

UNIVERSIDADE FEDERAL DA CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Quantização do Campo Vetorial D_s^*

Emanuel Cunha

CAMPINA GRANDE

- Março de 2011 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DA CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Quantização do Campo Vetorial D_s^*

Emanuel Cunha

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- março 2011 -



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCCG

C972q Cunha, Emanuel
A Quantização do Campo Vetorial D_s^* / Emanuel Cunha. – Campina Grande, 2011.
45 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.
Orientador: Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva
Referências.

1. Física de Partículas. 2. Quantização de Campo Vetorial. I. Título.

CDU 539.12 (043)

EMANUEL CUNHA

A QUANTIZAÇÃO DO CAMPO VETORIAL DS*

Dissertação aprovada em 30/03/2011

BANCA EXAMINADORA

Rômulo Rodrigues da Silva

(Presidente)

Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva
Unidade Acadêmica de Física - UFCG

Francisco de Assis de Brito

(Membro interno)

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Unidade Acadêmica de Física - UFCG

Tiago Homero Mariz do Nascimento

(Membro externo)

Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento
Instituto de Física - UFAL

Ao Grande Arquiteto do Universo.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Rômulo Rodrigues da Silva, pela sua orientação enérgica, objetiva e empolgante, pelos estímulos e pela competência na condução deste trabalho.

- Aos coordenadores da Unidade Acadêmica de Física, em particular, ao Prof. Francisco de Assis de Brito pelo seu constante incentivo e pela sua dedicação ao curso.

- A todos os professores desta Unidade Acadêmica que contribuíram com a minha formação.

- Aos meus familiares pelo irrestrito apoio, paciência e incentivo.

- Ao brilhante grupo de HÁDRONS: Fernando José de Almeida Gama e Celson Agripino, pelas frutíferas discussões e resultados alcançados.

- Aos colegas de sala: Jardel Lucena, Renato Braga, José Jacinto, Priscila, Waldson, Wellington, Fábio Alves, Heydson Henriques, Aubery Vital, Emidio, Neymar, Antonildo entre outros.

- Aos colegas da Pós-graduação e funcionários da Unidade Acadêmica de Física pela grata convivência durante a nossa permanência no curso.

- Ao apoio financeiro da CAPES/REUNI.

- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho investigamos a matéria de mésons $D_s^{*+} \bar{D}_s^{*-}$, em uma abordagem de troca de mésons σ , η e ϕ , usando a teoria relativística de campo médio. Encontramos as regras de quantização para o campo vetorial D_s^* , submetido a um campo interagente, assim como o operador de número.

Nossos resultados possibilitam um futuro tratamento termodinâmico para essa matéria mesônica, como também uma justificativa teórica para a existência de estados moleculares mesônicos, em especial a $Y(4140)$.

ABSTRACT

We investigate the mesons matter $D_s^{*+}\bar{D}_s^{*-}$ in the relativistic mean field theory including the mesons exchange σ , η and ϕ among D_s^{*+} and D_s^{*-} . We get the quantization of the vector field D_s^* in interacting field and get the number operator. Our results could be used in a future thermodynamic treatment and could be justified if the molecular meson states in particular the Y(4140) exists.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Matéria de Hádrons	4
2.1	A Matéria Mesônica	4
2.2	A $Y(4140)$	7
2.3	Modelo de Walecka	9
2.4	O Plasma de Quarks e Glúons versus Matéria de Mésons	10
3	Formalismo Teórico	12
3.1	O Modelo	12
4	Conclusão e Perspectivas	20
A	Operadores de Criação e Aniquilação	21
B	Determinação do Operador Número	33
C	Os Vetores de Polarização	38

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Matéria de Hádrons	4
2.1	A Matéria Mesônica	4
2.2	A $Y(4140)$	7
2.3	Modelo de Walecka	9
2.4	O Plasma de Quarks e Glúons versus Matéria de Mésons	10
3	Formalismo Teórico	12
3.1	O Modelo	12
4	Conclusão e Perspectivas	20
A	Operadores de Criação e Aniquilação	21
B	Determinação do Operador Número	33
C	Os Vetores de Polarização	38

Lista de Figuras

1.1	Diagrama de transição de fases da matéria bosônica para condensado de Bose-Einstein	2
2.1	produção da $Y(4140)$ [1]	8
2.2	Distribuição do ajuste da massa invariante de $J/\psi \phi$ [3]	9
2.3	Diagrama das fases de interação forte da matéria.	11

Capítulo 1

Introdução

Em 2009 o experimento CDF Collaboration noticiou a descoberta de uma nova partícula: a $Y(4140)$, encontrada no decaimento do méson B^+ . Esta partícula não pode ser interpretada como um estado ligado de dois quarks, pois ela decai em $J/\psi \phi$ [1, 2, 3]. Essa partícula então é considerada exótica. As possíveis estruturas sugeridas para $Y(4140)$ são: um exótico charmonium híbrido [4, 5]; um estado molecular $D_s^{*+} D_s^{*-}$ [6, 7, 8, 9, 10, 11]; ou um estado tetraquark $c\bar{c}s\bar{s}$ [12, 13]. Por outro lado, na Ref.[14] os autores mostram que a $Y(4140)$ não representa nenhum estado de ressonância, sendo apenas uma consequência natural da abertura do canal $J/\psi \phi$. Atualmente existem várias abordagens teóricas para estudar a $Y(4140)$ em uma configuração molecular. As mais utilizadas são: a obtenção do potencial não-relativístico via troca de mésons [15] e as regras de soma da QCD [16, 17, 18, 19].

A molécula de mésons é análoga ao dêuteron, que é o estado ligado formado por um próton e um nêutron. Partindo dessa analogia, podemos usar a teoria relativística de campo médio de Walecka [20, 21] com a finalidade de extrair informações sobre o comportamento de muitos corpos dessa matéria mesônica e por conseguinte examinar a possibilidade de formação de estruturas multimésons dessa teoria. Essas estruturas podem surgir devido à existência de transições de fase, que podem ocorrer no regime de baixas ou em altas temperaturas e pressões. Para a matéria de nucleons temos que a baixas temperaturas esta matéria é encontrada no estado líquido. Por outro lado, com o aumento da temperatura há uma transição de fase para o estado gasoso [20, 21].

Para o caso da matéria de píons a situação é inversa, ou seja, a baixas temperaturas a matéria é encontrada no estado gasoso, ao passo que a altas temperaturas, entre 100 e 200 MeV, a matéria é encontrada no estado líquido [22]. A matéria de mésons D [23] também exibe uma transição de fase, onde a temperatura prevista é de 1,2 GeV. Os autores da Ref.[23] concluíram que a matéria de mésons D transitou de um gás interagente para um estado de um gás com massa zero, que poderia ser interpretado como um sinal do desconfinamento da matéria charmosa [24].

Um outro tipo de transição de fase, que ocorre com a matéria bosônica ou (mesônica), acontece em sistemas de muitos átomos submetidos a uma temperatura abaixo de um determinado limiar, T_0 , ver Fig.(1.1). Estes átomos se precipitam para o estado de energia mais baixa, conhecido como condensado de Bose-Einstein (CBE). Para que seja obtido o condensado é necessário que o potencial químico seja zero, permitindo assim extrair a temperatura crítica em termos da densidade e da massa desses átomos [25]. Dizemos então que o sistema exibe uma transição de fase e que abaixo desta temperatura os átomos se organizam em um novo estado da matéria, o CBE. É importante destacar que esse efeito só é observado para bósons massivos. Para sistemas atômicos como um gás de Hélio, a temperatura crítica é muito baixa, por volta de 2,17 K [25]. As propriedades físicas desse condensado se parecem com um superfluido [25].

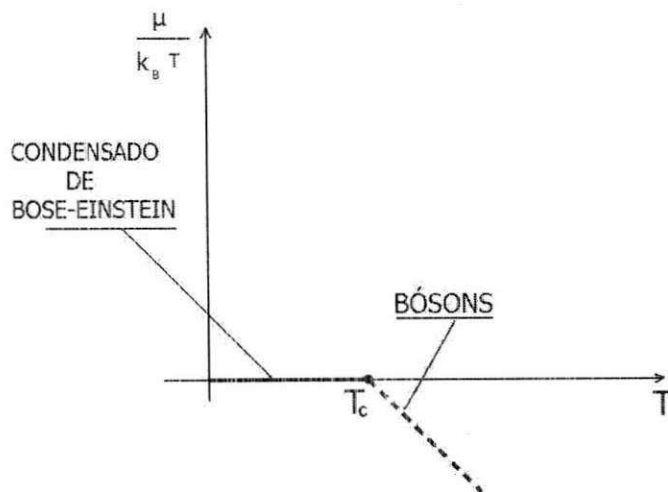


Figura 1.1: Diagrama de transição de fases da matéria bosônica para condensado de Bose-Einstein

Outro tipo de transição de fase foi obtido em 2010, no famoso Grande Colisor de Hádrons ou LHC, em pleno funcionamento no Centro Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN), localizado nas proximidades de Genebra na Suíça. Este acelerador de partículas que possui uma energia colossal, maior do que 7 TeV por nucleon [26, 27]. Dessa forma, tem a capacidade de estudar a matéria de mésons[28] em condições extremas de energia e temperatura, semelhantes as condições ocorridas nos primeiros instantes após o Big Bang, que é a transição para o plasma de quarks e glúons [28].

Neste trabalho iremos usar a teoria relativística de campo médio, desenvolvida inicialmente em 1974 por Dirk Walecka, com o objetivo de estudar a matéria nuclear, onde a interação dos nucleons foi tratada via troca dos mésons sigma e ômega.

Nosso objetivo consiste em estudar a matéria de mésons $D_s^{*+} \bar{D}_s^{*-}$ em uma abordagem de troca de mésons σ , η e ϕ , usando a teoria relativística de campo médio, obtendo assim a quantização para o campo vetorial D_s^* submetido a um campo interagente, onde extraímos as devidas regras de quantização e o operador de número. Isso nos possibilitará um futuro tratamento termodinâmico para essa matéria mesônica.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, apresentamos uma breve descrição da matéria hadrônica, com especial atenção para os mésons exóticos, um breve estudo sobre a $Y(4140)$, uma apresentação sobre o modelo de Walecka, e por último, uma introdução ao plasma de quarks e glúons. No capítulo 3, apresentamos o formalismo teórico para a matéria de mésons $D_s^{*+} - \bar{D}_s^{*-}$. No último capítulo, apresentamos a conclusão do trabalho e perspectivas futuras.

