é mais compactada, passando a ter comprimento infinito. Esse fato, da dimensão extra possuir comprimento infinito, poderia, em princípio, colocar o modelo em conflito com a experiência [5]. Entretanto, veremos que este conflito não acontece. Por se tratar de um modelo em que a dimensão extra não é compacta, o modelo RSII se distingue dos demais e, num certo sentido, se torna mais atraente do ponto de vista teórico.

2.1 Teoria Kaluza-Klein

Como exposto anteriormente, a teoria de Kaluza-Klein originalmente pressupõe que o nosso Universo possui cinco dimensões. Portanto, precisamos saber as propriedades métricas deste espaço para que possamos descrever a gravitação em um espaço-tempo pentadimensional.

Métrica Pentadimensional

A métrica do espaço-tempo de cinco dimensões, no qual as coordenadas são representadas por (x^μ, ζ) , onde $x^\mu = 0, 1, 2, 3$ e ζ é coordenada espacial extra, pode ser escrita como :

$$ds^2 = \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B, \quad (2.1)$$

onde $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$.

Com o auxílio desta métrica podemos construir o tensor de Einstein em cinco dimensões:

$$\tilde{G}_{AB} = \tilde{R}_{AB} - \tilde{g}_{AB} \frac{R}{2}, \quad (2.2)$$

em que \tilde{R}_{AB} e \tilde{R} são o tensor Ricci e o escalar de curvatura de Ricci, respectivamente.

Admitindo que as equações e campo de Einstein em um espaço de cinco dimensões tenham a mesma forma que em quatro dimensões, temos:

$$\tilde{G}_{AB} = 0. \quad (2.3)$$

A métrica deste Universo pentadimensional \tilde{g}_{AB} pode ser decomposta nas seguintes partes [14]:

$\tilde{g}_{\mu\nu}$	métrica do espaço-tempo quadridimensional
$\tilde{g}_{\mu\zeta}$	campo quadrivetorial A_μ (potencial eletromagnético)
$\tilde{g}_{\zeta\zeta}$	campo escalar ϕ .

Kaluza propôs que a métrica pentadimensional (\tilde{g}_{AB}) poderia ser parametrizada da forma como segue [2]:

$$\tilde{g}_{AB} = \begin{bmatrix} (\tilde{g}_{\mu\nu} - \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu) & -\kappa \phi^2 A_\mu \\ -\kappa \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

em que $\kappa = 8\pi G$ e a assinatura da métrica é $(+, -, -, -, -)$.

2.1.1 Gravitação e Eletromagnetismo em Cinco Dimensões

Admitindo que os campos não dependem da quinta dimensão, Kaluza impôs na sua teoria o que chamamos de condição cilíndrica que é expressa por [14]:

$$\frac{\partial \tilde{g}_{AB}}{\partial \zeta} = 0. \quad (2.5)$$

Com a utilização da métrica dada por (2.4), podemos calcular os símbolos de Christoffel e tensor de Ricci [15]. Fazendo uso da condição cilíndrica, imposta por Kaluza, e considerando;

$$T_{\mu\nu}^{EM} = g_{\mu\nu} \frac{F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}{4} - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} \quad (2.6)$$

onde $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ é o tensor eletromagnético de Maxwell, podemos escrever as equações de campo como:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\xi^2 \phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{EM} - \left[\frac{1}{\phi} (\nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \square \phi) \right], \quad (2.7)$$

$$\nabla^\nu F_{\mu\nu} = -3 \frac{\partial^\mu \phi}{\phi} \quad (2.8)$$

e

$$\square \phi = \frac{\xi^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

De acordo com as equações acima, podemos perceber que com a introdução de uma dimensão extra e com a condição cilíndrica, obtemos as equações quadridimensionais para o campo gravitacional e eletromagnético. Se considerarmos o campo ϕ constante

$$G_{\mu\nu} = \frac{\xi^2 \phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{EM} \quad (2.10)$$

e

$$\nabla^\nu F_{\mu\nu} = 0, \quad (2.11)$$

temos como resultado as equações de Maxwell e as equações de Einstein para a gravitação acopladas. Entretanto, devemos salientar que o fato de fazermos ϕ constante só poderá ser consistente com a Eq.(2.9) se tivermos $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$ [14].

Portanto, a introdução de uma coordenada espacial extra nos permitia unificar o campo eletromagnético, descrito pelas equações de Maxwell, com o campo gravitacional, descrito pelas equações de Einstein.

2.1.2 Método de Compactação de Klein

A teoria pentadimensional proposta por Kaluza em 1921 sofreu alguns aperfeiçoamentos feitos pelo matemático Oscar Klein em 1926. Entretanto, antes de iniciarmos a discussão sobre o método de compactação proposto por Klein, é necessário fazer a distinção entre compactação e a condição cilíndrica usada por Kaluza. Esta última foi utilizada, apenas, para explicar a natureza aparente quadridimensional do Universo [14]. Por outro lado, o método de compactação supõe que a dimensão extra tem uma escala de comprimento muito pequena e possui a topologia de um círculo (topologia S^1).

No que segue vamos analisar como a topologia da dimensão extra afeta o comportamento dos campos. Devemos enfatizar, também, que apenas a dimensão extra possui a topologia S^1 , as outras dimensões espaciais possuem topologia \mathbb{R}^3 .

Topologia S^1

Para descrever os pontos sobre a topologia de um círculo, podemos fazer uso da coordenada θ . O fato peculiar nesta topologia é que o ponto com coordenada $\theta = 0$ é identificado com o ponto $\theta = 2\pi$.

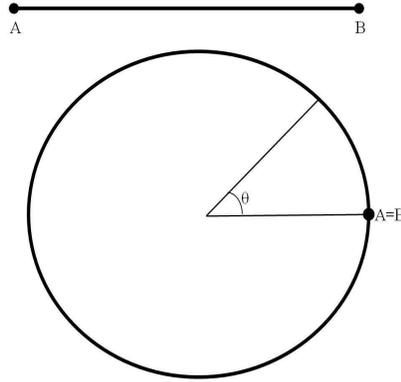


Figura 2.1: Comparação entre a topologia de uma reta e um círculo

Podemos perceber pela Figura 2.1 que os pontos A e B que numa reta são pontos distintos, na topologia S^1 são pontos indistinguíveis. Portanto, considerando que a dimensão espacial extra tenha esta topologia, temos que os campos na coordenada $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, devem possuir os mesmos valores nestes pontos, ou seja, os campos devem apresentar uma periodicidade em relação a dimensão extra. Este comportamento, nos permite escrever os campos como segue:

$$\phi(x^\mu, \zeta) = \phi(x^\mu, \zeta + 2\pi l), \quad (2.12)$$

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, \zeta) = g_{\mu\nu}(x^\mu, \zeta + 2\pi l), A_\mu(x^\mu, \zeta) = A_\mu(x^\mu, \zeta + 2\pi l). \quad (2.13)$$

em que l é o raio da dimensão extra.

Como os campos são periódicos, podemos escrevê-los em termos de uma expansão em série

de Fourier. Desse modo, temos que:

$$\phi(x^\mu, \zeta) = \sum_n \phi^{(n)}(x^\mu) e^{in\zeta/l}, \quad (2.14)$$

$$g_{\mu\nu}(x^\mu, \zeta) = \sum_n g_{\mu\nu}^{(n)}(x^\mu) e^{in\zeta/l}, \quad (2.15)$$

$$A_\mu(x^\mu, \zeta) = \sum_n A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{in\zeta/l}. \quad (2.16)$$

Podemos perceber pelas expressões acima, que os campos expandidos em série de Fourier são independentes da coordenada extra apenas no modo $n = 0$, em que o índice n representa o n -ésimo modo de Fourier.

Vamos, agora, analisar o comportamento de um campo escalar $\phi(x^\mu, \zeta)$ na topologia S^1 . O nosso objetivo é compreender como a dimensão extra influencia os modos de massa do campo $\phi(x^\mu, \zeta)$, para que possamos ter uma noção da escala de energia na qual a dimensão extra seria perceptível à experiência. Com isso, vamos entender o conceito de escala de compactação que é o raio mínimo que a dimensão extra deve ter para tornar o nosso Universo aparentemente quadridimensional.

2.1.3 Escala de Compactação

No modelo de Universo de Kaluza-Klein, as três dimensões espaciais (x^1, x^2, x^3) são infinitas, ou seja, apresentam topologia \mathbb{R}^3 que, juntamente, com a quarta dimensão espacial de topologia S^1 , formam um “cilindro”.

Vamos considerar, por simplicidade, que o “cilindro” é homogêneo e que a métrica seja plana [14]. Com esta consideração, a equação de Klein-Gordon sem massa é escrita como:

$$\square_{(5)}\phi = 0, \quad (2.17)$$

onde $\square_{(5)}$ é o operador d’Alembertiano em cinco dimensões que é expresso da seguinte forma:

$$\square_{(5)} \equiv \square - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}. \quad (2.18)$$

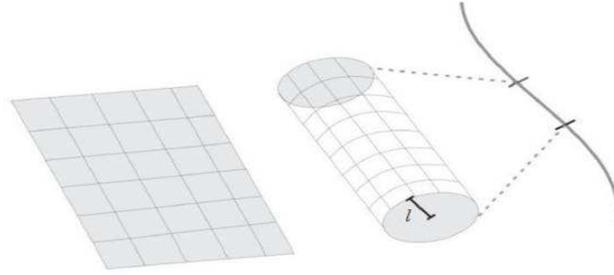


Figura 2.2: Dimensão extra na teoria de Kaluza-Klein
 Fonte:Dissertação Mestrado (ALBUQUERQUE, 2009)

Usando o método de separação de variáveis para resolvermos a Eq.(2.17), temos que o campo $\phi(x^\mu, \zeta)$ pode ser escrito como:

$$\phi(x^\mu, \zeta) = \chi(x^\mu)\varphi(\zeta) \quad (2.19)$$

Substituindo a Eq.(2.19) na Eq.(2.17), iremos conseguir duas equações diferenciais, uma para a parte o espaço quadridimensional $\chi(x^\mu)$ e outra para a dimensão extra $\varphi(\zeta)$, dadas por:

$$\frac{1}{\chi(x^\mu)} \square \chi(x^\mu) = C \quad (2.20)$$

e

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)} \frac{d^2 \varphi(\zeta)}{d\zeta^2} = -C, \quad (2.21)$$

onde a constante C é uma constante de separação.

A solução da Eq.(2.21) é dada por:

$$\varphi(\zeta) = A \sin(\sqrt{C}\zeta) + B \cos(\sqrt{C}\zeta). \quad (2.22)$$

Lembrando que o campo $\varphi(\zeta)$ é periódico, devido a topologia da dimensão extra. Aplicando a condição de contorno,

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi l), \quad (2.23)$$

temos que os valores da constante C são dados por:

$$C = \frac{n^2}{l^2}.$$

Segue dessa condição que C se trata de uma constante não-negativa, o que nos permite fazer a suposição de que esta constante pode representar a massa associada ao campo quadridimensional $\chi_n(x^\mu)$. Esta suposição ficará mais evidente quando reescrevermos a Eq.(2.20) da seguinte forma:

$$\square\chi(x^\mu) - C\chi(x^\mu) = 0$$

Esta é a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de quatro dimensões. Sendo assim, podemos fazer $C = m_n^2 = n^2/l^2$ e escrever:

$$\square\chi_n(x^\mu) - m_n^2\chi_n(x^\mu) = 0. \quad (2.24)$$

Segundo esse resultado, podemos inferir que o campo pentadimensional $\phi(x^\mu, \zeta)$ pode ser decomposto em um modo zero ($n = 0$), sem massa, e num conjunto de modos que chamaremos genericamente de modo Kaluza-Klein (KK)[14]. Cada modo KK possui uma energia associada dada por n/l e só podem ser detectados experimentalmente se a energia envolvida for da mesma ordem de grandeza. Dessa forma, percebemos que o único modo acessível a nossa experiência é o modo zero, se l for muito pequeno, a energia necessária para estimular os modos com $n \neq 0$ seria muito grande e estaria fora do alcance experimental [14]. Comumente, adota-se o comprimento de Planck $l_p = 10^{-33}cm$ como o comprimento da dimensão extra. Nesse caso, os outros modos KK estarão fora do alcance dos nossos aceleradores de partículas e, portanto, a dimensão extra não seria detectada. Na figura que segue, temos a escala de energia, conhecida como ‘torre’ de Kaluza-Klein.

Como discutido anteriormente, pelo fato de que a energia para a excitação dos modos KK diferentes de zero ser da ordem de n/l , teríamos que ter uma energia da ordem da energia de Planck $M_{Planck} \approx 10^{19}GeV$. Portanto, tal escala de energia, assegura que as dimensões extras estão além do alcance da observação, considerando o nível de energia da ordem de 1TeV atingida nos aceleradores mais potentes atualmente [14].

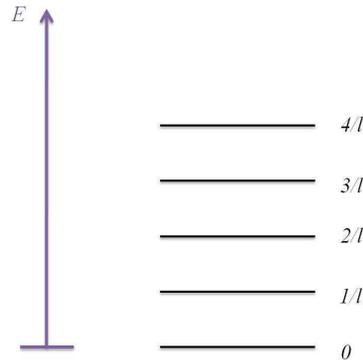


Figura 2.3: Torre Kaluza-Klein
 Fonte:Dissertação Mestrado (ALBUQUERQUE, 2009)

2.2 Modelo ADD

Como dito anteriormente, o modelo ADD é considerado como modelo de brana de grande escala pelo fato de que o comprimento da dimensão extra, diferentemente do modelo de Kaluza-Klein, pode chegar a ordem de grandeza submilimétrica sem entrar em conflito com os dados experimentais [16].

De acordo com [3], podemos dizer que o modelo ADD surge como uma tentativa de resolver o chamado problema de *hierarquia*. De forma bastante resumida, o problema de hierarquia consiste em explicar a enorme discrepância entre a escala eletro-fraca e a escala de Planck [14].

No modelo de Kaluza-Klein, a dimensão extra está escondida pela fato dela ser compacta e com seu comprimento da ordem de grandeza do comprimento de Planck. Por outro lado, no modelo ADD, as dimensões extras estão escondidas por meio de um mecanismo de confinamento da matéria e dos campos numa hipersuperfície quadridimensional, conhecida como brana[14]. Nesta seção apresentaremos como ilustração de mecanismo de confinamento de matéria na brana, focalizando nossa atenção no confinamento dos férmions.

2.2.1 Confinamento dos Férmions

Para iniciar o estudo do mecanismo de confinamento de férmions numa hipersuperfície imersa num espaço de cinco dimensões, vamos considerar um campo escalar que esteja em função das coordenadas quadridimensionais e da coordenada extra ζ , $\phi = \phi(x^\mu, \zeta)$, e cuja ação seja escrita como [17]:

$$S = \int d^4x d\zeta \left[\frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (2.25)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial escalar. A quantidade entre colchetes é a lagrangeana do campo escalar;

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 - V(\phi). \quad (2.26)$$

No contexto de teoria de campos, a brana pode ser entendida como uma parede domínio, como veremos. Assim, de modo a obtermos uma solução do tipo parede de domínio, vamos tomar como base o seguinte potencial:

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - \nu^2)^2, \quad (2.27)$$

cujos comportamento está ilustrado na Figura 2.4.

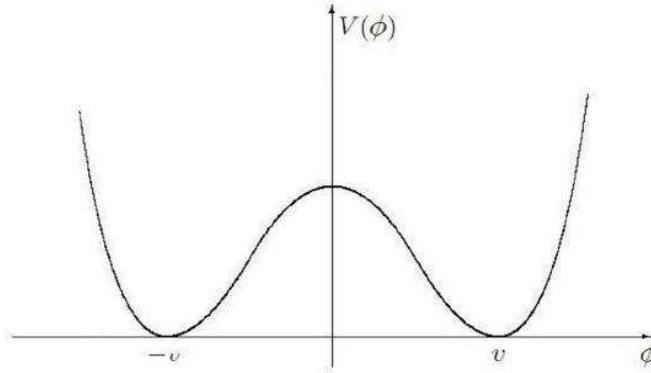


Figura 2.4: Comportamento do potencial escalar em função do campo
 Fonte: Dissertação Mestrado (ALBUQUERQUE, 2009)

Podemos perceber que esse potencial possui dois valores, $\phi = -\nu$ e $\phi = \nu$, para o qual ele apresenta o menor valor de energia. No ponto, $\phi = 0$, o potencial apresenta um máximo instável.

Com a utilização da equação de Euler-Lagrange para campos, podemos calcular as equações que descrevem a dinâmica do campo ϕ , desse modo, temos que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_A \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_A \phi)} \right] = 0 \quad (2.28)$$

A partir da lagrangiana dada por Eq.(2.26), conseguimos encontrar o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \square_{(5)} \phi + \frac{dV}{d\phi} &= 0 \\ \partial_0^2 \phi - \partial_\mu^2 \phi + \frac{\lambda^2}{2} \phi (\phi^2 - \nu^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde, usamos o fato que $\square_{(5)} = \partial_A^2 = \eta^{AB} \partial_A \partial_B$.

Estamos interessados em encontrar uma solução do tipo parede de domínio e, para alcançar este objetivo, vamos considerar uma solução estática e que depende apenas da coordenada extra ζ . Dessa forma, a Eq.(2.29), torna-se:

$$\frac{d^2 \phi}{d\zeta^2} - \frac{\lambda^2}{2} \phi (\phi^2 - \nu^2) = 0. \quad (2.30)$$

Podemos reorganizar a Eq.(2.30) e escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta} \left[\left(\frac{d\phi}{d\zeta} \right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} (\phi^2 - \nu^2)^2 \right] = 0 \quad (2.31)$$

A solução para a equação acima é:

$$\phi_0(\zeta) = \nu \tanh \left(\frac{\lambda \nu \zeta}{2} \right), \quad (2.32)$$

cujo gráfico que representa o seu comportamento está representado na Figura 2.5.

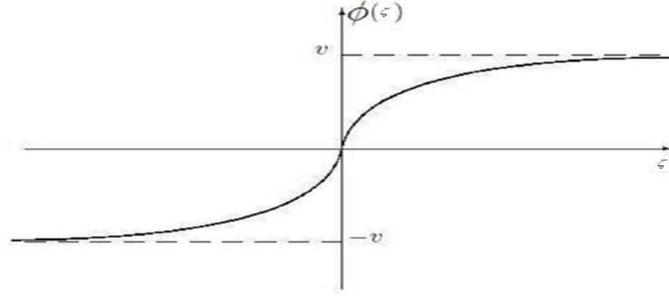


Figura 2.5: Gráfico para o campo escalar descrevendo uma parede de domínio.
 Fonte:Dissertação Mestrado (ALBUQUERQUE, 2009).

De acordo com ilustrado na Figura 2.5, podemos perceber que; $\phi(\zeta \rightarrow -\infty) = -\nu$ e $\phi(\zeta \rightarrow \infty) = \nu$. Pelo fato de ν e $-\nu$ representarem os dois valores em que temos o potencial mínimo, dizemos que esta solução separa os dois estados de menor energia e, por isso, ela é chamada de parede de domínio.

Com a solução dada pela Eq.(2.32), poderemos calcular a densidade de energia concentrada em torno da hipersuperfície $\zeta = 0$, que é descrita pela a integral da densidade de hamiltoniana com respeito a ζ . A densidade hamiltoninana é a densidade de energia associada ao campo ϕ e é escrita como:

$$\mathcal{H}_0 = \Pi \dot{\phi}_0 - \mathcal{L},$$

em que $\Pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ é o momento canonicamente conjugado a $\dot{\phi}$. Como esta grandeza possui a dimensão de energia por unidade de volume e estamos tratando de um espaço pentadimensional, \mathcal{H}_0 terá unidade de energia por quadrivolume e quando integrarmos \mathcal{H}_0 com respeito a dimensão extra, teremos uma grandeza com unidade de energia por volume, que identificamos como a densidade de energia da brana.

