



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Propriedades Termodinâmicas da Matéria de Mésons $D - \bar{D}$

Morgana Lígia de Farias Freire

CAMPINA GRANDE
- Agosto 2009 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Propriedades Termodinâmicas da Matéria de Mésons $D - \bar{D}$

Morgana Lígia de Farias Freire

CAMPINA GRANDE

- Agosto 2009 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Propriedades Termodinâmicas da Matéria de Mésons $D - \bar{D}$

Morgana Lígia de Farias Freire

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- Agosto 2009 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

F886p Freire, Morgana Lígia de Farias
Propriedades termodinâmicas da matéria de mésons D - \bar{D} /
Morgana Lígia de Farias Freire.— Campina Grande, 2009.
55 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.
Referências.
Orientador: Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva.

1. Mésons 2. Hádrõs Exóticos 3. Campo Médio - Teoria
4. Observáveis Termodinâmicos I. Título.

CDU 539.126(043)

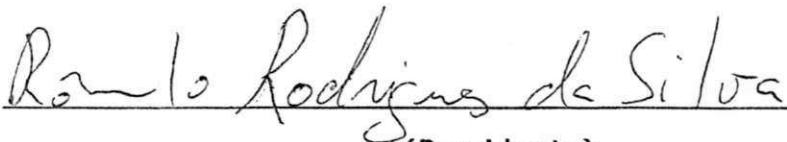


MORGANA LÍGIA DE FARIAS FREIRE

PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DA MATÉRIA DE MÉSONS D-D

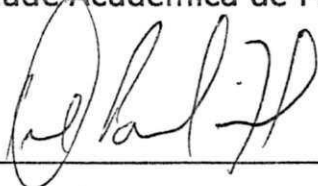
Dissertação aprovada em 27/08/2009

BANCA EXAMINADORA



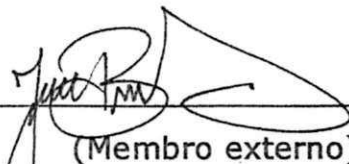
(Presidente)

Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Paulo Sérgio Rodrigues da Silva
Departamento de Física - UFPB



(Membro externo)

Prof. Dr. João Batista da Silva
Unidade Acadêmica de Educação - UFCG

Aos meus Avós e a minha Sogra “in memoriam”.
Aos meus Pais.
Aos meus Familiares.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, pois sem Ele, tenho a certeza que não haveria sentido a vida.
- Ao Professor Dr. Rômulo Rodrigues da Silva, pela orientação, sugestões, estímulos e competência na condução deste trabalho.
- Aos Professores da Unidade Acadêmica de Física que contribuíram com a minha formação.
- A Coordenação da Pós-graduação, em particular, ao Prof. Francisco de Assis de Brito pelo seu constante incentivo e pela sua dedicação com que administra o curso.
- Aos Professores Daisy Martins, Francisco Brito, João Evangelista e Ricardo Buriti que compõem a administração da Unidade Acadêmica de Física, e que são peças fundamentais para a manutenção e crescimento deste.
- Aos Professores e Funcionários do Departamento de Física da Universidade Estadual da Paraíba pelo apoio para o término deste trabalho.
- A Francisco meu leal companheiro... Os momentos difíceis são amenizados com a sua presença ...
- Aos Meus Familiares pelo apoio, confiança e incentivo.
- Aos Colegas de Pós-graduação e Funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.
- À CAPES/PROCAD pelo suporte financeiro.
- A Todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Investigamos a matéria de mésons $D - \bar{D}$ numa abordagem de troca dos mésons σ e ω usando a teoria relativística de campo médio de Walecka. Estudamos o caso em que o potencial químico é zero, e nesse regime o campo $\langle \omega^0 \rangle = 0$ e o campo $\langle \sigma \rangle$ obedece a uma equação autoconsistente. A solução numérica para o campo $\langle \sigma \rangle$ exhibe a existência de uma temperatura crítica de 700 MeV, em que para temperaturas acima desse valor o campo $\langle \sigma \rangle$ torna-se complexo, revelando uma transição de fases. Também investigamos a matéria hadrônica a temperaturas mais baixas, em que foram calculados vários observáveis termodinâmicos, como: calor específico, energia por par, pressão e entropia. Dentre esses observáveis, o comportamento do calor específico com a temperatura, mostra um platô em torno do valor 2, que pode ser interpretado como a formação de um estado molecular $D - \bar{D}$, conhecido também por hádron exótico.

ABSTRACT

We study the mesons matter $D - \bar{D}$ in the framework of σ and ω meson exchange model using Walecka's mean field theory. We choose the chemical potential as zero then we get $\langle\omega^0\rangle = 0$ and the field $\langle\sigma\rangle$ is given by a self-consistent equation. The numerical result for the $\langle\sigma\rangle$ field exhibits a critical temperature around 700 MeV, where for temperatures above of that value the field $\langle\sigma\rangle$ becomes a complex number. We interpret these results an indication that systems exhibits a phase transition. We also investigate the mesons matter $D - \bar{D}$ at low temperature. We find specific heat, energy per pair, pressure and entropy. Among them, the behavior of the specific heat with the temperature shows a plateau around the value 2, in which it could be interpreted as the formation of a molecular state $D - \bar{D}$ also known by exotic hadron.

Sumário

1	Introdução	1
2	Introdução à Física de Hádrons	4
2.1	Algumas Características do Modelo Padrão	4
2.2	Modelo de Walecka	7
2.3	Assinaturas do Plasma de Quarks e Glúons	7
2.4	Mésons Exóticos em Teoria de Campo Médio	8
3	Formalismo Teórico	10
3.1	O Modelo	10
3.2	Conexão com a Mecânica Estatística	15
3.3	Equação auto-consistente para o Campo Sigma	16
3.4	Observáveis Termodinâmicos	18
4	Resultados	19
5	Conclusão e Perspectivas	27
A	Operadores de Criação e Aniquilação	29
B	Determinação do Operador Número	33
C	Álgebra com o Operador Número	35
D	Determinação da Hamiltoniana	37
E	Conexão da Teoria de Campos com a Mecânica Estatística	40
F	Método de Gauss-Laguerre	45

Lista de Figuras

1.1	Diagrama esquemático da localização de cada um dos experimentos ao longo da circunferência do acelerador LHC.	2
2.1	Diagrama de transição de fases da QCD.	8
4.1	Comportamento da massa efetiva (m_{eff}) em função da temperatura (T) com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$	20
4.2	Comportamento da densidade de pares (η) em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$	21
4.3	Comportamento da densidade de energia (\mathcal{E}) em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$	22
4.4	Comportamento da pressão (P) em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$	22
4.5	Comportamento da entropia específica (s) em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$	23
4.6	Comportamento da energia por par (\mathcal{E}') em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$	24
4.7	Comportamento da razão PV/U em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$	24
4.8	Comportamento da capacidade calorífica (C_v) em função da temperatura (T) com a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$	25
4.9	Comportamento de todas as variáveis termodinâmicas estudadas neste trabalho normalizadas para matéria mesônica $D - \bar{D}$ em função da temperatura (T)	26

Capítulo 1

Introdução

Em setembro de 2009, está programado para entrar em operação o maior acelerador de partículas já construído pelo homem, conhecido com o “grande colisor de hádrons” ou na sigla em inglês, o LHC [1, 2], e está localizado no Centro Europeu de Pesquisas Nucleares ou na sigla em francês, o CERN, perto de Genebra, Suíça fazendo fronteira também com a França. Este tem sido um exemplo de sucesso de colaboração internacional, com pesquisadores de várias nacionalidades, desde sua fundação em 1954. No LHC os prótons irão viajar numa velocidade de aproximadamente 99,9999991% da velocidade da luz em um anel circular de 27 km e com uma energia do centro de massa cerca de 7,0 TeV por partícula [3, 4]. Para se ter uma idéia dessa magnitude de energia, a partícula alfa usada por Rutherford na descoberta do núcleo atômico, em 1913, tinha uma energia de 6,5 MeV [5].

O LHC permitirá testar a matéria nuclear em condições extremas de energia e temperatura, semelhantes às condições ocorridas nos primeiros instantes após o Big Bang. Uma das grandes expectativas em torno do LHC consiste na descoberta de um sinal claro do surgimento do plasma de quarks e glúons (QGP em inglês). O LHC possui vários detectores espalhados em seu anel central (Figura 1.1), cada um correspondente a experimentos independentes. São eles: (1) ALICE (A Large Ion Collider Experiment) que consiste no estudo da possível formação do QGP em colisões de íons pesados; (2) ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS) é o maior experimento do LHC, destina-se a investigar diversas questões da física teórica, entre elas, detectar e identificar o bóson de Higgs; (3) CMS (Compact Muon Solenoid) como o próprio nome sugere, é um experimento destinado à detecção de múons, compartilha das mesmas

investigações do experimento ATLAS, todavia, com o uso de técnicas de detecção diferenciadas e (4) LHCb (Large Hadron Collider beauty) consiste em investigar o efeito de violação de CP (paridade e conjugação de carga) no decaimento das partículas que contêm o quark b.

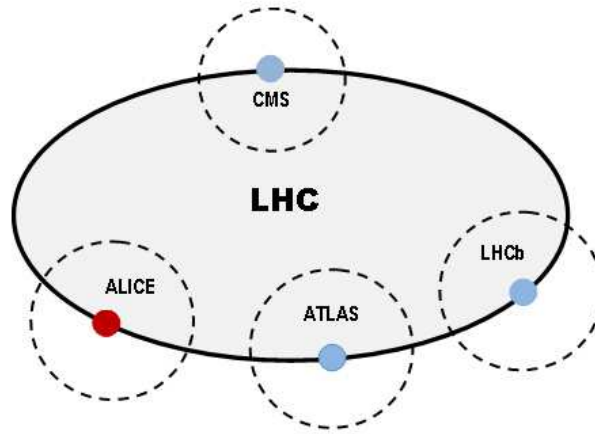


Figura 1.1: Diagrama esquemático da localização de cada um dos experimentos ao longo da circunferência do acelerador LHC.

Um outro tema atual em física de hádrons consiste no estudo dos hádrons exóticos, com uma evidência experimental mais forte em favor dos mésons exóticos. Esses hádrons fogem da classificação usual proposta por Gell-Mann [6] para os bárions e mésons, em que os bárions seriam estados de três quarks e os mésons seriam estados de apenas dois quarks. Esses novos hádrons só podem ser entendidos como estados de múltiplos quarks. As configurações mais estudadas até o momento são: cinco quarks para os bárions (pentaquark) e estados de quatro quarks para os mésons (tetraquark). Desde 2003, a espectroscopia desses novos hádrons vêm se ampliando, em destaque para descoberta dos novos mésons chamados de: X, Y e Z que têm sido descobertos nos decaimentos de mésons B [7, 8, 9, 10]. As partículas $X(3872)$, $Y(4010)$ e $Z^+(4430)$ já foram estudadas usando configurações de quatro quarks em diversos formalismos, entre eles: as Regras de Soma da QCD [11, 12, 13, 14, 15] e QCD na rede [16, 17, 18], em que não foi relatado problema algum na sustentação teórica desses novos mésons.

Uma outra configuração possível para esses mésons exóticos consiste em tratá-los como estados ligados de mésons, situação análoga ao que ocorre com o dêuteron, que é um estado ligado de um nêutron com um próton. O uso dessa molécula de mésons foi

inicialmente estudado por Törnqvist em 1991 [19, 20, 21], que devido a semelhança com o dêuteron, esses mésons exóticos foram chamados de deusons. Em 2007, essa idéia foi aplicada no estudo da $Z^+(4430)$ por Xiang Liu et al. [22, 23], tratando-a como uma molécula $D^* - D_1$, cuja a interação é mediada através da troca de mésons pi e sigma, em que o potencial de interação é estimado através da amplitude de espalhamento dos constituintes da $Z^+(4430)$. Os resultados para a $Z^+(4430)$ usando apenas píons [22] como mediadores revelaram que a $Z^+(4430)$ não existe, porém com a introdução de uma interação mais realística que envolve a troca de mésons sigma [23], revelou um sinal a favor da $Z^+(4430)$.

Em 1974, Dirk Walecka [24, 25] desenvolveu uma teoria de campos relativística para a interação dos nucleons via troca dos mésons sigma e ômega. Essa teoria foi chamada de hadrodinâmica quântica (QHD). Nessa teoria, os mésons mediadores são tratados como campos clássicos, dentro de uma aproximação chamada teoria de campo médio (MFT). Com esta teoria, Walecka calculou muitos parâmetros de interesse da física nuclear, por exemplo: a energia de ligação por nucleon e a incompressibilidade. Atualmente, têm se usado essa teoria para calcular a temperatura de transição de fase da matéria de bárions para o plasma de quarks e glúons [26, 27, 28].

Sendo assim, objetivamos estudar uma matéria de mésons $D-\bar{D}$ numa abordagem de troca de mésons usando a teoria relativística de campo médio de Walecka. Calculamos vários observáveis termodinâmicos e foi obtida uma temperatura crítica, que pode ser interpretada como uma transição de fase para o plasma de quarks e glúons.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, apresentamos uma breve descrição da física de hádrons. Apresentamos o modelo de Walecka e duas aplicações do nosso trabalho: a assinatura do plasma de quarks e glúons e o estudo de mésons exóticos. No capítulo 3, apresentamos o formalismo teórico, para a matéria de mésons $D - \bar{D}$. No capítulo 4, apresentamos os resultados para a matéria de mésons a temperatura finita. No último capítulo, apresentamos a conclusão do trabalho e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Introdução à Física de Hádrons

Neste capítulo serão descritos alguns passos importantes para a construção do Modelo Padrão, algumas características da cromodinâmica quântica e das teorias efetivas que descrevem os hádrons.

2.1 Algumas Características do Modelo Padrão

Até meados de 1940 acreditava-se que as únicas partículas fundamentais eram apenas quatro: o próton, o nêutron, o elétron e o fóton. Mas já havia alguns problemas com esse limitado conjunto de partículas fundamentais. A descoberta do núcleo atômico por Rutherford deixou claro que existe uma nova força na natureza que descreve a interação entre os prótons e nêutrons, a chamada força forte.