No apêndice A, construímos todos os operadores de criação e aniquilação necessários para a quantização do nosso sistema. No apêndice B, determinamos o operador de número e por fim no apêndice C construímos os vetores de polarização, indispensáveis na construção de campos vetoriais.

Capítulo 2

Matéria de Hádrons

Neste capítulo são apresentadas características da Matéria Mesônica, a $Y(4140)$, as teorias efetivas que descrevem os hádrons e uma introdução ao Plasma de Quark Glúons- QGP.

2.1 A Matéria Mesônica

As interações fortes, responsáveis por formarem os hádrons a partir de estados ligados de quarks, são descritas por uma teoria de campo não-abeliana chamada Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês Quantum ChromoDynamics) [29]. Na QCD, as únicas partículas a sentirem os efeitos da interação forte são aquelas que possuem a chamada carga de cor, os quarks e os glúons. Com esta carga, os quarks tornam-se “coloridos” e interagem via troca de glúons. Note portanto que existe uma analogia com a Eletrodinâmica Quântica (QED, do inglês Quantum ElectroDynamics), onde as partículas carregadas, os léptons, interagem por meio da troca de fótons [30]. O primeiro a formular uma teoria “simples” para as forças nucleares foi Hideki Yukawa em 1935, baseado na troca de uma nova partícula, que ele chamou de méson π [31, 32]. O nome méson está relacionado ao fato de que a massa dessa partícula prevista por Yukawa tem um valor intermediário entre a massa do elétron e a do nêutron, de 130 MeV. Somente dez anos mais tarde, a partícula prevista por Yukawa foi observada através de experimentos envolvendo raios cósmicos, realizados pelo físico brasileiro Cesare Mansueto Giulio Lattes, mais conhecido como César Lattes, e seus colabora-

dores [33, 34].

A tabela (2.1) mostra os mésons estudados neste trabalho, organizados em termos do conteúdo de quarks (Q), isospin (I), spin (S), paridade (P), conjugação de carga (C), paridade G (G) e a massa em MeVs (M).

Tabela 2.1: Mésons estudados neste trabalho.

Méson	Q	I	S	P	C	G	M
π	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	1	0	-1	X	-1	140
σ	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	0	+1	+1	+1	400 - 1200
η	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	0	-1	+1	+1	547
ϕ	$s\bar{s}$	0	1	-1	-1	-1	1020
D_s^{*+}	$c\bar{s}$	0	1	-1	X	X	1968
J/Ψ	$c\bar{c}$	0	1	-1	-1	-1	3096
B^+	$u\bar{b}$	1/2	0	-1	X	X	5279

Fonte: Particle Data Group, [35].

A simetria existente na força nuclear, onde partículas aparentemente distintas sofrem o mesmo efeito diante das interações fortes, é chamada de Isospin (I). Como por exemplo, observe o que acontece com prótons e nêutrons que sofrem igualmente o efeito da interação nuclear, permitindo que estes sejam agrupados num dubleto chamado de nucleon. No caso do méson σ que possui isospin 0, isto significa que só existe uma única partícula observada com os mesmos números quânticos da σ [36].

O spin (S) é um número quântico que estabelece qual dentre as estatísticas disponíveis, a citar a estatística de Fermi-Dirac para férmions (partículas com spin semi-inteiro) e a estatística de Bose-Einstein para bósons (partículas com spin inteiro) devem ser utilizadas para a correta descrição termodinâmica dos entes físicos. Para os bósons não há limite no número de partículas por nível de energia, enquanto que para os férmions só podemos colocar uma partícula por nível [25].

A paridade (P) é o número quântico da partícula que demonstra a sua característica ao ser submetida a troca de sinal das coordenadas espaciais do seu hamiltoniano. Existem duas paridades, a par (+1) e a ímpar (-1). Dizemos que a partícula possui paridade par, quando sua função de onda não troca de sinal via mudança no sinal

das coordenadas espaciais, por outro lado, dizemos que uma partícula possui paridade ímpar, quando o sinal da função de onda troca de sinal [36].

A conjugação de carga (C) é uma operação análoga à paridade, onde uma partícula carregada é submetida a uma troca no sinal da carga elétrica em seu hamiltoniano [36]. Mesmo para os mésons sem carga, eles possuem o número quântico C, pois estes são compostos de quarks e a operação conjugação de carga transforma o campo dos quarks no campo conjugado de carga, mudando o sinal da corrente que descreve o méson. O sinal positivo significa $C=+1$ e negativo significa $C=-1$. Outro fato importante é que as interações fortes e as eletromagnéticas conservam a paridade e a conjugação de carga, por outro lado as interações fracas não as conservam [36].

A paridade G (G) é uma operação que combina a conjugação de carga (C) com uma rotação de Isospin (I). Esse número quântico tem então a propriedade de no espaço isospin corresponder ao espaço de reflexão do operador de conjugação de cargas. Essa propriedade de paridade permite então explicar o decaimento dos mésons ω e ρ em três e dois píons respectivamente. [37]

A QCD possui uma característica importante, que consta de que a sua constante de acoplamento decresce com o aumento da energia, tornando-a tratável no regime de altas energias. Para energias mais baixas é mais apropriado usar as teorias efetivas, que levam em conta apenas os graus de liberdade dos hádrons [24].

Vários modelos, que são construídos incorporando as propriedades fundamentais da QCD, têm-se mostrado muito úteis e confiáveis na descrição do espectro e das propriedades dos hádrons. Um deles, inspirado na proposta feita pelos físicos Murray Gell-Mann e George Zweig, que é amplamente utilizado para classificar os hádrons e calcular suas massas e constantes de decaimentos [38, 39, 40], é o Modelo dos Quarks Constituintes (CQM, do inglês Constituent Quark Model). De acordo com o CQM, os mésons são compostos de um par quark-antiquark ($q\bar{q}$), enquanto que os bárions são compostos por um tripleto de quarks (qqq). Portanto os hádrons são partículas constituídas por quarks. O hádron constituído de um número ímpar de quarks possui spin semi-inteiro e é chamado de bárion enquanto o hádron constituído de um número

par de quarks possui spin inteiro e é chamado de méson [38]. Na época, Gell-Mann imaginou que os bárions eram formados apenas por três quarks e os mésons formados por um par quark-antiquark.

Para serem observáveis físicos no CQM, as partículas devem ser estados singletos de cor (carga branca). Desta forma, mésons e bárions são formados por combinações de quarks que neutralizam a carga de cor. Note que, os quarks são partículas fundamentais carregadas com cor. Dessa forma não podem ser observados em estado livres. Este é o princípio do confinamento, que garante que os quarks ficam confinados no interior dos hádrons [29].

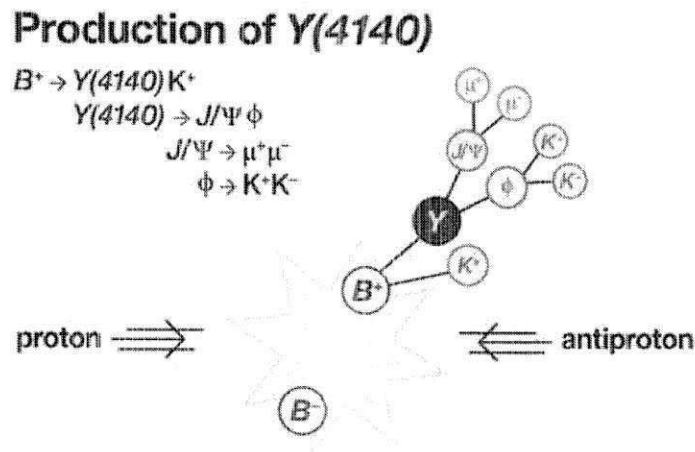
Ressaltamos que, além das estruturas convencionais $q\bar{q}$ e qqq do CQM, a QCD permite a existência das mais variadas estruturas internas para os hádrons. O quadro atual da Física de Partículas revela que a grande maioria dos hádrons observados sejam muito bem descritos pelo CQM, porém, descobertas realizadas pelas colaborações [41, 42, 43], têm indicado a possível existência de mésons com uma subestrutura muito mais complexa do que $q\bar{q}$. Esses são os chamados mésons exóticos.

2.2 A Y(4140)

Os cientistas do experimento CDF do departamento de energia do “Fermi National Accelerator Laboratory”, anunciaram em março de 2009 terem encontrado evidências de uma partícula inesperada cujas curiosas características podem revelar novas formas de como os quarks se combinam para formar a matéria. Usando exclusivamente o decaimento $B^+ \rightarrow J/\psi \phi K^+$, a CDF Collaboration observou uma estrutura estreita com massa próxima do $J/\psi \phi$ [1, 2, 3]. Os físicos chamam a partícula de Y(4140), refletindo a sua massa medida de 4140 MeV.

A Y(4140) parece desrespeitar as regras do CQM e só pode ser entendida como uma estrutura $c\bar{c}s\bar{s}$, ou seja um tetraquark. Outras interpretações, como já vimos na introdução, são: um exótico charmonium híbrido ou um estado molecular $D_s^{*+}D_s^{*-}$. Não está claro exatamente de que a Y(4140) é feita.

A Figura da referência (2.1) mostra a produção da Y(4140).



Search for structure in $J/\Psi \phi$ mass spectrum

Figura 2.1: produção da Y(4140) [1]

A partícula Y(4140) é o mais novo membro de uma família de partículas de semelhantes características incomuns observados nos últimos anos por pesquisadores no Tevatron do Fermilab, bem como no laboratório KEK, do Japão e no DOE SLAC National Accelerator Laboratory, da Califórnia[1].