Portanto, posto dessa forma, temos que:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(\partial_A\phi_0)^2 + \frac{\lambda^2}{8}(\phi_0^2 - \nu^2)^2 \quad (2.33)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda\nu\zeta}{2}\right)} \quad (2.34)$$

O gráfico que ilustra o comportamento da distribuição de energia em função da dimensão extra está exposto na Figura 2.6:

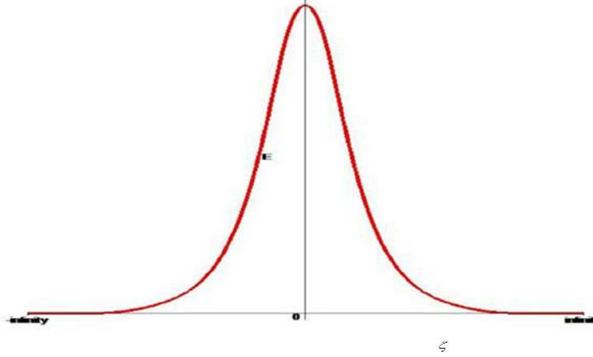


Figura 2.6: Densidade de energia da brana localizada em $\zeta = 0$
 Fonte:Dissertação de Mestrado (ALBUQUERQUE, 2009).

A partir do gráfico exposto na Figura 2.6 e a Eq.(2.34), percebemos que a energia está concentrada em torno de $\zeta = 0$. Quanto maior λ , maior será a concentração de energia. Portanto, podemos dizer que λ introduz uma escala que pode ser interpretada como sendo o inverso da espessura da parede de domínio [14].

Fazendo uso da Eq.(2.34), podemos calcular a densidade de energia da parede de domínio fazendo a integração da densidade de hamiltoniana em relação a coordenada extra ζ . Portanto,

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda \nu \zeta}{2}\right)} d\zeta = \frac{2\lambda \nu^3}{3} \quad (2.35)$$

No limite em que $\lambda \rightarrow \infty$, em que a espessura da parede $1/\lambda \rightarrow 0$, se σ for mantido constante, a parede de domínio dará origem a uma estrutura conhecida por 3-brana [14].

No que segue, com o auxílio do campo escalar ϕ , iremos apresentar o método de localização dos férmions na brana.

Mecanismo de localização dos férmions

Sabemos que a equação que governa a dinâmica dos férmions é a equação de Dirac e que os férmions são descritos por espinores. Para discutirmos a localização dos férmions na

brana, vamos admitir que a equação de Dirac em cinco dimensões tenha a mesma forma que a equação quadridimensional [18]:

$$(i\Gamma^A\partial_A - M)\Psi = 0, \quad (2.36)$$

em que Ψ e Γ^A são, respectivamente, os espinores e as matrizes de Dirac em cinco dimensões e M é a massa dos férmions. As matrizes Γ^A seguem a mesma álgebra das matrizes quadridimensionais [18]:

$$\Gamma^A\Gamma^B + \Gamma^B\Gamma^A = 2\tilde{g}^{AB}\mathbf{1}. \quad (2.37)$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz unitária e \tilde{g}^{AB} é a métrica do espaço-tempo em que a equação de Dirac vai ser escrita.

As matrizes quadridimensionais estão relacionadas com as pentadimensionais através de:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \quad (2.38)$$

$$\Gamma^\zeta = -i\gamma^5, \quad (2.39)$$

em que

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

A lagrangeana do campo de Dirac em cinco dimensões tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - M\bar{\Psi}\Psi, \quad (2.41)$$

cuja ação para este caso é dada por:

$$S_{1/2} = \int d^4x d\zeta (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - M\bar{\Psi}\Psi) \quad (2.42)$$

Pretendemos descrever a interação dos férmions com a parede de domínio. Vamos admitir que essa interação é do tipo Yukawa [14]. Assim, a ação que descreve a interação entre o campo de Dirac e um campo escalar ϕ é dada por:

$$S_{int} = -\eta \int d^4x d\zeta \bar{\Psi}\Psi\phi, \quad (2.43)$$

onde η é uma constante de acoplamento.

Dessa forma a ação que descreverá os férmions confinados na brana é dada por:

$$S = S_{1/2} + S_{int}$$

$$S = \int d^4x d\zeta (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - M\bar{\Psi}\Psi - \eta\phi_0\bar{\Psi}\Psi), \quad (2.44)$$

onde fizemos $\phi = \phi_0$ que é a solução da parede de domínio. Assim, para o caso $M = 0$, temos que:

$$S = \int d^4x d\zeta (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - \eta\phi_0\bar{\Psi}\Psi). \quad (2.45)$$

A partir da ação acima, temos que a equação de movimento é dada por:

$$(i\Gamma^A\partial_A - \eta\phi_0)\Psi = 0, \quad (2.46)$$

em que podemos reescrever da seguinte maneira:

$$i\Gamma^\zeta\partial_\zeta\Psi + i\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \eta\phi_0\Psi = 0. \quad (2.47)$$

Usando o método de separação de variável para resolver a Eq.(2.46), temos que a sua solução tem a forma:

$$\Psi_{(5)}(x^\nu, \zeta) = \psi(x^\nu)f(\zeta), \quad (2.48)$$

em que $\psi(x^\nu)$ é o espinor de Dirac quadridimensional. Substituindo (2.48) em (2.47) e impondo que

$$\gamma^5\psi = -\psi, \quad (2.49)$$

temos que:

$$\left[\frac{1}{f(\zeta)}\partial_\zeta f(\zeta) + \eta\phi_0 \right] \psi(x^\nu) - i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(\zeta) = 0. \quad (2.50)$$

De forma a satisfazer à equação acima, as seguintes condições precisam ser satisfeitas:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x^\nu) = m\psi(x^\nu), \quad (2.51)$$

e

$$\frac{df(x^\nu)}{d\zeta} = (m - \eta\phi_0)f(x^\nu). \quad (2.52)$$

A constante de separação m , pode ser interpretada como sendo a massa do espinor em quatro dimensões [17]. Para o caso em que temos o modo zero, $m = 0$, a solução da Eq.(2.51) é:

$$f(\zeta) = \exp\left(-\eta \int_0^\zeta \phi_0(\zeta') d\zeta'\right). \quad (2.53)$$

Considerando a solução da parede de domínio, podemos verificar que para $\zeta \rightarrow \infty$, $f(\zeta)$ decai exponencialmente.

A restrição (2.49) imposta ao espinor quadridimensional para as partículas de massa zero o modo zero ($m = 0$), não implica nenhuma restrição física, pelo fato de que partículas de massa zero possuem quiralidade bem definida [14].

O espinor pode ser escrito em termos de duas componentes:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

em que

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad e \quad \psi_R = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

são os espinores de Weyl [14]. Portanto, (2.49) é equivalente a dizer que $\psi_L = -\psi_R$, isto é, os espinores de Weyl não são independentes entre si [19]. Esta é uma outra maneira de interpretar (2.49).

Dessa forma, temos que o modo zero pode ser escrito:

$$\psi_0 = \exp\left[-\int_0^\zeta \eta\phi_0 d\zeta'\right] \psi_L(x^\nu). \quad (2.56)$$

A partir de (2.56) podemos perceber que o modo zero está localizado próximo a $\zeta = 0$, ou seja, próximo à brana e que para $|\zeta|$ muito grande este modo decai exponencialmente como era de se esperar.

2.2.2 Potencial gravitacional em dimensões extras

Nesta seção vamos discutir o comportamento do campo gravitacional no cenário de dimensões extras compactas e não compactas.

Vamos iniciar com a análise do potencial gravitacional newtoniano para dimensões extras não compactas e depois faremos para as compactas.

Dimensões extras não compactas

Consideremos esfera $S^{n-1}(r)$ de raio r centrado num corpo de massa m . Essa esfera é o contorno da bola $B^n(r)$. Consideremos, também, que a equação do campo gravitacional em n dimensões tenha a mesma forma da equação quadridimensional:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G^{(n)} \rho, \quad (2.57)$$

em que $G^{(n)}$ é a constante gravitacional em n dimensões.

Para um corpo com simetria esférica, \vec{g} é radial e depende apenas da coordenada r . Portanto, usando essa característica, integrando (2.57) no volume e usando o teorema da divergência, podemos mostrar que [19]:

$$g(r) = -4\pi \frac{G^{(n)} m}{Vol(S^{n-1})}, \quad (2.58)$$

em que m é a massa total do corpo obtida através da soma sobre o volume total da n -bola [14, 19].

A generalização do volume de uma esfera de raio r para um espaço com um número qualquer de dimensões é dado por:

$$Vol(S^{n-1}) = r^{n-1} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \quad (2.59)$$

Usando a equação acima em (2.58), obtemos:

$$\vec{g}(r) = -\frac{2\Gamma(n/2)G^{(n)}m}{\pi^{\frac{n}{2}-1}(2-n)r^{n-1}} \hat{e}_r. \quad (2.60)$$

Podemos perceber de (2.60) que quando $n = 3$ (espaço tridimensional) a lei de gravitação newtoniana é recuperada. Para dimensões superiores, o campo gravitacional decai mais

rapidamente para grandes distâncias e nas proximidades da massa geradora do campo, este último cresce de forma mais rápida.

Como o campo gravitacional é conservativo, podemos escrevê-lo como o gradiente de um campo escalar [19];

$$\vec{g}(r) = -\vec{\nabla}\phi, \quad (2.61)$$

em que o campo escalar ϕ é interpretado como sendo o potencial gravitacional. Nesse caso, pelo fato do campo gravitacional apresentar simetria esférica, o potencial escalar possui apenas dependência na direção radial, fato este que permite-nos escrever a equação anterior como;

$$\vec{g}(r) = -\frac{d\phi}{dr}\hat{e}_r. \quad (2.62)$$

Com a substituição de (2.60) na equação acima e integrando-a, obtemos;

$$\phi(r) = -\frac{2\Gamma(n/2)G^{(n)}m}{\pi^{\frac{n}{2}-1}(2-n)r^{n-2}} \quad (2.63)$$

Um corpo massivo com simetria esférica terá seu potencial gravitacional, em um espaço com n dimensões espaciais extras, descrito pela Eq.(2.63). Podemos perceber, ainda, que com uma dimensão extra $n = 4$, ϕ possui um dependência de r^{-2} , ou seja, decai mais rapidamente do que para o caso de um espaço tridimensional.

Dimensões extras compactas

Obteremos, agora, o potencial gravitacional para o caso em que a dimensão extra é compacta e possui a topologia de um círculo. Consideremos um observador, localizado na origem, que observa uma massa localizada em algum ponto do espaço [19]. Devido à topologia da dimensão extra, as linhas de forças originárias da massa darão voltas em torno do espaço e atingirão o observador O . Com isso, o observador sentirá a influência gravitacional de outras massas que são as imagens topológicas, não massas reais, da massa original.

Para determinar o campo gerado pela linha de massas topológicas, podemos utilizar a lei de Gauss em que a nossa superfície gaussiana é um cilindro de comprimento L (última figura

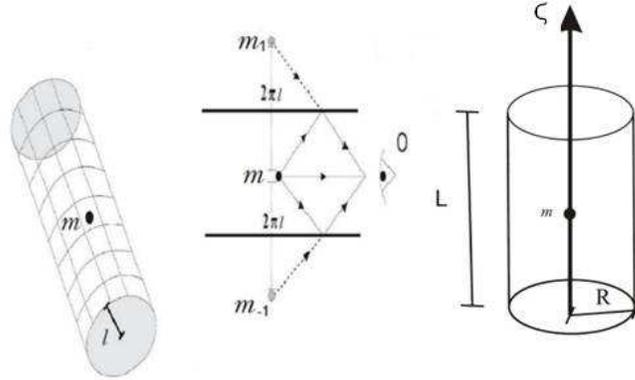


Figura 2.7: Massa topológica
 Fonte: Dissertação de Mestrado (ALBUQUERQUE, 2009).

a direita) centrado em um eixo que representa a dimensão extra como está ilustrado na Figura 2.8. Na primeira Figura à esquerda, temos a massa localizada em um determinado ponto do nosso universo. Já na Figura seguinte, o cilindro é representado por um espaço “aberto” com as identificações topológicas (o observador sente a influencia de várias imagens topológicas). Na última Figura, temos uma situação onde o observador está muito distante da massa e observa uma distribuição praticamente contínua destas massas.

Como estamos em um espaço com quatro dimensões espaciais, a base do cilindro é uma esfera ao invés de um círculo. Dessa forma, aplicando a lei de Gauss, obtemos:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G^{(5)} M_{int}, \quad (2.64)$$

em que M_{int} é a quantidade de massa topológica envolvida pela superfície gaussiana.

Pelo fato de que as massas estarem alinhadas e separadas por uma distância $2\pi l$, o número de massas dentro do comprimento L será $(L/2\pi l)$ [19]. Portanto, podemos escrever;

$$M_{int} = \frac{L}{2\pi l} m. \quad (2.65)$$

O campo \vec{g} possui simetria axial, como podemos perceber a partir da distribuição de matéria no interior da superfície gaussiana. Levando em conta (2.64) e o fato de que a massa no interior da superfície gaussiana é dada por (2.65), temos que o campo gravitacional fica

expresso por;

$$\vec{g}(R) = -\frac{G^{(5)}}{2\pi R^2 l} \hat{e}_R. \quad (2.66)$$

Substituindo o resultado acima para o campo \vec{g} na Eq.(2.61) e integrando, obtemos o resultado;

$$\phi(R) = -\left(\frac{G^{(5)}m}{2\pi l}\right) \frac{1}{R}. \quad (2.67)$$

Conseguimos recuperar o potencial newtoniano, para o espaço quadridimensional, se fizermos a seguinte identificação;

$$G^{(4)} = \frac{G^{(5)}}{2\pi l}, \quad (2.68)$$

o que nos leva a

$$\phi(R) = -\frac{G^{(4)}m}{R}. \quad (2.69)$$

2.2.3 Escala fundamental de comprimento da dimensão extra

O sistema natural de unidades é constituído pelas grandezas físicas: a massa, o tempo e o comprimento de Planck. Estas grandezas são definidas em termos das constantes físicas fundamentais c , \hbar e $G^{(4)}$ da seguinte forma:

$$l_p = \sqrt{\frac{G^{(4)}\hbar}{c^3}}, \quad t_p = \sqrt{\frac{G^{(4)}\hbar}{c^5}}, \quad m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G^{(4)}}}. \quad (2.70)$$

Podemos perceber que as unidades definidas acima são grandezas definidas em termos da constante gravitacional quadridimensional. Porém, podemos generalizar a definição do comprimento de Planck para um espaço com um número de dimensões qualquer através de uma combinação semelhante de c , \hbar e $G^{(n)}$ [19].

Pode-se mostrar que comprimento de Planck em um espaço de dimensão qualquer, $l_p^{(n)}$, está relacionado com o comprimento de Planck do espaço quadridimensional através da expressão [14];

$$(l_p^{(n)})^{n-2} = \frac{G^{(n)}\hbar}{c^3} = l_p^2 \frac{G^{(n)}}{G^{(4)}}. \quad (2.71)$$

As grandezas fundamentais, no contexto de dimensões extras, adquirem um valor efetivo em quatro dimensões, enquanto que o valor fundamental estaria definido no espaço ambiente [19].

Vamos analisar (2.71) considerando que as dimensões extras sejam compactas. Nesse contexto, vamos para o caso mais simples, $n = 5$, isto é, apenas uma dimensão extra com topologia de um círculo de raio l . A partir de (2.68), temos que;

$$l_c = 2\pi l = \frac{G^{(5)}}{G^{(4)}}. \quad (2.72)$$

em que l_c é o comprimento da dimensão extra. A relação acima nos mostra que as constantes gravitacionais diferem por um fator da ordem do comprimento da dimensão extra. Podemos generalizar o resultado anterior para o caso com n dimensões [19]. Admitindo que as dimensões extras possuem o mesmo comprimento, encontramos;

$$(l_c)^{n-4} = \frac{G^{(n)}}{G^{(4)}}. \quad (2.73)$$

Combinando (2.71) com a equação acima, podemos escrever l_c em termos do comprimento de Planck quadridimensional l_p :

$$l_c = l_p^{(n)} \left(\frac{l_P^{(n)}}{l_p} \right)^{\frac{2}{n-4}}. \quad (2.74)$$

Podemos tentar resolver o problema de hierarquia admitindo que o comprimento da dimensão extra é tal que o comprimento de Planck no espaço de n dimensões é da ordem da escala eletrofraca, ou seja, $l_p^{(n)} \approx 10^{-18} cm$. Contudo, substituindo esse valor e o valor do comprimento de Planck quadridimensional, $l_p = 10^{-33} cm$, em (2.74) a relação entre o comprimento da dimensão extra e o número de dimensões extras é:

$$l_c = 10^{-18} (10^{15})^{\frac{2}{n-4}}. \quad (2.75)$$

A análise da equação acima nos mostra que se mantivermos uma dimensão extra, o comprimento dessa dimensão seria da ordem de $10^{12} cm$, ou seja, seria vinte vezes a distância entre a terra e a lua, o que do ponto de vista fenomenológico é inaceitável pelo fato de que

uma dimensão extra com essa ordem de grandeza já teria sido detectada [19]. Para o caso em que temos duas dimensões extras, os seus comprimentos seriam da ordem de $l_c = 0,01mm$. Pelo fato de que a lei da gravitação newtoniana está ainda sendo testada para comprimentos abaixo dessa ordem de grandeza, seria aceitável uma teoria com duas ou mais dimensões extras. É interessante perceber que a detecção de desvios na lei de gravitação newtoniana desse domínio abaixo, seria um indício da existência de dimensões extras [19].

2.3 Modelo Randall-Sundrum I

O primeiro modelo proposto por Randall e Sundrum [4], teve como objetivo o de resolver o problema da hierarquia por meio da introdução de uma única dimensão espacial extra compacta. Nesse modelo, existem duas branas, localizadas nos pontos fixos do “orbifold” S^1/\mathbb{Z}_2 [20], como descreveremos a seguir. Uma das branas pode ser identificada como o nosso Universo visível e a outra como um Universo escondido.

2.3.1 Topologia S^1/\mathbb{Z}_2

De forma a compreender melhor o modelo Randall-Sundrum I, vamos fazer um breve comentário sobre a topologia S^1/\mathbb{Z}_2 . Para tanto, vamos considerar que a coordenada angular θ rotule os pontos de um círculo S^1 e que ela pertença ao intervalo $\theta \in [-\pi, \pi]$, como ilustra a Figura 2.8.

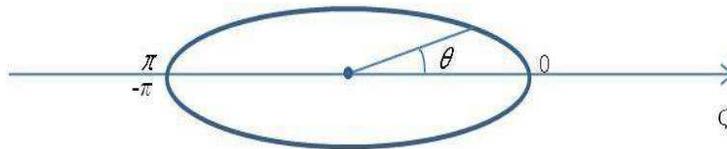
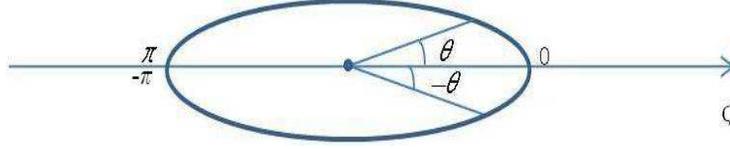


Figura 2.8: Topologia S^1

Quando identificamos os pontos $\theta = -\theta$, obtemos o espaço com topologia S^1/\mathbb{Z}_2 como ilustrado na Figura 2.9.


 Figura 2.9: Topologia S^1/\mathbb{Z}_2

Nessa topologia, avançarmos do ponto 0 para π é equivalente a sairmos do ponto 0 ao ponto $-\pi$. Sendo assim, avançarmos de $-\pi$ para 0 é como se estivéssemos retornando do ponto π para a origem.

Com relação a identificação de θ com $-\theta$, existem dois pontos “fixos” que são; $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. As branas, no modelo Randall-Sundrum I, ficam localizadas nestes pontos fixos.

A métrica desse modelo tem a seguinte forma:

$$ds^2 = a^2(\zeta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - d\zeta^2, \quad (2.76)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, em quatro dimensões e $a(\zeta)$ é chamado de “warp factor” que tem a forma:

$$a(\zeta) = e^{-\xi|\zeta|}. \quad (2.77)$$

Para determinar a constante ξ iremos utilizar a métrica dada por (2.76) para resolver as equações de Einstein para o espaço pentadimensional. As equações de Einstein do espaço ambiente são dadas por:

$$\tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{AB}\tilde{R} = 8\pi G^{(5)}\tilde{T}_{AB}, \quad (2.78)$$

em que o tensor energia-momento, \tilde{T}_{AB} , pode ser escrito como:

$$\tilde{T}_{AB} = \Lambda^{(5)}\tilde{g}_{AB} + 8\pi G^{(5)}\tau_{AB}, \quad (2.79)$$

onde $\Lambda^{(5)}$ é constante cosmológica do bulk e τ_{AB} é o tensor energia-momento da brana.