Em 1935, Yukawa foi o primeiro a formular uma teoria “simples” para as forças nucleares, baseado na troca de uma nova partícula, que ele chamou de méson pi [29, 30]. O nome méson está relacionado ao fato que a massa dessa partícula prevista por Yukawa possuía uma massa intermediária entre o elétron e o nêutron, de 130 MeV. Apenas 10 anos mais tarde, a partícula predita por Yukawa foi finalmente descoberta nos experimentos envolvendo raios cósmicos por Lattes e colaboradores [31, 32].

Na década de 1950, com o avanço das pesquisas em raios cósmicos e o surgimento dos primeiros aceleradores de partículas, foram observadas dezenas de outras partículas e o número de descobertas não parava de crescer. Era uma variedade tão grande que uma classificação tipo a feita por Mendeleev para os elementos químicos era necessária de ser feita também na física de partículas. A teoria mais bem sucedida para entender

esse “zoológico” de partículas foi proposta por Gell-Mann [6] e Zweig [33, 34] em 1961, que explicavam todas as partículas que eram sensíveis a interação forte, chamadas de hádrons, como sendo composta de constituintes ainda mais fundamentais, os quarks. Na época, Gell-Mann elaborou sua teoria com apenas três quarks: u (up), d (down) e s (strange). Nessa teoria, o nêutron é um estado ligado de um quark u e dois quarks d , o próton é um estado de três quarks duu e o méson π^+ é um estado de um antiquark \bar{d} com um quark u .

O Modelo Padrão (MP) resume todo o nosso entendimento sobre as interações fundamentais da natureza excluindo a gravitação. As forças que fazem parte do MP são: eletromagnética, fraca e a forte. A força forte é descrita pela cromodinâmica quântica (QCD) que é uma teoria que descreve a interação entre os quarks pela troca de glúons. Essa teoria possui uma característica importante, a constante de acoplamento decresce com o aumento da energia, tornando-a tratável no regime de altas energias. Para energias mais baixas é mais apropriado usar as teorias efetivas, que levam em conta apenas os graus de liberdade dos hádrons.

Na Tabela 2.1, apresenta-se uma síntese de todas as partículas fundamentais segundo o modelo padrão [35]. Na primeira coluna temos que as partículas são separadas segundo a sua estatística. Partículas com spin semi-inteiro denominadas de férmions e partículas com spin inteiro que são os bósons. Os férmions têm a propriedade de não compartilhar do mesmo estado quântico, enquanto os bósons podem compartilhar sem limitação do mesmo estado quântico. Na segunda coluna temos a coleção de todas as partículas que são consideradas como fundamentais pelo MP. No conjunto dos férmions, temos os léptons, três com cargas negativas (e^- , μ^- e o τ^-) e três sem carga (ν_e , ν_μ e ν_τ), que sofrem o efeito das forças eletromagnética (exceção, para ν_e , ν_μ e ν_τ , os neutrinos) e fraca e os quarks que interagem através da QCD. No conjunto dos bósons, temos os glúons, que são os mediadores da força forte, Z e W, que mediam a força fraca, e os fótons que mediam a interação eletromagnética. O MP prevê alguns processos interessantes: por exemplo, a explicação do decaimento *beta* do nêutron, que é explicado pelo decaimento do quark d em u mais W^- . Outro processo interessante consiste na materialização de raios gamma, via o processo: $e^+e^- \rightarrow J/\psi$.

Tabela 2.1: Sinopse das Partículas Elementares.

Segundo a Estatística	Partículas de Matéria			
	Nomes	Sabores ou Variedades	Carga de Cor	Observações
Férmions Constituintes da matéria spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...	LÉPTONS	Elétron (e^-) Múon (μ^-) Tau (τ^-) Neutrino do Elétron (ν_e) Neutrino de Múon (ν_μ) Neutrino do Tau (ν_τ)	----- -----	Gerações de Partículas Primeira: e^- e ν_e Segunda: μ^- e ν_μ Terceira: τ^- e ν_τ Gerações de Antipartículas Primeira: e^+ e $\bar{\nu}_e$ Segunda: μ^+ e $\bar{\nu}_\mu$ Terceira: τ^+ e $\bar{\nu}_\tau$
		QUARKS	Up (u) Charm (c) Top (t) Down (d) Strange (s) Bottom (b)	Azul Verde Vermelho
Bósons Portadores de força spin = 0, 1, 2, ...	Partículas Mediadoras			Observações
	Nomes	Tipos de Interação		
	GLÚONS (g)	Forte (g)		Fundamental As partículas sujeitas são quarks e também os glúons
				Residual As partículas sujeitas são hádrons. Os hádrons não são fundamentais, são constituídos de quarks
PARTÍCULAS Z^0 e W^\pm	Fraca		Eletrofraca As partículas sujeitas são quarks e léptons.	
FÓTONS (γ)	Eletromagnética		Eletromagnética As partículas sujeitas são eletricamente carregadas A atuação é na carga elétrica	

2.2 Modelo de Walecka

Como já vimos na seção anterior os hádrons são partículas constituídas por quarks. Se um hádron possuir número ímpar de quarks, esse sistema resulta num sistema de spin semi-inteiro, ou seja um férmion. Esse tipo de hádron é chamado de bárion. Para o caso do hádron possuir número par de quarks, eles são chamados de mésons.

Analogamente ao que ocorre na QCD, os bárions interagem via troca de mésons. Essa força é a força nuclear residual, descrita por uma teoria efetiva. Também é permitida uma interação entre mésons por essa força residual.

Em 1974 John Dirk Walecka [24, 25] propôs um tratamento baseado em teoria de campos relativística para a descrição do comportamento de núcleos atômicos. Portanto se tratava de um formalismo que descrevia o comportamento de um sistema nuclear de muitos corpos. Este formalismo ficou conhecido como QHD-I (Quantum Hadrodynamics - I), ou simplesmente, modelo de Walecka. A finalidade era descrever a interação entre os nucleons através da troca de dois mésons, o méson escalar σ e o méson vetorial ω .

Existem duas subdivisões das QHD, que diferencia pelo tipo de interação admitida no sistema. Na QHD-I, que foi usada por Walecka, consideramos apenas os mésons σ e ω . Na QHD-II [36, 37, 38] temos a presença dos mésons σ , ω , π e ρ . Atualmente, muitas QHDs têm sido propostas, as quais incluem mésons estranhos [39] e constantes de acoplamento que dependem da densidade [40, 41].

2.3 Assinaturas do Plasma de Quarks e Glúons

A QCD na rede prevê [42] que para altas temperaturas e densidades de energia, a matéria hadrônica sofre uma transição de fase para um plasma de quarks e glúons (QGP). Neste estado os quarks e glúons encontram-se desconfinados, formando um sistema em equilíbrio termodinâmico [43].

A Figura 2.1 apresenta o diagrama de fases da QCD, que relaciona a dependência da temperatura em função do potencial químico μ para a matéria de quarks. O potencial químico está relacionado com a densidade líquida de quarks (ou seja, a densidade

de quarks menos densidade de antiquarks). A linha sólida é a linha de transição de fase da matéria hadrônica para o QGP. O potencial químico próximo de zero e altas temperaturas é o estágio encontrado nas colisões entre íons pesados relativísticos [44, 45, 46]. A região onde $\mu = 0$ e altas temperaturas são semelhantes as condições do universo primordial.

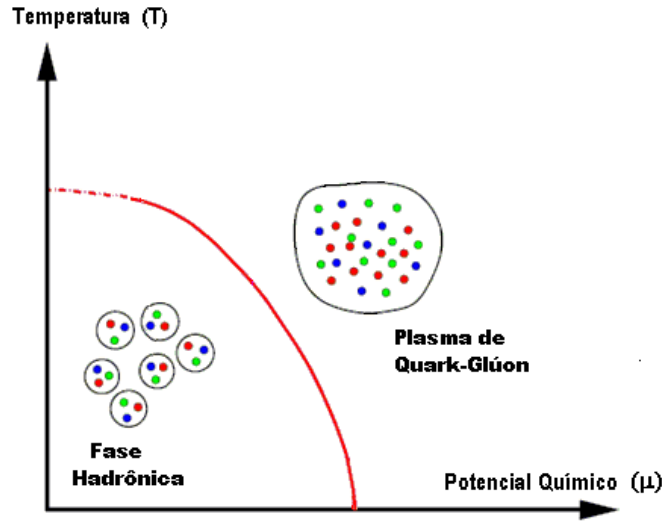


Figura 2.1: Diagrama de transição de fases da QCD.

2.4 Mésons Exóticos em Teoria de Campo Médio

Segundo Gell-Mann, os mésons são compostos por um par de quark-antiquark $q\bar{q}$. Entretanto, a QCD não proíbe a existência de outras estruturas mais complexas, com mais de um par quark-antiquark. Esses mésons que possuem mais de um par de quark-antiquark são denominados de exóticos. Atualmente, os estados mais estudados são os tetraquarks e os estados moleculares.

Em teoria de campo médio, estudamos um sistema de muitas partículas ligadas cuja interação é mediada pelos mésons σ e ω . O tratamento termodinâmico desse sistema nos leva a vários observáveis que ajudam a entender a possível formação de “estados moleculares”. Para o tratamento à temperatura finita, um bom observável é o calor específico, que revela os graus de liberdade moleculares com o aumento da

temperatura. À temperatura zero, podemos estimar a massa da molécula hadrônica através da fórmula semi-empírica de massa de Bethe e Weizsäcker Eq.(2.1), baseada no modelo da gota líquida. No caso da matéria hadrônica, estima-se a energia de ligação por partícula, a_V , a energia de superfície para a matéria semi-infinita, a_S , e termo devido as interações elétricas, a_C . Outros termos menos relevantes também estão presentes nesse cálculo, como a energia de assimetria a_I e o termo $\delta(A)$ [47]. A fórmula é dada pela expressão:

$$E = a_V A + a_S A^{2/3} + a_C Z^2 A^{-1/3} + \dots \quad (2.1)$$

Para a matéria nuclear, podemos usar esta fórmula para prever a energia de ligação para todos os núclídeos e, em especial, podemos prever a energia de ligação do dêuteron, que é o estado molecular associado à matéria nuclear, composto por um próton e um nêutron, fazendo $A=2$.

Capítulo 3

Formalismo Teórico

3.1 O Modelo

O modelo de Walecka [24] foi originalmente aplicado para estudar a interação entre os nucleons através da troca de apenas dois mésons. O méson escalar sem carga chamado de σ responsável pela atração entre os nucleons e o méson vetorial ω^μ responsável pela repulsão entre os nucleons. Para o nosso caso, vamos considerar que os mésons D e \bar{D} interagem via troca desses mesmos mésons, tornando o nosso modelo muito parecido com o modelo original de Walecka.

A densidade lagrangeana para o sistema é dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{livre} + \mathcal{L}^{int}, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L}^{livre} é a parte da lagrangeana referente aos termos livres para cada campo individualmente e \mathcal{L}^{int} é a parte da lagrangeana referente aos termos de interação desse sistema. Expressando estas em termos dos campos, tem-se:

$$\mathcal{L}^{livre} = \mathcal{L}_D^{livre} + \mathcal{L}_\omega^{livre} + \mathcal{L}_\sigma^{livre} \quad (3.2)$$

e

$$\mathcal{L}^{int} = \mathcal{L}_{D\bar{D}\sigma}^{int} + \mathcal{L}_{D\bar{D}\omega}^{int}. \quad (3.3)$$

Adotando o sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$, as expressões das densidades das lagrangeanas livres, para cada campo individualmente, são: a densidade de la-

grangeana livre para campos pseudo-escalares carregados, ou campos complexos,

$$\mathcal{L}_D^{livre} = \frac{1}{2}(\partial_\mu D)(\partial^\mu D^\dagger) - \frac{1}{2}m_D^2 DD^\dagger, \quad (3.4)$$

a densidade de lagrangeana livre para campos escalares sem carga, ou campos reais,

$$\mathcal{L}_\sigma^{livre} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2, \quad (3.5)$$

e a densidade de lagrangeana livre para campos vetoriais,

$$\mathcal{L}_\omega^{livre} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu. \quad (3.6)$$

Onde m_D , m_σ e m_ω são as massa dos mésons: D , σ e ω , respectivamente e $F_{\mu\nu}$ é o tensor antissimétrico, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$.

As duas lagrangeanas de interação obtidas na Ref. [48] são:

$$\mathcal{L}_{D\bar{D}\sigma}^{int} = g_{D\bar{D}\sigma} DD^\dagger \sigma, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}_{D\bar{D}\omega}^{int} = ig_{D\bar{D}\omega} \omega^\mu [D\partial_\mu D^\dagger - (\partial_\mu D)D^\dagger]. \quad (3.8)$$

Sendo $g_{D\bar{D}\sigma}$ e $g_{D\bar{D}\omega}$ as contantes de acoplamento desta teoria e que estão diretamente relacionadas aos vértices $\sigma - DD$ e $\omega - DD$.

Dessa forma, podemos sintetizar o nosso modelo em unidades naturais:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu D)(\partial^\mu D^\dagger) - \frac{1}{2}m_D^2 DD^\dagger - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) \\ & - \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 + g_{D\bar{D}\sigma} DD^\dagger \sigma + ig_{D\bar{D}\omega} \omega^\mu [D\partial_\mu D^\dagger - (\partial_\mu D)D^\dagger]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

As equações de movimento para os campos gerados pela lagrangeana da Eq.(3.9), são:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma = g_{D\bar{D}\sigma} DD^\dagger, \quad (3.10)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \omega^\rho + m_\omega^2 \omega^\rho = -ig_{D\bar{D}\omega} [D\partial^\rho D^\dagger - (\partial^\rho D)D^\dagger] \quad (3.11)$$

e

$$\partial_\mu \partial^\mu D + m_D^2 D = 2g_{D\bar{D}\sigma} D\sigma - 4ig_{D\bar{D}\omega} \omega^\mu \partial_\mu D. \quad (3.12)$$

Para a obtenção da Eq.(3.12) aplicamos o gauge de Lorentz $\partial_\lambda \omega^\lambda = 0$.