A Figura (2.2) mostra a distribuição do ajuste da massa invariante de $J/\psi \phi$ [1, 3]. A massa invariante do méson Y 4140 (M_Y) é obtida de acordo com a equação

$$M_Y = \Delta M + M_{J/\psi}$$

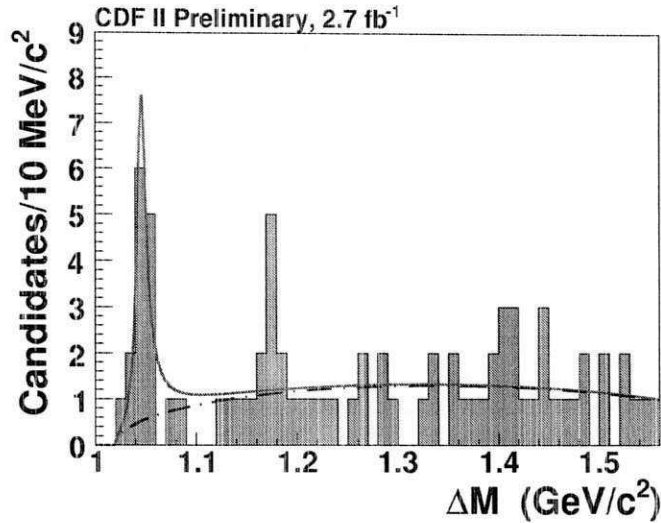


Figura 2.2: Distribuição do ajuste da massa invariante de $J/\psi \phi$ [3]

2.3 Modelo de Walecka

Analogamente ao que ocorre na QCD, na matéria nuclear os bárions interagem via troca de mediadores chamados de mésons. Essa força é a força nuclear residual, descrita por uma teoria efetiva. Em 1974 John Dirk Walecka [20, 21], retomando a idéia de Yukawa, construiu uma teoria de campos com o objetivo de estudar a matéria nuclear, onde a interação dos nucleons foi tratada via troca dos mésons sigma e ômega. Tratava de um formalismo que descrevia o comportamento de um sistema nuclear de muitos corpos. Este formalismo ficou conhecido como QHD (Quantum Hadrodynamics), ou simplesmente, modelo de Walecka. Esse modelo, associado com a aproximação do campo médio, constitui a Teoria Relativística de Campo Médio (TMF) nuclear. Essa teoria tem sido amplamente utilizada e com muito sucesso na descrição de propriedades globais nucleares e de núcleos finitos [45]. Para a matéria de mésons, há apenas um trabalho onde é aplicada a teoria do campo médio [46], onde foi estudada a matéria de píons usando um modelo em que os píons auto interagem e as constantes de acoplamento são obtidas através da análise experimental da produção de di-elétrons pela bola de fogo formada pela matéria de píons à temperatura de $T_c \approx 75 \text{ MeV}$ e potencial químico zero. Na QHD, os mésons mediadores são tratados como

campos clássicos. Com esta teoria, Walecka calculou muitos parâmetros de interesse da física nuclear, por exemplo: a energia de ligação por nucleon e a incompressibilidade. Atualmente, tem sido usada essa teoria para calcular a temperatura de transição de fase da matéria de bárions para o plasma de quarks e glúons [28, 47, 48, 49]

2.4 O Plasma de Quarks e Glúons versus Matéria de Mésons

Matéria, em mecânica estatística, é um sistema de muitos constituintes em um local equilibrado termicamente, isto é, um sistema no qual propriedades médias são especificadas por alguns observáveis globais como (temperatura, densidade de energia, carga líquida). Para diferentes valores desses observáveis o sistema deve exibir propriedades médias fundamentais, e então existirá diferentes estado da matéria, com transições de fase ocorrendo quando o sistema muda de um estado para outro. Um outro caso em que a matéria é encontrada em uma situação de elevados valores de energia e temperatura são os instantes iniciais após as colisões de íons relativísticos pesados. Essas colisões são realizadas em grandes aceleradores de partículas, o maior deles em operação é o grande colisor de hádrons, o LHC. Isso tem despertado muitas especulações sobre a constituição da matéria, como a produção do bóson de Higgs e a geração de novos tipos de matéria, dentre estas o plasma de quarks e glúons (QGP, do inglês Quark and Gluon Plasma) [50]. No QGP são encontradas as condições semelhantes ao do universo primordial [51, 52, 53], onde os quarks e os glúons não estão mais confinado nos hádrons, mas formam uma espécie de matéria fortemente interagente [28].

Para temperaturas abaixo da temperatura crítica de formação do QGP, é formada uma matéria mesônica composta basicamente de píons [54, 28]. Para potencial químico próximo de zero, a Ref. [28] afirma, veja Fig.(2.3), que para valores de temperatura superiores ao da temperatura crítica a matéria mesônica sofre uma transição de fase para um plasma de quarks e glúons com densidade de energia acerca de 0,5 a 1,0

GeV/fm^3 .

Na maioria dos casos essa matéria de píons é tratada como um gás ideal, por outro lado, a Ref. [54] afirmou que a altas temperaturas, entre 100 e 200 MeV, a matéria de píons é fortemente interagente, formando uma espécie de “matéria líquida”. Para a matéria formada de moléculas, ou matéria condensada, o comportamento da matéria com a temperatura é inverso do que ocorre com a matéria de píons. Na matéria condensada a baixas temperaturas, a matéria é encontrada no estado sólido evolui para o estado líquido, e para temperaturas elevadas, a matéria encontra-se no estado gasoso.

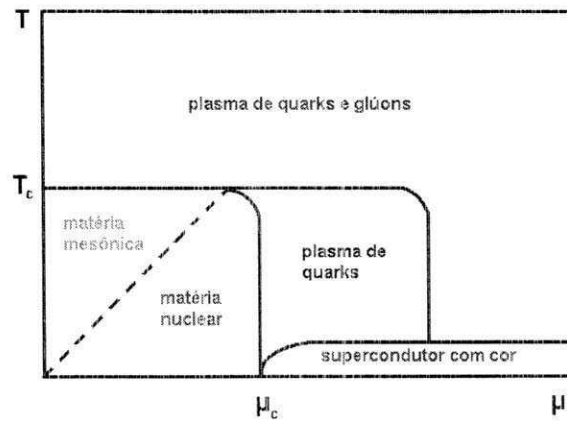


Figura 2.3: Diagrama das fases de interação forte da matéria.

Capítulo 3

Formalismo Teórico

3.1 O Modelo

Estamos interessados em quantizar o campo dos mésons D_s^{*+} e D_s^{*-} , onde usamos o modelo das referências [8, 15] para descrever a dinâmica dos referidos campos, interagindo com o méson escalar σ , com o méson pseudo-escalar η e com o méson vetorial ϕ . A escolha desses mésons se deve ao fato de serem os mais leves participantes da interação entre mésons D_s^* . Embora essa matéria de mésons seja menos abundante do que a matéria de pions, usaremos as técnicas da teoria de campo médio para construir as bases do tratamento termodinâmico. Isso nos permite testar a intensidade da força nuclear que liga dois mésons D_s^* através do estudo da massa efetiva, densidade de energia e da pressão, com o objetivo de justificar teoricamente a formação de estados multi-mésons, entre eles uma molécula $D_s^{*-} D_s^{*+}$, ou $Y(4140)$. Adotaremos a partir de agora a seguinte notação: $D_s^{*-} = D$, com isso temos $D_s^{*+} = D^\dagger$

A densidade lagrangeana para o sistema $D D^\dagger$ é dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{livre} + \mathcal{L}^{int}, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L}^{livre} é a parte da lagrangeana referente aos termos livres para cada campo individualmente e \mathcal{L}^{int} é a parte da lagrangeana referente aos termos de interação desse sistema. Expressando estas lagrangeanas em termos dos campos, temos:

$$\mathcal{L}^{livre} = \mathcal{L}_D^{livre} + \mathcal{L}_\sigma^{livre} + \mathcal{L}_\Phi^{livre} + \mathcal{L}_\eta^{livre} \quad (3.2)$$

e

$$\mathcal{L}^{int} = \mathcal{L}_{DD\Phi}^{int} + \mathcal{L}_{DD\sigma}^{int} + \mathcal{L}_{DD\eta}^{int}. \quad (3.3)$$

Adotando o sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$, as expressões das densidades das lagrangeanas livres, para cada campo individualmente, são: a densidade de lagrangeana livre para campos vetoriais carregado, [55]

$$\mathcal{L}_D^{livre} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^+ F^{\mu\nu-} + m_D^2 D_\mu D^{+\mu}, \quad (3.4)$$

a densidade de lagrangeana livre para campos escalares sem carga, ou campos reais,

$$\mathcal{L}_\sigma^{livre} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2, \quad (3.5)$$

a densidade de lagrangeana livre para campos pseudo escalares sem carga,

$$\mathcal{L}_\eta^{livre} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \frac{1}{2}m_\eta^2 \eta^2, \quad (3.6)$$

e a densidade de lagrangeana livre para campos vetoriais sem carga,

$$\mathcal{L}_\Phi^{livre} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\Phi^2 \Phi_\mu \Phi^\mu. \quad (3.7)$$

Nas expressões acima, m_D , m_σ , m_η e m_Φ são as massas dos mésons D_s^* , σ , η e Φ , ao passo que $F_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}^\dagger$ e $F^{\mu\nu}$ são os tensores antissimétricos $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu$; $F_{\mu\nu}^\dagger = \partial_\mu D_\nu^\dagger - \partial_\nu D_\mu^\dagger$ e $F^{\mu\nu} = \partial^\mu D^\nu - \partial^\nu D^\mu$, respectivamente.