Uma vez que as densidades de energia sobre as branas estão em $\zeta = 0$ e $\zeta = \zeta_c$, podemos escrever τ_{AB} a partir de funções delta de Dirac com suporte sobre a hipersuperfície, de modo que [19];

$$\tau_{AB} = \begin{cases} \tau_{\mu\nu} = \Xi \tilde{g}_{\mu\nu} \delta(\zeta) - \Xi \tilde{g}_{\mu\nu} \delta(\zeta - \zeta_c) \\ \tau_{A\zeta} = 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

As componentes do tensor de Einstein, a partir de (2.76), são dadas por:

$$G_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} \left[-3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a''}{a} \right) \right], \quad (2.81)$$

$$G_{\mu\zeta} = 0, \quad (2.82)$$

$$G_{\zeta\zeta} = \tilde{g}_{\zeta\zeta} \left[-6 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right], \quad (2.83)$$

em que a linha denota a derivada com respeito à dimensão extra. Com o tensor energia-momento (2.80), podemos escrever as equações de Einstein;

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G^{(5)} [\Xi \tilde{g}_{\mu\nu} \delta(\zeta) - \Xi \tilde{g}_{\mu\nu} \delta(\zeta - \zeta_c)] + \Lambda^{(5)} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (2.84)$$

$$G_{\mu\zeta} = 0, \quad (2.85)$$

e

$$G_{\zeta\zeta} = 8\pi G^{(5)} \Lambda^{(5)}. \quad (2.86)$$

Podemos perceber que a equação (2.85) é automaticamente satisfeita. Para as equações (2.84) e (2.86) temos que;

$$\left[-3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a''}{a} \right) \right] = 8\pi G^{(5)} [\Xi \delta(\zeta) - \Xi \delta(\zeta - \zeta_c)] + \Lambda^{(5)}, \quad (2.87)$$

e

$$\left[-6 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] = \Lambda^{(5)} \quad (2.88)$$

Substituindo (2.77) em (2.88), obtemos;

$$\xi^2 = -\frac{1}{6} \Lambda^{(5)}. \quad (2.89)$$

Como consequência de (2.89), temos que a constante cosmológica deve ser negativa para que a métrica seja solução das equações de Einstein [19].

No que segue, vamos analisar (2.80) em torno dos pontos $\zeta = 0$ e $\zeta = \zeta_c$, em que estão localizadas as branas. De início vamos escrever (2.80) como:

$$-3\frac{d}{d\zeta}(a'a) = 8\pi G^{(5)}a^2 [\Xi\delta(\zeta) - \Xi\delta(\zeta - \zeta_c)] + \Lambda^{(5)}a^2. \quad (2.90)$$

Vamos integrar (2.90) no intervalo $-\epsilon < \zeta < \epsilon$, com ϵ pequeno para determinar o efeito da brana sobre a solução. Na integração em torno de $\zeta = 0$, obtemos:

$$-3a'a|_{-\epsilon}^{\epsilon} = 8\pi G^{(5)}\Xi. \quad (2.91)$$

Levando em conta a simetria do espaço S^1/\mathbb{Z}_2 , segundo a qual as coordenadas $-\theta$ e θ identificam o mesmo ponto, temos que os campos devem ser simétricos em relação as branas. Deste modo a derivada primeira, a' , é descontínua em $\zeta = 0$ e $\zeta = \zeta_c$ [19]. Em torno do $\zeta = 0$, temos que;

$$a'(\epsilon) = -\xi e^{-\xi\epsilon}, \quad (2.92)$$

$$a'(-\epsilon) = \xi e^{-\xi\epsilon}. \quad (2.93)$$

no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$ em (2.91) obtemos a relação;

$$6\xi = 8\pi G^{(5)}\Xi. \quad (2.94)$$

Combinando a relação acima com (2.89), podemos perceber que a tensão na brana deve estar ajustada a constante cosmológica do espaço ambiente de modo que [19];

$$\Xi^2 = -\frac{3}{32\pi^2[G^{(5)}]^2}\Lambda^{(5)}. \quad (2.95)$$

De modo análogo, podemos verificar que, estudando a outra brana localizada em $\zeta = \zeta_c$ obtemos a Eq.(2.95) [14].

2.3.2 Linearização da gravidade

Nesta seção vamos verificar quais as correções causadas pela dimensão extra nas equações de Einstein tomadas no limite de campo fraco. Para alcançar esse objetivo, vamos partir

das equações de Einstein linearizadas. Essas correções serão tratadas como perturbações na métrica quadridimensional e, em seguida, na seção seguinte, construiremos o espectro de massa associados a estas perturbações.

Tomando a métrica dada por;

$$ds^2 = \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B, \quad (2.96)$$

podemos escrever (2.96) como segue

$$ds^2 = [a^2(\zeta)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\alpha, \zeta)] dx^\mu dx^\nu + d\zeta, \quad (2.97)$$

em que $g_{\mu\nu} = a^2(\zeta)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\alpha, \zeta)$, $g_{\zeta\zeta} = 1$ e a métrica $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica 4D. O termo $h_{\mu\nu}$ é a perturbação e que satisfaz a condição $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Vamos escolher um sistema de coordenadas no qual $h_{\mu\zeta} = 0$. Iremos desenvolver as equações de Einstein para métrica (2.97). Introduzindo matéria na brana podemos escrever [19];

$$\tilde{G}_{AB} = 8\pi G^{(5)} T_{AB}^{mat} + 8\pi G^{(5)} \tau_{AB}^{brana} + \Lambda^{(5)} \tilde{g}_{AB}, \quad (2.98)$$

em que T_{AB}^{mat} , τ_{AB}^{brana} são, respectivamente, os tensores energia-momento da matéria e da brana e $\Lambda^{(5)}$ é a constante cosmológica do espaço ambiente [19].

Aplicando o gauge em que $h_{\mu\nu}$ é transverso e possui traço nulo

$$\partial_\mu h^\mu_\nu = h^\mu_\mu = 0, \quad (2.99)$$

as equações de Einstein se reduzem a [14, 19];

$$h''_{\sigma\nu} - 2 [2\xi^2 - 2\xi\delta(\zeta) + 2\xi\delta(\zeta - \zeta_c)] h_{\sigma\nu} - a^2 \partial^\mu \partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0. \quad (2.100)$$

Analisando (2.100) no intervalo $0 < \zeta < \zeta_c$ e em torno dos pontos $\zeta = 0$ e $\zeta = \zeta_c$, obtemos as seguintes equações [19];

$$h''_{\sigma\nu} - 4\xi^2 h_{\sigma\nu} - a^{-2} \partial^\mu \partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0, \quad (2.101)$$

$$(h'_{\sigma\nu} + 2\xi h_{\sigma\nu})|_{\zeta=0} = 0, \quad (2.102)$$

e

$$(h'_{\sigma\nu} + 2\xi h_{\sigma\nu})|_{\zeta=\zeta_c} = 0. \quad (2.103)$$

Dessa forma, uma solução que satisfaça à equação (2.100) deve satisfazer, simultaneamente, às equações (2.101), (2.102) e (2.103). Essas duas últimas irão resultar na quantização do espectro de massa dos grávitons vistos pelos observadores quadridimensionais [4].

2.3.3 Espectro de massa dos grávitons

Nessa seção iremos analisar com maior detalhe a solução de (2.101). Para isso, vamos admitir que a solução dessa equação seja dada por;

$$h_{\sigma\nu}(x^\alpha, \zeta) = \Psi(\zeta)\Phi_{\sigma\nu}(x^\alpha). \quad (2.104)$$

Usando o método de separação de variáveis, vamos substituir (2.104) em (2.101). Separando os termos com a mesma variável e organizando-os convenientemente, percebemos que (2.101) possui solução se existir uma constante C tal que

$$\Psi''(\zeta) - 4\xi^2\Psi(\zeta) + Ca^{-2}\Psi(\zeta) = 0, \quad (2.105)$$

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x^\alpha) + C\Phi_{\sigma\nu}(x^\alpha) = 0. \quad (2.106)$$

Como veremos mais adiante, a constante C pode assumir diferentes valores. Por outro lado, todos os valores que C pode assumir são não negativos de tal forma que podemos escrever, $C = m^2$ e reescrever (2.106) como [19]

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x^\alpha) + m^2\Phi_{\sigma\nu}(x^\alpha) = 0. \quad (2.107)$$

A equação acima é a equação de Klein-Gordon para o campo $\Phi_{\sigma\nu}(x^\zeta)$ com massa m . Como o campo $\Phi_{\nu}(x^\alpha)$ depende das coordenadas da brana, podemos interpretá-lo como um gráviton (uma perturbação linear da métrica) de massa m que pode ser visto pelos observadores

confinados na brana. O conjunto de valores da massa constituem que a chamamos de espectro dos modos KK [19].

A Eq.(2.105) possui dois tipos diferentes de soluções. Para $m = 0$, temos que:

$$\Psi(\zeta) = C_0 e^{-2\xi|\zeta|}, \quad (2.108)$$

em que C_0 é uma constante. Essa solução é conhecida como modo zero e é fundamental para a recuperação do comportamento quadridimensional do campo gravitacional para grandes distâncias na brana [4].

Para o caso em que $m \neq 0$, podemos escrever (2.105) como uma equação de Bessel com índice $n = 2$. Para isso vamos fazer uma mudança de variável em que $x = \left(\frac{m}{\xi} e^{\xi\zeta}\right)$ e levando em conta a expressão do “warp factor” (2.77), obtemos

$$\Psi'' + \frac{1}{x}\Psi' + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)\Psi = 0. \quad (2.109)$$

Com isso, temos que a solução é [19];

$$\Psi_{(m)}(\zeta) = AJ_2\left(\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta}\right) + BN_2\left(\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta}\right), \quad (2.110)$$

em que J_2 e N_2 são, respectivamente, as funções de Bessel de primeira e segunda espécie e de ordem dois. As constantes A e B podem ser obtidas através da imposição das condições de contorno (2.102) e (2.103) em $\zeta = 0$ e $\zeta = \zeta_c$ [4].

A solução para a condição $\zeta = 0$ é dada por [14];

$$\Psi(\zeta) = C_m \left[J_1\left(\frac{m}{\xi}\right) N_2\left(\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta}\right) - N_1\left(\frac{m}{\xi}\right) J_2\left(\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta}\right) \right] \quad (2.111)$$

em que C_m é uma constante de normalização. Agora vamos impor a segunda condição de contorno $\zeta = \zeta_c$ [19]:

$$\frac{J_1\left(\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta_c}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta_c}\right)} = \frac{J_1\left(\frac{m}{\xi}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\xi}\right)}. \quad (2.112)$$

Os valores permitidos para m são as raízes de (2.112), de modo que o espectro de massa dos grávitons será dado pelo conjunto de soluções de (2.112). Já sabemos que $m = 0$ é uma

solução, então, vamos determinar o próximo valor do espectro: m_1 . Admitindo que m_1 seja pequeno comparado com ξ , podemos expandir as funções de Bessel do lado direito de (2.112) [19]. Numa aproximação de primeira ordem, temos;

$$\frac{J_1\left(\frac{m}{\xi}\right)}{N_1\left(\frac{m}{\xi}\right)} = \frac{\frac{m}{2\xi}}{-\frac{2\xi}{\pi m}} \approx -\pi \left(\frac{m}{2\xi}\right)^2. \quad (2.113)$$

Considerando, agora, que $m \ll \xi$ para que a relação (2.112) seja satisfeita, devemos ter;

$$J_1\left(\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta_c}\right) \approx 0, \quad (2.114)$$

logo m_1 corresponde a primeira raiz da função $J_1\left(\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta_c}\right)$.

Observando o comportamento gráfico da função de Bessel podemos notar que $J_1\left(\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta_c}\right)$ possui infinitas raízes, em que a primeira é $\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta_c} = 0$, que corresponde ao gráviton sem massa, enquanto que a segunda raiz é $\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta_c} \approx 3,8$. Portanto, há um salto no espectro da massa da mesma forma que ocorre na teoria Kaluza-Klein [4]. De forma geral, os próximos modos que corresponderia as próximas raízes seriam dados por;

$$\frac{m}{\xi}e^{\xi\zeta_c} = cte. \quad (2.115)$$

Para as primeiras raízes essa constante é de primeira ordem, o que nos permite escrever

$$m_1 \approx \xi e^{-\xi\zeta_c}. \quad (2.116)$$

Portanto, a massa dos grávitons depende do comprimento da dimensão extra. Então, escolhendo ζ_c suficientemente pequeno, a massa do primeiro modo KK seria muito grande de tal forma que a energia necessária para excitá-lo estaria fora do alcance dos nossos instrumentos. Podemos, ao contrário do que propõe o modelo ADD, ter apenas uma dimensão extra de forma que o modelo esteja compatível com as observações [4]. Para isso é necessário um espaço com uma geometria “warped”.

2.4 Modelo Randall-Sundrum II

Como vimos na seção anterior, no modelo Randall-Sundrum I, a dimensão extra é finita e compacta pelo fato da existencia de outra brana com tensão negativa colocada na coordenada ζ_c . Já no modelo Randall-Sundrum II, fazemos como que a coordenada da brana com tensão negativa $\zeta_c \rightarrow \infty$ e, desse modo, a segunda brana não faz mais parte deste modelo. Portanto, a dimensão extra, neste modelo, possui comprimento infinito. Esse fato, da dimensão extra não ser mais compacta, poderia, a primeira vista, ser um grave problema pelo motivo de que quando fazemos $\zeta_c \rightarrow \infty$ a condição (2.102) deixa de ser válida e o espectro de massa torna-se contínuo, ou seja, a massa pode assumir qualquer valor não negativo [19]. Neste caso os grávitons com massa pequena seriam, em princípio, acessíveis a baixas energias.

Entretanto, como veremos, o modelo Randall-Sundrum II mostra que devido a influência de uma constante cosmológica negativa, existe um modo zero normalizável e os modos com massa são suprimidos [14, 19]. Como consequência deste fato, o campo gravitacional recupera o comportamento quadridimensional em longas distâncias sobre a brana. Para que isso possa ser verificado, é calculado explicitamente o potencial gravitacional newtoniano gerado por uma massa sobre a brana. O procedimento para se conseguir esse objetivo é determinar, explicitamente, a função de Green da equação (2.101) [5].

2.4.1 Normalização dos modos KK

Podemos interpretar a Eq.(2.105) como uma equação de autovalores de um operador de Sturm-Liouville. Segundo a teoria de Sturm-Liouville, as autofunções associadas aos autovalores discretos são normalizáveis e as autofunções associadas aos autovalores contínuos podem ser normalizadas no sentido distribucional, ou seja, usando uma delta de Dirac [5]. A primeira característica a observar é que, como não há informação proveniente do infinito para a brana, as autofunções devem ser finitas no limite $\zeta_c \rightarrow \infty$ [19]. E em consequência disso, podemos perceber que os autovalores não são negativos. Além disso, uma outra parte importante é que o modo zero é normalizável mesmo para o caso $\zeta_c \rightarrow \infty$. Para $m = 0$, temos que,

$$\Psi_0(\zeta) = \sqrt{2\xi} e^{-2\xi\zeta}. \quad (2.117)$$

Dessa forma, temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0(\zeta)|^2 d\zeta = 1. \quad (2.118)$$

em que $\sqrt{2\xi}$ é a constante de normalização. Para os modos KK com massa, as autofunções normalizáveis são dadas por [14];

$$\Psi_m(\zeta) = \sqrt{\frac{m}{\xi}} \frac{\left[J_1\left(\frac{m}{\xi}\right) N_2\left(\frac{m}{\xi} e^{\xi\zeta}\right) - N_1\left(\frac{m}{\xi}\right) J_2\left(\frac{m}{\xi} e^{\xi\zeta}\right) \right]}{\sqrt{J_1\left(\frac{m}{\xi}\right)^2 + N_1\left(\frac{m}{\xi}\right)^2}} \quad (2.119)$$

2.4.2 Cálculo do potencial pelo método da função de Green

Para analisarmos o comportamento do campo gravitacional sobre a brana, iremos considerar um corpo confinado na brana. Para isso, vamos estudar a solução da equação não homogênea usando o método da função de Green [19].

$$[\partial_\zeta^2 - 2(2\xi^2 - 2\xi\delta(\zeta)) - aH^{-2}\square^{(4)}] h_{\mu\nu} = 2\sigma_{\mu\nu}, \quad (2.120)$$

em que $\sigma_{\mu\nu}$, que faz o papel de fonte do campo $h_{\mu\nu}$, está relacionado ao tensor energia-momento da fonte [19]. De acordo com o método da função de Green, a solução de (2.120) é dada por;

$$h_{\mu\nu} = \int d\zeta' dx'^\alpha G(x^\alpha, \zeta; x'^\alpha, \zeta') \sigma_{\mu\nu}, \quad (2.121)$$

onde $G(x^\alpha, \zeta; x'^\alpha, \zeta')$ é a função de Green e deve satisfazer à equação

$$[\partial_\zeta^2 - 2(2\xi^2 - 2\xi\delta(\zeta)) - a^{-2}\square^{(4)}] G(x^\alpha, \zeta; x'^\alpha, \zeta') = \delta^4(x^\alpha - x'^\alpha) \delta(\zeta - \zeta'). \quad (2.122)$$

A função de Green pode ser construída, de acordo com a teoria de Sturm-Liouville, a partir das soluções das equações homogêneas que são obtidas de (2.122) pelo método de separação de variáveis. Portanto,

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x^\alpha) + m^2\Phi_{\sigma\nu}(x^\alpha) = 0, \quad (2.123)$$

$$\Psi''(\zeta) - 2 [2\xi^2 - 2\xi\delta(\zeta)] \Psi(\zeta) + \frac{m^2}{a^2} \Psi(\zeta) = 0. \quad (2.124)$$

As autofunções associadas à equação (2.123) são dadas pelas soluções tipo ondas planas $\frac{1}{2\pi} e^{ik_\mu x^\mu}$ com $k_\mu k^\mu = m^2$. Para a equação (2.124) as autofunções normalizadas associadas são;

$$u_0(\zeta) = \sqrt{2\xi} e^{-\xi\zeta}, \quad (2.125)$$

$$u_m(\zeta) = \sqrt{\frac{m}{\xi}} \frac{\left[J_1\left(\frac{m}{\xi}\right) N_2\left(\frac{m}{\xi} e^{\xi\zeta}\right) - N_1\left(\frac{m}{\xi}\right) J_2\left(\frac{m}{\xi} e^{\xi\zeta}\right) \right]}{\sqrt{J_1\left(\frac{m}{\xi}\right)^2 + N_1\left(\frac{m}{\xi}\right)^2}}. \quad (2.126)$$

Dessa forma temos que as funções $\frac{1}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x^\mu} u_m(\zeta)$ constituem uma base para as funções em cinco dimensões. Podemos, então, escrever a função de Green como [19];

$$\begin{aligned} G(x^\alpha, \zeta; x'^\alpha, \zeta') &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} b_{(0k)} u_0(\zeta) e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + \\ &+ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int dm b_{mk} u_m(\zeta) u_m(\zeta') e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Para obter os coeficientes de expansão b_{0k} e b_{mk} , substituímos (2.127) em (2.120). Com esse procedimento, obtemos [19];

$$G(x^\alpha, \zeta; x'^\alpha, \zeta') = \left(-\frac{1}{4\pi R} \right) \xi e^{-2\xi(\zeta + \zeta')} + \int_0^\infty dm u_m(\zeta) u_m(\zeta') \left(-\frac{e^{-mR}}{4\pi R} \right), \quad (2.128)$$

em que $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$.

Se a partícula está localizada sobre a brana, $\zeta = 0$, e se estivermos interessado no potencial também sobre a brana, $\zeta' = 0$, podemos mostrar que a função de Green é dada por [14],[19];

$$G(x^\alpha, \zeta; x'^\alpha, \zeta') = -\frac{\xi}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi R} \int_0^\infty [u_m(0)]^2 e^{-mR} dm, \quad (2.129)$$

onde $u_m(0)$ são os autos-estados dos grávitons avaliados sobre a brana.

Sob a condição $R \gg \xi^{-1}$, podemos mostrar que, em aproximação de primeira ordem, $[u_m(0)]^2 \approx m/\xi$ [14]. Sendo assim, podemos reescrever (2.129) aproximadamente como:

$$G(x^\alpha, \zeta; x'^\alpha, \zeta') \approx -\frac{\xi}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi \xi R} \int_0^\infty m e^{-mR} dm. \quad (2.130)$$

Analisando a função (2.128), podemos perceber que o modo zero recupera o potencial newtoniano que decai com o inverso da distância. Em relação aos outros modos, $m \neq 0$, a função de Green cai exponencialmente com a distância [19].