Aplicando a teoria de campo médio, nas equações para os mediadores, Eqs.(3.10) e (3.11), onde inicialmente faz-se um “sanduíche” nessas equações com o estado físico que descreve o sistema $|F\rangle$, considerando que os campos médios são estáticos, uniformes e desconsiderando efeitos hidrodinâmicos, $\langle \vec{\omega} \rangle = 0$, temos que estas equações de movimento são transformadas em:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{g_{D\bar{D}\sigma}}{m_\sigma^2} \rho_s \quad (3.13)$$

e

$$\langle \omega^0 \rangle = \frac{g_{D\bar{D}\omega}}{m_\omega^2} \rho_v, \quad (3.14)$$

onde definiu-se $\rho_s = \langle DD^\dagger \rangle$ e $\rho_v = \langle i[(\partial^0 D)D^\dagger - D(\partial^0 D^\dagger)] \rangle$, chamadas respectivamente de densidade escalar e densidade vetorial. Devido ao fato de considerarmos os campos médios como constantes, as densidades devem ser calculadas tomando a média em todo o espaço.

Para a equação de movimento do campo quantizado Eq.(3.12), a teoria de campo médio, impõe que para o campo dos mediadores os mésons σ e ω^μ são substituídos por campos médios, que nos leva à equação:

$$\partial_\mu \partial^\mu D + (m_D^2 - 2g_{D\bar{D}\sigma} \langle \sigma \rangle) D + 4ig_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle \partial_0 D = 0. \quad (3.15)$$

Para resolver a equação de movimento Eq.(3.15), considera-se como solução de teste, a solução de onda plana:

$$D(x) = a_{\vec{k}, E} e^{i(\vec{k}\vec{x} - Et)}. \quad (3.16)$$

Substituindo a Eq.(3.16) na Eq.(3.15), temos:

$$E_\pm(\vec{k}) = 2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle \pm q^0(\vec{k}), \quad (3.17)$$

onde:

$$q^0(\vec{k}) = \sqrt{4g_{D\bar{D}\omega}^2 \langle \omega^0 \rangle^2 + (\vec{k}^2 + m_{eff}^2)}, \quad (3.18)$$

e m_{eff} é denominada massa efetiva, dada por:

$$m_{eff}^2 = m_D^2 - 2g_{D\bar{D}\sigma} \langle \sigma \rangle. \quad (3.19)$$

É interessante notar que a Eq.(3.17) fornece termos de energia negativa, que possui a interpretação, em teoria de campos, como sendo estados de antipartículas. Também é interessante observar que se $\langle \omega^0 \rangle = 0$ e $\langle \sigma \rangle = 0$, obtemos os autoestados de partícula livre relativística [49, 50].

Para o campo do méson D as soluções encontradas, podem ser escritas em termos da superposição dos estados de partículas e antipartículas normalizadas, na seguinte forma:

$$\varphi(\vec{x}, t) = e^{-i2g_{D\bar{D}\omega}\langle\omega^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a(\vec{q})f_q(x) + b^\dagger(\vec{q})f_q^*(x) \right], \quad (3.20)$$

onde $f_q(x) = \frac{e^{-iqx}}{(2\pi)^{3/2}}$ e $qx = q^0x^0 - \vec{k}\vec{x}$.

A partir da solução de $\varphi(\vec{x}, t)$, podemos quantizar a teoria, promovendo $\varphi(\vec{x}, t)$ e o seu momento conjugado $\Pi(\vec{x}, t)$ a operadores e sujeito as regras de quantização canônicas:

$$[\Pi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.21)$$

$$[\Pi^\dagger(\vec{x}, t), \varphi^\dagger(\vec{y}, t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.22)$$

e

$$[\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t)] = [\Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)] = 0. \quad (3.23)$$

Onde $\Pi^0(\vec{x}, t)$ é dado por:

$$\Pi^0(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} = \frac{1}{2} \partial^0 \varphi^\dagger(\vec{x}, t) - ig_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle \varphi^\dagger(\vec{x}, t). \quad (3.24)$$

Dos comutadores acima, obtemos a quantização do sistema (ver Apêndice A):

$$[a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0, \quad (3.25)$$

$$[a(\vec{k}'), a^\dagger(\vec{k})] = 4q^0(\vec{k})\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.26)$$

e

$$[b(\vec{k}'), b^\dagger(\vec{k})] = 4q^0(\vec{k})\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.27)$$

Com ajuda das relações algébricas acima, podemos construir importantes operadores em termos dos operadores de a e b . O operador número de partículas N , é um dos operadores mais importantes da teoria de campos e é definido por:

$$N = \int d^3x J_0(\vec{x}), \quad (3.28)$$

onde $J_0(x) = -i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^\dagger)} \varphi^\dagger \right]$.

Munidos do campo $\varphi(\vec{x}, t)$ e das regras de quantização, o operador N pode ser escrito em termos dos operadores a e b por (ver Apêndice B):

$$N = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \{ a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \}. \quad (3.29)$$

O operador de número possui as seguintes relações de comutação (demostradas no Apêndice C):

$$[b(p), N] = -b(p), \quad (3.30)$$

$$[b^\dagger(p), N] = b^\dagger(p), \quad (3.31)$$

$$[a(p), N] = a(p) \quad (3.32)$$

e

$$[a^\dagger(p), N] = -a^\dagger(p). \quad (3.33)$$

Um dos resultados da álgebra acima é que os operadores $a^\dagger(k)a(k)$ e $b^\dagger(k)b(k)$ estão associados respectivamente ao número de partículas e antipartículas, respectivamente no sistema físico. Assim, temos:

$$N_{a^\dagger a} |\vec{k}\rangle_{(particula)} = n_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle_{(particula)} \quad (3.34)$$

e

$$N_{b^\dagger b} |\vec{p}\rangle_{(antiparticula)} = m_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle_{(antiparticula)}. \quad (3.35)$$

No caso de uma partícula temos $n_{\vec{k}} = 1$ e de uma anti-partícula $m_{\vec{p}} = -1$.

Outro operador de interesse na teoria é a hamiltoniana do sistema dada por (ver Apêndice D):

$$H = \int d^3x \left[\left(\frac{1}{2} \partial^0 D \right) (\partial^0 D^\dagger) - \frac{1}{2} (\partial_{jD}) (\partial^j D) + \frac{m_D^2}{2} D D^\dagger - \frac{m_\omega^2}{2} \langle \omega^0 \rangle^2 + \frac{m_\sigma^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 - g_{D\bar{D}\omega} D D^\dagger \langle \sigma \rangle \right]. \quad (3.36)$$

Em termos dos operadores de criação e aniquilação esta pode ser escrita como:

$$H = \frac{1}{4} \int d^3k \left[a(k) a^\dagger(k) + b^\dagger(k) b(k) \right] + \frac{g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle}{2} \int \frac{d^3k}{q^0(k)} \left[a(k) a^\dagger(k) - b^\dagger(k) b(k) \right] + \left(\frac{m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2}{2} - \frac{m_\omega^2 \langle \omega^0 \rangle^2}{2} \right) V. \quad (3.37)$$

3.2 Conexão com a Mecânica Estatística

Para estudar a equação de estado do nosso sistema à temperatura finita devemos construir o grande potencial Φ , que depende do potencial químico μ , do volume V e da temperatura T [51]:

$$\Phi(T, V, \mu) = -T \ln \Xi, \quad (3.38)$$

onde estamos adotando o sistema de unidades $k_B = 1$. A grande função de partição Ξ é dada por:

$$\Xi(T, V, \mu) = Tr \left[e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \right], \quad (3.39)$$

e $\beta = \frac{1}{T}$, \hat{H} é a hamiltoniana do sistema e \hat{N} é o operador número do sistema.

Através dos cálculos do Apêndice E, obtemos a expressão para o valor esperado para o número de partículas no sistema em função da temperatura e do potencial químico:

$$\langle N \rangle = \frac{Vol}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left[\frac{e^{-\beta[E(k) - \mu]}}{1 - e^{-\beta[E(k) - \mu]}} - \frac{e^{-\beta[E(k) + \mu]}}{1 - e^{-\beta[E(k) + \mu]}} \right]. \quad (3.40)$$

Comparando esse resultado, com o valor esperado para o operador de número Eq.(3.29), fazendo $d^3k = 4\pi k^2 dk$, temos:

$$\langle a^\dagger(k)a(k) \rangle = \frac{V}{2\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{\beta[E(k)-\mu]} - 1} \quad (3.41)$$

e

$$\langle b^\dagger(k)b(k) \rangle = \frac{V}{2\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{\beta[E(k)+\mu]} - 1}. \quad (3.42)$$

A partir destas relações vemos que o potencial químico está relacionado com as proporções de matéria e antimatéria no sistema. Para $\mu = 0$, temos $\langle N \rangle = 0$, ou a mesma população de matéria e antimatéria, neste caso, temos:

$$\langle a^\dagger(k)a(k) \rangle = \langle b^\dagger(k)b(k) \rangle = \frac{V}{2\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{\beta E(k)} - 1}. \quad (3.43)$$

3.3 Equação auto-consistente para o Campo Sigma

A equação de movimento para o campo $\langle \sigma \rangle$ Eq.(3.13) possui uma clara auto-consistência, pois a densidade escalar ρ_s também depende de $\langle \sigma \rangle$. Como já vimos, a equação para o campo $\langle \sigma \rangle$ é dada por:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{g_{DD\sigma}}{m_\sigma^2} \rho_s, \quad (3.44)$$

onde,

$$\rho_s = \langle DD^\dagger \rangle = \frac{\langle \int d^3\vec{x} D(x) D^\dagger(x) \rangle}{V}. \quad (3.45)$$

Em termos dos operadores de criação e aniquilação (ver Apêndice D), temos:

$$\rho_s = \frac{\pi}{V} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{q^0(k)^2} \langle a(k)a^\dagger(k) + b^\dagger(k)b(k) \rangle, \quad (3.46)$$

Aplicando a relação de comutação da Eq.(3.26), tem-se:

$$a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + 4q^0(\vec{k})\delta^3(0),$$

onde $\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$. A parcela proporcional a $\delta^3(0)$ possui uma integral divergente. Admitindo a renormalização aditiva para a densidade escalar e substituindo as equações Eqs.(3.43), temos a equação autoconsistente para o campo sigma:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{g_{DD\sigma}}{m_\sigma^2} \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{q^0(k) [e^{\beta E(k)} - 1]}. \quad (3.47)$$

Como já vimos, o campo $\langle \omega^0 \rangle$ obedece a equação:

$$\langle \omega^0 \rangle = \frac{g_{DD\omega}}{m_\omega^2} \rho_v, \quad (3.48)$$

onde a densidade vetorial é calculada de modo análogo ao caso anterior:

$$\rho_v = \frac{\langle \int d^3 \vec{x} i((\partial^0 D)D^\dagger - D\partial^0 D^\dagger) \rangle}{V}. \quad (3.49)$$

Através dos cálculos do apêndice E, obtemos:

$$\rho_v = \frac{2 \langle N \rangle}{V} + 4g_{DD\omega} \langle \omega^0 \rangle \rho_s. \quad (3.50)$$

Para $\langle N \rangle = 0$ e inserindo esse resultado na Eq.(3.48), temos:

$$\langle \omega^0 \rangle = \frac{4g_{DD\omega}^2}{m_\omega^2} \langle \omega^0 \rangle \rho_s.$$

Para $\langle \omega^0 \rangle \neq 0$, tem-se $\rho_s = \frac{m_\omega^2}{4g_{DD\omega}^2}$, ou seja uma constante. Como a equação de campo para o campo sigma Eq.(3.47) deixa claro que o campo não é constante, temos uma única solução consistente:

$$\langle \omega^0 \rangle = 0.$$

Devido ao resultado que $\langle \omega^0 \rangle = 0$, a solução para $q^0(k)$ assume a forma bastante simples:

$$q^0(k) = \sqrt{\vec{k}^2 + (m_D^2 - 2g_{DD\sigma} \langle \sigma \rangle)}. \quad (3.51)$$

3.4 Observáveis Termodinâmicos

A partir das soluções $\langle \omega^0 \rangle = 0$ e $\sigma(T)$, podemos calcular vários observáveis termodinâmicos de interesse. Para a obtenção da energia interna do sistema, usamos as equações dos valores médios dos operadores de criação e aniquilação dadas na Eq.(3.43) e substituímos no valor médio do operador hamiltoniano Eq.(3.37). Desse modo, temos a densidade de energia do sistema, ϵ :

$$\epsilon = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 q^0(k)}{e^{\frac{q^0(k)}{T}} - 1} + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \langle \sigma \rangle^2. \quad (3.52)$$

As variáveis termodinâmicas, pressão (P) e entropia (S), são obtidas através das relações termodinâmicas do potencial grande canônico (ver Apêndice E):

$$\Phi(T, V, \mu) = T \frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \ln[1 - e^{-\frac{q^0(k)}{T}}], \quad (3.53)$$

onde:

$$P = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T, \mu} \quad (3.54)$$

e

$$S = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{V, \mu}. \quad (3.55)$$

Capítulo 4

Resultados

Como vimos no capítulo anterior, o nosso problema se reduz a encontrar a solução do campo sigma que é uma equação autoconsistente, na forma:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{g_{D\bar{D}\sigma}}{m_\sigma^2} \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{q^0(k) [e^{\frac{q^0(k)}{T}} - 1]}, \quad (4.1)$$

onde,

$$q^0(k) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_D^2 - 2g_{D\bar{D}\sigma} \langle \sigma \rangle}. \quad (4.2)$$

Neste trabalho usamos os seguintes parâmetros: $g_{D\bar{D}\sigma} = 2.85$ GeV [48], $m_D = 1.87$ GeV [53] e $m_\sigma = 0.4$ GeV [53]. Para resolver a integral da Eq.(4.1), utilizamos o método de integração numérica de Gauss-Laguerre com 32 pesos (ver Apêndice F), em que na implantação do método, precisamos transformar o módulo do momento k em uma variável sem dimensão u , através da transformação:

$$k = uT.$$

Para resolver a equação autoconsistente, foi construído um programa no Maple 12, que permite trabalhar com números complexos. Usamos como “chute” inicial $\langle \sigma \rangle = 10$ GeV.