As densidades de lagrangeanas de interação encontradas nas referências [8, 15] são:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{DD\phi}^{int} &= ig_{DD\phi} [(\partial_\mu D^{\nu\dagger})D_\nu - D^{\nu\dagger}(\partial_\mu D_\nu)]\Phi^\mu \\ &\quad + 4if_{DD\phi} D^{\nu\dagger} D^\mu (\partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}_{DD\sigma}^{int} = g_{DD\sigma} (\sigma D_\mu^\dagger D^\mu) \quad (3.9)$$

$$\mathcal{L}_{DD\eta}^{int} = -g_{DD\eta} \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu \eta [(D^{\mu\dagger} \partial^\alpha D^\beta - (\partial^\alpha D^{\mu\dagger}) D^\beta)] \quad (3.10)$$

Note que $f_{DD\Phi}$, $g_{DD\sigma}$ e $g_{DD\eta}$ são as constantes de acoplamento desta teoria e que estão diretamente relacionadas aos vértices $DD - (\Phi)$, $DD - (\sigma)$ e $DD - (\eta)$. Dessa forma, podemos sintetizar o nosso modelo em unidades naturais, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^+F^{\mu\nu-} + m_D^2 D_\mu D^\dagger{}^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_\Phi^2 \Phi_\mu \Phi^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) \\
& -\frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \frac{1}{2}m_\eta^2 \eta^2 + g_{DD\sigma}(\sigma D^\dagger{}^\mu D_\mu) \\
& + ig_{DD\Phi}[(\partial_\mu D^{\nu\dagger})D_\nu - D^{\nu\dagger}(\partial_\mu D_\nu)]\Phi^\mu + 4if_{DD\Phi}D^{\nu\dagger}D^\mu(\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu) \\
& -g_{DD\eta}\frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu \eta [(D^{\mu\dagger}\partial^\alpha D^\beta - (\partial^\alpha D^{\mu\dagger})D^\beta)]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

As equações de movimento para os campos gerados pela lagrangeana Eq. (3.11), são:

$$\partial_\mu(\partial^\mu \sigma) + m_\sigma^2 \sigma = g_{DD\sigma} D^\mu D^\dagger{}_\mu, \tag{3.12}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \eta + m_\eta^2 \eta = g_{DD\eta} \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu [(D^{\mu\dagger} \partial^\alpha D^\beta - (\partial^\alpha D^{\mu\dagger}) D^\beta)], \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu - m_\phi^2 \phi^\nu = & 4if_{DD\Phi} \partial_\mu (D^{\nu\dagger} D^\mu - D^{\mu\dagger} D^\nu) \\
& -ig_{DD\Phi} [(\partial^\nu D^{\mu\dagger}) D_\mu - D^{\mu\dagger} (\partial^\nu D_\mu)],
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \partial^\mu D^\nu + m_D^2 D^\nu = & 2ig_{DD\Phi} (\partial_\mu D^\nu) \phi^\mu - g_{DD\sigma} (\sigma D^\nu) \\
& -4if_{DD+\Phi} D^\mu (\partial_\mu \Phi^\nu - \partial^\nu \Phi_\mu) + 2\frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{\rho\alpha\beta}^\nu [\partial^\rho \eta (\partial^\alpha D^\beta)],
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Para a obtenção das Eqs.(3.14) e (3.15) aplicamos o gauge de Lorentz $\partial_\mu \phi^\mu = 0$ e $\partial_\mu D^\mu = 0$.

A equação (3.15) pode ser reescrita em termos de uma derivada covariante através da transformação

$$\partial'_\mu = \partial_\mu - ig_{DD\Phi} \phi_\mu, \tag{3.16}$$

Resultando em uma equação do tipo Klein -Gordon livre, escrita como

$$\partial'_\mu \partial'^\mu D^\nu + m_{e_f}^2 D^\nu = 0, \tag{3.17}$$

onde

$$m_{eff}^2 = m_D^2 + g_{DD\phi}^2 \phi_\mu \phi^\mu + g_{DD\sigma} \sigma \quad (3.18)$$

Aplicando a teoria de campo médio, nas equações para os mediadores, a fim de quantizar o campo nas Eq.(3.12), Eq.(3.13), Eq.(3.14), Eq.(3.15), inicialmente fazemos um “sanduíche” nessas equações com o estado físico que descreve o sistema $|F\rangle$. Assim, considerando que os campos médios são estáticos, uniformes e desconsiderando efeitos hidrodinâmicos, $\langle \vec{\Phi} \rangle = \vec{0}$, tal que temos

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \langle \sigma \rangle \\ \Phi^0 &\rightarrow \langle \phi^0 \rangle \\ \eta &\rightarrow \langle \eta \rangle \end{aligned}$$

Desse modo, as equações de movimento (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15), passam a ser escritas como

para campo σ

$$\langle \sigma \rangle = \frac{g_{DD\sigma} \langle D^\mu D_\mu^+ \rangle}{m_\sigma^2}; \quad (3.19)$$

para campo η

$$\langle \eta \rangle = \frac{g_{DD+\eta} \langle \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [\partial^\nu (D^{\mu+} \partial^\alpha D^\beta - (\partial^\alpha D^{\mu+}) D^\beta)] \rangle}{\sqrt{6} m_\eta^2}; \quad (3.20)$$

para campo ϕ

$$\begin{aligned} \langle \phi^0 \rangle &= \frac{-f_{DD\phi} \langle 4i[(\partial_\mu D^{\nu\dagger}) D^\mu - (D^{\mu\dagger} \partial_\mu D^\nu)] \rangle}{m_\phi^2} \\ &+ \frac{g_{DD+\Phi} \langle i[(\partial^0 D^{0+}) D_0 - D^{0+} (\partial^0 D_0)] \rangle}{m_\phi^2}; \end{aligned} \quad (3.21)$$

e finalmente para Eq.(3.15),

$$\partial_\mu \partial^\mu D^\nu - 2ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle (\partial_0 D^\nu) + [m_D^2 + g_{DD\sigma} \langle \sigma \rangle] D^\nu = 0. \quad (3.22)$$

Para resolvermos a equação de movimento Eq.(3.22), consideramos como solução de teste, a solução de onda plana

$$D^\nu(x) = \epsilon^\nu(k, \lambda) a_{\vec{k}, E} e^{i(\vec{k}\vec{x} - Et)}. \quad (3.23)$$

Substituindo a Eq.(3.23) na Eq.(3.22), temos

$$E_\pm(\vec{k}) = -g_{DD\phi} \langle \phi \rangle \pm q^\circ(\vec{k}), \quad (3.24)$$

onde

$$q^\circ(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_{ef}^2}, \quad (3.25)$$

sendo que m_{ef}^2 está definida na Eq.(3.18). É interessante notar que a Eq. (3.24) fornece termos de energia negativa, que possui a interpretação, em teoria de campos, como sendo estados de antipartículas. Também é interessante observar que se $\langle \Phi^0 \rangle = 0$, $\langle \sigma \rangle = 0$ e $\langle \eta \rangle = 0$, obtemos os autoestados de partículas livres relativísticas [55, 56]. Para o campo do méson D^ν as soluções encontradas podem ser escritas em termos da superposição dos estados de partículas e antipartículas normalizadas, na seguinte forma:

$$D^\nu(\vec{x}, t) = e^{ig_{DD\phi} \langle \phi \rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^\circ(\vec{k})} \sum_{\beta=1}^3 \epsilon^\nu(k, \beta) \left[a_\beta(\vec{k}) f_k(x) + b_\beta^\dagger(\vec{k}) f_k^*(x) \right] \quad (3.26)$$

onde $f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}}$ onde: $kx = q^\circ(\vec{k})x^0 - \vec{k}\vec{x}$.

Os vetores de polarização são introduzidos para garantir a satisfação do gauge de Lorentz,

$$\partial_\nu D^\nu = 0. \quad (3.27)$$

Agora, aplicando (3.27) em (3.26) obtemos

$$e^{ig_{DD\phi} \langle \phi \rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^\circ(\vec{k})} \sum_{\beta=1}^3 \epsilon^\nu(k, \beta) \left[a_\beta(\vec{k}) \partial_\nu f_k(x) + b_\beta^\dagger(\vec{k}) \partial_\nu f_k^*(x) \right] = 0 \quad (3.28)$$

onde

$$\partial_\nu f_k(x) = \partial_\nu e^{(-ik_\mu x^\mu)} = -ik_\nu f_k(x) \quad (3.29)$$

$$\partial_\nu f_k^*(x) = \partial_\nu e^{(ik_\mu x^\mu)} = ik_\nu f_k^*(x) \quad (3.30)$$

Substituindo então a eq.(3.29) e a eq. (3.30) na eq. (3.28), temos que

$$e^{ig_{DD\phi}\langle\phi\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^o(\vec{k})} \left(\sum_{\beta=1}^3 \epsilon^\nu(k, \beta) k_\nu \right) \left[(-i)a_\beta(\vec{k})f_k(x) + (i)b_{\beta^\dagger}(\vec{k})f_k^*(x) \right] = 0. \quad (3.31)$$

Portanto, concluímos que a solução geral é

$$\sum_{\beta=1}^3 \epsilon^\nu(k, \beta) k_\nu = 0. \quad (3.32)$$

Impondo também a condição de normalização:

$$\epsilon_\nu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda') = -\delta^{\lambda\lambda'} \quad (3.33)$$

Foram determinadas as seguintes soluções

$$\epsilon^\nu(k, 1) = (0, \vec{e}(\vec{k}, 1)), \quad (3.34)$$

$$\epsilon^\nu(k, 2) = (0, \vec{e}(\vec{k}, 2)), \quad (3.35)$$

$$\epsilon^\nu(k, 3) = \left(\frac{|\vec{k}|}{m_{ef}}, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{q^o(\vec{k})}{m_{ef}} \right). \quad (3.36)$$

A partir da solução de Eq.(3.26), podemos quantizar a teoria, promovendo $D^\nu(\vec{x}, t)$ e o seu momento conjugado $\Pi^\nu(\vec{x}, t)$ a operadores e sujeito as regras de quantizações canônicas, onde $\Pi^\nu(\vec{x}, t)$ é dado por:

$$\Pi^\nu(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 D_\nu)} = -\partial^0 D^{\nu\dagger} - ig_{DD\phi}(D^{\nu\dagger}) \langle \Phi^0 \rangle - \frac{g_{DD\eta}}{\sqrt{6}} \epsilon_{\rho\alpha\beta}^\nu \partial^\rho \eta g^{\alpha 0} D^{\beta\dagger}, \quad (3.37)$$

tal que

$$\left[D^\nu(\vec{x}, t), D^{\nu'}(\vec{y}, t) \right] = \left[\Pi^\nu(\vec{x}, t), \Pi^{\nu'}(\vec{y}, t) \right] = 0, \quad (3.38)$$

$$\left[\Pi^\nu(\vec{x}, t), D^{\nu'}(\vec{y}, t) \right] = -i\delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.39)$$