Usando o método de integração por parte para resolver a integral em (2.130), temos que o potencial é dado por;

$$G(x^\alpha, \zeta; x'^\alpha, \zeta') = -\frac{\xi}{4\pi R} \left[1 + \frac{1}{\xi^2 R^2} \right]. \quad (2.131)$$

A função Green obtida acima representa o potencial gerado por uma massa localizada na brana e recupera o caráter quadridimensional para grandes distâncias mesmo com a existência de uma dimensão extra com comprimento infinito [5]. Por outro lado, existe uma correção devido a contribuição dos modos KK com massa. Essa influência é, portanto, o efeito da dimensão extra [19].

Capítulo 3

Cosmologia Padrão e Cosmologia em Branas

Neste capítulo, iremos discutir os principais aspectos da cosmologia padrão, como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker, bem como as equações de Friedmann que nos fornecem as informações sobre a dinâmica do Universo. Em seguida iremos abordar as mesmas questões do ponto de vista dos modelos de brana e analisar as devidas diferenças da dinâmica do Universo.

3.1 Cosmologia Padrão

Um dos alicerces da cosmologia moderna está num princípio que é, ao mesmo tempo, simples e poderoso. Este princípio é o conhecido Princípio Cosmológico, que presupõe um Universo homogêneo e isotrópico em larga escala. Devemos ressaltar que, em pequena escala, não vemos um Universo homogêneo e isotrópico como, por exemplo, na escala do sistema solar ou galático. Nessas escalas, observamos aglomerados de matéria acompanhados por grandes vazios, além do fato de que a distribuição desses aglomerados não é a mesma em todas as direções da abóboda celeste. Na primeira observação, vemos que a homogeneidade não é satisfeita e que a segunda observação nos revela uma anisotropia. Portanto, é evidente que a matéria em pequena escala é distribuída de forma irregular. Contudo, quando olhamos em escalas cada vez maiores, a distribuição de matéria visível se torna cada vez mais uniforme

[21]. Desse modo, em escala pelo menos igual ou superior a $100Mpc$, a matéria contida no Universo apresenta-se homogênea e isotropicamente distribuída, justificando, assim, o fato de o princípio cosmológico ser válido apenas em larga escala.

3.1.1 A Equação de Friedmann

A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

O fato de considerarmos nosso Universo como sendo homogêneo e isotrópico em larga escala está, atualmente, muito bem fundamentado nas observações relativas à radiação cósmica de fundo. Dessas observações podemos inferir que não existem pontos privilegiados do Cosmo [22, 23]. Dessa forma, precisamos obter uma métrica que atenda ao princípio cosmológico e, para isto, a parte espacial desta métrica precisa ser maximalmente simétrica. Assim, o modelo cosmológico da cosmologia moderna tem como base a métrica FRW, que é escrita da seguinte forma [24]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.1)$$

onde a métrica (3.1) está escrita em coordenadas comóveis e com assinatura $(-, +, +, +, +)$. O termo $a(t)$ é conhecido como fator de escala e a constante k está relacionada com o tipo de curvatura das seções espaciais e pode assumir os valores; $k = -1, 0, 1$ que corresponde a um espaço hiperbólico, plano e esférico, respectivamente.

A partir da métrica FRW, podemos obter, através das equações de Einstein, a dinâmica do nosso Universo.

Resolvendo as Equações de Einstein

As equações de Einstein relacionam a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria no espaço. Essas equações num espaço 4D, são escritas como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde $R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ e G são, respectivamente, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci, a métrica do espaço-tempo, o tensor energia momento e a constante gravitacional newtoniana. As equações de campo (3.2) foram obtidas por Einstein e publicadas em 1916 e continha um termo adicional da constante cosmológica que foi inserido por Einstein pelo fato de que, na sua época, acreditava-se que o Universo era estático. Entretanto, com as observações de Edwin Hubble, em 1929, referente ao espectro emitido pelas galáxias mais próximas, chegou-se a conclusão que o Universo não era estático e que, ao contrário, possuía uma dinâmica e que se encontrava em expansão. Por este fato, Einstein suprimiu o termo com a constante cosmológica.

Por outro lado, com as recentes observações do espectro emitido por supernovas, apresentadas nos trabalhos [6, 7, 8, 9], mostram evidências de que o Universo se encontra numa fase de expansão acelerada. A partir de então, modelos cosmológicos foram propostos, trazendo, mais uma vez ao cenário cósmico, a constante cosmológica. Entre esses modelos, o que melhor explica os dados observados, não só das supernovas, como também, os dados da radiação cósmica de fundo e da oscilação acústica de bárions, é o modelo Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter) que discutiremos mais adiante.

Vamos retornar às equações de Einstein sem o termo da constante cosmológica. Para resolvê-las levamos em conta a métrica FRW (3.1) e o tensor energia-momento para um fluido perfeito, que é escrito como segue:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ é o quadri vetor velocidade do fluido, que, em coordenadas comóveis, assume a forma $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ e $u^\alpha u_\alpha = -1$, ρ é a densidade de energia e p a pressão

relacionadas ao conteúdo de energia do Universo [25]. Com estas definições o tensor energia momento (3.3) pode ser escrito como:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (3.4)$$

Substituindo a métrica (3.1) e o tensor energia momento (3.4) na equação de Einstein, obtemos;

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k^2}{a^2} \quad (3.5)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) - \frac{k^2}{a^2}. \quad (3.6)$$

em que o ponto denota a derivada em relação ao tempo.

A Eq.(3.5) é conhecida como equação de Friedmann, em que o termo H^2 é chamado de parâmetro de Hubble e a Eq.(3.6) é a equação de aceleração. Nessas expressões, a densidade e a pressão correspondem a todo o conteúdo energético do Universo [23].

Uma informação relevante que podemos retirar de (3.5) é a densidade crítica do Universo. Ela é definida como sendo a densidade total de energia em um Universo com curvatura nula e sem constante cosmológica. Dividindo a Eq.(3.5) por H^2 , chegamos ao seguinte resultado:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.7)$$

Atualmente acredita-se que apenas 5% da densidade crítica é proveniente da matéria bariônica, 25% provém de algum tipo de matéria escura e cerca de 70% tem sua fonte em uma componente desconhecida, uniformemente distribuída e com pressão negativa [26].

Vamos, agora, escrever a equação de continuidade para o conteúdo energético do Universo. A partir da conservação da energia, que matematicamente é escrita como $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, podemos chegar a equação de continuidade:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (3.8)$$

Para que possamos descrever o comportamento de cada componente do Universo, precisamos resolver a Eq.(3.8) para cada uma separadamente (matéria e radiação) [25]. Para isso, vamos considerar uma equação de estado para a pressão e a densidade de energia:

$$p = w\rho, \quad (3.9)$$

em que w é uma constante.

Para o caso de matéria (bárions e matéria escura), temos que $p = 0$ o que implica que $w = 0$ (poeira) [25]. Dessa forma, temos que:

$$\frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m} = -3\frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.10)$$

Através da integração da equação acima, obtemos como solução da Eq.(3.8):

$$\rho_m(t) = \rho_{m0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3. \quad (3.11)$$

Para o caso de radiação, $w = 1/3$, obtemos:

$$\rho_r(t) = \rho_{r0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^4. \quad (3.12)$$

As equações (3.11) e (3.12) nos informam como as densidade da matéria e radiação evoluem com tempo. Podemos perceber que a densidade de radiação decai mais rapidamente do que a densidade de matéria à medida que o Universo se expande. Portanto a contribuição da densidade de energia da matéria do Universo na época atual é mais significativa do que a densidade de energia da radiação. Se considerarmos que o Universo é composto apenas por essas duas componentes, com a predominância da densidade de energia da matéria, o Universo deveria estar em estado de desaceleração devido ao caráter atrativo da matéria [27]. Entretanto, não é o que os dados referentes ao espectro emitido pelas supernovas sugerem. Esses dados demonstram uma forte indicação de que o Universo se encontra em expansão acelerada, e a matéria ordinária não seria capaz de provocar essa aceleração. Portanto, entra em cena um tipo de energia exótica chamada de energia escura. E um dos modelos propostos que leva este tipo de energia em consideração é o modelo Λ CDM.

3.1.2 Modelo Λ CDM

Como exposto anteriormente, um dos candidatos para explicar o estado de aceleração em que o Universo se encontra é a energia escura, e o modelo que atualmente é tido como padrão é o Λ CDM o qual adota a constante cosmológica como fonte dessa energia escura [27]. A densidade de energia associada a constante cosmológica é dada por:

$$\rho_\Lambda = \frac{3\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.13)$$

Para o caso da densidade de energia associada a constante cosmológica, a equação de estado (3.9), com $w = -1$, nos fornece o seguinte resultado:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\frac{3\Lambda}{8\pi G}, \quad (3.14)$$

em que a pressão negativa seria a responsável pela aceleração do Universo [27].

Portanto, neste modelo, a densidade de energia na Eq.(3.5) recebe mais uma componente que é a densidade de energia associada a constante cosmológica. Dessa forma, podemos escrever:

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (3.15)$$

em que ρ_m , ρ_r , ρ_Λ são, respectivamente, a densidade de energia da matéria, radiação e constante cosmológica. Substituindo a Eq.(3.15) na Eq.(3.5), obtemos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k^2}{a(t)^2}. \quad (3.16)$$

Chegamos no ponto no qual precisamos definir alguns parâmetros que serão necessários para descrever a história evolutiva do Universo. Para isso, vamos dividir a Eq.(3.5) por H^2 que nos leva ao resultado:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi G}{3H^2} [\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda] - \frac{k^2}{a^2 H^2} &= 1 \\ \frac{1}{\rho_{cr}} [\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda] - \frac{k^2}{a(t)^2 H^2} &= 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim, temos que as quantidades adimensionais; $\Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{\rho_{cr}}$, $\Omega_r \equiv \frac{\rho_r}{\rho_{cr}}$, $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}}$, $\Omega_k \equiv -\frac{k^2}{a(t)^2 H^2}$, são, respectivamente, os parâmetros de densidade da matéria, radiação,

constante cosmológica e de curvatura. E que da Eq.(3.17), temos que a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (3.18)$$

Vamos, agora, substituir as Eqs.(3.11) e (3.12) na Eq.(3.16), e dividir pelo parâmetro de Hubble atual H_0^2 ;

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\Omega_{m0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 + \Omega_{r0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^4 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^2 \right], \quad (3.19)$$

em que $\rho_{cr0} \equiv 3H_0^2/8\pi G$ é a densidade crítica atual. Assim, podemos definir; $\Omega_{m0} \equiv \frac{\rho_{m0}}{\rho_{cr0}}$, $\Omega_{r0} \equiv \frac{\rho_{r0}}{\rho_{cr0}}$, $\Omega_{\Lambda 0} \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr0}}$, $\Omega_{k0} \equiv -\frac{k^2}{a^2(t_0)H_0^2}$, como sendo, respectivamente, os parâmetros atuais da densidade de matéria, radiação, constante cosmológica e de curvatura. Essas quantidades são os protagonistas no cenário da cosmologia observacional, pois são essas quantidades que são estimadas através dos dados observacionais. Os parâmetros de densidade atual satisfazem à mesma relação (3.18). Outra quantidade que precisamos definir é o parâmetro de desaceleração dado por

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (3.20)$$

Por enquanto, vamos manter as Eqs.(3.19) e (3.20) da forma como está apresentada. Após definirmos, no que segue, uma quantidade de suma importância para a cosmologia observacional, conhecida como *red shift*, iremos reescrever (3.19) em termos dessa quantidade.

3.2 Medindo Distância em Cosmologia

Em nosso cotidiano as escalas de comprimento as quais estamos envolvidos nos permite utilizar instrumentos como; régua, fita métrica, paquímetro, micrômetro entre outros, para medirmos as dimensões dos objetos ou as distâncias que os separam. Mas, em se tratando de escala cósmica, como podemos medir distâncias?

A única informação que temos das entidades cósmicas, como galáxias ou superaglomerado de galáxias, é a radiação por elas emitidas. Portanto, torna-se necessário definirmos as

distâncias em escala cósmica em termos dessa única informação que temos. A tarefa de medir distância em cosmologia torna-se mais árdua levando em conta que a velocidade de propagação da radiação emitida é finita e que o próprio espaço-tempo encontra-se em expansão. Esta última característica proporcionará um efeito significativo na radiação emitida e que por este efeito poderemos medir, não só as distâncias entre as entidades cósmicas e a Terra, como também a própria taxa de expansão do Universo.

3.2.1 Distância Própria

Considere um sistema de referência com origem em um observador O comóvel e uma galáxia distante com coordenadas comóveis (r_e, θ, ϕ) . A radiação emitida por esta galáxia no instante t_e chega ao observador num instante t_o . Durante este intervalo de tempo a radiação terá percorrido uma geodésica tipo nula. Em um movimento radial as coordenadas θ e ϕ são constantes. Levando em conta a métrica FRW (3.1), podemos escrever:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_e}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

em que o sinal negativo prevaleceu devido ao fato de termos um sinal luminoso partindo da galáxia com coordenada radial (r_e) em direção ao observador com coordenada radial (r_0).

Definimos a distância comóvel como sendo:

$$f_k(r_e) = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \arcsen(r), & \text{se } k = 1, \\ r, & \text{se } k = 0, \\ \operatorname{arcsenh}(r), & \text{se } k = -1. \end{cases}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = f_k(r_e) \tag{3.21}$$

Portanto, a distância própria é escrita como:

$$d_p = a(t) f_k(r_e). \tag{3.22}$$

Com a definição de distância própria apresentada acima, nos deparamos com um fato muito relevante; esta distância não é fisicamente mensurável. Pois, para medirmos seu valor em um determinado instante de tempo, necessitaríamos de um sinal instantâneo para o ponto que desejássemos medir a distância, ou então deveríamos parar a expansão do espaço para efetuar a medição [27]. Como não podemos realizar nenhum dos dois procedimentos descritos, torna-se necessária a definição de distância mensurável, como exemplo, a distância de luminosidade. Entretanto, antes de partirmos para esta tarefa, vamos discutir uma grandeza conhecida como red shift.

3.2.2 Red Shift

Pelo fato de que o espaço-tempo está continuamente em expansão, a luz emitida, por alguma fonte emissora, sofrerá um desvio na linha espectral emitida. É este desvio que, na literatura especializada, é conhecido como **red shift** ou **desvio para o vermelho**. Esse fenômeno, presente na maioria das observações realizadas com fontes extragalática emissoras de radiação, em qualquer direção em que se aponte um detector, foi a evidência de que todos os corpos no Universo estariam se afastando devido ao aumento do espaço entre eles [27]. À medida que o espaço se expande, o comprimento de onda é aumentado (menor frequência) pelo mesmo fator que o espaço aumenta, e assim, o espectro é desviado para o vermelho [27].

A informação mais importante que temos acerca do fator de escala cósmica, $a(t)$, chega até nós através da observação da mudança na frequência de luz emitida por fontes distantes [23]. Se um pulso de onda eletromagnética deixa uma fonte emissora situada em r_e , a equação de movimento da crista da onda viajante é dada pela Eq.(3.21). Portanto, se um segundo pulso é emitido pelo fonte num instante $t_e + \delta t_e$, este pulso é recebido pelo observador no instante $t_0 + \delta t_0$ [23]. Dessa forma, temos que a Eq.(3.21) torna-se:

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = f_k(r_e). \quad (3.23)$$

Subtraindo a Eq.(3.21) de (3.23) e considerando que o fator de escala $a(t)$ varia muito pouco em um intervalo de 10^{-14} segundos, que é o período típico de um sinal de luz, obtemos

o seguinte resultado [23]:

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)}. \quad (3.24)$$

A frequência observada está relacionada com a frequência emitida da seguinte forma:

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\delta t_e}{\delta t_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}. \quad (3.25)$$

A equação acima é convencionalmente expressa em termos do *parâmetro* de *red shift* que é definido como sendo [23]:

$$z \equiv \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0}. \quad (3.26)$$

Desse modo, a Eq.(3.26), pode ser reescrita como:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1. \quad (3.27)$$

Para não haver confusão na nossa notação, enfatizaremos, mais uma vez, que ν_e e λ_e são a frequência e comprimento de onda da luz observados num instante e local próximos da fonte emissora e que, presumivelmente, possui os mesmos valores medidos para as transições atômicas ocorridas em um laboratório da Terra. Enquanto ν_0 e λ_0 são a frequência e comprimento de onda observados após a longa viagem feita pela luz até chegar aos nossos detectores [23]. Se $z > 0$, então $\lambda_0 > \lambda_e$ e, portanto, estaremos medindo um red shift. Por outro lado, se $z < 0$, implica que $\lambda_0 < \lambda_e$ e, então, estaremos medindo um blueshift [23].

3.2.3 Distância de Luminosidade

Os físicos verificaram que existe uma lei relacionando a energia emitida por unidade de tempo por um objeto e o quadrado da distância na qual o estamos observando. Essa lei é chamada de lei do inverso do quadrado da distância. Ela é consequência do fato de que a radiação emitida por um corpo ou seja, sua energia, vai se espalhando uniformemente no espaço à medida que se afasta da fonte. Isso faz com que haja um decréscimo no brilho do objeto à medida que a distância aumenta. Assim, observamos a radiação emitida por uma

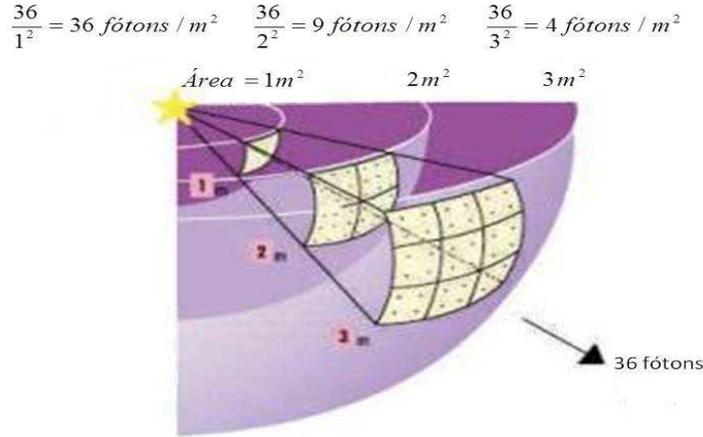


Figura 3.1: Fluxo de energia por unidade área.
 Fonte: Observatório Nacional.

fonte distante como sendo mais fraca por que a maior parte dela foi espalhada em direções que não serão registradas pelo observador [28], como está ilustrado na Figura 3.1.

Os astrônomos definem a energia emitida por unidade de tempo como sendo a luminosidade de um objeto, enquanto que a quantidade de energia emitida por unidade de tempo e por unidade de área é definida como sendo o fluxo de energia de uma estrela [28].

A distância de luminosidade, d_L , relaciona o fluxo medido F (energia por unidade de tempo por unidade de área) em um detector terrestre com a luminosidade L (energia total por unidade de tempo) emitida por uma fonte distante [15, 25, 29].

Levando em conta a Figura 3.1 e considerando o caso do espaço ser euclidiano temos que o fluxo, F , e a luminosidade, L , estão relacionados da seguinte forma:

$$F = \frac{L}{A}. \tag{3.28}$$

em que A é a área da esfera; $A = 4\pi d^2$, onde d é a distância entre o centro da esfera em que está localizada a fonte emissora e o observador. Dessa forma, podemos escrever a distância de luminosidade como sendo:

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}. \tag{3.29}$$

Vamos, no que segue, escrever a distância de luminosidade no espaço-tempo FRW. Para

isso, vamos considerar [30]:

$$F = \frac{\dot{n}_0 \epsilon_0}{A}, \quad (3.30)$$

como sendo o fluxo e em que \dot{n}_0 e ν_0 são, respectivamente, a taxa de chegada e a frequência dos fótons medidos pelo observador e, $\epsilon_0 = h\nu_0$, é a energia de cada fóton medidos no ponto em que o observador está localizado.

A energia dos fótons emitidos pela fonte é; $\epsilon_e = h\nu_e$. A luminosidade da fonte é dada por [30]:

$$L = \dot{n}_e \epsilon_e, \quad (3.31)$$

onde \dot{n}_e é a taxa de saída dos fótons da fonte emissora.