Na Fig. 4.1 apresenta-se o comportamento da massa efetiva,

$$m_{eff} = \sqrt{m_D^2 - 2g_{D\bar{D}\sigma} \langle \sigma \rangle},$$

em função da temperatura T . Vemos que a massa efetiva diminui com o aumento da temperatura até a temperatura de 0.7 GeV. Após essa temperatura as soluções para o campo sigma tornam-se números complexos, o que viola a nossa teoria. Assim, acima

dessa temperatura crítica a teoria efetiva perde a sua validade. Devido ao fato que essa temperatura é muito maior que a temperatura de transição obtida em QCD na rede para quarks leves, que é de aproximadamente de 200 MeV [54, 55, 56], esse resultado pode indicar que a temperatura crítica de 700 MeV é uma temperatura de transição da matéria hadrônica pesada para um plasma de quarks e glúons. O termo pesado se deve à presença do quark c na nossa matéria mesônica. Se $\langle \sigma \rangle = 0$ a massa efetiva é constante e igual a m_D .

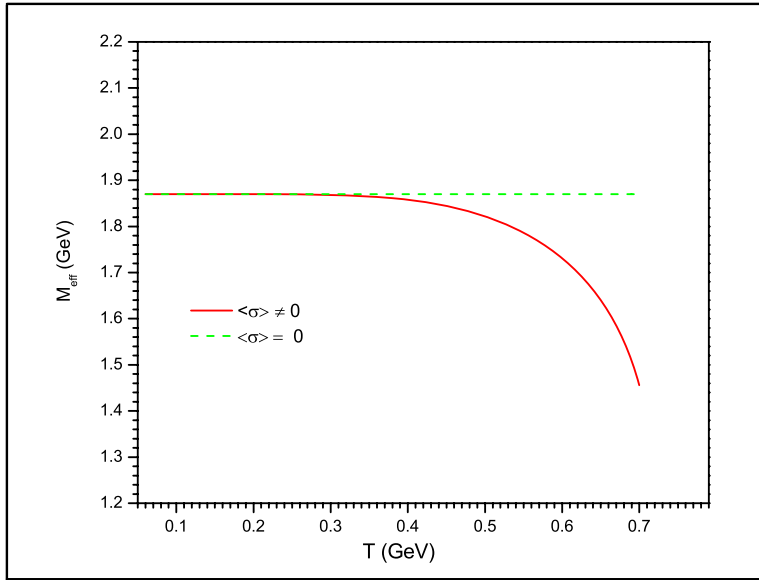


Figura 4.1: Comportamento da massa efetiva (m_{eff}) em função da temperatura (T) com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$.

Como para $\mu = 0$, o sistema se encontra com densidade nula de partículas. Criamos uma quantidade chamada de densidade de pares. Imaginamos neste caso, que a matéria de mésons se organiza na forma de moléculas $D - \bar{D}$, de modo, que o número de partículas D é igual ao número de pares N_p , desse modo, através da Eq.(3.40) temos, a expressão para a densidade de pares η :

$$\eta = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{e^{\frac{q^0(k)}{T}} - 1}. \quad (4.3)$$

Na Fig. 4.2 vemos que a densidade de pares cresce com a temperatura. A presença do campo sigma torna essa densidade maior que o caso livre, deixando claro o papel

da interação nuclear em tornar a matéria mais coesa. Esse mesmo comportamento também é observado para a densidade de energia com o aumento da temperatura (Fig. 4.3). A pressão e a entropia específica, Figs. 4.4 e 4.5, respectivamente, também comportam-se de modo análogo à densidade de energia e à densidade de pares com o aumento da temperatura (Figs. 4.2 e 4.3).

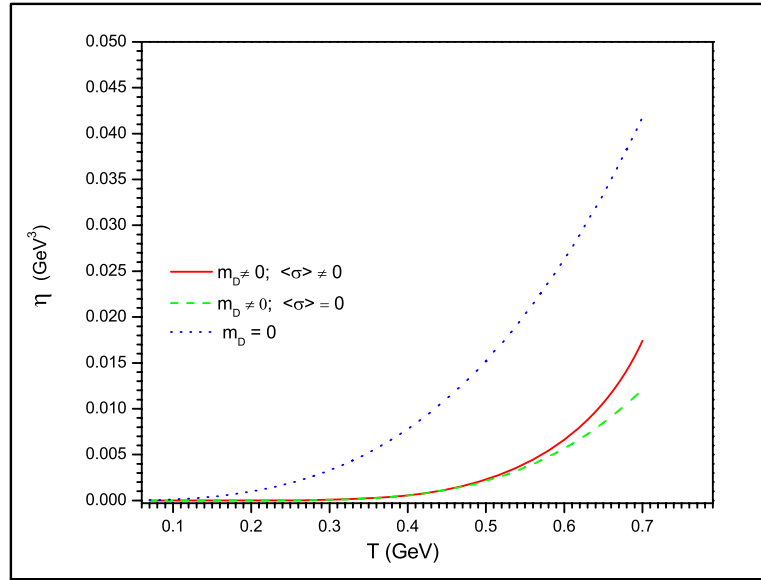


Figura 4.2: Comportamento da densidade de pares (η) em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$.

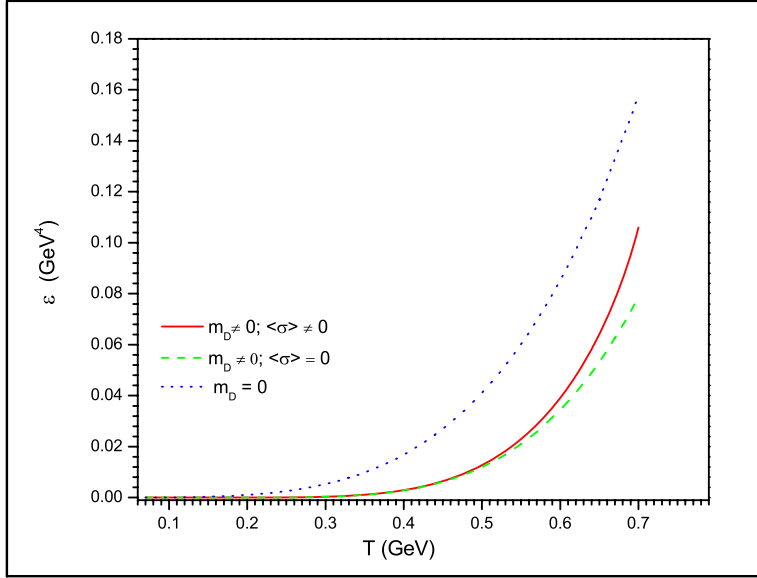


Figura 4.3: Comportamento da densidade de energia (\mathcal{E}) em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$.

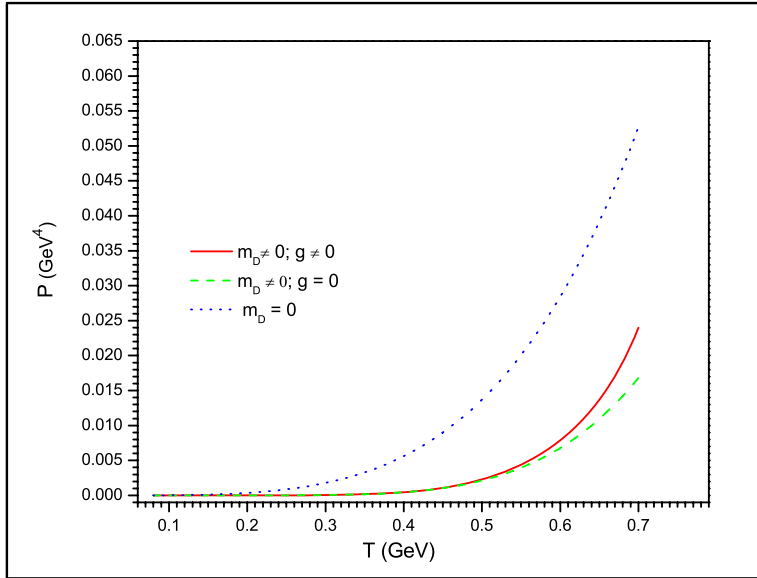


Figura 4.4: Comportamento da pressão (P) em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$.

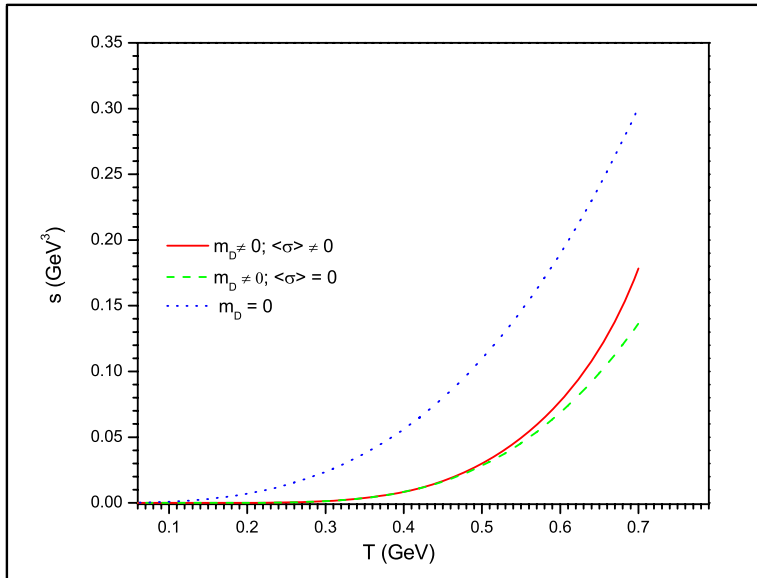


Figura 4.5: Comportamento da entropia específica (s) em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$.

Uma grandeza que possui um comportamento muito interessante é a razão da energia por par, \mathcal{E}' , apresentada na Fig. 4.6. Vemos que a presença do campo sigma é fundamental para o gráfico atingir um platô próximo da temperatura crítica, mostrando que as moléculas atingem uma energia máxima em torno de 6 GeV. E no regime de baixas temperaturas, a molécula tende a atingir uma energia próxima da energia de seus constituintes, ou seja, $2m_D$. Esse resultado, sugere que a presença da força nuclear forneça um hádron exótico $D - \bar{D}$ com massa próxima de $2m_D$.

No caso da razão pressão-volume sobre energia interna, PV/U , Fig. 4.7, tem-se um aumento com a temperatura semelhante à matéria mesônica sem o campo sigma até aproximadamente a temperatura de 0.5 GeV. Só a partir deste valor a presença do campo $\langle \sigma \rangle$ provoca um aumento nesta relação, e para temperaturas próximas de 0.7 GeV este aumento é mais significativo.

Para o calor específico a volume constante, C_v , definido por:

$$C_V = \frac{1}{2N_p} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad (4.4)$$

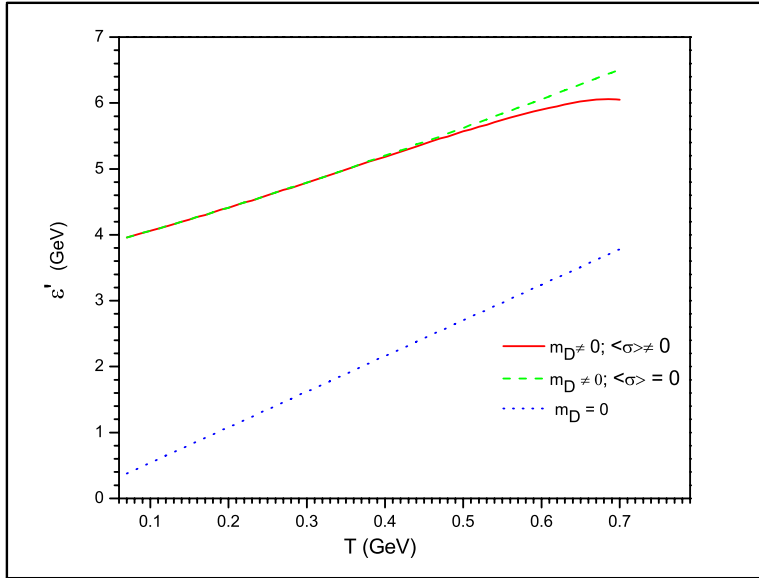


Figura 4.6: Comportamento da energia por par (\mathcal{E}') em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$.

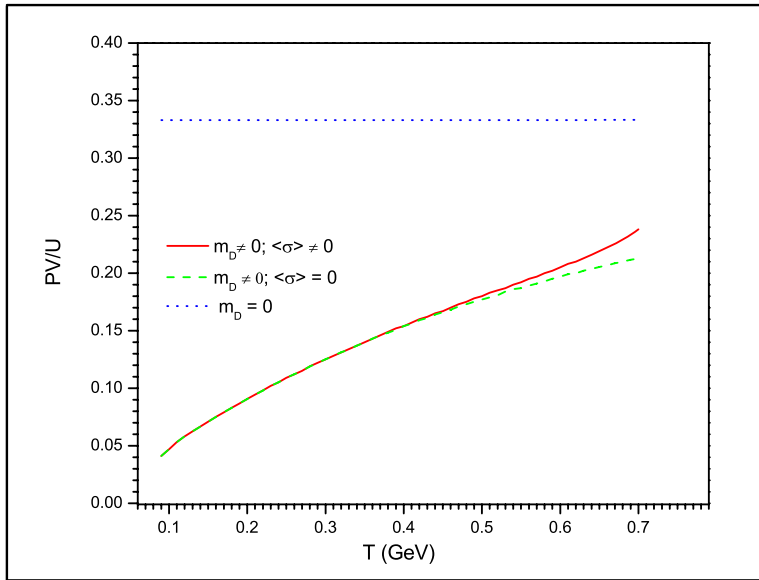


Figura 4.7: Comportamento da razão PV/U em função da temperatura (T) com a massa m_D nula e a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$.

ou em termos de densidades:

$$C_V = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial \epsilon}{\partial T}. \quad (4.5)$$

Na Fig. 4.8, vemos que o C_v para o gás de bósons de massa nula possui uma dependência com a temperatura semelhante à de um gás ideal, mas com um valor de 2.7 enquanto o gás ideal possui o valor 1.5. Para o caso com massa não nula e na presença do campo sigma, o calor específico cresce com a temperatura e tende a um platô próximo de 2. Esse comportamento é muito próximo das estruturas moleculares [57], em que o aumento de C_v com a temperatura seguida a um platô está associado a excitação de graus de liberdade moleculares do sistema. Com especial atenção para o número 2. Usando a teoria cinética para um gás ideal clássico, o valor 2 é obtido usando o princípio da equipartição da energia, onde cada grau de liberdade do sistema apresenta um valor $\frac{1}{2}$. Assim para uma molécula diatômica, temos $C_v = (3+1) \cdot \frac{1}{2} = 2$. Para $T > 400$ MeV, o calor específico tende a cair com a temperatura. Esse é um comportamento que pode ser interpretado como uma dissociação da molécula hadrônica seguida de uma transição de fases para um plasma de quarks e glúons.