A Eq. (3.39) nos leva em

$$\left[(\partial_0 D^{\nu\dagger})(\vec{x}, t), D^{\nu'}(\vec{y}, t) \right] = -i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.40)$$

Dessa forma, a partir dos comutadores acima, obtemos a quantização do sistema (veja apêndice A)

$$\left[a_\beta(\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}') \right] = \left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}') \right] = \left[b_\beta^\dagger(-\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}') \right] = 0, \quad (3.41)$$

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}') \right] = 2(g_{D D\phi} \langle \phi^0 \rangle - q^0(\vec{k}))\delta^{\beta\beta'}\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.42)$$

$$\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}^\dagger(\vec{k}') \right] = 2(g_{D D\phi} \langle \phi^0 \rangle + q^0(\vec{k}))\delta^{\beta\beta'}\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.43)$$

$$\left[a_\beta^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}') \right] = -2(g_{D D\phi} \langle \phi^0 \rangle) e^{-2iq_0 X_0} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.44)$$

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}') \right] = 2(g_{D D\phi} \langle \phi^0 \rangle) e^{2iq_0 X_0} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.45)$$

Com o objetivo de definir um estado de vácuo para o sistema na forma

$$a_{(\vec{k})} |0\rangle = b_{(\vec{k})} |0\rangle = |ZERO\rangle, \quad (3.46)$$

Observemos que as equações (3.44) e (3.45) para $\langle \phi^0 \rangle \neq 0$ fornecem-nos um absurdo, pois como

$$\langle 0 | \left[a_\beta^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}') \right] |0\rangle = 0, \quad (3.47)$$

$$\langle 0 | \left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}') \right] |0\rangle = 0, \quad (3.48)$$

Portanto, podemos concluir que

$$\langle \Phi^0 \rangle = 0 \quad (3.49)$$

Com ajuda das relações (3.41), (3.42), (3.43), (3.44) e (3.45), podemos construir importantes operadores em termos dos operadores de a_β e b_β .

O operador número de partículas N^ν , é um dos operadores mais importantes da teoria de campos, definido por

$$N^\nu = \int d^3x J_0^\nu(\vec{x}), \quad (3.50)$$

onde

$$J_0^\nu(x) = -i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^\nu)} D^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^{\nu\dagger})} D^{\nu\dagger} \right] \quad (3.51)$$

A equação acima é chamada de densidade vetorial de partículas.

O operador N pode ser então escrito em termos dos operadores a_β e b_β por (veja apêndice B)

$$\begin{aligned} N = \int \frac{d^3(\vec{k})}{2q_0(\vec{k})} & \left\{ \left[\frac{|\vec{k}|^2}{m_{ef}^2} + \frac{q_o^2(\vec{k})}{m_{ef}^2} \right] \left[-a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) + b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k}) \right] + \right. \\ & \left[-a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) + b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k}) \right] + \\ & \left. \left[-a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) + b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Capítulo 4

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho estudamos a matéria composta dos mésons $D_s^{*+}\bar{D}_s^{*-}$ em uma abordagem de troca de mésons σ , η e ϕ usando a teoria relativística de campo médio, onde foi mostrada uma forma de quantização para o campo vetorial D_s^* submetido a um campo interagente. Extraímos as devidas regras de quantização, como também o operador de número, no qual possibilitará um futuro tratamento termodinâmico para essa matéria mesônica.

Observamos que a quantização do campo D_s^* só é consistente para o caso da componente do campo vetorial $\langle\Phi^0\rangle$ ser igual a zero.

Esse resultado é muito importante, pois na Ref. [58] os autores mostram que o campo vetorial desempenha um importante papel na formação de estado ligados.

Além do tratamento termodinâmico para o estado $Y(4140)$, nosso trabalho também mostra perspectivas com o estudo de outros estados ligados em uma troca de mésons.

Apêndice A

Operadores de Criação e Aniquilação

Em teoria de campos a segunda quantização para os campos bosônicos, trata os campos como operadores de modo que o campo e o seu momento conjugado satisfazem relações de comutação. Assim, para o méson D^* , representado pelo campo $D^{*\nu}$, temos as seguintes relações de comutação [55, 56]. Adotaremos a partir de agora a seguinte notação

$$D_s^* = D, \text{ com isso temos } D_s^{*+} = D^\dagger$$

$$\left[D^\nu(\vec{x}, t), D^{\nu'}(\vec{y}, t) \right] = \left[\Pi^\nu(\vec{x}, t), \Pi^{\nu'}(\vec{y}, t) \right] = 0; \quad (\text{A.1})$$

$$\left[\Pi^\nu(\vec{x}, t), D^{\nu'}(\vec{y}, t) \right] = -i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad (\text{A.2})$$

A Eq. (A.2) nos leva em

$$\left[(\partial_0 D^{\nu\dagger})(\vec{x}, t), D^{\nu'}(\vec{y}, t) \right] = -i\delta^{\nu\nu'}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A.3})$$

Dos comutadores acima, obtemos a quantização do sistema, onde os momentos canonicamente conjugados a $D^{*\nu}(x)$ e $D^{*\nu\dagger}(x)$ são

$$\Pi_0^{D^\nu}(x) = -\partial^0 D^{\nu\dagger} - ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle^2 D^{\nu\dagger}; \quad (\text{A.4})$$

$$\Pi_0^{D^{\nu\dagger}}(x) = -\partial^0 D^\nu + ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle^2 D^\nu. \quad (\text{A.5})$$

Para resolvermos a equação de movimento Eq.(??) apresentada no capítulo 3, consideramos como solução de teste, a solução de onda plana

$$D^\nu(x) = \epsilon^\nu(k, \lambda) a_{\vec{k}, E} e^{i(\vec{k}\vec{x} - Et)}. \quad (\text{A.6})$$

que como já vimos, fornece dois valores para a energia

$$E_\pm(\vec{k}) = -g_{DD\phi} \langle \phi \rangle \pm q^o(\vec{k}), \quad (\text{A.7})$$

onde

$$q^o(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_{ef}^2}. \quad (\text{A.8})$$

Da condição de normalização

$$\langle \vec{x}' | \vec{k}' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \epsilon^\nu(k, \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}'}, \quad (\text{A.9})$$

temos

$$\langle \vec{x}' | D^\nu(E, \vec{k}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \epsilon^\nu(k, \lambda) e^{-ik_\nu x'^\nu}. \quad (\text{A.10})$$

Usando a notação $kx \equiv k^0 x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}$, podemos construir a função de onda normalizada que contém as duas possibilidades de energia [55]

$$D^\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\nu(k, \lambda) e^{-ikx} \tilde{\xi}(x), \quad (\text{A.11})$$

com $\tilde{\xi}(x) = \delta[(k^0 - E_+)(k^0 - E_-)] \chi(k)$, sendo $\chi(k)$ dada por

$$\chi(k) = \theta(k^0) \chi^+(k) + \theta(-k^0) \chi^-(k).$$

Da relação

$$\delta[(k^0 - E_+)(k^0 - E_-)] \chi(k) = \frac{1}{E_+ - E_-} [\delta(k^0 - E_+) \chi^+(k) + \delta(k^0 - E_-) \chi^-(k)],$$

e integrando a Eq. (A.11) em k_0 , o campo D^ν pode ser escrito como

$$D^\nu(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\nu(k, \lambda) \left[\frac{\chi^+(k)}{E_+ - E_-} e^{-i(E_+ t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \frac{\chi^-(k)}{E_+ - E_-} e^{-i(E_- t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right] \quad (\text{A.12})$$

Usando $E_\pm(\vec{k}) = -g_{DD\phi} \langle \phi \rangle \pm q^o(\vec{k})$ e substituindo $\vec{k} = \vec{q}$ no primeiro termo e $\vec{k} = -\vec{q}$ no segundo termo da integral, podemos reescrever a Eq. (A.12) como

$$D^\nu(\vec{x}, t) = e^{ig_{DD\phi}\langle\phi\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \sum_{\beta=1}^3 \in^\nu(k, \lambda) \left[a_\beta(\vec{k}) f_q(x) + b_\beta^\dagger(\vec{k}) f_q^*(x) \right]. \quad (\text{A.13})$$

onde

$$f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (\text{A.14})$$

Definindo a função de onda

$$\widetilde{D}^\nu(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \sum_{\lambda=1}^3 \in^\nu(k, \lambda) \left[a_\lambda(\vec{k}) f_q(x) + b_\lambda^\dagger(\vec{k}) f_q^*(x) \right]. \quad (\text{A.15})$$

podemos escrever a (A.13) na forma

$$D^\nu(\vec{x}, t) = e^{ig_{DD\phi}\langle\phi\rangle t} \widetilde{D}^\nu(\vec{x}, t). \quad (\text{A.16})$$

Tomando a ortogonalidade em (A.13) temos

$$\in_\nu(k, \beta) D^\nu(x, t) = e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \sum_{\lambda=1}^3 \in_\nu(k, \beta) \in^\nu(k, \lambda) \left[a_\lambda(\vec{k}) f_q(x) + b_\lambda^\dagger(\vec{k}) f_q^*(x) \right] \quad (\text{A.17})$$

$$\in_\nu(k, \beta) D^\nu(x, t) = -e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a^\beta(\vec{k}) f_q(x) + b^{\beta\dagger}(\vec{k}) f_q^*(x) \right], \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.14) em (A.18) temos

$$\in_\nu(k, \beta) D^\nu(x, t) = -e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a_\beta(\vec{k}) \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}} + b_\beta^\dagger(\vec{k}) \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{3/2}} \right], \quad (\text{A.19})$$

multiplicando os dois lados da Eq.(A.19) por $\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx}$ temos

$$\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu(k, \beta) D^\nu(x, t) = -e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a_\beta(\vec{k}) \int \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} + b_\beta^\dagger(\vec{k}) \int \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \right], \quad (\text{A.20})$$

Fazendo $Y = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu(k, \beta) D^\nu(x, t)$