Da expressão do red shift (3.26), temos que[30]:

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = z + 1. \quad (3.32)$$

Desse modo, a energia recebida no detector pelo observador é dada por:

$$\epsilon_0 = h\nu_0$$

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon_e}{z + 1}. \quad (3.33)$$

Sabendo que [30]

$$\frac{\dot{n}_e}{\dot{n}_0} = z + 1, \quad (3.34)$$

podemos reescrever o fluxo de energia medido pelo observador como sendo [30]:

$$F = \frac{\dot{n}_e \epsilon_e}{A(1 + z)^2} = \frac{L}{A(1 + z)^2}. \quad (3.35)$$

Assim, pela definição de distância de luminosidade (3.29), temos que:

$$d_L^2 = \frac{A}{4\pi} (1 + z)^2, \quad (3.36)$$

em que A é a área de uma superfície esférica escrita no espaço-tempo FRW.

Relação entre a Distância de Luminosidade e Distância Comóvel

No espaço-tempo FRW, a distância que separa a fonte emissora do observador é a distância comóvel. A métrica (3.1), pode ser escrita como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (3.37)$$

Para $t = t_0$ e $r = r_e$, ficamos com a métrica da superfície esférica, dado por:

$$dl^2 = a^2(t_0) r_e^2 d\Omega^2. \quad (3.38)$$

Assim, a área da superfície esférica é dada por:

$$A = 4\pi a^2(t_0) r_e^2. \quad (3.39)$$

Logo, substituindo (3.39) em (3.36), a distância de luminosidade é reescrita como:

$$d_L = a_0 r_e (1 + z), \quad (3.40)$$

em que $a_0 = a(t_0)$.

Como vimos anteriormente, a Eq.(3.23) descreve a linha de Universo de um sinal luminoso radial. Dessa forma, a coordenada radial do emissor pode ser escrita como [30]:

$$r_e = S_k \left(\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right), \quad (3.41)$$

em que S_k é a inversa de $f_k(r_e)$, ou seja,

$$S_k(r) = \begin{cases} \text{sen}(r), & \text{se } k = 1, \\ r, & \text{se } k = 0, \\ \text{senh}(r), & \text{se } k = -1. \end{cases}$$

Desse modo, temos que a distancia de luminosidade (3.40) fica escrita como segue:

$$d_L = a_0 (1 + z) S_k \left(\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right) \quad (3.42)$$

Entretanto, queremos escrever a distância de luminosidade em termos apenas do red shift e dos parâmetros cosmológicos. Para alcançar esse objetivo, vamos considerar a seguinte mudança de variável:

$$a = a(t) \Rightarrow da = \dot{a} dt \Rightarrow dt = \frac{da}{\dot{a}},$$

temos que

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{da}{\dot{a}} \frac{1}{a} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{da}{\dot{a}a} \left(\frac{a}{a} \right) = \int_{a_e}^{a_0} \frac{da}{Ha^2}.$$

Da Eq.(3.27), para um tempo qualquer, podemos escrever:

$$da = \frac{-a_0}{(1+z)^2} dz. \quad (3.43)$$

Assim, obtemos

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{da}{Ha^2} = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H}. \quad (3.44)$$

Finalmente, podemos escrever a distância de luminosidade da seguinte forma:

$$d_L = a_0(1+z)S_k \left(\frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H} \right) \quad (3.45)$$

Estamos próximos de alcançarmos nosso objetivo de escrever a distancia de luminosidade em termos do red shift e dos parâmetros cosmológicos. Vamos retornar as Eqs.(3.19) e (3.20) e reescrevê-las, como dito na seção (3.1.2), em termos do red shift. Para (3.19), temos;

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m0} (1+z)^3 + \Omega_{r0} (1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0} (1+z)^2 \right]. \quad (3.46)$$

Podemos escrever (3.46) da seguinte forma:

$$H = H_0 \left[\sum_i \Omega_{0_i} (1+z)^{n_i} \right]^{1/2} \quad (3.47)$$

em que,

$$i = \begin{cases} 0, & \text{para constante cosmológica,} \\ 2, & \text{para curvatura,} \\ 3, & \text{para matéria} \\ 4, & \text{para radiação.} \end{cases}$$

Definindo, $[\sum_i \Omega_{0_i} (1+z)^{n_i}]^{1/2} \equiv E(z)$, temos que:

$$H(z) = H_0 E(z).$$

Finalmente, temos que a distância de luminosidade pode ser escrita como:

$$d_L = a_0(1+z)S_k \left(\frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right). \quad (3.48)$$

Para o caso de curvatura nula, $k = 0$, temos que:

$$d_L = (1 + z)H_0^{-1} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (3.49)$$

Para, $k = +1$ ou $k = -1$, temos que lembrar que:

$$|\Omega_{k0}| = \frac{1}{a_0^2 H_0^2} \implies a_0 = \frac{1}{H_0 |\Omega_{k0}|^{1/2}}. \quad (3.50)$$

Portanto, a distância de luminosidade é dada por:

$$d_L = \frac{(1 + z)}{H_0 |\Omega_{k0}|^{1/2}} S_k \left[|\Omega_{k0}|^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (3.51)$$

A Eq.(3.48) é muito importante para a cosmologia, pois é a partir dela que, com as medidas observadas da distância de luminosidade e red shift, podemos estimar os parâmetros de densidade e o parâmetro de Hubble.

Vamos retornar para (3.20). Podemos reescrever \ddot{a} como;

$$\ddot{a} = \frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{d}{dt}(aH) = a \frac{dH}{dt} + H\dot{a} = a \frac{dH}{dt} + aH^2. \quad (3.52)$$

Como temos o parâmetro de Hubble em função do red shift, aplicaremos a regra da cadeia em dH/dt ,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dz} \frac{dz}{dt}. \quad (3.53)$$

em que

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} = -(1 + z)H.$$

Aplicando (3.52), (3.53) e (3.54) em (3.20), obtemos o fator de desaceleração em termos do red shift:

$$q(z) = -1 + \frac{(1 + z)}{H(z)} \frac{dH}{dz}, \quad (3.54)$$

que é útil para qualquer modelo cosmológico.

3.2.4 Escalas de Magnitude e Módulo de Distância

O sistema de magnitudes que os astrônomos usam para representar o brilho das estrelas foi inventado na Grécia antiga pelo astrônomo Hiparcos. Por volta do ano 150 a.C. Hiparcos mediu o brilho aparente das estrelas no céu noturno usando unidades que ele chamou de magnitudes [28].

Hiparcos chamou as estrelas mais brilhantes de estrelas de primeira magnitude. Aquelas que tinham aproximadamente metade do brilho dessas receberam a classificação de estrelas de segunda magnitude. Outras estrelas que tinham metade do brilho daquelas classificadas como segunda magnitude foram chamadas de estrelas de terceira magnitude e assim por diante. Essa classificação atingiu até a sexta magnitude, que englobava as estrelas mais fracas que podemos observar a olho nu [28].

Magnitude Aparente

A magnitude aparente é uma medida do brilho de um corpo celeste visto a partir da Terra. Em outras palavras, é quão brilhante uma estrela aparece sem qualquer correção feita em relação à sua distância. Em 1856, Norman Robert Pogson (1829-1891) verificou que a percepção do brilho pelo olho humano seguia uma lei logarítmica [27]:

$$m = A \log_{10}(F) + B, \quad (3.55)$$

em que A e B são constantes e F o fluxo. Ele percebeu que o fluxo de uma estrela de sexta magnitude ($m_2 = 6$) tinha um brilho que era 100 vezes menor do que de uma estrela de primeira magnitude ($m_1 = 1$) [27]. Este fato pode ser escrito matematicamente da seguinte forma:

$$m_1 - m_2 = A \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \Rightarrow A \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = -5.$$

Como $F_1 = 100F_2$, temos que: $A = -2,5$. A constante B define o zero da escala e, normalmente, é utilizada a magnitude aparente da estrela Vega [27]. Entretanto, nas nossas análises futuras, essa constante é irrelevante pelo fato de trabalharmos com que mais adiante

definiremos como módulo de distância. Assim, definimos a magnitude aparente como sendo:

$$m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_{\beta}} \right). \quad (3.56)$$

onde F_{β} é o fluxo de referência.

Vale salientar que a magnitude aparente de um corpo celeste depende da sua luminosidade intrínseca e da distância deste corpo até a Terra. Portanto, um corpo celeste pode parecer pouco brilhante pelo fato de ter uma luminosidade pequena, ou seja, emite pouca energia ou porque ele está muito distante. A Figura 3.2 apresenta uma escala de magnitude aparente, como também, alguns exemplos de corpos celestes e suas respectivas magnitudes aparentes.

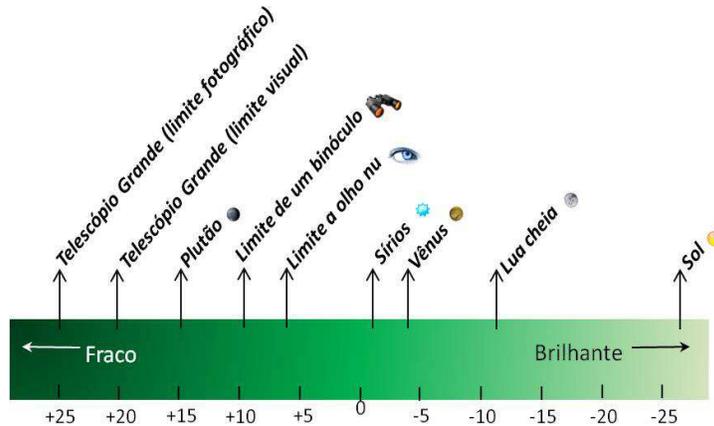


Figura 3.2: Escala de Magnitude Aparente
Adapatado Observatório Nacional.

Devido a magnitude aparente depender da distância em que uma fonte está da Terra, não podemos dizer se um corpo celeste é mais brilhante do que outro. Para entendermos melhor, podemos tomar um exemplo; uma vela situada a um metro de um observador, parecerá muito mais brilhante do que uma lâmpada fluorescente situada a quinhentos metros de distância. Entretanto, sabemos que a energia emitida por uma lâmpada fluorescente é maior do que a de uma vela. Assim, se o Sol fosse deslocado até o ponto do espaço onde se encontra a estrela Alpha do Centauro (aproximadamente 4,2 anos luz), a estrela mais próxima da Terra, o Sol não apresentaria a mesma exuberância de brilho que estamos acostumados a observar.

Portanto, torna-se necessário a definição de uma medida de magnitude que nos permita dizer se um corpo celeste é mais brilhante do que outro.

Magnitude Absoluta

A magnitude absoluta de uma fonte é definida como a magnitude aparente quando o objeto estiver a uma distância de luminosidade de 10 *parsec* (*pc*) [27].

$$M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_{10}}{F_{\beta}} \right) \quad (3.57)$$

em que F_{10} é o fluxo de uma fonte situada a 10 *pc* do observador e que pode ser escrita na forma:

$$F_{10} = \frac{L}{4\pi(10pc)^2} = \frac{\left(\frac{L}{4\pi d_L^2}\right) 4\pi d_L^2}{4\pi(10pc)^2} = F \left(\frac{d_L}{10pc} \right)^2. \quad (3.58)$$

Dessa forma, podemos reescrever a Eq.(3.57) como:

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10pc} \right). \quad (3.59)$$

Pelo fato de que as escalas envolvidas na cosmologia ser da ordem de 1*Mpc*, vamos reescrever (3.59) nesta unidade. Portanto,

$$M = m - 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1Mpc} \right) - 25. \quad (3.60)$$

Assim, podemos definir o módulo de distância da seguinte forma;

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1Mpc} \right) + 25. \quad (3.61)$$

Conhecendo-se a relação entre o módulo de distância e o red shift, podemos utilizá-la em testes observacionais, os quais iremos discutir no próximo capítulo.

3.3 Cosmologia em Brana

Nesta seção iremos analisar e discutir a cosmologia e as principais equações que a descrevem no cenário de branas. O modelo de brana que seguiremos nesta seção é o modelo Randall-Sundrum II discutido no capítulo anterior. Também enfatizamos que restringiremos nossa

análise ao modelo de brana fina, pois, existem trabalhos na literatura especializada que estudam a cosmologia no contexto de branas com espessura. Para uma consulta mais aprofundada sobre este modelo de brana podemos indicar os trabalhos [12, 34, 35].

3.3.1 Equação modificada de Friedmann numa brana fina

No modelo cosmológico de branas, podemos escrever a métrica do espaço-tempo pentadimensional (2.1) da seguinte forma:

$$ds^2 = -n(\tau, \zeta)^2 d\tau^2 + a(\tau, \zeta)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2 d\zeta^2, \quad (3.62)$$

em que γ_{ij} é a métrica tridimensional maximalmente simétrica [11]. As equações de Einstein para uma distribuição de matéria-energia em cinco dimensões é dada por:

$$\tilde{G}_{AB} = \kappa_{(5)}^2 \tilde{T}_{AB}, \quad (3.63)$$

em que $\kappa_{(5)}$ está relacionada com a constante de Newton em cinco dimensões $G_{(5)}$ e com a massa reduzida de Planck $M_{(5)}$ pela relação:

$$\kappa_{(5)}^2 = 8\pi G_{(5)} = M_{(5)}^{-3}. \quad (3.64)$$

Considerando a métrica (3.62), podemos verificar que as componentes não nulas do tensor de Einstein \tilde{G}_{AB} são [11]:

$$\tilde{G}_{00} = 3 \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) - \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{a'}{a} \left(\frac{b'}{b} \right) \right) + k \frac{n^2}{a^2} \right\}, \quad (3.65)$$

$$\tilde{G}_{ij} = \frac{a^2}{a} \gamma_{ij} \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + 2 \frac{n'}{n} \right) - \frac{b'}{b} \left(\frac{n'}{n} + 2 \frac{a'}{a} \right) + 2 \frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} \right\} \quad (3.66)$$

$$+ \frac{a^2}{n^2} \gamma_{ij} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(-\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) - 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \left(-2 \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{n}}{n} \right) - \frac{\ddot{b}}{b} \right\} - k \gamma_{ij}, \quad (3.67)$$

$$\tilde{G}_{05} = 3 \left(\frac{n' \dot{a}}{n a} + \frac{a' \dot{b}}{a b} - \frac{\dot{a}'}{a} \right), \quad (3.68)$$

$$\tilde{G}_{55} = 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{n'}{n} \right) - \frac{b^2}{n^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{n}}{n} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - k \frac{b^2}{a^2} \right\}. \quad (3.69)$$

Nas equações acima, a linha denota a derivada com respeito a coordenada extra e o ponto corresponde a derivada temporal.

O tensor energia-momento pode ser decomposto em duas partes:

$$\tilde{T}_B^A = \tilde{T}_B^A|_{Bulk} + T_B^A|_{Brana}, \quad (3.70)$$

em que $\tilde{T}_B^A|_{Bulk}$ é o tensor energia-momento da matéria no bulk, cujo qual, neste trabalho, assumiremos como tendo a forma de um fluido:

$$\tilde{T}_B^A|_{Bulk} = \text{diag}(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_T), \quad (3.71)$$

em que a densidade de energia ρ_B e as pressões P_B e P_T são independentes da coordenada extra ζ .

Como o nosso Universo deve ser homogêneo e isotrópico, o conteúdo energético na brana ($\zeta = 0$) representado pelo tensor $\tilde{T}_A^B|_{Brana}$ é dado por:

$$\tilde{T}_B^A|_{Brana} = \frac{\delta(\zeta)}{b} \text{diag}(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0), \quad (3.72)$$

em que ρ_b e p_b são, respectivamente, a densidade de energia e a pressão e que devem ser independentes das coordenadas intrínsecas (x^μ).

Pelo fato da matéria estar confinada na brana, não existe fluxo de matéria ao longo da dimensão extra. Assim, temos que $\tilde{T}_{05} = 0$ o que implica que $\tilde{G}_{05} = 0$. As componentes \tilde{G}_{00} e \tilde{G}_{55} das equações de Einstein podem ser reescritas como:

$$F' = \frac{2a'a^3}{3} \kappa_{(5)}^2 \tilde{T}_0^0 \quad (3.73)$$

e

$$\dot{F} = \frac{2\dot{a}a^3}{3} \kappa_{(5)}^2 \tilde{T}_5^5, \quad (3.74)$$

onde F é uma função de τ e ζ definida por [11]:

$$F(\tau, \zeta) \equiv \frac{(a'a)^2}{b^2} - \frac{(\dot{a}a)^2}{n^2} - k^2 a^2 \quad (3.75)$$

Dado que $\tilde{T}_0^0 = -\rho_B$, que é independente de ζ , podemos integrar (3.73) obtendo o seguinte resultado:

$$F + \frac{\kappa_{(5)}^2}{6} a^4 \rho_B + \mathcal{C} = 0, \quad (3.76)$$

em que \mathcal{C} é uma função arbitrária que depende apenas do tempo [11]. Tomando a derivada com relação ao tempo de (3.73) e a derivada com relação a ζ de (3.74) e assumindo que $\tilde{T}_0^0 = \tilde{T}_5^5$, podemos mostrar que ρ_B é constante no tempo [11]. Isto implica que \mathcal{C} é uma constante.

Com o auxílio da equação $\nabla_A \tilde{G}^{A0} = 0$, que é consequência da identidade de Bianchi, e usando o fato de que $\tilde{G}_{05} = 0$ e $\tilde{T}_0^0 = \tilde{T}_5^5$, obtemos o seguinte resultado;

$$\partial_\tau \left(\frac{F'}{a'} \right) = \frac{2}{3} \dot{a} a^2 \gamma_j^i \tilde{G}_i^j. \quad (3.77)$$

Podemos perceber, usando (3.73) que a equação acima é identicamente satisfeita se $\rho_B = -P_B$. Assim, quando a fonte do bulk é uma constante cosmológica, qualquer conjunto de funções $a(\tau, \zeta)$, $n(\tau, \zeta)$ e $b(\tau, \zeta)$ satisfazendo à Eq.(3.76), ou seja;

$$\left(\frac{\dot{a}}{na} \right)^2 = \frac{1}{6} \kappa_{(5)}^2 \rho_B + \left(\frac{a'}{ba} \right)^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{\mathcal{C}}{a^4}, \quad (3.78)$$

juntos com $\tilde{G}_{05} = 0$, serão soluções de todas as equações de Einstein no bulk.

A brana pode ser levada em conta pelo uso da condição de junção de Israel [10] que relaciona os saltos da derivada da métrica através da brana com o tensor energia-momento no interior da brana [11]. Sabendo que o salto na derivada de uma função $Q(\zeta)$ qualquer através de $\zeta = 0$ é

$$[Q'] = Q'(0^+) - Q'(0^-), \quad (3.79)$$

podemos mostrar, a partir da condição de junção, que;

$$\frac{[a']}{a_0 b_0} = -\frac{\kappa_{(5)}^2}{3} \rho_b \quad (3.80)$$

e

$$\frac{[n']}{n_0 b_0} = \frac{\kappa_{(5)}^2}{3} (3p_b + 2\rho_b) \quad (3.81)$$

em que a_0 , b_0 e n_0 significa que estas funções são tomadas em $\zeta = 0$.

Vamos escrever (3.78) sobre a brana. Tomando os limites $\zeta \rightarrow 0^+$ e $\zeta \rightarrow 0^-$, obtemos respectivamente [11]:

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{n_0 a_0}\right)^2 = \frac{1}{6}\kappa_{(5)}^2 \rho_B + \left(\frac{a'(0^+)}{b_0 a_0}\right)^2 - \frac{k}{a_0^2} + \frac{\mathcal{C}}{a_0^4}, \quad (3.82)$$

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{n_0 a_0}\right)^2 = \frac{1}{6}\kappa_{(5)}^2 \rho_B + \left(\frac{a'(0^-)}{b_0 a_0}\right)^2 - \frac{k}{a_0^2} + \frac{\mathcal{C}}{a_0^4}. \quad (3.83)$$

Assumindo a simetria $\zeta \leftrightarrow -\zeta$, segue que $a'(0^+) = -a'(0^-)$. Portanto, (3.82) e (3.83) são equações idênticas. Levando-se em conta a condição de junção (3.80) e que $n_0 = 1$, obtemos, então, a chamada equação de Friedmann modificada [11]:

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 = \frac{\kappa_{(5)}^2}{6} \rho_B + \frac{\kappa_{(5)}^4}{36} \rho_b^2 + \frac{\mathcal{C}}{a_0^4} - \frac{k}{a_0^2}. \quad (3.84)$$

As principais características da Eq.(3.84) são que o termo linear da densidade de energia, $\frac{\kappa_{(5)}^2}{6} \rho_B$, é referente ao bulk, enquanto que o termo quadrático da densidade de energia, $\frac{\kappa_{(5)}^4}{36} \rho_b^2$, é referente à brana. O termo que possui a constante \mathcal{C} também contribui para a evolução cósmica e está relacionado (interpretando do ponto de vista da cosmologia convencional) com o termo efetivo de radiação [11]. Esta equação é suficiente para estudar a evolução cosmológica da brana é independente da evolução temporal de b [11]. A partir deste ponto consideraremos $\dot{b} = 0$ e assumiremos $b = 1$ [11].