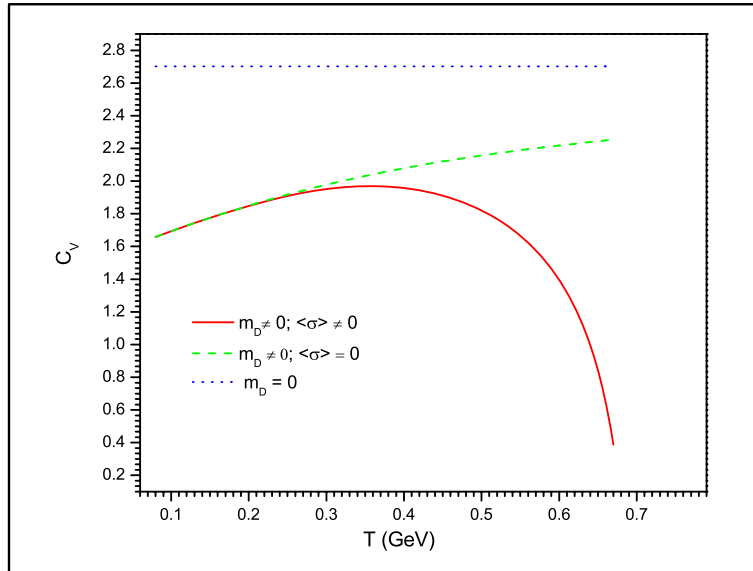


Figura 4.8: Comportamento da capacidade calorífica (C_v) em função da temperatura (T) com a massa m_D diferente de zero com e sem o campo $\langle \sigma \rangle$.

Enfim para enfatizar a nossa hipótese da possível sinalização da transição de fases da matéria mesônica para o QGP apresentamos a Fig. 4.9, onde todas as variáveis relacionadas anteriormente em nossos resultados foram normalizadas e mostradas em um só gráfico. Este não apresenta os diagramas típicos das transições de fases, por exemplo, para matéria nuclear [58, 59], mas apresenta platôs e um comportamento exótico para o calor específico, o que nos faz acreditar que esses são sinais claros de uma transição de fases da matéria de mésons para o QGP.

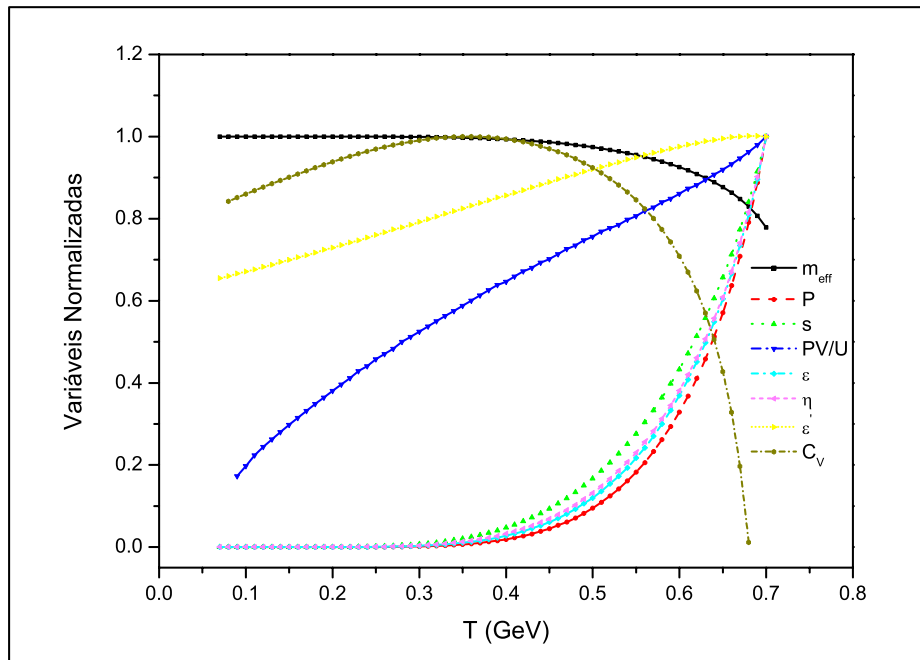


Figura 4.9: Comportamento de todas as variáveis termodinâmicas estudadas neste trabalho normalizadas para matéria mesônica $D - \bar{D}$ em função da temperatura (T)

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho estudamos a matéria composta dos mésons D e \bar{D} com temperatura finita e potencial químico nulo no contexto da teoria relativística de campo médio (MFT). É importante destacar que essa é a primeira vez que é usada a MFT para uma matéria de mésons. Consideramos apenas os mésons omega e sigma, e mostramos que só o campo sigma contribui. No regime de altas temperaturas, acima de 700 MeV foram obtidas soluções complexas para o campo sigma. Interpretar se acima dessa temperatura de 700 MeV, corresponde a fase do QGP é uma extrapolação desse trabalho. Usamos o fato, que os cálculos de QCD na rede prevêm uma temperatura crítica de 200 MeV para a transição da matéria hadrônica leve para o QGP.

Outro ponto de destaque deste trabalho consiste no estudo da possível formação de moléculas de mésons $D - \bar{D}$ no meio nuclear. O observável termodinâmico que mostrou essa possibilidade foi o estudo do calor específico, que forneceu um valor típico de estruturas moleculares, com $J = 0$, $C_v = 2$, que corresponde a $X(3700)$. Como o cálculo da massa desse hádron exótico é determinada em $T = 0$, não é possível extrair essa massa usando MFT, pois o número de partículas D torna-se muito pequeno, violando essa teoria. Considerando o intervalo, acima de 100 MeV como o intervalo de confiança das MFT, podemos extrapolar o gráfico da energia total por par e chegar num valor próximo de $2m_D$ para $T = 0$, mostrando que a energia de ligação dessa molécula é bem menor que $2m_D$.

Uma perspectiva do nosso trabalho consiste em estudar outros estados moleculares numa abordagem de troca de mésons σ e ω na teoria de campo médio relativística (MFT). Os estados que despertam o nosso interesse são: o $D^* - \bar{D}^*$ $Y(3930)$ [60] e

$D_s^* - \bar{D}_s^* Y(4140)$ [61].

Iremos estimar o calor específico com o aumento da temperatura, mostrando se é possível entender esses estados como estados moleculares. Também pretendemos estudar a energia de ligação por par com o aumento da temperatura e extrapolar via uma interpolação a massa de cada molécula em $T = 0$.

Ainda pretendemos investigar a temperatura que torna o campo sigma complexo em todos esses novos estados. Esperamos que em todos os casos, a temperatura fique em torno de 700 MeV, devido ao conteúdo de quarks desses novos estados possuírem massas muito próximas da nossa molécula $D - \bar{D}$. Esses resultados, poderão deixar claro, que a temperatura de 700 MeV é uma temperatura de transição da matéria hadrônica pesada para o plasma de quarks e glúons.

Apêndice A

Operadores de Criação e Aniquilação

Em teoria de campos a segunda quantização para os campos bosônicos, trata os campos como operadores de modo que o campo e o seu momento conjugado satisfazem relações de comutação. Assim, para o méson D , representado pelo campo φ , temos as seguintes relações de comutação [49, 50, 52].

$$[\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t)] = [\Pi^0(\vec{x}, t), \Pi^0(\vec{y}, t)] = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$[\Pi^0(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{A.2})$$

e

$$[\Pi^{*0}(\vec{x}, t), \varphi^\dagger(\vec{y}, t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A.3})$$

onde $\Pi^0(\vec{x}, t)$ é o operador momento canonicamente conjugado ao campo φ , dado por:

$$\Pi^0(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} = \frac{1}{2} \partial^0 \varphi^\dagger(\vec{x}, t) - ig_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle \varphi^\dagger(\vec{x}, t). \quad (\text{A.4})$$

Para resolver a equação de movimento Eq.(3.15) apresentada no Capítulo 3, considera-se como solução de teste, a solução de onda plana:

$$D(x) = a_{\vec{k}, E} e^{i(\vec{k}\vec{x} - Et)}, \quad (\text{A.5})$$

que como já vimos, fornece dois valores para a energia:

$$E_\pm(\vec{k}) = 2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle \pm q^0(\vec{k}). \quad (\text{A.6})$$

Da condição de normalização,

$$\langle \vec{x}' | \vec{k}' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \quad (\text{A.7})$$

temos:

$$\langle \vec{x}' | D(E, \vec{k}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ik_\mu x^\mu}. \quad (\text{A.8})$$

Usando a notação $kx \equiv k^0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$, podemos construir a função de onda normalizada que contém as duas possibilidades de energia [49],

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k e^{-ikx} \tilde{\xi}(x), \quad (\text{A.9})$$

com $\tilde{\xi}(x) = \delta[(k^0 - E_+)(k^0 - E_-)]\chi(k)$, sendo $\chi(k)$ dada por $\chi(k) = \theta(k^0)\chi^+(k) + \theta(-k^0)\chi^-(k)$. Da relação:

$$\delta[(k^0 - E_+)(k^0 - E_-)] = \frac{1}{E_+ - E_-} [\delta(k^0 - E_+) + \delta(k^0 - E_-)],$$

e integrando a Eq.(A.9) em k_0 , o campo φ pode ser escrito como:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k} \left[\frac{\chi^+(k)}{E_+ - E_-} e^{-i(E_+ t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \frac{\chi^-(k)}{E_+ - E_-} e^{-i(E_- t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right]. \quad (\text{A.10})$$

Usando $E_\pm(\vec{k}) = 2g_{DD\omega} \langle \omega^0 \rangle \pm q^0(\vec{k})$ e substituindo $\vec{k} = \vec{q}$ no primeiro termo e $\vec{k} = -\vec{q}$ no segundo termo da integral, podemos reescrever a Eq.(A.10) como:

$$\varphi(\vec{x}, t) = e^{-i2g_{DD\omega} \langle \omega^0 \rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} [a(\vec{q})f_q(x) + b^\dagger(\vec{q})f_q^*(x)], \quad (\text{A.11})$$

onde,

$$f_q(x) = \frac{e^{-iqx}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (\text{A.12})$$

Definindo a função de onda:

$$\tilde{\varphi}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} [a(\vec{q})f_q(x) + b^\dagger(\vec{q})f_q^*(x)], \quad (\text{A.13})$$

podemos escrever a função de onda $\varphi(\vec{x}, t)$ na forma:

$$\varphi(\vec{x}, t) = e^{-i2g_{DD\omega} \langle \omega^0 \rangle t} \tilde{\varphi}(\vec{x}, t). \quad (\text{A.14})$$

Assim temos a relação de comutação Eq.(A.1), $[\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t)] = 0$:

$$\begin{aligned}
[\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t)] &= e^{-4g_{DD\omega}\langle\omega^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \int \frac{d^3\vec{k}'}{2q^0(\vec{k}')} \\
&\underbrace{\left[a(\vec{k})f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) + b^\dagger(\vec{k})f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t), a(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(\vec{y}, t) + b^\dagger(\vec{k}')f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}, t) \right]}_{C_1}. \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

C_1 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left[a(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) f_{\vec{k}'}(\vec{y}, t) + \left[a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}, t) \\
&+ \left[b^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) f_{\vec{k}'}(\vec{y}, t) + \left[b^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}, t), \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

onde obtemos a soluao:

$$\left[a(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] = \left[a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] = \left[b^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] = \left[b^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] = 0. \quad (\text{A.17})$$

Para a relaao de comutaao da Eq.(A.2), $[\Pi^0(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t)] = -i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$, temos:

$$\begin{aligned}
\left[\Pi^0(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t) \right] &= - \int \frac{d^3\vec{k}}{8i} \int \frac{d^3\vec{k}'}{q^0(\vec{k}')} \\
&\underbrace{\left[a^\dagger(\vec{k})f_{\vec{k}}^*(\vec{x}) - b^\dagger(\vec{k})f_{\vec{k}}^*(\vec{x}), a(\vec{k}')f_{\vec{k}'}(\vec{y}) + b^\dagger(\vec{k}')f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}) \right]}_{C_2}. \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

onde o comutador C_2 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
C_2 &= \left[a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}^*(\vec{x})f_{\vec{k}'}(\vec{y}) + \left[a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}^*(\vec{x})f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}) \\
&+ \left[b(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}(\vec{x})f_{\vec{k}'}(\vec{y}) + \left[b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] f_{\vec{k}}(\vec{x})f_{\vec{k}'}^*(\vec{y}). \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

Como o operador a está relacionado as partículas e b as antipartículas, adotamos:

$$\left[a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] = 0 \quad (\text{A.20})$$

e

$$\left[b(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] = 0. \quad (\text{A.21})$$

Considerando que os outros dois comutadores são proporcionais a uma funao $\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$, temos as soluoes:

$$\left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}') \right] = 4q^0(\vec{k}')\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{A.22})$$

e

$$[b(\vec{k}'), b^\dagger(\vec{k})] = 4q^0(\vec{k}')\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{A.23})$$

Explicitando todas as relações de comutação obtidas temos:

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] &= [a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [b^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')] \\ &= [b^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

e

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}'), b^\dagger(\vec{k})] = 4q^0(\vec{k}')\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{A.25})$$

Apêndice B

Determinação do Operador Número

O operador número é definido por [49]:

$$N = \int d^3x J_0(x), \quad (\text{B.1})$$

onde a corrente $J^\mu(x)$ é dada por:

$$J^\mu(x) = -i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^\dagger)} \varphi^\dagger \right]. \quad (\text{B.2})$$