Podemos escrever (A.20) da seguinte forma

$$Y = -e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left[a_\beta(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) e^{i(k'_0 - k_0)x_0} + b_\beta^\dagger(\vec{k}) \delta^3(\vec{k}' + \vec{k}) e^{i(k'_0 + k_0)x_0} \right], \quad (\text{A.21})$$

$$Y = \frac{-e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t}}{2q^0(\vec{k}')} \left[a_\beta(\vec{k}') + b_\beta^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0} \right], \quad (\text{A.22})$$

Devemos extrair $a_\beta(\vec{k}')$ e $b_\beta(-\vec{k}')$, multiplicamos então os membros de (A.22) por $e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t}$. Então temos

$$Ye^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} = \frac{-e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t}}{2q^0(\vec{k}')} e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \left[a_\beta(\vec{k}') + b_\beta^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0} \right], \quad (\text{A.23})$$

$$Ye^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} = \frac{-1}{2q^0(\vec{k}')} \left[a_\beta(\vec{k}') + b_\beta^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0} \right], \quad (\text{A.24})$$

Aplicando ∂_0 nos membros da equação (A.24) temos

$$\partial_0 Ye^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} = -\partial_0 \frac{1}{2q^0(\vec{k}')} \left[a_\beta(\vec{k}') + b_\beta^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0} \right], \quad (\text{A.25})$$

como $k_o = q^0(\vec{k}')$ então (A.25) fica

$$\partial_0 e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} Y = -ib_\beta^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0}. \quad (\text{A.26})$$

Vamos agora determinar o primeiro membro da Eq. (A.26)

$$\begin{aligned} \partial_0 e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} Y &= e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu(k, \beta) \\ &\quad [-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle D^\nu + ik_0 D^\nu + \partial_0 D^\nu], \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Fazendo $k_o = q^0(\vec{k}')$ e substituindo o valor encontrado de (A.27) em (A.26) temos

$$\begin{aligned} -ib_\beta^\dagger(-\vec{k}')e^{2ik_0x_0} &= e^{-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu(k, \beta) \\ &\quad [-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle D^\nu + iq_0(k')D^\nu + \partial_0 D^\nu], \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} b_\beta^\dagger(-\vec{k}') &= e^{-2ik_0x_0} e^{-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu(k, \beta) \\ &\quad [g_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle D^\nu - q_0(k')D^\nu + i\partial_0 D^\nu], \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

podemos escrever (A.29) da seguinte forma

$$b_{\beta}^{\dagger}(-\vec{k}') = e^{2ik_0x_0} e^{ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_{\nu}(k, \beta) [g_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle D^{\nu} - q_0(\vec{k}')D^{\nu} + i\partial_0 D^{\nu}]. \quad (\text{A.30})$$

Fazendo(A.30) em (A.24) temos

$$\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_{\nu}(k, \beta) D^{\nu}(x, t) e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} = \frac{-a_{\beta}(\vec{k}')}{2q^0(\vec{k}')} + \frac{e^{-2ik_0x_0}}{2q^0(\vec{k}')} e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_{\nu}(k, \beta) [g_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle D^{\nu} - q_0(\vec{k}')D^{\nu} + i\partial_0 D^{\nu}] e^{2ik_0} \quad (\text{A.31})$$

Dai

$$a_{\beta}(\vec{k}') = -e^{-ig_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_{\nu}(k, \beta) [g_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle D^{\nu} + q_0(\vec{k}')D^{\nu} + i\partial_0 D^{\nu}], \quad (\text{A.32})$$

De (A.30) e (A.32) concluímos que

$$a_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}') = -e^{ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx} \in_{\nu}(k, \beta) [g_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle D^{\nu\dagger} + q_0(\vec{k}')D^{\nu\dagger} - i\partial_0 D^{\nu\dagger}], \quad (\text{A.33})$$

$$b_{\beta}(-\vec{k}') = e^{2ik_0x_0} e^{ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx} \in_{\nu}(k, \beta) [g_{DD\phi}\langle\phi^0\rangle D^{\nu\dagger} - q_0(\vec{k}')D^{\nu} - i\partial_0 D^{\nu\dagger}]. \quad (\text{A.34})$$

De posse dos valores de $b_{\beta}^{\dagger}(-\vec{k}')$; $b_{\beta}(-\vec{k}')$; $a_{\beta}(\vec{k}')$ e $a_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}')$ devemos obter as regras de comutação

$$[a_{\beta}(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')]; [a_{\beta}(\vec{k}), b_{\beta}^{\dagger}(-\vec{k}')]; [b_{\beta}(-\vec{k}), a_{\beta}(\vec{k}')];$$

$$[b_{\beta}(-\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')]; [a_{\beta}(\vec{k}), a_{\beta'}^{\dagger}(\vec{k}')]; [b_{\beta}^{\dagger}(-\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')]; [a_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')].$$

onde obtemos as soluções para nosso modelo

$$[a_{\beta}(\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] = [a_{\beta}(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] = [b_{\beta}^{\dagger}(-\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}') \right] = 2(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - q^0(\vec{k})) \delta^{\beta\beta'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{A.36})$$

$$\left[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}^\dagger(\vec{k}') \right] = 2(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q^0(\vec{k})) \delta^{\beta\beta'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{A.37})$$

$$\left[a_\beta^\dagger(\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}') \right] = -2(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle) e^{-2iq_0 X_0} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{A.38})$$

$$\left[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}^\dagger(\vec{k}') \right] = 2(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle) e^{2iq_0 X_0} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{A.39})$$

De posse das relações de comutação [55, 56]

$$[D^\nu(\vec{x}, t), D^{\nu'\dagger}(\vec{y}, t)] = [\partial_0 D^\nu(\vec{x}, t), \partial_0 D^{\nu'\dagger}(\vec{y}, t)] = 0, \quad (\text{A.40})$$

$$[D^\nu(\vec{x}, t), \partial_0 D^{\nu'\dagger}(\vec{y}, t)] = -i\delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{A.41})$$

$$[\partial_0 D^\nu(\vec{x}, t), D^{\nu'}(\vec{y}, t)] = i\delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A.42})$$

Vamos mostrar os resultados de (A.35), (A.36), (A.37), (A.38) e de (A.39) respectivamente

$$\begin{aligned} \left[a_\beta(\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}') \right] &= \left[\left(g_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^\nu + i\partial_0 D^\nu, \left(g_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle - q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'} + i\partial_0 D^{\nu'} \right] \\ &\quad \left(-e^{-ig_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu(k, \beta) \right) \\ &\quad \left(e^{-ig_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) e^{-2iq_0 x_0}, \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \left[a_\beta(\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}') \right] &= \left(-e^{-2ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu(k, \beta) \right) \left(\int \frac{d^3 \vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) \\ &\quad e^{-2iq_0 x_0} \left\{ \left[\left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^\nu, \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'} \right] + \right. \\ &\quad \left[\left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^\nu, i\partial_0 D^{\nu'} \right] + \\ &\quad \left. \left[i\partial_0 D^\nu, \left(-q_0(\vec{k}') + g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle \right) D^{\nu'} \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[i\partial_0 D^\nu, i\partial_0 D^{\nu'} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Como

$$[D^\nu, \partial_0 D^{\nu'}] = - [\partial_0 D^\nu, D^{\nu'}], \quad (\text{A.45})$$

Portanto

$$[a_\beta(\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}')] = 0. \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned} [a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] &= \left[\left(g_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^\nu + i\partial_0 D^\nu, \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'} + i\partial_0 D^{\nu'} \right] \\ &\quad \left(-e^{-ig_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu(k, \beta) \right) \\ &\quad \left(-e^{-ig_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta') \right), \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} [a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] &= e^{-2ig_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} (e^{ikx} \in_\nu(k, \beta)) (e^{ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta')) \\ &\quad \left\{ \left[\left(g_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^\nu, \left(g_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'} \right] + \right. \\ &\quad \left[\left(g_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^\nu, i\partial_0 D^{\nu'} \right] + \\ &\quad \left[i\partial_0 D^\nu, \left(q_0(\vec{k}') + g_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle \right) D^{\nu'} \right] + \\ &\quad \left. \left[i\partial_0 D^\nu, i\partial_0 D^{\nu'} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Como

$$[D^\nu, \partial_0 D^{\nu'}] = - [\partial_0 D^\nu, D^{\nu'}], \quad (\text{A.49})$$

então

$$[a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] = 0. \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{aligned} [b_\beta^\dagger(-\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}')] &= \left[\left(g_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle - q_0(\vec{k}) \right) D^\nu + i\partial_0 D^\nu, \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'} + i\partial_0 D^{\nu'} \right] \\ &\quad \left(-e^{-ig_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_\nu(k, \beta) \right) \\ &\quad \left(-e^{-ig_{DD\phi} \langle \Phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) \\ &\quad e^{-2iq_0 X_0} e^{-2iq_0 X_0}, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned}
[b_{\beta}^{\dagger}(-\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] &= e^{-2ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} (e^{ikx} \in_{\nu}(k, \beta)) (e^{ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta')) \\
&e^{-4iq_0X_0} \left\{ \left[\left(g_{DD\phi} \langle\phi^0\rangle - q_0(\vec{k}) \right) D^{\nu}, \left(g_{DD\phi} \langle\phi^0\rangle - q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'} \right] + \right. \\
&\left[\left(g_{DD\phi} \langle\Phi^0\rangle - q_0(\vec{k}) \right) D^{\nu}, i\partial_0 D^{\nu'} \right] + \\
&\left[i\partial_0 D^{\nu}, \left(-q_0(\vec{k}') + g_{DD+\phi} \langle\phi^0\rangle \right) D^{\nu'} \right] + \\
&\left. \left[i\partial_0 D^{\nu}, i\partial_0 D^{\nu'} \right] \right\}, \tag{A.52}
\end{aligned}$$