3.3.2 Cenário cosmológico

Nesta seção iremos analisar as consequências de (3.84) na evolução cósmica na brana. Primeiro vamos destacar a presença do termo quadrático relativo à energia da brana. De fato, é este termo que distingue, de maneira significativa, a cosmologia de branas da cosmologia convencional.

No modelo de Randall-Sundrum, a densidade de energia da brana pode ser decomposta em duas partes [5];

$$\rho_b = \Xi + \rho, \quad (3.85)$$

em que Ξ é constante que representa a tensão intrínseca da brana e ρ é a densidade de energia ordinária em cosmologia [11]. Substituindo (3.85) em (3.84) temos

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 = \frac{\kappa_{(5)}^2}{6}\rho_B + \frac{\kappa_{(5)}^4}{36}\Xi^2 + \frac{\kappa_{(5)}^4}{18}\Xi\rho + \frac{\kappa_{(5)}^4}{36}\rho^2 + \frac{C}{a_0^4} - \frac{k}{a_0^2}. \quad (3.86)$$

No modelo Randall-Sundrum, Ξ (a tensão da brana) satisfaz a relação[11];

$$\frac{\kappa_{(5)}^2}{6}\rho_B + \frac{\kappa_{(5)}^4}{36}\Xi^2 = 0. \quad (3.87)$$

Se, além disso, admitirmos a identificação [11]:

$$8\pi G_{(4)} \equiv \frac{\kappa_{(5)}^4}{6}\Xi, \quad (3.88)$$

podemos perceber de (3.86) que a cosmologia padrão é recuperada no limite em que $\rho \ll \Xi$ [11].

Assumiremos agora que matéria ordinária é descrita pela equação de estado na forma $p = \omega\rho$ com ω constante. Assim, usando a conservação da energia da brana, que é dada pela divergência do tensor energia-momento da brana, ou seja:

$$\dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}_0}{a_0}(\rho_b + p_b) = 0, \quad (3.89)$$

temos que

$$\rho = \rho_* \left(\frac{a_0(t)}{a_*}\right)^{-v}, \quad v = 3(1 + \omega), \quad (3.90)$$

em que ρ_* e a_* são constantes e que a_0 aqui significa o valor do parâmetro tomado sobre a brana, ou seja, em $\zeta = 0$ [11].

Substituindo (3.90) em (3.86) é possível integrar explicitamente no caso em que $C = 0$ e $k = 0$. Assumindo que o termo $\left(\frac{\kappa_{(5)}^2}{6}\rho_B\right)$ de (3.84), seja positivo e definindo:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho_B}{6\kappa_{(5)}^2} + \frac{\Xi}{36}}, \quad (3.91)$$

então, para $\lambda > 0$, é possível mostrar que [11]:

$$a_0(t) = a_* \rho_*^{\frac{1}{v}} \left\{ \frac{\Xi}{36\lambda^2} [\cosh(v\kappa_{(5)}^2 \lambda t) - 1] + \frac{1}{6\lambda} \sinh(v\kappa_{(5)}^2 \lambda t) \right\}^{\frac{1}{v}}. \quad (3.92)$$

Analisando (3.92), podemos verificar que se λ é suficientemente pequeno, obtemos três fases sucessivas na evolução cosmológica; uma fase não convencional dominada por ρ^2 , uma fase convencional dominada por ρ e, finalmente, uma fase exponencial, em que λ desenvolve o papel de uma constante cosmológica efetiva do nosso Universo [11]. Portanto, a cosmologia na brana é capaz de produzir uma fase de aceleração nos últimos tempos, como parece ser necessário de acordo com as recentes observações cosmológicas [11].

Capítulo 4

Dados Observacionais das Supernovas

Neste capítulo o nosso principal objetivo é analisar os dados observacionais provenientes das supernovas no modelo cosmológico de brana. Entretanto, para alcançar este objetivo, faremos uma discussão do fenômeno conhecido por supernova procurando entender a sua importância no contexto cosmológico.

Para analisar os dados observacionais, tivemos que desenvolver um algoritmo escrito na linguagem de programação MAPLE e usamos como alicerce para testar nosso algoritmo o modelo Λ CDM e os conjuntos de dados compilados pelos grupos liderados por Riess [6, 7], Perlmutter [8] e Astier [9]. Com isso, procuramos reproduzir os resultados obtidos nas literaturas citadas e estes resultados serão apresentados nas seções que seguem.

4.1 Supernovas

Desde que conseguiu desenvolver a técnica da escrita, os nossos antepassados têm catalogado essas magníficas entidades celestes. Com o passar dos séculos, as gerações descendentes observavam as mesmas distribuições estelares que os seus antecedentes haviam registrados e, de geração em geração, essas observações se repetiam. Portanto, seria natural chegar a conclusão que as estrelas deveriam ser objetos que jamais deixariam de existir [31].

Com o passar dos milênios e a evolução do pensamento humano, sabemos hoje, com a ajuda do desenvolvimento científico e tecnológico, que as estrelas estão submetidas a um processo evolutivo no qual elas são formadas, se desenvolvem e tem um fim. As estrelas com uma

massa 10 vezes maior do que a do nosso Sol chegam ao seu estágio final através de um evento catastrófico. As estrelas de grande massa apresentam após o estágio de queima nuclear do hélio várias seqüências de reações nucleares envolvendo elementos pesados, chegando por fim ao ferro [32]. A partir desse ponto as fusões nucleares cessam e, então, a força gravitacional torna-se predominante e a estrela começa a ser esmagada até atingir uma temperatura de trilhões de graus [33]. A partir de então, o núcleo de ferro entra em colapso e a camada externa da estrela explode, liberando a maior quantidade de energia conhecida. Essa explosão é chamada de supernova.

É um evento tal, que o brilho desse objeto chega a superar o brilho da própria galáxia hospedeira. A Figura (4.1) ilustra esta peculiaridade.



Figura 4.1: Supernova SN 1994D que explodiu na borda da galáxia 4526 (constelação de Virgem).

Crédito: Peter Challis e equipe High-Z. Foto tomada pelo Hubble Space Telescope (HST).

As supernovas são classificadas com base no mecanismo de formação dessas entidades estelares [36]. As supernovas geradas a partir de explosões termonucleares de objetos que esgotaram suas reservas de hidrogênio ao longo da sua evolução são classificadas como do tipo I. Acredita-se que essas supernovas sejam geradas a partir de um processo de transferência de matéria entre estrelas de um sistema binário. Já as supernovas tipo II são geradas de explosões de estrelas solitárias e mais jovens, o processo é conhecido como “*core collapse*” (colapso do núcleo) [25].

A classificação das supernovas também leva em conta os resultados de observações

espectroscópicas ao redor do máximo de emissão. A presença de linhas espectrais de hidrogênio no espectro observado da supernova define uma supernova do tipo II, e a ausência de tais linhas indicam que a supernovas é do tipo I [36].

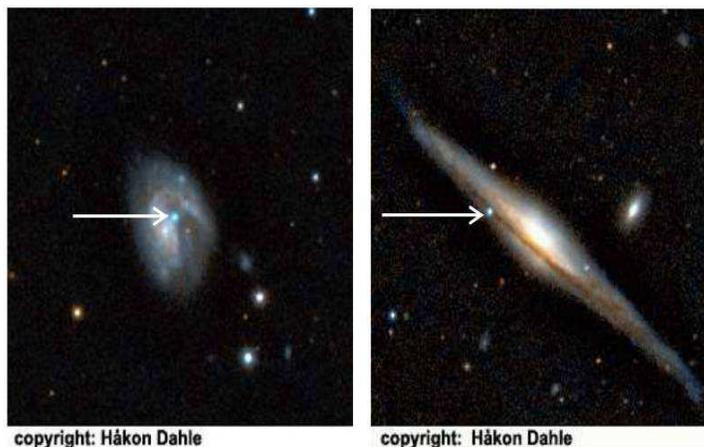


Figura 4.2: Supernovas tipo Ia e tipo II

A imagem da esquerda, obtida por Hakon Dahle, mostra uma supernova tipo Ia, SN 2001dn, uma estrela que explodiu na galáxia NGC 662. A imagem da direita, também obtida por Hakon Dahle, mostra uma supernova tipo II, SN 2001cm, uma estrela que explodiu na galáxia NGC 5965 em 2001.

Apenas pela observação da Figura (4.2) não podemos perceber a diferença entre os dois tipos de supernovas. Por isso é tão importante a análise da curva de luz que definem cada supernova. É a partir do estudo das curvas de luz, que discutiremos adiante, que é possível classificar as supernovas quanto ao seu espectro emitido. Existe, ainda, uma subdivisão das supernovas do tipo I, aquelas que têm uma linha proeminente de Si II são chamadas de supernovas Ia (SNeIa) e aquelas que não apresentam silício são chamadas de supernovas Ib/c [36]. A diferença entre os tipos Ib e Ic se encontra na presença ou ausência de linhas de hélio, respectivamente.

O significado físico dessa classificação está diretamente ligado aos sistemas progenitores de cada evento. A Figura (4.3) ilustra esta classificação.

O conjunto de dados com os quais iremos trabalhar só possuem supernovas do tipo Ia.

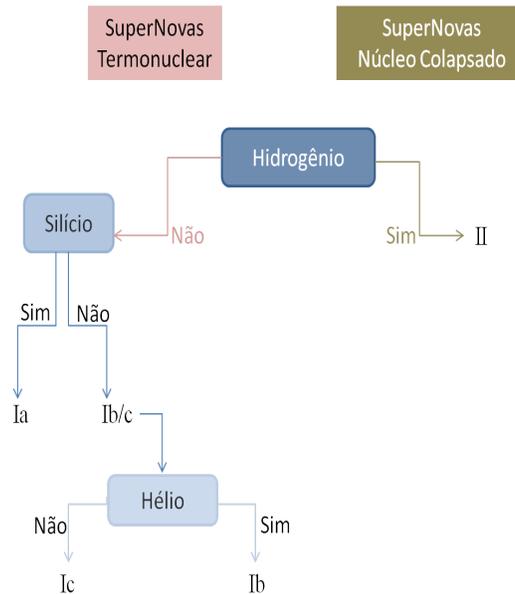


Figura 4.3: Diagrama de Classificação das Supernovas Adaptado de Leibundgut.

Estas supernovas são escolhidas pelo fato de possuírem um pico de brilho maior do que os outros tipos de supernovas e as curvas de luz de diferentes supernovas tipo Ia possuem uma intensidade de brilho muito semelhante entre si e com uma variação de uma magnitude (2.5 em luminosidade) no pico das SNeIa. Existe uma correlação entre o brilho no máximo da emissão e o tempo de decaimento que permite “padronizar” as curvas de luz. As SNeIa mais brilhantes possuem um tempo de decaimento maior do que as menos brilhantes [37]. Devido a esse fato as SNeIa são ditas “padronizáveis”. Ou seja, existe uma forma de levar em conta os erros e fatores que contribuem para a dispersão das curvas de luz de diferentes supernovas, de modo que estas indiquem uma mesma magnitude absoluta e conseqüentemente possam ser usadas como velas padrão[37]. A Figura (4.4) ilustra estas características:

O método segundo o qual a padronização para as curvas de luz não é um consenso na comunidade científica [25]. Existe dois métodos mais usados para realizar esta padronização que são: Multicolor Light Curve Shape (MLCS2k2) e o Spectral Adaptive Light Curve Template (SALT2). Para um estudo mais aprofundado sobre estes métodos de padronização podemos citar os trabalhos; [38, 39].

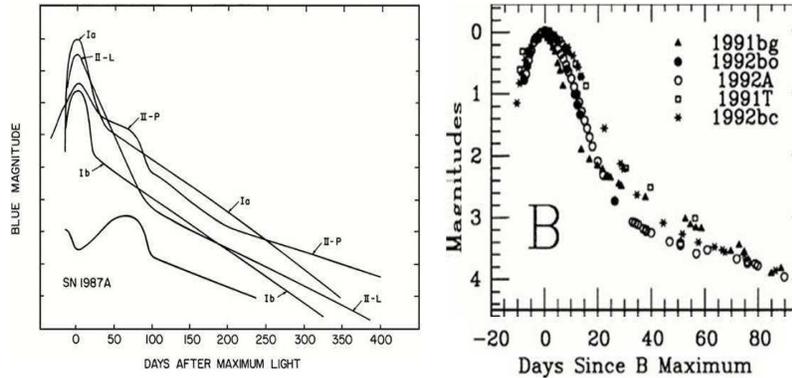


Figura 4.4: Curvas de luz
Adaptado de Filippenko.

Devido as supernovas serem consideradas velas padrão, além do fato de serem extremamente luminosas, o que nos permite “enxergá-las” a grandes distâncias, elas assumem um papel muito importante na cosmologia.

De posse do valor do fluxo de energia medido em detectores terrestres e da radiação total emitada pela SNeIa, pode-se inferir a distância de luminosidade da supernova [25]. Desde que, é claro, se conheça o red shift da radiação emitida, que, por sua vez, pode ser determinado com base na análise espectroscópica da supernova. É a partir dessas medidas (distância de luminosidade e red shift) que se pode realizar os testes observacionais dos modelos cosmológicos.

4.2 Análise dos Dados Observacionais

Nesta seção iremos utilizar o modelo Λ CDM juntamente com o conjunto de dados compilados por diferentes grupos de pesquisa, para testarmos o nosso algoritmo na estimativa dos parâmetros cosmológicos. O algoritmo foi escrito na linguagem de programação MAPLE versão 14. Em seguida aplicaremos os mesmos procedimentos e os mesmos conjuntos de dados para o modelo de brana e analisaremos os resultados obtidos. Nas nossas análises levaremos em conta o fato de que, segundo os dados observacionais da radiação cósmica de fundo [40], os resultados favorecem um Universo plano. Desse modo, iremos restringir nossas análises

para um Universo plano, o que nos leva a considerar $k = 0$. Assim como para a época atual a contribuição da densidade de energia associada a radiação é muito pequena e pode ser considerada como sendo nula.

Tendo em vista essa consideração, de acordo com o que foi discutido na seção 3.2, que

$$E(z) = [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda0}]^{1/2}, \quad (4.1)$$

o que nos permite escrever

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda0}]^{1/2}. \quad (4.2)$$

Substituindo (4.2) em (3.54), podemos escrever o parâmetro de desaceleração como sendo;

$$q(z) = -1 + \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m0}(1+z)^3}{[1 - \Omega_{m0} + \Omega_{m0}(1+z)^3]}. \quad (4.3)$$

O fator de desaceleração atual é conseguido fazendo $z = 0$. O que nos fornece

$$q = -1 + \frac{3}{2}\Omega_{m0}. \quad (4.4)$$

Após usarmos os métodos que descreveremos a seguir para a estimativa do parâmetros cosmológicos, poderemos obter, também, uma estimativa para o fator de desaceleração.

4.2.1 Método de ajuste dos dados

O procedimento para realizarmos a tarefa de confrontar um modelo teórico com dados observacionais se dá através da análise estatística. No nosso estudo, o modelo teórico para o módulo de distância em função do red shift é dado pela Eq.(3.61). Até agora fizemos a constante c igual a um. A partir deste ponto retomaremos a velocidade da luz na equação da distância de luminosidade que, para o caso $k = 0$, é dada por (3.49). Com isso, temos que o módulo de distância fica escrito da seguinte forma;

$$\mu = 5 \log_{10} \left[\frac{c(1+z)}{H_0 1 Mpc} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] + 25.$$

Usando as propriedades do logarítmo e o fato de que o parâmetro de Hubble atual é [27];

$$H_0 \equiv 100h \frac{Km}{s Mpc},$$

podemos reescrever a equação acima como:

$$\mu = 5\log_{10} \left[(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] - 5\log_{10}(h) + 5\log_{10} \left(\frac{c}{100} \right) + 25. \quad (4.5)$$

Cada modelo cosmológico terá sua função $E(z)$. Para o modelo Λ CDM, que servirá de base para testar nosso algoritmo, $E(z) = [\Omega_{m0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m0})]^{1/2}$, em que $\Omega_{\Lambda 0} = 1 - \Omega_{m0}$. Havendo um conjunto de supernovas em que, para cada uma, mede-se μ e z , basta verificar se o modelo cosmológico se ajusta bem aos pontos dados pela observação [27].

De acordo com [6], para estimar os melhores valores dos parâmetros cosmológicos, a estatística χ^2 é bastante adequada para esta tarefa. A estatística χ^2 é definida como o quadrado da diferença entre o módulo de distância teórico (4.5) e o observado (μ_o), dividido pelo quadrado do erro na medida de μ_o [41, 42],SIVIA. A depender do tratamento que se dá aos dados experimentais, deve-se levar em conta ainda um erro sistemático adicional, de tal forma que [27]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_{o;i} - \mu_{teórico;i})^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{sist}^2} \quad (4.6)$$

em que σ_i é o erro na medida do módulo de distância e σ_{sist} é o erro sistemático adicional. O índice i refere-se a uma supernova específica. Com o red shift medido para cada supernova, calcula-se o módulo de distância teórico, $\mu_{teórico}$, para tais supernovas em função dos parâmetros livres que se deseja estimar. Com o módulo de distância observado, calcula-se o quociente entre a diferença entre o $\mu_{teórico}$ e μ_o e o desvio padrão ($\sigma^2 + \sigma_{sist}^2$) para cada supernova. E finalmente para obter a função χ^2 , tomamos a soma sobre todas as supernovas observadas, como mostra a Eq.(4.6).

Através do algoritmo escrito na linguagem do software MAPLE versão 14 e com o auxílio do pacote Direct Search versão 2, que pode ser obtido em [44], é possível encontrar os valores que os parâmetros livres devem assumir para que o χ^2 assuma um valor mínimo (χ_{min}^2).

Chamamos de χ^2 reduzido (χ_r^2) a grandeza que mede o quão bom é o ajuste dos dados ao modelo teórico e é definido por [27]:

$$\chi_r^2 \equiv \frac{\chi^2}{N - n}, \quad (4.7)$$

em que, N , é o número de dados e, n , é o número de parâmetros livres a serem estimados.

Já estando cientes dos procedimentos estatísticos que seguiremos, resta-nos apresentar os dados e os resultados obtidos.

Os conjuntos de dados

Os conjuntos de dados utilizados para testar o nosso algoritmo computacional são;

- **Gold Sample** - É o conjunto de dados compilados pelo grupo High Z Supernovae Team, em 1998, liderado pelo americano Adam Riess. Deste conjunto, os valores mais confiáveis formam o chamado Gold Sample e o resto dos dados de Silver Sample, totalizando 182 supernovas. O maior red shift medido por este grupo é $z = 1,775$;
- **Legacy Survey** - Este conjunto é composto pelos resultados do primeiro ano, publicado em 2005, de cinco anos do projeto Supernovae Legacy Survey. Fazem parte deste conjunto de dados 117 supernovas entre as quais com o maior red shift medido em $z = 1,010$;
- **ESSENCE** - Em 2006 foram divulgados os resultados do primeiro ano de coleta de dados do projeto ESSENCE survey (**E**quation of **S**tate: **S**up**E**r**N**ovae trace **C**osmic **E**xpansion) [27]. O conjunto é composto por 192 supernovas. Para esse conjunto de dados o maior red shift medido é $z = 1,775$;
- **Supernova Cosmology Project** - Projeto liderado pelo americano Perlmutter, este conjunto de dados, divulgados em 1998, possui 60 supernovas. O maior red shift medido é $z = 0,763$.

No que segue, iremos expor os resultados para cada conjunto de dados apresentados acima com o nosso algoritmo computacional. Lembrado que os resultados expostos a seguir não são

resultados novos, estamos apenas reproduzindo os resultados das literaturas que serviram de base para o nosso trabalho.