As derivadas do primeiro e do segundo termo da corrente são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi^\dagger) - ig_{D\bar{D}\omega} \omega^\mu \varphi^\dagger \quad (\text{B.3})$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^\dagger)} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi) + ig_{D\bar{D}\omega} \omega^\mu \varphi. \quad (\text{B.4})$$

Fazendo essas substituições, a expressão da corrente fica escrita como:

$$J^\mu(x) = -i \left[\frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi) \varphi^\dagger - \frac{1}{2}(\partial^\mu \varphi^\dagger) \varphi - 2ig_{D\bar{D}\omega} \omega^\mu \varphi \varphi^\dagger \right]. \quad (\text{B.5})$$

Em termos da função de onda da Eq.(A.14), $\varphi(\vec{x}, t) = e^{-i2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle t} \tilde{\varphi}(\vec{x}, t)$, temos que a componente $J_0(x)$ pode ser escrita como:

$$J_0(x) = \frac{i}{2} \left[(\partial_0 \tilde{\varphi}) \tilde{\varphi}^\dagger - (\partial_0 \tilde{\varphi}^\dagger) \tilde{\varphi} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Definindo:

$$N_1 = \frac{i}{2} \int d^3x (\partial_0 \tilde{\varphi}) \tilde{\varphi}^\dagger, \quad (\text{B.7})$$

temos que o operador N pode ser escrito como:

$$N = N_1 + N_1^\dagger. \quad (\text{B.8})$$

Substituindo a função de onda $\tilde{\varphi}(\vec{x}, t)$ em termos dos operadores de criação e aniquilação, temos:

$$N_1^\dagger = \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} [a^\dagger(k)a(k) - b(k)b^\dagger(k)]. \quad (\text{B.9})$$

Como $N_1 = (N_1^\dagger)^\dagger$, a expressão do operador número N é:

$$N = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} [a^\dagger(k)a(k) - b(k)b^\dagger(k)]. \quad (\text{B.10})$$

Aplicando a relação de comutação:

$$b(k)b^\dagger(k) = b^\dagger(k)b(k) + 4q^0(k)\delta^3(0)$$

e desprezando a parcela infinita do operador número, este pode ser escrito, como:

$$N = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} [a^\dagger(k)a(k) - b^\dagger(k)b(k)]. \quad (\text{B.11})$$

Apêndice C

Álgebra com o Operador Número

A álgebra do operador número é gerada pelos operadores $\{a(p), a^\dagger(p), b(p), b^\dagger(p), N, 1\}$ e correspondem aos seguintes comutadores: $[b(p), N]$, $[b^\dagger(p), N]$, $[a(p), N]$ e $[a^\dagger(p), N]$, que são descritos a seguir. Para isso usaremos a expressão do operador de número determinado no Apêndice B, ou seja:

$$N = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} [a^\dagger(k)a(k) - b^\dagger(k)b(k)].$$

Determinação do Comutador $[b(p), N] = -b(p)$

$$[b(p), N] = \left[b(p), \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(k)} [a^\dagger(k)a(k) - b^\dagger(k)b(k)] \right]. \quad (\text{C.1})$$

Aplicando a relação $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$, temos:

$$\begin{aligned} [b(p), N] &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(k)} \{ [b(p), a^\dagger(k)]a(k) + a^\dagger(k)[b(p), a(k)] \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(k)} \{ [b(p), b^\dagger(k)]b(k) + b^\dagger(k)[b(p), b(k)] \}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Como o único comutador diferente de zero é:

$$[b(p), b^\dagger(k)] = 4q^0(p)\delta^3(p - k), \quad (\text{C.3})$$

temos de imediato:

$$[b(p), N] = -b(p). \quad (\text{C.4})$$

De modo análogo, podemos obter as outras relações de comutação:

$$[b^\dagger(p), N] = b^\dagger(p) \quad (\text{C.5})$$

$$[a(p), N] = a(p) \quad (\text{C.6})$$

$$[a^\dagger(p), N] = -a^\dagger(p) \quad (\text{C.7})$$

Apêndice D

Determinação da Hamiltoniana

A densidade hamiltoniana para o caso em que os campos sigma e ômega são estáticos, é dada por:

$$\mathcal{H} = \Pi_0^D(x) \partial^0 \varphi^D(x) + \Pi_0^{D^\dagger}(x) \partial^0 \varphi^{D^\dagger}(x) - \mathcal{L}, \quad (\text{D.1})$$

onde os momentos canonicamente conjugados a $\varphi(x)$ e $\varphi^\dagger(x)$ são:

$$\Pi_0^D(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^D)} \quad (\text{D.2})$$

e

$$\Pi_0^{D^\dagger}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^{D^\dagger})}. \quad (\text{D.3})$$

A lagrangeana \mathcal{L} é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu D)(\partial^\mu D^\dagger) - \frac{1}{2}m_D^2 DD^\dagger - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) \\ & - \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 + g_{D\bar{D}\sigma} DD^\dagger \sigma + ig_{D\bar{D}\omega} \omega^\mu [D\partial_\mu D^\dagger - (\partial_\mu D)D^\dagger]. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Os momentos canonicamente conjugados são:

$$\Pi_0^D(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^D)} = \left[\frac{1}{2} \partial_0 D^\dagger - ig_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle D \right] \quad (\text{D.5})$$

e

$$\Pi_0^{D^\dagger}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi^{D^\dagger})} = \left[\frac{1}{2} \partial_0 D + ig_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle D \right]. \quad (\text{D.6})$$

Aplicando as Eqs.(D.5) e (D.6) em (D.1), temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \left(\frac{1}{2} \partial^0 D + ig_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle D \right) \partial^0 D^\dagger + \left(\frac{1}{2} \partial^0 D^\dagger - ig_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle DC \right) \partial^0 D \\ & - \frac{1}{2}(\partial^0 D)(\partial^0 D^\dagger) - \frac{1}{2}(\partial_j D)(\partial^j D^\dagger) + \frac{m_D^2}{2} DD^\dagger - \frac{m_\omega^2}{2} \langle \omega^0 \rangle^2 \\ & + \frac{m_\sigma^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 - g_{D\bar{D}\omega} DD^\dagger \langle \sigma \rangle - ig_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle [D(\partial_0 D^\dagger) - (\partial_0 D)D^\dagger] \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

ou

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2}(\partial^0 D)(\partial^0 D^\dagger) - \frac{1}{2}(\partial_j D)(\partial^j D^\dagger) + \frac{m_D^2}{2} D D^\dagger - \frac{m_\omega^2}{2} \langle \omega^0 \rangle^2 \\ & + \frac{m_\sigma^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 - g_{D\bar{D}\omega} D D^\dagger \langle \sigma \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Sabendo que $\varphi(x, t) = e^{-i2g\langle\omega^0\rangle t} \tilde{\varphi}(x)$, vem

$$\begin{aligned} \partial^0 D \partial^0 D^\dagger \equiv (\partial_0 \varphi)(\partial_0 \varphi^\dagger) &= 4g_{D\bar{D}\omega}^2 \langle \omega^0 \rangle^2 \varphi(x) \varphi^\dagger(x) - i2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle e^{i2g\langle\omega^0\rangle t} \varphi \frac{\partial \tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t} \\ &+ i2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle e^{-i2g\langle\omega^0\rangle t} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \varphi^\dagger + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t} \right) \\ &= 4g_{D\bar{D}\omega}^2 \langle \omega^0 \rangle^2 \varphi(x) \varphi^\dagger(x) - i2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle \left(\tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \tilde{\varphi}^\dagger \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Assim, para o cálculo de \mathcal{H} precisamos calcular as derivadas $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}$ e $\frac{\partial \tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t}$. A primeira é dada por:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \int \frac{d^3 k}{2q^0(k)} \left[a(q) \frac{\partial f_k(x)}{\partial t} + b^\dagger(q) \frac{\partial f_k^*(x)}{\partial t} \right], \quad (\text{D.10})$$

a segunda derivada é o complexo conjugado da primeira. Como $\partial_0 f_k(x) = -iq_0(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x)$ e $\partial_0 f_k^*(x) = -iq_0(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x)$. Daí, temos:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = -\frac{i}{2} \int d^3 k \left[a(k) f_k(x) - b^\dagger(k) f_k^*(x) \right]. \quad (\text{D.11})$$

A hamiltoniana é dada por: $H = \int d^3 x \mathcal{H}$. Logo a expressão de H é:

$$\begin{aligned} H = & \int d^3 x \left[\frac{1}{2}(\partial^0 D)(\partial^0 D^\dagger) - \frac{1}{2}(\partial_j D)(\partial^j D^\dagger) + \frac{m_D^2}{2} D D^\dagger - \frac{m_\omega^2}{2} \langle \omega^0 \rangle^2 \right. \\ & \left. + \frac{m_\sigma^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 - g_{D\bar{D}\omega} D D^\dagger \langle \sigma \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Os termos dados a seguir em função dos operadores de criação e aniquilação serão usados para a determinação da hamiltoniana. Eles são:

$$\begin{aligned} \int d^3 x \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t} \right) &= \frac{1}{4} \int d^3 k \int d^3 p \int d^3 x \left[a(k) f_k(x) + b^\dagger(k) f_k^*(x) \right] \left[a^\dagger(p) f_p^*(x) \right. \\ & \left. - b(p) f_p(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\int d^3x \tilde{\varphi} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t} \right) = \frac{1}{4} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \int d^3p \left(\frac{i}{2} \right) \int d^3x \left[a(k) f_k(x) + b^\dagger(k) f_k^*(x) \right] \left[a(p) f_p(x) - b^\dagger(p) f_p^*(x) \right], \quad (\text{D.14})$$

$$\int d^3x \varphi(x) \varphi^\dagger(x) = \int d^3x \tilde{\varphi} \tilde{\varphi}^\dagger = \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \int \frac{d^3p}{2q^0(\vec{p})} \int d^3x \left\{ \left[a(k) f_k(x) + b^\dagger(k) f_k^*(x) \right] \left[a^\dagger(p) f_p^*(x) - b(p) f_p(x) \right] \right\} \quad (\text{D.15})$$

e

$$\int d^3x (\partial_j \varphi) (\partial^j \varphi^\dagger) = \int d^3x (\partial_j \tilde{\varphi}) (\partial^j \tilde{\varphi}^\dagger) = \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} i k_j \int \frac{d^3p}{2q^0(\vec{p})} (-i p^j) \int d^3x \left[a(k) f_k(x) + b^\dagger(k) f_k^*(x) \right] \left[a^\dagger(p) f_p^*(x) - b(p) f_p(x) \right], \quad (\text{D.16})$$

sendo $j \geq 1$. Onde todos os estados $\langle 0 | a(k) a(p) | 0 \rangle$, $\langle 0 | a(k) b^\dagger(p) | 0 \rangle$, $\langle 0 | b^\dagger(k) a(p) | 0 \rangle$ e $\langle 0 | b^\dagger(k) b^\dagger | 0 \rangle$ são ortogonais. Então estes termos são expressos por:

$$\int d^3x \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t} \right) = \frac{1}{4} \int d^3k \left[a(k) a^\dagger(k) + b^\dagger(k) b(k) \right], \quad (\text{D.17})$$

$$\int d^3x \tilde{\varphi} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t} \right) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \left[a(k) a^\dagger(k) - b^\dagger(k) b(k) \right], \quad (\text{D.18})$$

$$\int d^3x \tilde{\varphi}^\dagger \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{2q^0(\vec{k})} \left[a^\dagger(k) a(k) - b(k) b^\dagger(k) \right], \quad (\text{D.19})$$

$$\int d^3x \varphi(x) \varphi^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{4 [q^0(\vec{k})]^2} \left[a(k) a^\dagger(k) + b^\dagger(k) b(k) \right] \quad (\text{D.20})$$

e

$$\int d^3x (\partial_j \varphi) (\partial^j \varphi^\dagger) = \int \frac{d^3k}{4 [q^0(\vec{k})]^2} k_j k^j \left[a(k) a^\dagger(k) + b^\dagger(k) b(k) \right]. \quad (\text{D.21})$$

A expressão para H pode ser escrita como:

$$H = \frac{1}{4} \int d^3k \left[a(k) a^\dagger(k) + b^\dagger(k) b(k) \right] + \frac{g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle}{2} \int \frac{d^3k}{q^0(\vec{k})} \left[a(k) a^\dagger(k) - b^\dagger(k) b(k) \right] \left[+ \frac{m_\sigma^2}{2} \langle \sigma \rangle^2 - \frac{m_\omega^2}{2} \langle \omega^0 \rangle^2 \right] V. \quad (\text{D.22})$$

Apêndice E

Conexão da Teoria de Campos com a Mecânica Estatística

O ponto central que conecta a teoria de campos com a mecânica estatística se concentra no estudo das relações de comutação envolvendo o operador de número N ,

$$N = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} [a^\dagger(k)a(k) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})]. \quad (\text{E.1})$$

Para calcular o número de partículas e antipartículas presentes no sistema, considere o estado físico $|F\rangle^j$,

$$|F\rangle^j = |\vec{k}_1, \vec{k}_2 \dots \vec{k}_n; \vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_m\rangle,$$

onde j significa uma configuração possível, para distribuir a ocupação de n -partículas e m -antipartículas em todos os níveis acessíveis de energia. Esses níveis são gerados da quantização na caixa, para funções de onda de paridade ímpar, considerando um tamanho finito para o volume do sistema, assim temos a relação entre o momento e o nível de energia- n :

$$\vec{k} = \vec{n} \frac{2\pi}{V^{1/3}}, \quad (\text{E.2})$$

onde as componentes do vetor \vec{n} são números inteiros, $n_x = 1, 2, 3, \dots$, $n_y = 1, 2, 3, \dots$, $n_z = 1, 2, 3, \dots$. Dessa forma o vetor \vec{n} que descreve o estado fundamental do sistema é $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

A aplicação do operador de número nesse estado resulta em:

$$N |F\rangle^j = \sum_{i=3}^{\infty} (N_i^{\{j\}} - \bar{N}_i^{\{j\}}) |F\rangle^j, \quad (\text{E.3})$$

onde N_i e \bar{N}_i são os números de ocupação de partículas e antipartículas do sistema relacionado aos operadores $a^\dagger(k)a(k)$ e $b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})$, ou seja:

$$\sum_{i=3}^{\infty} N_i^{\{j\}} = n,$$

$$\sum_{i=3}^{\infty} \bar{N}_i^{\{j\}} = m.$$

A grande função de partição é dada por:

$$\Xi(T, V, \mu) = Tr \left[e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} \right].$$