Como

$$[D^{\nu}, \partial_0 D^{\nu'}] = -[\partial_0 D^{\nu}, D^{\nu'}], \tag{A.53}$$

então

$$[b_{\beta}^{\dagger}(-\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] = 0. \tag{A.54}$$

$$\begin{aligned}
[b_{\beta}(-\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] &= \left[\left(g_{DD\phi} \langle\Phi^0\rangle - q_0(\vec{k}) \right) D^{\nu\dagger} + i\partial_0 D^{\nu\dagger}, \left(g_{DD\phi} \langle\phi^0\rangle - q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'} + i\partial_0 D^{\nu'} \right] \\
&\left(e^{ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \in_{\nu}(k, \beta) \right) \\
&\left(e^{-ig_{DD\phi}\langle\Phi^0\rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) \\
&e^{2iq_0x_0} e^{-2iq_0x_0}, \tag{A.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[b_{\beta}(-\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] &= \left(\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(k_0x_0 - \vec{k}\vec{x})} \in_{\nu}(k, \beta) \right) \left(\int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k_0x_0 - \vec{k}'\vec{x}')} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) \\
&\left\{ \left(ig_{DD\phi} \langle\phi^0\rangle - iq_0(\vec{k}) \right) + \left(i\delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) + \right. \\
&\left. \left(-ig_{DD\phi} \langle\phi^0\rangle + iq_0(\vec{k}') \right) + \left(-i\delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) \right\}, \tag{A.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[b_{\beta}(-\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] &= \left(\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{k}\vec{x})} \in_{\nu}(k, \beta) \right) \left(\int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{k}'\vec{x}')} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) \\
&\left(-2g_{DD\phi} \langle\phi^0\rangle + 2q_0(\vec{k}) \right) \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{A.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}')] &= \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{i(\vec{k}\vec{x})} \in_\nu(k, \beta) \right) \left(e^{i(\vec{k}'\vec{x}')} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) \\ &\quad \left(-2g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + 2q_0(\vec{k}) \right) \delta^{\nu\nu'}, \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned} [b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}')] &= \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} \in_\nu(k, \beta) \in_{\nu'}(k', \beta') \\ &\quad \left(-2g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + 2q_0(\vec{k}) \right) \delta^{\nu\nu'}, \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned} [b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}')] &= \in_\nu(k, \beta) \in_{\nu'}(k', \beta') \delta^{\nu\nu'} \left(-2g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + 2q_0(\vec{k}) \right) \\ &\quad \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

portanto

$$[b_\beta(-\vec{k}), b_{\beta'}^\dagger(-\vec{k}')] = 2 \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - q_0(\vec{k}) \right) \delta^{\beta\beta'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{A.61})$$

$$\begin{aligned} [a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}^\dagger(\vec{k}')] &= \left[\left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}') \right) D^\nu + i\partial_0 D^\nu, \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'\dagger} - i\partial_0 D^{\nu'\dagger} \right] \\ &\quad \left(-e^{-ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \in_\nu(k, \beta) \right) \\ &\quad \left(-e^{ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k}'\vec{x}'} \in_{\nu'}(k', \beta') \right), \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

$$\begin{aligned} [a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}^\dagger(\vec{k}')] &= \left(\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(k_0 x_0 - \vec{k}\vec{x})} \in_\nu(k, \beta) \right) \left(\int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k'_0 x'_0 - \vec{k}'\vec{x}')} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) \\ &\quad \left\{ \left(-ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - iq_0(\vec{k}) \right) + \left(i\delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + iq_0(\vec{k}') \right) + \left(i\delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$$\begin{aligned} [a_\beta(\vec{k}), a_{\beta'}^\dagger(\vec{k}')] &= \left(\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\vec{k}\vec{x})} \in_\nu(k, \beta) \right) \left(\int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{k}'\vec{x}')} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) \\ &\quad \left(-2g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - 2q_0(\vec{k}) \right) \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

$$[a_{\beta}(\vec{k}), a_{\beta'}^{\dagger}(\vec{k}')] = \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} \epsilon_{\nu}(k, \beta) \epsilon_{\nu'}(k', \beta') \left(-2g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - 2q_0(\vec{k}) \right) \delta^{\nu\nu'}, \quad (\text{A.65})$$

$$[a_{\beta}(\vec{k}), a_{\beta'}^{\dagger}(\vec{k}')] = \epsilon_{\nu}(k, \beta) \epsilon_{\nu'}(k', \beta') \delta^{\nu\nu'} \left(-2g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - 2q_0(\vec{k}') \right) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{A.66})$$

portanto

$$[a_{\beta}(\vec{k}), a_{\beta'}^{\dagger}(\vec{k}')] = 2 \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) \delta^{\beta\beta'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{A.67})$$

$$[a_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] = \left[\left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^{\nu\dagger} - i\partial_0 D^{\nu\dagger}, \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'} + i\partial_0 D^{\nu'} \right] \left(-e^{ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx} \epsilon_{\nu}(k, \beta) \right) \left(e^{-ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \epsilon_{\nu'}(k', \beta') \right) e^{-2ik_0 x_0}, \quad (\text{A.68})$$

$$[a_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] = - \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{-ikx} \epsilon_{\nu}(k, \beta) \right) \left(e^{ik'x'} \epsilon_{\nu'}(k', \beta') \right) e^{-2iq_0 X_0} \left\{ \left[\left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^{\nu\dagger}, \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'} \right] + \left[\left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^{\nu\dagger}, i\partial_0 D^{\nu'} \right] + \left[-i\partial_0 D^{\nu\dagger}, \left(-q_0(\vec{k}') + g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle \right) D^{\nu'} \right] + \left[-i\partial_0 D^{\nu\dagger}, i\partial_0 D^{\nu'} \right] \right\}, \quad (\text{A.69})$$

$$[a_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] = - \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} \left(e^{-ikx} \epsilon_{\nu}(k, \beta) \right) \left(e^{ik'x'} \epsilon_{\nu'}(k', \beta') \right) e^{-2iq_0 X_0} \left\{ \left(ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + iq_0(\vec{k}) \right) \left(-i\delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) + \left(-ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + iq_0(\vec{k}) \right) \left(i\delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) \right\}, \quad (\text{A.70})$$

$$\begin{aligned}
[a_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(\vec{k}')] &= - \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} (e^{-ikx} \in_{\nu}(k, \beta)) (e^{ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta')) e^{-2iq_0X_0} \\
&\quad \left\{ \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) + \left(q_0(\vec{k}) \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) \right. \\
&\quad \left. \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) - \left(q_0(\vec{k}) \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) \right\}, \quad (A.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] &= - \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k-k')\vec{x}} \in_{\nu}(k, \beta) \in_{\nu'}(k', \beta') e^{-2iq_0X_0} \\
&\quad 2 \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle \right) \delta^{\nu\nu'}, \quad (A.72)
\end{aligned}$$

então

$$[a_{\beta}^{\dagger}(\vec{k}), b_{\beta'}^{\dagger}(-\vec{k}')] = -2 \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle \right) e^{-2iq_0X_0} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (A.73)$$

$$\begin{aligned}
[b_{\beta}(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] &= \left[\left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^{\nu} + i\partial_0 D^{\nu}, \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'\dagger} - i\partial_0 D^{\nu'\dagger} \right] \\
&\quad \left(-e^{-ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx} \in_{\nu}(k, \beta) \right) \\
&\quad \left(e^{-ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle t} \int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} e^{ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta') \right) e^{2ik_0x_0}, \quad (A.74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[b_{\beta}(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] &= - \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} (e^{ikx} \in_{\nu}(k, \beta)) (e^{-ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta')) e^{2iq_0x_0} \\
&\quad \left\{ \left[\left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^{\nu}, \left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}') \right) D^{\nu'\dagger} \right] + \right. \\
&\quad \left[\left(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + q_0(\vec{k}) \right) D^{\nu}, -i\partial_0 D^{\nu'\dagger} \right] + \\
&\quad \left[i\partial_0 D^{\nu}, \left(-q_0(\vec{k}') + g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle \right) D^{\nu'\dagger} \right] + \\
&\quad \left. \left[i\partial_0 D^{\nu\dagger}, -i\partial_0 D^{\nu'} \right] \right\}, \quad (A.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[b_{\beta}(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] &= - \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} (e^{ikx} \in_{\nu}(k, \beta)) (e^{-ik'x'} \in_{\nu'}(k', \beta')) e^{2iq_0x_0} \\
&\quad \left\{ \left(-ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle - iq_0(\vec{k}) \right) \left(-i\delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) + \right. \\
&\quad \left. \left(ig_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle + iq_0(\vec{k}) \right) \left(i\delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) \right\}, \quad (A.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] &= - \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{x}'}{(2\pi)^{3/2}} (e^{i\vec{k}\vec{x}} \in_\nu(k, \beta)) (e^{-i\vec{k}'\vec{x}'} \in_{\nu'}(k', \beta')) e^{2iq_0x_0} \\
&\quad \left\{ -g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - q_0(\vec{k}) \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right. \\
&\quad \left. -g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') + q_0(\vec{k}) \delta^{\nu\nu'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right\}, \quad (\text{A.77})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] &= \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(k'-k)\vec{x}} \in_\nu(k, \beta) \in_{\nu'}(k', \beta') e^{2iq_0x_0} \\
&\quad 2(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle) \delta^{\nu\nu'}, \quad (\text{A.78})
\end{aligned}$$

então

$$[b_\beta(-\vec{k}), a_{\beta'}(\vec{k}')] = 2(g_{DD\phi} \langle \phi^0 \rangle) e^{2iq_0x_0} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (\text{A.79})$$

Apêndice B

Determinação do Operador Número

O operador número é definido por [55]

$$N^\nu = \int d^3x J_0(x) \quad (\text{B.1})$$

onde a corrente $J^\nu(x)$ é dada por Adotaremos a partir de agora a seguinte notação $D_s^* = D$, com isso temos $D_s^{*\dagger} = D^\dagger$

$$J_0^\nu(x) = -i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^\nu)} D^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D^{\nu\dagger})} D^{\nu\dagger} \right] \quad (\text{B.2})$$