4.2.2 Gold Sample

Das 182 supernovas que compõem este conjunto de dados, a nossa análise se restringirá apenas as medidas Gold, que possuem um total de 157 supernovas. As outras medidas são chamadas de Silver e foram retiradas da análise devido aos desvios altos [6]. Para os dados Gold, que estão disponíveis em [45], considerando os parâmetros livres como sendo (Ω_{m0}, h) , temos que os valores desses parâmetros que minimizam a Eq.(4.6) estão expostos na Tabela (4.1) que segue:

Modelo	Ω_{m0}	h	χ_r^2
Λ CDM	$0,31^{+0,03}_{-0,03}$	$0,64^{+0,01}_{-0,01}$	1,14

Tabela 4.1: Melhores valores estimados para os parâmetros livres.

O valor estimado para Ω_m nos fornece $\Omega_\Lambda = 0,69 \pm 0,03$. De posse dos valores estimados, substituindo-os na Eq.(4.5), a curva que melhor se ajusta aos dados está ilustrada na Figura (4.5):

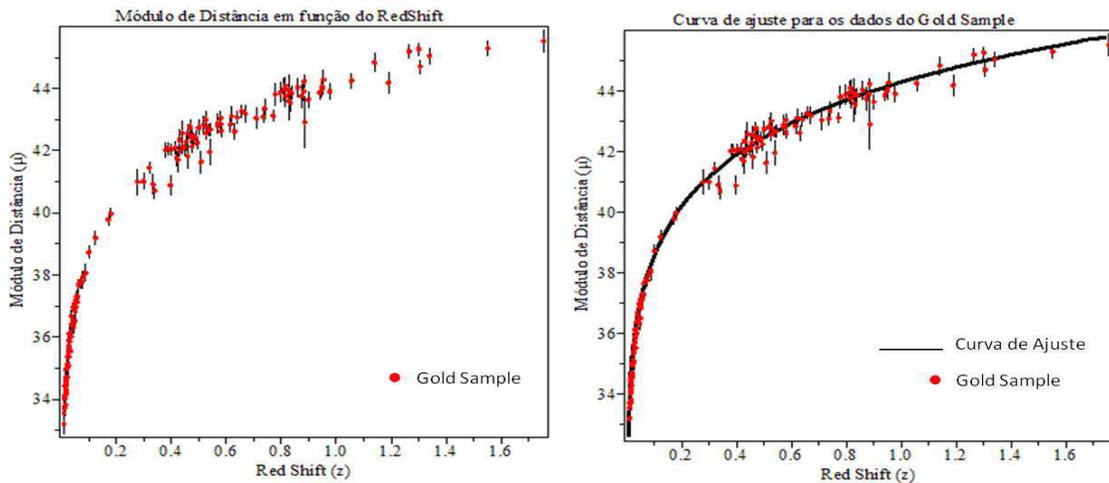


Figura 4.5: Dados observados e Curva de ajuste (Λ CDM) - Gold Sample.

De posse da estimativa do parâmetro de densidade de energia associada a matéria, temos que o parâmetro de desaceleração é $q = -0,53 \pm 0,04$. Esse resultado nos indica que o Universo está numa fase acelerada.

Precisamos enfatizar que os valores estimado não são necessariamente os valores corretos, mas apenas os valores mais plausíveis, e o intervalo de confiança só nos informa que o valor real se encontra dentro dele com uma certa probabilidade.

4.2.3 Legacy Survey

Das 117 supernovas, duas destas medidas são deixadas de fora no ajuste dos dados cosmológicos devido ao seus desvios serem altos [9]. Os dados estão disponíveis em [9], bem como os dois dados que se deve retirar para o cálculo no ajuste dos parâmetros. Desta forma o conjunto de dados fica formado por 71 supernovas: 27 com altos red shift - nomeclaturadas pelos autores de SNLS - e, 44 supernovas com baixos red shift - chamadas de Nearby [9].

Portanto, os melhores valores dos parâmetros livres para este conjunto de dados são:

Modelo	Ω_{m0}	h	χ_r^2
Λ CDM	$0,26^{+0,04}_{-0,04}$	$0,70^{+0,01}_{-0,01}$	1,005

Tabela 4.2: Melhores valores estimados para os parâmetros livres.

A partir dos parâmetros estimados, temos que $\Omega_\Lambda = 0,74 \pm 0,04$ e a curva que melhor se ajusta aos dados está exposta na Figura (4.6).

Para o parâmetro de desaceleração temos que $q = -0,61 \pm 0,06$. O que quer dizer que, também, esse conjunto de dados indicam uma aceleração cósmica.

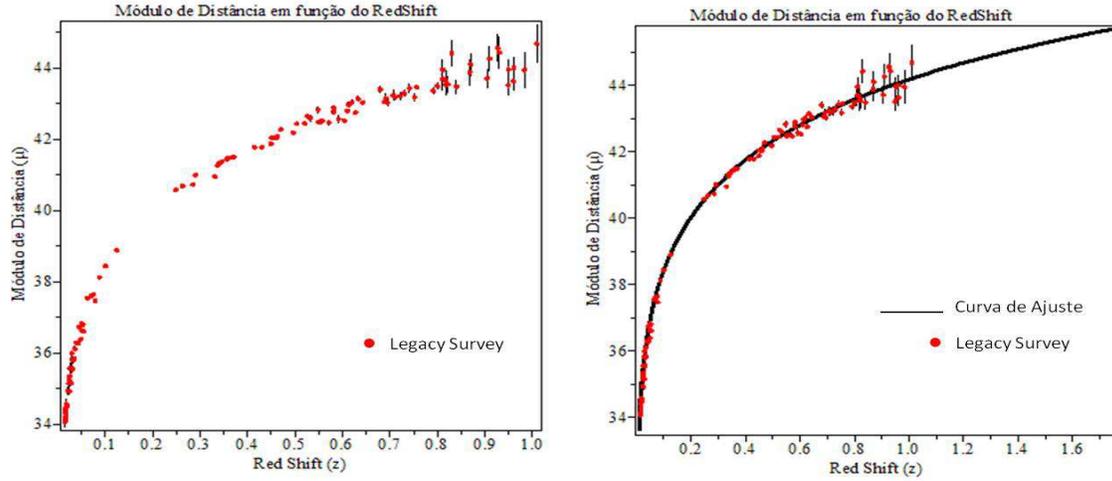


Figura 4.6: Dados observados e Curva de ajuste (Λ CDM) - Legacy Survey.

4.2.4 ESSENCE

As 192 supernovas que fazem parte deste conjunto de dados são provenientes das observações do realizadas pelo Legacy Survey e pelo telescópio espacial Hubble. São as melhores medidas que fazem parte deste conjunto de dados e, portanto, todas as 192 medidas farão parte da nossa análise. Na tabela que segue, estão expostos os melhores valores para os parâmetros cosmológicos.

Modelo	Ω_{m0}	h	χ_r^2
Λ CDM	$0,27^{+0,04}_{-0,04}$	$0,65^{+0,01}_{-0,01}$	0,66

Tabela 4.3: Melhores valores estimados para os parâmetros livres.

Dessa forma temos que $\Omega_\Lambda = 0,73 \pm 0,04$. A Figura (4.7) nos mostra os dados e a curva de ajuste para os parâmetros estimados.

O que nos leva a um valor para o parâmetro de desaceleração igual a $q = -0,59 \pm 0,06$. Resultado esse que mais uma vez nos revela uma expansão acelerada.

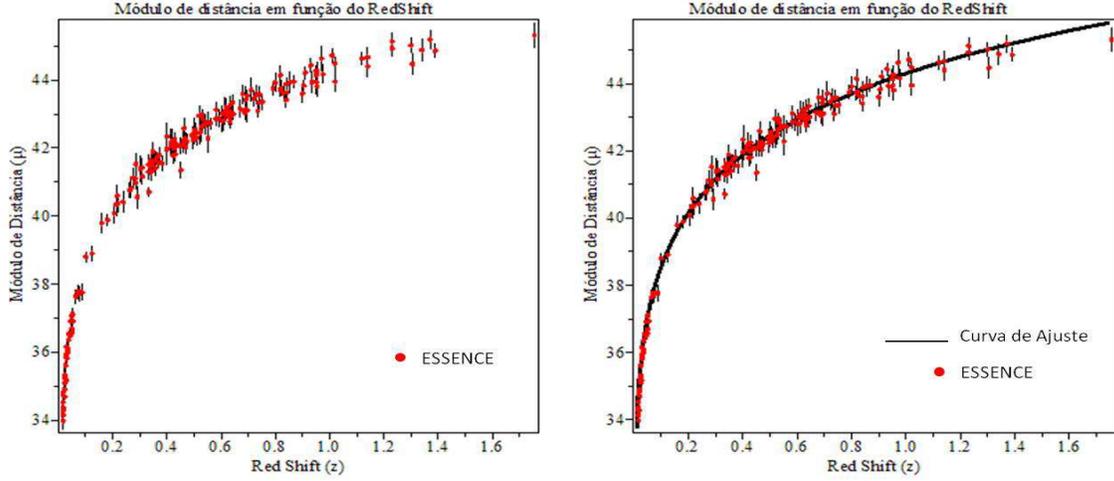


Figura 4.7: Dados observados e Curva de ajuste (Λ CDM) - ESSENCE.

4.2.5 Supernova Cosmology Project

Para este conjunto de dados, os autores em [8] não usam a Eq.(4.5) da forma como está apresentada. Para esses dados a equação do modelo teórico, a partir de (4.5), é

$$m = 5 \log_{10} \left[(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] + 5 \log_{10} \left(\frac{c}{100} \right) - 5 \log_{10}(h) + 25 + M$$

$$m = 5 \log_{10} \left[(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] + \mathcal{M} \quad (4.8)$$

onde $\mathcal{M} = 5 \log_{10} \left(\frac{c}{100} \right) - 5 \log_{10}(h) + 25 + M$. Os dados estão disponíveis em [8].

O número de supernovas observadas pelo grupo é de 60 supernovas. Entretanto, as supernovas são separadas em oito amostras (A,B,C,D,E,G,H,L) de acordo com os desvios das medidas da magnitude aparente. Os melhores valores dos parâmetros estimados são conseguidos com o grupo de amostra C de [8] que contém 54 supernovas. Em nossa análise é esse grupo de dados que será usado.

Com esse conjunto de dados não poderemos estimar o parâmetro de Hubble que está absorvido no valor de \mathcal{M} . A primeira vista seríamos tentados a utilizar os dados referentes à magnitude aparente e o fato de que todas as supernovas possuem uma mesma magnitude absoluta, e com isso, calcular o módulo de magnitude e usar (4.5) para estimar os parâmetros

de densidade de matéria e o de Hubble. Entretanto, não podemos esquecer do fato de que o que se observa é a magnitude aparente e o módulo de magnitude é uma grandeza derivada dessa. Ou seja, teríamos que levar em consideração a teoria de propagação de erros e ainda outros parâmetros como o de desvio intrínseco sobre o qual não temos informação.

De qualquer modo, a forma do χ^2 permanece inalterável, apenas a grandeza física foi modificada, de módulo de distância (μ) para magnitude aparente (m). Portanto, podemos escrever

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(m_{o;i} - m_{teórico;i})^2}{\sigma_i^2} \quad (4.9)$$

Usando os procedimentos descritos anteriormente, temos que o valores dos parâmetros livres Ω_{m0} e \mathcal{M} que minimizam (4.9) são:

Modelo	Ω_{m0}	\mathcal{M}	χ_r^2
Λ CDM	$0,28^{+0,08}_{-0,08}$	$23,94^{+0,05}_{-0,05}$	1,11

Tabela 4.4: Melhores valores estimados para os parâmetros livres.

A partir do valor de densidade estimado, temos que $\Omega_\Lambda = 0,72 \pm 0,08$. Substituindo os valores estimados para os parâmetros livres em (4.8), obtemos a curva que melhor se ajusta ao dados observados ilustrados na Figura (4.8).

Finalmente temos que o parâmetro de desaceleração para esse conjunto de dados é $q = -0,58 \pm 0,12$. Assim como todos os outros, os resultados obtidos sugerem que vivemos em uma fase acelerada da evolução cósmica.

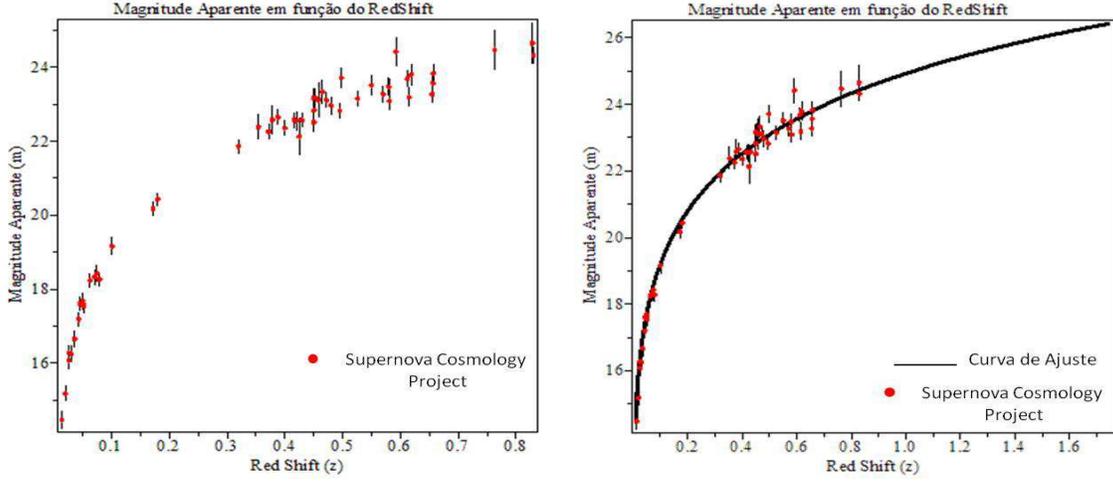


Figura 4.8: Dados observados e Curva de ajuste (Λ CDM) - Supernova Cosmology Project.

4.3 Dados das supernovas no cenário de branas

Nesta seção, vamos discutir os resultados dos dados observacionais das supernovas no contexto do modelo de brana. Os procedimentos empregados são os mesmos da seção anterior, o que muda é apenas o modelo teórico. Vamos considerar a Eq.(3.86). Multiplicando e dividindo essa equação pelo (H_{atual}^2), lembrando que $k = 0$ e que a contribuição da radiação para a densidade de energia total é desprezível, obtemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_{atual}^2 \left[\frac{\kappa_{(5)}^2}{6H_{atual}} \rho_B + \frac{\kappa_{(5)}^4}{36H_{atual}^2} \Xi^2 + \frac{\kappa_{(5)}^4}{36H_{atual}^2} \rho^2 + \frac{\kappa_{(5)}^4}{18H_{atual}^2} \Xi^2 \rho \right] \quad (4.10)$$

Sabendo que: $\kappa_{(5)}^4 = \frac{6\kappa_{(4)}^2}{\Xi}$, $\Lambda_{(5)} = \frac{2\Lambda_{(4)}}{\kappa_{(5)}^2} - \frac{1}{6}\kappa_{(5)}^2 \Xi^2$ e que $\rho_B = \Lambda_{(5)}$, podemos mostrar que [13]

$$H^2 = H_{atual}^2 \left[\frac{\Lambda_{(4)}}{3H_{atual}^2} + \frac{6\kappa_{(4)}^2}{\Xi H_{atual}^2} \rho^2 + \frac{\kappa_{(4)}^2}{3H_{atual}^2} \rho \right]. \quad (4.11)$$

Lembrando, ainda, que $\kappa_{(4)}^2 = 8\pi G_{(4)}$, segue de (4.11) a seguinte equação

$$H = H_{atual} \left[\Omega_{\Lambda_{(4)}} + \Omega_{\Xi} \rho^2 + \Omega_{m\rho} \right]^{1/2}, \quad (4.12)$$

em que

$$\Omega_{\Lambda_{(4)}} \equiv \frac{\Lambda_{(4)}}{3H_{atual}^2}, \quad (4.13)$$

$$\Omega_{\Xi} \equiv \frac{\kappa_{(4)}^2 \rho_*^2}{6\Xi H_{atual}^2}, \quad (4.14)$$

$$\Omega_m \equiv \frac{\kappa_{(4)}^2 \rho_*}{3H_{atual}^2}, \quad (4.15)$$

são, respectivamente, a densidade de energia associada a constante cosmológica quadridimensional, a tensão da brana e a matéria ordinária. Todos os parâmetros acima apresentados se referem aos valores medidos atualmente. Baseado nos procedimentos apresentados para a análise dos dados observacionais na seção anterior, iremos estimar os parâmetros de densidade para o modelo de brana.

Sabemos que atualmente a densidade de radiação cósmica é muito pequena comparada com a densidade de matéria. Sendo assim, na Eq.(4.12), podemos considerar que ρ descreve apenas a densidade de matéria, que está distribuída na forma de poeira ($\omega = 0$). Assim, com a ajuda de (3.90) - que nos dá a evolução de ρ - podemos reescrever (4.12) em função do parâmetro de red shift:

$$H = H_{atual} \left[\Omega_{\Lambda(4)} + \Omega_{\Xi}(1+z)^6 + \Omega_m(1+z)^3 \right]^{1/2}. \quad (4.16)$$

Podemos mostrar, ainda, usando as Eqs.(4.16) e (3.54), que para o modelo de brana, o parâmetro de desaceleração é igual a

$$q = -1 + \frac{3}{2}\Omega_m + 3\Omega_{\Xi}. \quad (4.17)$$

Iniciaremos nossa análise com o conjunto de dados compilados pelo Supernova Cosmology Project pelo fato de reproduzir os resultados obtidos por [13]. Em seguida iremos estender a nossa análise para os dados do Legacy Survey, Gold Sample e ESSENCE.

Supernova Cosmology Project

Usando a Eq.(4.16) na equação da distância de luminosidade, minimizando (4.9), obtemos os seguintes valores:

Com os parâmetros estimados, temos que $\Omega_{\Lambda} = 0,92 \pm 0,09$. Esses valores foram obtidos por Szydlowski et.al (2008) e os reproduzimos com o nosso algoritmo.

Modelo	Ω_m	Ω_Ξ	χ_r^2
Brana	$0_{-0,08}^{+0,08}$	$0,08_{-0,05}^{+0,05}$	1,06

Tabela 4.5: Melhores valores estimados para os parâmetros livres.

Podemos perceber uma discrepância do valor estimado para o parâmetro Ω_m no modelo de brana comparado com o modelo Λ CDM. No entanto, como veremos a seguir, ampliando a base de dados (maior número de supernovas com maior red shift), o modelo de branas nos proporciona um valor para o parâmetro Ω_m mais próximo do estimado no modelo Λ CDM.

O conjunto de dados das supernovas e a curva de ajuste, obtida através da estimativa dos parâmetros livres, estão ilustrados nas Figuras que seguem.

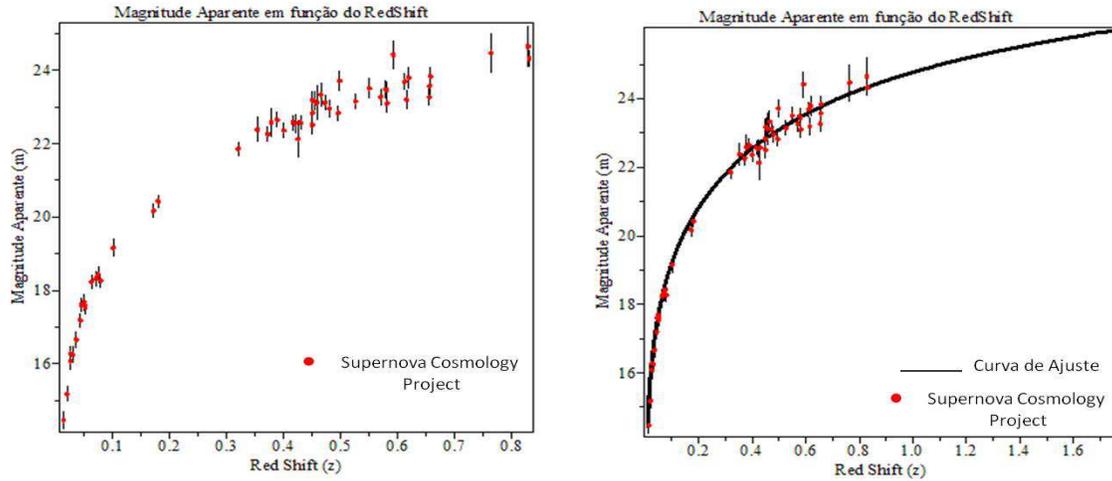


Figura 4.9: Dados observados e Curva de ajuste (Brana) - Supernova Cosmology Project.