Inserindo os operadores H e N na função Ξ e adotando o estado físico do sistema como normalizado, temos:

$$\begin{aligned} \Xi(T, V, \mu) &= \sum_{\{j\}} e^{-\beta \left[\sum_{i=3}^{\infty} N_i^{\{j\}} (2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle + q^0(i) - \mu) \right]} \\ &\quad e^{-\beta \left[\sum_{i=3}^{\infty} \bar{N}_i^{\{j\}} (2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle + q^0(i) + \mu) \right]}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

A Eq.(E.4) pode ser escrita em termos de produtórios,

$$\begin{aligned} \Xi(T, V, \mu) &= \sum_{\{j\}} \left[\prod_{i=3}^{\infty} e^{-\beta(2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle + q^0(i) - \mu) N_i^{\{j\}}} \right] \\ &\quad \left[\prod_{k=3}^{\infty} e^{-\beta(2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle + q^0(k) + \mu) \bar{N}_k^{\{k\}}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Comutando o somatório com o produtório, e usando o fato que no ensemble grande canônico há um banho de partículas no sistema, temos que para cada nível há um número infinito de partículas. Assim o somatório em j pode ser tratado como um somatório em $N_i^{\{j\}}$ assumindo valores inteiros de 0 até o infinito. Considerando a fórmula para as séries geométricas de razões $r_1 = e^{-\beta(2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle + q^0(i) - \mu)}$ e $r_2 = e^{-\beta(2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle + q^0(k) + \mu)}$, tem-se:

$$\sum_{N_i^{\{j\}}=0}^{\infty} r^{N_i^{\{j\}}} = \frac{1}{1-r}. \quad (\text{E.6})$$

Logo a grande função de partição Eq.(E.5) é escrita como

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_{i=3}^{\infty} \prod_{k=3}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta(2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle + q^0(i) - \mu)}} \frac{1}{1 - e^{-\beta(2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle + q^0(k) + \mu)}}. \quad (\text{E.7})$$

Definindo $E(i) = 2g_{D\bar{D}\omega} \langle \omega^0 \rangle + q^0(i)$, o grande potencial termodinâmico $\Phi(T, V, \mu)$,

$$\Phi(T, V, \mu) = -\frac{1}{\beta} \ln \Xi(T, V, \mu), \quad (\text{E.8})$$

pode ser escrito como:

$$-\beta\Phi(T, V, \mu) = -\sum_{i=3}^{\infty} \left\{ \ln \left[1 - e^{-\beta[E(i)-\mu]} \right] - \ln \left[1 - e^{-\beta[E(i)+\mu]} \right] \right\}. \quad (\text{E.9})$$

Considerando a regra de quantização da Eq.(E.2), podemos transformar o somatório numa integral, na forma:

$$\sum_{i=3}^{\infty} f(i_x, i_y, i_z) \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} f(\vec{k}). \quad (\text{E.10})$$

Dessa forma, a Eq.(E.9) é escrita como:

$$\Phi(T, V, \mu) = \frac{1}{\beta} \frac{V}{(2\pi)^3} \left\{ \int d^3\vec{k} \ln \left[1 - e^{-\beta[E(\vec{k})-\mu]} \right] + \int d^3\vec{k} \ln \left[1 - e^{-\beta[E(\vec{k})+\mu]} \right] \right\}. \quad (\text{E.11})$$

Como a nossa energia $E(\vec{k})$ depende apenas do módulo de \vec{k} , permite transformar a integral tripla numa integral de uma dimensão, via lei de transformação,

$$d^3\vec{k} = 4\pi k^2 dk,$$

temos:

$$\Phi(T, V, \mu) = \frac{1}{\beta} \frac{V}{2\pi^2} \left\{ \int_0^{\infty} k^2 dk \ln \left[1 - e^{-\beta[E(k)-\mu]} \right] + \int_0^{\infty} k^2 dk \ln \left[1 - e^{-\beta[E(k)+\mu]} \right] \right\}. \quad (\text{E.12})$$

Munido desse potencial termodinâmico, podemos extrair o número de partículas médias submetidas ao banho térmico,

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mu},$$

que nos leva a expressão:

$$\langle N \rangle = \frac{V}{2\pi^2} \left\{ \int_0^{\infty} k^2 dk \left[\frac{e^{-\beta[E(k)-\mu]}}{1 - e^{-\beta[E(k)-\mu]}} \right] - \int_0^{\infty} k^2 dk \left[\frac{e^{-\beta[E(k)+\mu]}}{1 - e^{-\beta[E(k)+\mu]}} \right] \right\}. \quad (\text{E.13})$$

Considerando o operador de número da Eq.(E.1), podemos extrair os valores esperados dos operadores $a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$ e $b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})$ no estado físico térmico, comparando com a expressão para o número de partículas obtido da mecânica estatística, Eq.(E.13), assim temos:

$$\langle a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \rangle = \frac{V}{2\pi^3} \frac{1}{e^{\beta[E(\vec{k})-\mu]} - 1} \quad (\text{E.14})$$

e

$$\langle b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \rangle = \frac{V}{2\pi^3} \frac{1}{e^{\beta[E(\vec{k})+\mu]} - 1}. \quad (\text{E.15})$$

Para $\langle N \rangle = 0$, só temos uma única solução, $\mu = 0$, de forma que:

$$\langle a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \rangle = \langle b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \rangle = \frac{V}{2\pi^3} \frac{q^0(k)}{e^{\beta E(\vec{k})} - 1}. \quad (\text{E.16})$$

Na aproximação de campo médio temos as equações:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{g_{D\bar{D}\sigma}}{m_\sigma^2} \rho_s \quad (\text{E.17})$$

e

$$\langle \omega^0 \rangle = \frac{g_{D\bar{D}\omega}}{m_\omega^2} \rho_v, \quad (\text{E.18})$$

onde:

$$\rho_v = \frac{\langle \int d^3\vec{x} i((\partial^0 D)D^\dagger - D\partial^0 D^\dagger) \rangle}{V} \quad (\text{E.19})$$

e

$$\rho_s = \frac{\langle \int d^3\vec{x} D(x)D^\dagger(x) \rangle}{V}. \quad (\text{E.20})$$

Considerando a identidade:

$$i[(\partial_0\varphi)\varphi^\dagger - \varphi(\partial_0\varphi^\dagger)] = i\left[\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}\tilde{\varphi}^\dagger - \tilde{\varphi}\frac{\partial\tilde{\varphi}^\dagger}{\partial t}\right] + [4g_{D\bar{D}\omega}\langle\omega^0\rangle\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}^\dagger], \quad (\text{E.21})$$

onde: $\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}^\dagger = \varphi\varphi^\dagger$, temos:

$$\rho_v = \frac{2\langle N \rangle}{V} + 4g_{D\bar{D}\omega}\langle\omega^0\rangle\rho_s. \quad (\text{E.22})$$

Para $\langle N \rangle = 0$, temos:

$$\rho_v = 4g_{D\bar{D}\omega}\langle\omega^0\rangle\rho_s. \quad (\text{E.23})$$

Substituindo a Eq.(E.23) na equação de campo Eq.(E.18), para o caso em que $\langle\omega^0\rangle \neq 0$, temos o valor para a densidade escalar dada por:

$$\rho_s = \frac{m_\omega^2}{4g_{D\bar{D}\omega}^2}. \quad (\text{E.24})$$

Este é um resultado que entra em conflito com o valor da densidade escalar obtido na Eq.(D.20), que substituindo com os valores esperados para os operadores de criação e aniquilação, fornecem uma equação autoconsistente para o campo sigma e consequentemente uma densidade não uniforme. Logo, temos a solução:

$$\langle \omega^0 \rangle = 0.$$

Apêndice F

Método de Gauss-Laguerre

O método de Gauss, possibilita o cálculo de uma integral como uma soma, do tipo:

$$\int_a^b K(x)f(x)dx = \sum_{m=1}^N W_m f(x_m), \quad (\text{F.1})$$

onde $K(x)$ é uma função típica de um espectro de funções $f(x)$, W_m é o peso específico e x_m ponto específico.

Ao contrário dos métodos numéricos usuais, Simpson e Trapézio, o método de Gauss é exato para funções polinomiais.

F.1 Exemplo N=2

Considere $f(x)$ escrito numa expansão de Taylor,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Aplicando a definição da Eq.(F.1), ficamos com um sistema independente de a_0, a_1, \dots dado por:

$$W_1x_1^j + W_2x_2^j = \int_a^b K(x)x^j dx, j \geq 0, \quad (\text{F.2})$$

Assim para N=2, temos que para obter univocamente os pesos W_1, W_2 e os pontos x_1, x_2 são necessárias quatro equações. Como o número de equações é dado por grau[$f(x)$]+1, temos que o grau máximo de $f(x)$ tem que ser 3, para que possamos calcular os pesos e pontos específicos através do sistema.

$$\begin{cases} W_1 + W_2 &= \int_a^b K(x)dx, \\ W_1x_1 + W_2x_2 &= \int_a^b K(x)x dx, \\ W_1x_1^2 + W_2x_2^2 &= \int_a^b K(x)x^2 dx, \\ W_1x_1^3 + W_2x_2^3 &= \int_a^b K(x)x^3 dx \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

Assim sendo especificados $K(x), a, b$ obtemos para qualquer função de grau 3, a integral no formato de soma,

$$\int_a^b K(x)f_3(x)dx = W_1f_3(x_1) + W_2f_3(x_2). \quad (\text{F.4})$$

Para $f(x)$ com grau inferior a 3 o método também se aplica, pois em todos os casos o sistema será satisfeito. Do mesmo modo, se desenvolvermos o método mágico para uma função de grau N , certamente o método valerá para todas as funções de grau inferior a N .

F.2 Espaços Lineares Funcionais

Com o objetivo de evitarmos os sistemas não lineares dados pelas Eqs.(F.3) que envolvem o cálculo dos pesos e pontos específicos, utilizamos álgebra linear. Do exemplo anterior reescrevemos a Eq.(F.1) como

$$\int_a^b K(x)f_{\leq 2N-1}(x)dx = \sum_{m=1}^N W_m f_{\leq 2N-1}(x_m). \quad (\text{F.5})$$

Escolhemos uma base do espaço vetorial $\{\phi_n(x)\}$, onde n é o grau da função da base. O produto interno neste espaço vetorial é dado, para as funções da base, por

$$\int_a^b K(x)\phi_n(x)\phi_j(x)dx = c_j\delta_{n,j}. \quad (\text{F.6})$$

Então, podemos expressar uma função de grau $(N-1)$ neste espaço por

$$q_{N-1}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} q_i\phi_i(x) \quad , q_i \in R. \quad (\text{F.7})$$

Além disso, podemos construir uma função $f_{2N-1}(x)$ através de

$$f_{2N-1}(x) = \phi_N(x)q_{N-1}(x).$$

Aplicando o método mágico de Gauss, Eq.(F.5), temos

$$\int_a^b K(x)f_{\leq 2N-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{N-1} q_i \int_a^b K(x)\phi_N(x)\phi_i(x)dx. \quad (\text{F.8})$$

Por definição do produto interno, Eq.(F.6), temos que a integral do lado direito desta equação é zero e assim obtemos

$$\sum_{m=1}^N W_m q_{N-1}(x_m) \phi_N(x_m) = 0. \quad (\text{F.9})$$

Como $q_{N-1}(x)$ é uma função arbitrária e os pesos e raízes deverão valer para qualquer tipo de função, temos que a única solução permitida é

$$\phi_N(x_m) = 0 \quad , 1 \leq m \leq N. \quad (\text{F.10})$$

Assim o cálculo dos pontos específicos neste formalismo se transformou num problema mais simples de encontrar raízes. Para obter os pesos específicos, iremos considerar a função interpoladora de Lagrange,

$$l_{j,N}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_N)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_N)}. \quad (\text{F.11})$$

Esta expressão é derivada a partir da expansão de Taylor e da regra de Cramer. A propriedade interpoladora desta função vêm do fato de que

$$l_{j,N}(x_k) = \delta_{j,k}. \quad (\text{F.12})$$

Aplicando o método mágico, Eq.(F.5), num polinômio de grau inferior como discutido no exemplo, temos que

$$\int_a^b K(x) l_{j,N}(x) dx = \sum_{m=1}^N W_m l_{j,N}(x_m) = W_j, \quad (\text{F.13})$$

Assim temos os pesos via integração e os pontos via cálculo de raízes.

F.3 Construção da Base do Espaço Vetorial

Vimos como foi fundamental no cálculo formal dos pesos e dos pontos específicos a existência do produto interno Eq.(F.6). A base conveniente é dada por diversas funções usualmente estudadas Física Matemática, fazendo surgir então métodos específicos de integração como, por exemplo; Gauss-Laguerre, cuja base $\{\phi_j(x)\}$ é formada pelos polinômios de Laguerre, Gauss-Legendre, cuja base $\{\phi_j(x)\}$ é formada pelos polinômios de Legendre e assim por diante.

F.4 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre de grau (n) obedecem a equação diferencial

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n + (1-x) \frac{d}{dx} L_n + n L_n = 0. \quad (\text{F.14})$$

Esta equação diferencial nos fornece os coeficientes do polinômio e a relação

$$\int_0^\infty e^{-x} L_k(x) L_j(x) dx = \delta_{k,j} \int_0^\infty e^{-x} L_k(x)^2 dx. \quad (\text{F.15})$$

Assim, no método de Gauss-Laguerre, temos a base do espaço vetorial

$$K(x) = e^{-x}, \quad \{\phi_n(x)\} = \{L_n(x)\} \quad (\text{F.16})$$

e, no cálculo dos pesos e pontos específicos,

$$L_N(x_m) = 0.$$

O cálculo dos pesos específicos, é feito via alimentação do polinômio interpolador de Lagrange com os pontos específicos, obtendo-se

$$W_m = \int_0^\infty e^{-x} l_{m,N}(x) dx.$$

Para os outros métodos, como Gauss-Legendre, o procedimento é análogo.

F.5 Método de Gauss-Laguerre

Agora estamos preparados para via método de Gauss-Laguerre, para realizar qualquer integral da forma

$$\int_0^\infty e^{-x} f_{\leq 2N-1}(x) dx = \sum_{m=1}^N W_m f_{\leq 2N-1}(x_m). \quad (\text{F.17})$$

Para $f(x)$ sendo um polinômio de grau máximo $2N-1$, a integral é calculada exatamente por essa soma. Porém o nosso interesse consiste em trabalhar com $f(x)$ qualquer, então devemos supor que essa função convirja para um polinômio de grau até $2N-1$. Podemos assim usar a quadratura também nestes casos, obtendo um resultado rápido e bastante preciso para o valor da integral.

Considere o exemplo

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} (e^x e^{-x^2}) dx = \sum_{m=1}^N W_m e^{x_m - x_m^2}, \quad (\text{F.18})$$

No presente trabalho, desenvolvermos um programa no Maple que usa $N=32$.

Referências Bibliográficas

- [1] N. A. Tahir *et al.*, “The CERN Large Hadron Collider as a tool to study high-energy density matter,” *Phys. Rev. Lett.* 94, 135004 (2005).
- [2] N. A. Tahir, A. Shutov, I. V. Lomonosov, V. Gryaznov, A. R. Piriz, D. H. H. Hoffmann, V. E. Fortov, V. Kain and R. Schmidt, “Potential of CERN large hadron collider to study high-energy-density states in matter,” *J. Phys. IV France* 133, 1085-1088, (2006).
- [3] F. Prino [ALICE Collaboration], “Open heavy flavour reconstruction in the ALICE central barrel,” 34th International Conference on High Energy Physics, Philadelphia, (2008), arXiv:0810.3086 [nucl-ex].
- [4] C. M. Ko, W. Liu and B. W. Zhang, “Thermal charm production at LHC,” *Acta Phys. Polon. Supp.* 1 (2008) 691.
- [5] E. Rutherford, “The Scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom,” *Philos. Mag*, 21:669-688, April (1911).
- [6] M. Gell-Mann, “A schematic model of baryons and mesons,” *Phys. Lett.* 8, (1964), 214.
- [7] S. K. Choi *et al.* [Belle Collaboration], “Observation of a new narrow charmonium state in exclusive $B^+ \rightarrow K^+ \pi^+ \pi^- J/\psi$ decays,” *Phys. Rev. Lett.* 91, 262001 (2003) [arXiv:hep-ex/0309032].
- [8] S. K. Choi *et al.* [BELLE Coll.], “Observation of a near-threshold omega J/ψ mass enhancement in exclusive $B^- \rightarrow K^- \omega J/\psi$ decays,” *Phys. Rev. Lett.* 94, 182002 (2005); B. Aubert *et al.* [BaBar Collaboration], “Observation

- of $Y(3940) \rightarrow J/\psi\omega$ in $B \rightarrow J/\psi\omega K$ at BABAR,” Phys. Rev. Lett. 101, 082001 (2008) [arXiv:0711.2047 [hep-ex]].
- [9] S. K. Choi *et al.* [BELLE Collaboration], “Observation of a resonance-like structure in the $\pi i^\pm\psi'$ mass distribution in exclusive $B \rightarrow K\pi^\pm\psi'$ decays,” Phys. Rev. Lett. 100, 142001 (2008) [arXiv:0708.1790 [hep-ex]].
- [10] T. Aaltonen *et al.* [CDF Collaboration], “Evidence for a Narrow Near-Threshold Structure in the $J/\psi\phi$ Mass Spectrum in $B^+ \rightarrow J/\psi\phi K^+$ Decays,” [arXiv:0903.2229 [hep-ex]].
- [11] R. D. Matheus, F. S. Navarra, M. Nielsen and R. Rodrigues da Silva, “Do the QCD sum rules support four-quark states?,” Phys. Rev. D 76, 056005 (2007) [arXiv:0705.1357 [hep-ph]].
- [12] R. D. Matheus, S. Narison, M. Nielsen and J. M. Richard, “Can the X(3872) be a 1^{++} four-quark state?,” Phys. Rev. D 75, 014005 (2007) [arXiv:hep-ph/0608297].
- [13] J. R. Zhang and M. Q. Huang, “ $(Q\bar{s})^{(*)}(\bar{Q}s)^{(*)}$ molecular states from QCD sum rules: A view on Y(4140),” (2009) [arXiv:0905.4178 [hep-ph]].
- [14] S. H. Lee, A. Mihara, F. S. Navarra and M. Nielsen, “QCD sum rules study of the meson $Z^+(4430)$,” Phys. Lett. B 661, 28 (2008) [arXiv:0710.1029 [hep-ph]].
- [15] M. E. Bracco, S. H. Lee, M. Nielsen and R. Rodrigues da Silva, “The meson $Z^+(4430)$ as a tetraquark state,” Phys. Lett. B 671, 240 (2009) [arXiv:0807.3275 [hep-ph]].
- [16] C. McNeile, “Lattice approach to threshold states,” arXiv:hep-ph/0610139.
- [17] T. W. Chiu and T. H. Hsieh [TWQCD Collaboration], “X(3872) in lattice QCD with exact chiral symmetry,” Phys. Lett. B 646, 95 (2007) [arXiv:hep-ph/0603207].
- [18] M. Loan, Z. Luo, Y. Y. Lam, “Lowest-lying tetra-quark hadrons in anisotropic lattice QCD,” Eur. Phys. J. C 57: 579-587, (2008).

- [19] N. A. Törnqvist, “Possible large deuteronlike meson-meson states bound by pions”, Phys. Rev. Lett. 67, 556 - 559, (1991).
- [20] N. A. Tornqvist, “From the deuteron to deusons, an analysis of deuteron - like meson meson bound states,” Z. Phys. C 61, 525 (1994) [arXiv:hep-ph/9310247].
- [21] N. A. Tornqvist, “Isospin breaking of the narrow charmonium state of Belle at 3872-MeV as a deuson,” Phys. Lett. B 590, 209 (2004) [arXiv:hep-ph/0402237].
- [22] X. Liu, Y. R. Liu, W. Z. Deng; S. L. Zhu, “Is $Z^+(4430)$ a loosely bound molecular state?,” Phys. Rev. D 77, 034003 (2008) [arXiv:0711.0494 [hep-ph]].
- [23] X. Liu, Y. R. Liu, W. Z. Deng; S. L. Zhu, “ $Z^+(4430)$ as a $D'_1 D^*$ ($D_1 D^*$) molecular state,” Phys. Rev. D 77, 094015 (2008) [arXiv:0803.1295 [hep-ph]].
- [24] B. D. Serot, J. D. Walecka, “Advances in Nuclear Physics”. New York: Plenum Press, 1986. v. 16.
- [25] J. D. Walecka, “Theoretical nuclear and subnuclear physics”. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [26] A. Delfino, J. B. da Silva, M. Malheiro, M. Chiapparini and M. E. Bracco, “Hadronic entropy enhancement and low density QGP,” J. Phys. G 28, 2249 (2002) [arXiv:hep-ph/0212302].
- [27] Z. G. Tan; A. Bonasera, “Mean field effects in the quark-gluon plasma,” Nucl. Phys. A 784, 368 (2007) [arXiv:nucl-th/0611071].
- [28] S. K. Ghosh, S. C. Phatak; P. K. Sahu, “Quark hadron phase transition and hybrid stars,” Z. Phys. A 352, 457 (1995) [arXiv:nucl-th/9407009].
- [29] H. Yukawa, “On the interaction of elementary particle I, ”Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 17 (1935) 48.
- [30] H. Yukawa; S. Sakata, “On the Theory of β - disintegration an allied phenomenon,”. Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 17 (1935) 379.

- [31] Lattes, C. M. G.; Muirhead, H.; Occhialini, G. P. S.; Powell, C. F., “Processes Involving Charged Mesons,” *Nature*, 159, p. 694-697 (1947).
- [32] Gardner, E.; Lattes, C. M. G, “Production of mesons by the 184-inch Berkeley cyclotron,” *Science*, 107, p.270-271, (1948).
- [33] G. Zweig, “An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking I,” CERN-8182-TH-401, (1964).
- [34] G. Zweig, “An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking II,” CERN-8419-TH-412, (1964).
- [35] S. Weinberg, “Non-Abelian Gauge Theories of the Strong Interactions,” *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 494.
- [36] J. Boguta and A. R. Bodmer, “Relativistic Calculation Of Nuclear Matter And The Nuclear Surface,” *Nucl. Phys. A* 292 (1977).
- [37] G. A. Lalazissis, J. Konig and P. Ring, “A New Parameterization for the Lagrangian Density of Relativistic Mean Field Theory,” *Phys. Rev. C* 55, 540 (1997) [arXiv:nucl-th/9607039].
- [38] C. J. Horowitz and B. D. Serot, “Selfconsistent Hartree Description Of Finite Nuclei In A Relativistic Quantum Field Theory,” *Nucl. Phys. A* 368, 503 (1981).
- [39] P. Wang, Z. Y. Zhang, Y. W. Yu, R. K. Su and Q. Song, “Strange Hadronic Matter In A Chiral SU(3) Quark Mean Field Model,” *Nucl. Phys. A* 688 (2001) 791.
- [40] E. E. Kolomeitsev and D. N. Voskresensky, “Relativistic mean-field models with effective hadron masses and coupling constants, and rho-condensation,” *Nucl. Phys. A* 759, 373 (2005)[arXiv:nucl-th/0410063].
- [41] P. Ring, “Relativistic Mean Field Theory With Density Dependent Meson Couplings,” *J. Phys. Conf. Ser.* 49, 93 (2006).

- [42] F. Karsch, “Lattice QCD at high temperature and density,” *Lect. Notes Phys.* 583, 209 (2002) [arXiv:hep-lat/0106019].
- [43] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], “Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions,” *Nucl. Phys. A* 757, 102 (2005) [arXiv:nucl-ex/0501009].
- [44] G. S. F. Stephans; “critRHIC: the RHIC low energy program,” *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 32 S447-S453, (2006).
- [45] M. Xu, M. Yu; L. Liu, “The second-order phase transition in the QCD phase diagram and a new approach for locating the critical point using RHIC low-energy-scan data,” *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 36 06404, (2009).
- [46] M. Asakawa, “QCD critical point and experimental observables,” *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 36 064042, (2009).
- [47] J. B. da Silva, “Propriedades Médias Nucleares na Teoria Relativística de Campo Médio”, *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa*, (1997).
- [48] G. J. Ding, “Are $Y(4260)$ and $Z_2^+(4250)$ are D_1D or D_0D^* Hadronic Molecules?,” *Phys. Rev. D* 79, 014001 (2009) [arXiv:0809.4818 [hep-ph]].
- [49] M. O. C. Gomes, “Teoria Quântica dos Campos,” Edusp, São Paulo, (2002).
- [50] M. Kaku, “Quantum Field Theory: a modern introduction,” Oxford, New Yorkm (1993).
- [51] K. Huang, “Statistical Mechanics,” second edition, USA, Jonh Wiley and Sons, (1987).
- [52] M. Srednick, “Quantum Fiel Theory,” Cambridge, New York, (2007).
- [53] C. Amsler *et al.* (Particle Data Group), *PL B667*, 1 (2008) and 2009 partial update for the 2010 edition (URL: <http://pdg.lbl.gov>).

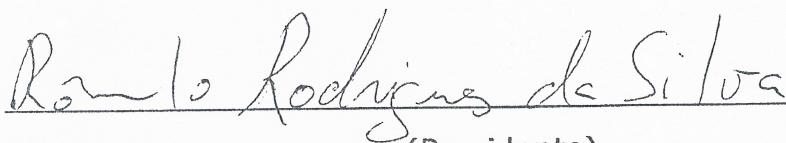
- [54] M. J. Teper, “Physics from the lattice: Glueballs in QCD, topology, SU(N) for all N,” arXiv:hep-lat/9711011.
- [55] E. Iancu and A. H. Mueller, “A lattice test of strong coupling behaviour in QCD at finite temperature,” arXiv:0906.3175 [hep-ph].
- [56] P. Petreczky, “Recent progress in lattice QCD at finite temperature,” arXiv:0906.0502 [nucl-th].
- [57] W. Greiner, L. Neise, H. Stöcker, “Thermodynamics and Statistical Mechanics,” New York, Springer-Verlag, (1994).
- [58] C. B. Das, S. Das Gupta and A. Z. Mekjian, “Specific heat at constant volume in the thermodynamic model,” Phys. Rev. C 68, 031601 (2003) [arXiv:nucl-th/0307019].
- [59] A. Delfino, M. Jansen and V. S. Timoteo, “Phase transition of the nucleon-antinucleon plasma at different ratios,” Phys. Rev. C 78, 034909 (2008) [arXiv:0809.2715 [nucl-th]].
- [60] M. Nielsen, “Review and interpretation of the new heavy states discovered at the B^- factories,” PoS C ONFINEMENT8, 021 (2008) [arXiv:0810.5526 [hep-ph]].
- [61] X. Liu and S. L. Zhu, “Y(4143) is probably a molecular partner of Y(3930),” arXiv:0903.2529 [hep-ph].

MORGANA LÍGIA DE FARIAS FREIRE

PROPRIEDADES TERMODINÂMICAS DA MATÉRIA DE MÉSONS D-D

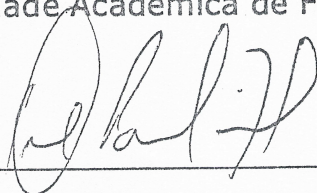
Dissertação aprovada em 27/08/2009

BANCA EXAMINADORA



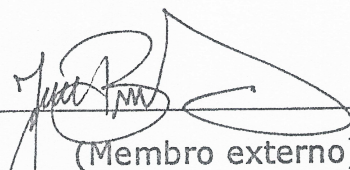
(Presidente)

Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Paulo Sérgio Rodrigues da Silva
Departamento de Física – UFPB



(Membro externo)

Prof. Dr. João Batista da Silva
Unidade Acadêmica de Educação – UFCG