Para os valores estimados acima, temos que o parâmetro de desaceleração do Universo para o modelo de brana é $q = -0,76 \pm 0,19$.

Gold Sample

Para esse conjunto de dados, assim como para os que seguem, iremos fazer uso das Eqs.(4.5) e (4.16). Dessa forma, os melhores valores para os parâmetros livres, obtidos através da minimização da função χ^2 (dado em 4.6), estão expostos na Tabela 4.6.

Modelo	Ω_m	Ω_Ξ	χ_r^2
Brana	$0,20^{+0,10}_{-0,10}$	$0,02^{+0,01}_{-0,01}$	1,14

Tabela 4.6: Melhores valores estimados para os parâmetros livres.

A partir dos valores estimados para as densidades, temos que $\Omega_\Lambda = 0,78 \pm 0,1$. Podemos perceber que o valor dos parâmetros Ω_m e Ω_Ξ modificaram-se em relação aos resultados do Supernova Cosmology Project, com o aumento do número de dados que incluem supernovas com red shift mais altos. Os dados e curva de ajuste para os valores dos parâmetros estimados estão ilustrados nas Figuras seguintes.

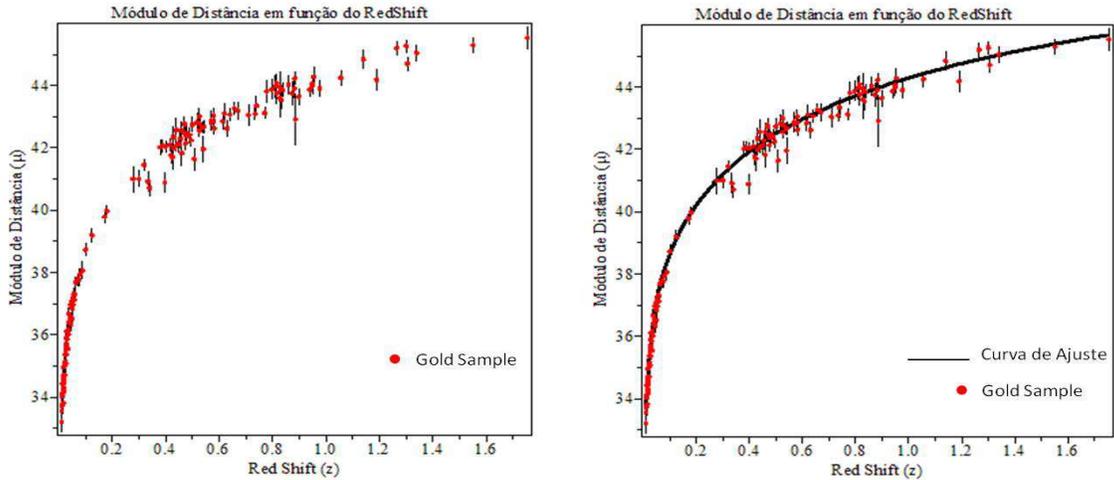


Figura 4.10: Dados observados e Curva de ajuste (Brana) - Gold Sample.

Para esse conjunto de dados o valor do parâmetro de aceleração é $q = -0,64 \pm 0,16$.

Legacy Survey

Para o conjunto de dados pelo grupo do Legacy Survey, o melhores valores dos parâmetros livre estão expressos na tabela que segue.

Assim, temos que $\Omega_\Lambda = 0,76 \pm 0,13$. A curva de ajuste juntamente com os dados observados são:

Modelo	Ω_m	Ω_Ξ	χ_r^2
Brana	$0,23^{+0,13}_{-0,13}$	$0,01^{+0,03}_{-0,03}$	1,004

Tabela 4.7: Melhores valores estimados para os parâmetros livres.

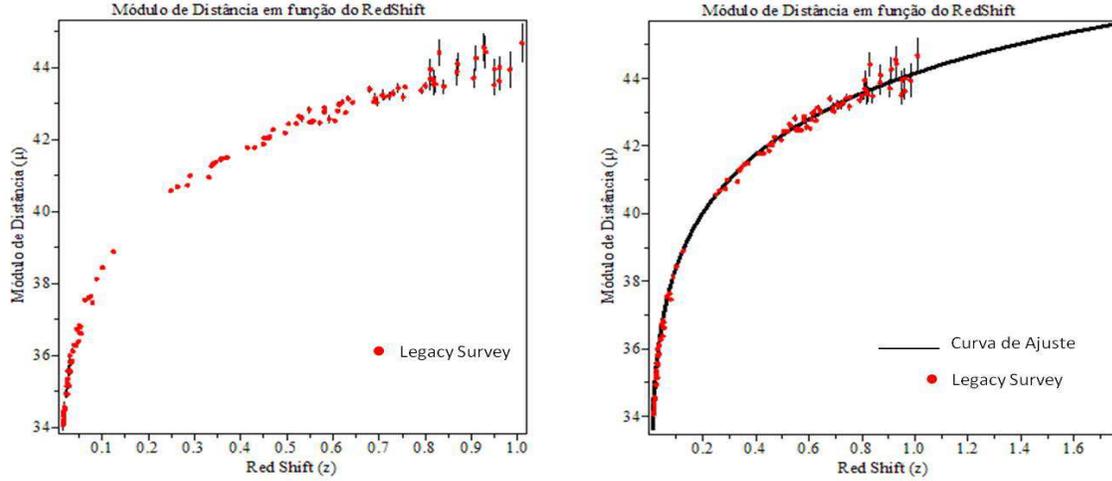


Figura 4.11: Dados observados e Curva de ajuste (Brana) - Legacy Survey.

Para o conjunto de dados do Legacy Survey o parâmetro de desaceleração possui o valor $q = -0,62 \pm 0,17$.

ESSENCE

A procedimento de minimização do χ^2 para os dados compilados pela equipe do ESSENCE resulta nos valores estimados para os parâmetros expostos na tabela que segue:

Modelo	Ω_m	Ω_Ξ	χ_r^2
Brana	$0,23^{+0,08}_{-0,08}$	$0,01^{+0,01}_{-0,01}$	0,66

Tabela 4.8: Melhores valores estimados para os parâmetros livres.

Para esses valores, obtemos $\Omega_\Lambda = 0,76 \pm 0,08$. Com os valores estimados, temos que o valor do parâmetro de desaceleração para esse conjunto de dados é $q = -0,62 \pm 0,12$. A curva de ajuste está ilustrada na Figura (4.12)

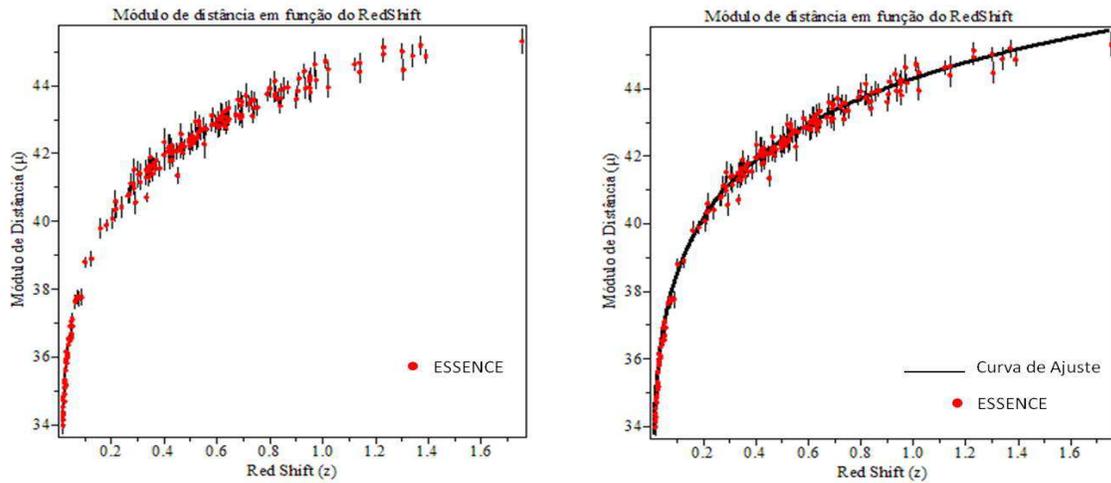


Figura 4.12: Dados observados e Curva de ajuste (Brana) - ESSENCE.

Pudemos perceber que os valores estimados para o parâmetro Ω_m tendem a reproduzir os valores do modelo Λ CDM à medida que inserimos uma maior quantidade de observações e que entre elas possuam um maior número de supernovas com red shifts altos. Pelos resultados, podemos inferir que à medida que isso acontece o parâmetro de densidade de energia associado à tensão da brana torna-se cada vez menor e como consequência temos que os efeitos da dimensão extra tendem a se tornar cada vez menores nesse contexto.

Capítulo 5

Considerações Finais

O nosso objetivo neste trabalho foi analisar o modelo de brana com base nos dados da radiação emitida pelas supernovas que, de acordo com o modelo Λ CDM, sugerem que o Universo está numa fase de expansão acelerada. Para isso, buscamos escrever a equação de Friedmann modificada, Eq.(3.84), que nos permite estudar a dinâmica do Universo no contexto do modelo de branas. Assim como procedemos no caso da cosmologia padrão, reescrevemos essa equação em termos dos parâmetros de densidade $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, Eq.(4.11), e obtivemos um parâmetro extra que foi a densidade de energia associada à tensão da brana (Ω_Ξ) .

Dentro do modelo de brana, $(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_\Xi)$ são parâmetros livres que devem ser estimados com base nos dados observados e a partir de procedimentos estatísticos. Para realizar essa estimativa elaboramos um algoritmo na linguagem de programação Maple que nos forneceu os melhores valores daqueles parâmetros dentro da estatística χ^2 .

Com o fim de testarmos a validade do nosso algoritmo, o aplicamos à equação de Friedmann do modelo padrão. Considerando o Universo como tendo curvatura espacial nula, Eq.(4.2), estimamos os parâmetros de densidade de energia para diferentes conjuntos de dados (Gold Sample, Legacy Survey, ESSENCE, Supernova Cosmology Project), que nos dão a relação entre red shift e distância de luminosidade de várias supernovas do tipo Ia. Os valores estimados a partir do nosso algoritmo, reproduziram os resultados encontrados na literatura para cada conjunto de dados. Calculamos, também, o parâmetro de desaceleração e verificamos que os resultados obtidos favorecem a idéia de que o Universo está numa fase

de expansão acelerada, como está bem estabelecido no modelo Λ CDM.

Do mesmo modo procedemos para o modelo de brana. A partir da equação de Friedmann modificada, Eq.(4.11), pudemos estimar os parâmetros de densidade usando o nosso algoritmo. Para os conjuntos de dados já mencionados, obtivemos os valores: $(\Omega_m = 0, 20_{-0,10}^{+0,10}, \Omega_\Lambda = 0, 78_{-0,10}^{+0,10}, \Omega_\Xi = 0, 02_{-0,01}^{+0,01})$ para o Gold Sample; para o Legacy Survey obtivemos $(\Omega_m = 0, 23_{-0,13}^{+0,13}, \Omega_\Lambda = 0, 76_{-0,13}^{+0,13}, \Omega_\Xi = 0, 01_{-0,03}^{+0,03})$; $(\Omega_m = 0, 23_{-0,08}^{+0,08}, \Omega_\Lambda = 0, 76_{-0,08}^{+0,08}, \Omega_\Xi = 0, 01_{-0,01}^{+0,01})$ para o grupo do ESSENCE e para o Supernova Cosmology Project obtivemos $(\Omega_m = 0_{-0,08}^{+0,08}, \Omega_\Lambda = 0, 92_{-0,09}^{+0,09}, \Omega_\Xi = 0, 08_{-0,08}^{+0,06})$.

Para o parâmetro de desaceleração, obtivemos os seguintes resultados: $(q = -0, 76_{-0,19}^{+0,19})$ para o Gold Sample; Legacy Survey $(q = -0, 62_{-0,17}^{+0,17})$; $(q = -0, 62_{-0,12}^{+0,12})$ para o grupo ESSENCE e para o Supernova Cosmology Project $(q = -0, 64_{-0,16}^{+0,16})$. Pudemos perceber, portanto, que o modelo de brana também nos sugere uma fase atual acelerada para o Universo.

Os valores dos parâmetros de desaceleração estimados para o modelo Λ CDM foram menores do que os estimados para o modelo de brana. Como discutimos, o principal protagonista para esse resultado é a presença da densidade de energia associada à tensão da brana que possui sua origem na admissão de uma dimensão espacial extra.

Pela expressão do parâmetro de densidade associado à tensão da brana (4.14), podemos perceber que quanto menor for esse parâmetro maior será a tensão na brana e menores os efeitos da dimensão extra. Como os resultados do modelo de brana, aqui obtidos, se aproximam dos resultados do modelo Λ CDM, então podemos dizer que os dados referentes à observação das supernovas sugerem que a tensão da brana é suficientemente alta a ponto de tornar pequenos os efeitos da dimensão extra sobre o atual período cosmológico.

No entanto, devemos destacar, que nossas conclusões são todas preliminares já que nos valem apenas dos dados observacionais das supernovas. Para podermos ter uma melhor estimativa dos parâmetros de densidades e do parâmetro de desaceleração necessitaríamos estender nossa análise buscando incluir os dados observacionais relativos à oscilação acústica de bárions e da radiação cósmica de fundo que, juntamente com as observações das supernovas, constituem os principais testes observacionais para os modelos cosmológicos atualmente. Uma outra proposta de estudo é usar estes testes observacionais para o modelo de brana com

espessura no qual podemos ter algum efeito relevante devido à espessura da brana.

Bibliografia

- [1] GAROTI, H. **As quatro forças fundamentais da natureza**. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20032/Humberto/pagina1.html>. Acessado em 18 Julho de 2011.
- [2] DUFF, M. J. **Kaluza-Klein Theory in Perspective**. Stockholm 1994. The Oskar Klein centenary 22 e-Print: hep-th/9410046.
- [3] ARKANI-HAMED, N., DIMOPOULOS, S., DVALI, G. **The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter**. Phys.Lett.B 429 263, 1998.
- [4] RANDALL, L., SUNDRUM, R., Phys. **Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension**. Rev. Lett.83, 3370, 1999.
- [5] RANDALL, L., SUNDRUM, R., Phys. **An Alternative to Compactification**. Rev. Lett.83, 4690, 1999.
- [6] RIESS, A.G. **Observacional evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant**. The astronomical Journal, 116:1009-1038, 1998.
- [7] RIESS, A.G. **TYPE Ia SUPERNOVA DISCOVERIES AT $Z > 1$ FROM THE HUBBLE SPACE TELESCOPE: EVIDENCE FOR PAST DECELERATION AND CONSTRAINTS ON DARK ENERGY EVOLUTION**. The Astrophysical Journal , 607:665687, 2004.
- [8] PERLMUTTER, S. et.al. **MEASUREMENTS OF Ω and Λ from 42 High-RedShift Supernovae**. arXiv: astro-ph/9812133v1, 1998.

- [9] ASTIER, P. et.al. **The Supernova Legacy Survey: Measurement of Ω_M , Ω_Λ and w from a First Year Data Set.** ArXiv:astro-ph/0510447v1 14 Oct 2005.
- [10] LANGLOIS, D. et.al. **Non conventional cosmology from a brane universe.** arXiv:hep-ph/9905012v2, 1999.
- [11] LANGLOIS, D. et.al. **Brane cosmology evolution in a bulk with cosmological constant.** arXiv:hep-th/9910219v2, 2000.
- [12] LANGLOIS, D. et.al. **Cosmological equations for a thick brane.** arXiv:gr-qc/0202089v1 25 Feb 2002.
- [13] SZYDLOWSKI, M. et.al. **Brane universe tested against astronomical data.** arXiv:astro-ph/0212100v3, 2006.
- [14] ALBUQUERQUE, A. **Um estudo sobre dimensão extras.** Dissertação de mestrado, Campina Grande, 2009.
- [15] CARROLL, S. M. **Lectures Notes on General Relativity** . Institute for Theoretical Physics, California, 1997.
- [16] HOYLE, C.D. et.al. **Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for large extra dimensions.** Phys. Rev. Lett. 86, 1418 (2001) [hep-ph/0011014].
- [17] RUBAKOV, V.A.SHAPOSHNIKOV, M. E. **Do We Live Inside a Domain Wall?** Phys. Lett. B 125, 139, 1983.
- [18] SAKURAI, J.J. **Advanced Quantum Mechanics.** Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1985.
- [19] RALF, N. **Equações de campos efetivas induzidas em branas pela imersão.** Dissertação de mestrado, Campina Grande, 2011.

- [20] HOFF, J.M. **Compactificação alternativa de dimensões extras em gravitação de Brans-Dicke**. Tese de Doutorado. São Paulo, 2009.
- [21] WU, K. K. S., LAHAV, O., REES, M. J. **The large-scale smoothness of the Universe**. *Natur*, 397, 225, 1999.
- [22] DODELSON, S. **Modern Cosmology**. 2003.
- [23] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. John Wiley Sons, Inc. 1972.
- [24] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's general relativity**. Oxford University Press Inc. New York, 1998.
- [25] ISHIDA, E. **Aceleração cósmica: aspectos fenomenológicos e estatísticos**. Tese de doutorado, Rio de Janeiro, 2010.
- [26] STEINHARDT, P. J., WANG, L., ZLATEV, I., 1999, *PhRvD*, 59, 123504.
- [27] PIGOZZO, C.B.M. **Teste observacionais em modelos cosmológicos com interação vácuo-matéria**. Dissertação de mestrado, Salvador, 2008.
- [28] Medindo as Estrelas. Disponível em: http://www.on.br/site_edu_dist_2011/pdf/modulo2/medindo_as_estrelas.pdf. Acessado em 09 Nov. 2011.
- [29] MISNER, C.W. et.al. **Gravitation**. W.H.Freeman Company. São Francisco, 1973.
- [30] DAHIA, F. **Relatividade Geral II**. Notas de aula (Não publicada).
- [31] OLIVEIRA, A. **A morte e a vida nos céus**.
Disponível em: <http://cienciahoje.uol.com.br/colunas/fisica-sem-misterio/a-morte-e-a-vida-nos-ceus>. Acessado em: 09 Novembro 2011.
- [32] Supernovas. Disponível em: http://www.on.br/site_edu_dist_2011/site/conteudo/modulo4/cap13-destino-estrelas-grande-massa/supernovas.html. Acessado em: 09 Nov. 2011.

- [33] KAKU, M. **Hiperespaço**. Rocco. Rio de Janeiro, 1993.
- [34] NAVARRO, I., SANTIAGO, J. **Unconvencional cosmology on the thick brane**. arXiv:hep-th/0505136v2, 2005.
- [35] MANSOURI, R. et.al. **Generalized Friedmann equations for a finite thick brane**. arXiv:gr-qc/0605094v1, 2006.
- [36] LEIBUNDGUT, B. **Frontiers in Cosmology**, ed: Blanchard A. Signore M., 195, Springer, 2005, Dordrecht.
- [37] FILIPPENKO, A.V. **OPTICAL SPECTRA OF SUPERNOVAE**. ARA&A, 1997.
- [38] JHA, S., et.al. **Improved Distances to Type Ia Supernovae with Multicolor Light-Curve Shapes: MLCS2k2**. ApJ, 659, 122, 2007.
- [39] GUY, J., et.al. **SALT2: Using Distant Supernovae to Improve the use of type Ia Supernovae as Distance Indicators**. A&A, 466, 11, 2007.
- [40] KOMATSU, E., et.al. **Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation**. ApJS, 180, 330, 2009.
- [41] DEZFULI, H. et.al. **Bayesian Inference for NASA Probabilistic Risk and Reliability Analysis**. Project Manager, NASA Headquarters June 2009.
- [42] GREGORY, P.C. **Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences**. Cambridge University Press. Cambridge, 2005.
- [43] SIVIA, D.S. **Data analysis. A Bayesian tutorial**. Oxford University Press. New York, 2006.
- [44] MapleSoft. Disponível em: <http://www.maplesoft.com/applications/category.aspx?cid=1335>. Acessado em: 12 Set. 2011.
- [45] http://braeburn.pha.jhu.edu/~ariess/R06/sn_sample.