As derivadas do primeiro e do segundo termo da corrente são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu D^\nu)} &= (-\partial^\mu D^{\nu\dagger}) + (\partial^\nu D^{\mu\dagger}) - ig_{DD\phi} D^{\nu\dagger} \langle \phi^\mu \rangle \\ &\quad - \frac{g_{DD\phi}}{\sqrt{6}} \epsilon_{\sigma\rho\alpha\beta} \partial^\rho \eta [D^{\sigma\dagger} (g^{\alpha\mu} g^{\rho\nu}) D^\beta], \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu D^{\nu\dagger})} &= (-\partial^\mu D^\nu) + (\partial^\nu D^\mu) + ig_{DD\phi} D^\nu \langle \phi^\mu \rangle \\ &\quad - \frac{g_{DD\phi}}{\sqrt{6}} \epsilon_{\sigma\rho\alpha\beta} \partial^\rho \eta [(g^{\alpha\mu} g^{\rho\nu}) D^\beta]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Substituindo as Eqs. (B.3) e (B.4) em (B.2), temos que a expressão da corrente fica

escrita como

$$\begin{aligned}
J^\nu(x) = & -i \{ (-\partial^\mu D^{\nu\dagger}) D^\nu + (\partial^\nu D^{\mu\dagger}) D^\nu + i g_{DD\phi} D^{\nu\dagger} D^\nu \langle \phi^\mu \rangle \\
& - \frac{g_{DD\phi}}{\sqrt{6}} \epsilon_{\sigma\rho\alpha\beta} \partial^\rho \eta [D^{\sigma\dagger} (g^{\alpha\mu} g^{\rho\nu}) D^\nu] \\
& + (\partial^\mu D^\nu) D^{\nu\dagger} - (\partial^\nu D^\mu) D^{\nu\dagger} - i g_{DD\phi} D^\nu D^{\nu\dagger} \langle \phi^\mu \rangle - \\
& \frac{g_{DD\phi}}{\sqrt{6}} \epsilon_{\sigma\rho\alpha\beta} \partial^\rho \eta [(g^{\alpha\mu} g^{\rho\nu}) D^\beta D^{\nu\dagger}] \}, \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Que fica

$$\begin{aligned}
J^\nu(x) = & -i \{ (-\partial^\mu D^{\nu\dagger}) D^\nu + (\partial^\nu D^{\mu\dagger}) D^\nu + (\partial^\mu D^\nu) D^{\nu\dagger} - (\partial^\nu D^\mu) D^{\nu\dagger} \\
& - 2i g_{DD\phi} D^\nu D^{\nu\dagger} \langle \phi^\mu \rangle \}. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

A componente $J^0(x)$ é portanto

$$\begin{aligned}
J^0(x) = & -i \{ (-\partial^0 D^{\nu\dagger}) D^\nu + (\partial^\nu D^{0\dagger}) D^\nu + (\partial^0 D^\nu) D^{\nu\dagger} - (\partial^\nu D^0) D^{\nu\dagger} \\
& - 2i g_{DD\phi} D^\nu D^{\nu\dagger} \langle \phi^0 \rangle \}. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Em termos da função de onda da Eq.(A.16), $D^\nu(\vec{x}, t) = e^{ig_{DD\phi} \langle \phi \rangle t} \tilde{D}^\nu(\vec{x}, t)$, temos que a componente $J_0(x)$ pode ser escrita como

$$J_0(x) = -i \left[(\partial_0 \tilde{D}^\nu) \tilde{D}^{\nu\dagger} - (\partial_0 \tilde{D}^{\nu\dagger}) \tilde{D}^\nu \right]. \tag{B.8}$$

Substituindo (B.8) em (B.1) temos

$$N^\nu = \int d^3x i \left[(\partial_0 \tilde{D}^{\nu\dagger}) \tilde{D}^\nu - (\partial_0 \tilde{D}^\nu) \tilde{D}^{\nu\dagger} \right], \tag{B.9}$$

$$N^\nu = \int d^3x \left[i (\partial_0 \tilde{D}^{\nu\dagger}) \tilde{D}^\nu \right] + \int d^3x \left[-i (\partial_0 \tilde{D}^\nu) \tilde{D}^{\nu\dagger} \right]. \tag{B.10}$$

Definindo

$$\hat{N}_1^\nu = i \int d^3x (\partial_0 \tilde{D}^{\nu\dagger}) \tilde{D}^\nu, \tag{B.11}$$

$$\hat{N}_1^{\nu\dagger} = -i \int d^3x (\partial_0 \tilde{D}^\nu) \tilde{D}^{\nu\dagger}, \tag{B.12}$$

O operador N pode é escrito como

$$N = \hat{N}_1^\nu + \hat{N}_1^{\nu\dagger}. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo a função de onda $\widetilde{D}^{\nu'}(\vec{x}, t)$ em termos dos operadores de criação e aniquilação, onde

$$f_k(x) = \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \widetilde{D}^{\nu'}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3\vec{k}'}{2q^0(\vec{k}')} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^{\nu'}(k', \lambda') \\ &\quad \left[a_{\lambda'}(\vec{k}') f_{q'}(x) + b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') f_{q'}^*(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Inserindo (B.14) em (B.15) e o resultado em (B.9) temos que

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^\nu &= i \int d^3x \left\{ \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\nu(k, \lambda) \right. \\ &\quad \left[a_\lambda^\dagger(\vec{k}) \partial_0 f_q^*(x) + b_\lambda(\vec{k}) \partial_0 f_q(x) \right] \\ &\quad \int \frac{d^3\vec{k}'}{2q^0(\vec{k}')} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^{\nu'}(k', \lambda') \\ &\quad \left. \left[a_{\lambda'}(\vec{k}') f_{q'}(x) + b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') f_{q'}^*(x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^\nu &= \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\nu(k, \lambda) \\ &\quad \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^{\nu'}(k', \lambda') \left[-a_\lambda^\dagger(\vec{k}) a_{\lambda'}(\vec{k}') + b_\lambda(\vec{k}) b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Fazendo

$$T_{\lambda\lambda'}^\nu = \epsilon^\nu(k, \lambda) \epsilon^{\nu'}(k', \lambda') \quad (\text{B.18})$$

Substituindo (B.18) em (B.17) temos

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^\nu &= \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\lambda=1}^3 T_{\lambda\lambda'}^\nu \\ &\quad \left[-a_\lambda^\dagger(\vec{k}) a_{\lambda'}(\vec{k}') + b_\lambda(\vec{k}) b_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

obtendo os estados $T_{\lambda\lambda'}^\nu$, então temos que para $\lambda, \lambda' = 1, 2, 3$ e $\nu = 0, 1, 2, 3$

$$\hat{N}^0 = \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \left(\frac{|\vec{k}|^2}{m_{ef}^2} \right) \left[-a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) + b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k}) \right] \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \hat{N}^1 = & \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \left\{ (\epsilon_x)^2 \right. \\ & \left[-a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) + b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k}) \right] + \\ & (\epsilon_x)^2 \left[-a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) + b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k}) \right] + \\ & \left. (q_o/m_{ef}k_x)^2 \left[-a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) + b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k}) \right] \right\} \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}^2 = & \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \left\{ (\epsilon_y)^2 \right. \\ & \left[-a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) + b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k}) \right] + \\ & (\epsilon_y)^2 \left[-a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) + b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k}) \right] + \\ & \left. (q_o/m_{ef}k_y)^2 \left[-a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) + b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k}) \right] \right\} \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}^3 = & \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \left\{ (\epsilon_z)^2 \right. \\ & \left[-a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) + b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k}) \right] + \\ & (\epsilon_z)^2 \left[-a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) + b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k}) \right] + \\ & \left. (q_o/m_{ef}k_z)^2 \left[-a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) + b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k}) \right] \right\} \quad (\text{B.23}) \end{aligned}$$

O número de partículas é dado por $\hat{N}_1^\nu = \hat{N}^0 + \hat{N}^1 + \hat{N}^2 + \hat{N}^3$

Então

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^\nu = & \int \frac{d^3\vec{k}}{4q^0(\vec{k})} \left\{ \left[\left(\frac{|\vec{k}|^2}{m_{ef}^2} \right) + (q_o/m_{ef}k_x)^2 + (q_o/m_{ef}k_y)^2 + (q_o/m_{ef}k_z)^2 \right] \right. \\ & \left[-a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) + b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k}) \right] + \\ & ((\epsilon_x^2) + (\epsilon_y^2) + (\epsilon_z^2)) \left[-a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) + b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k}) \right] + \\ & \left. ((\epsilon_x^2) + (\epsilon_y^2) + (\epsilon_z^2)) \left[-a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) + b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k}) \right] \right\} \quad (\text{B.24}) \end{aligned}$$

dai

$$\begin{aligned}
N_1^{\hat{\nu}\dagger} = & \int \frac{d^3\vec{k}}{2q^0(\vec{k})} \left\{ \left[\left(\frac{|\vec{k}|^2}{m_{ef}^2} \right) + (q_o/m_{ef}k_x)^2 + (q_o/m_{ef}k_y)^2 + (q_o/m_{ef}k_z)^2 \right] \right. \\
& \left[-a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) + b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k}) \right] + \\
& ((\epsilon_x^2) + (\epsilon_y^2) + (\epsilon_z^2)) \left[-a_1(\vec{k})a_1^\dagger(\vec{k}) + b_1^\dagger(\vec{k})b_1(\vec{k}) \right] + \\
& \left. ((\epsilon_x^2) + (\epsilon_y^2) + (\epsilon_z^2)) \left[-a_2(\vec{k})a_2^\dagger(\vec{k}) + b_2^\dagger(\vec{k})b_2(\vec{k}) \right] \right\} \quad (B.25)
\end{aligned}$$

Inserendo (B.24) e (B.25) em (B.13) temos

$$\begin{aligned}
N = & \int \frac{d^3(\vec{k})}{2q_0(\vec{k})} \left\{ \left[\frac{|\vec{k}|^2}{m_{ef}^2} + \frac{q_o^2(\vec{k})}{m_{ef}^2} \right] \left[-a_3^\dagger(\vec{k})a_3(\vec{k}) + b_3(\vec{k})b_3^\dagger(\vec{k}) \right] + \right. \\
& \left[-a_2^\dagger(\vec{k})a_2(\vec{k}) + b_2(\vec{k})b_2^\dagger(\vec{k}) \right] + \\
& \left. \left[-a_1^\dagger(\vec{k})a_1(\vec{k}) + b_1(\vec{k})b_1^\dagger(\vec{k}) \right] \right\}. \quad (B.26)
\end{aligned}$$

Apêndice C

Os Vetores de Polarização

No capítulo 3 nos deparamos com os chamados vetores de polarização, de grande importância na descrição dos campos vetoriais. Mostra-se em seguida um melhor entendimento, sobre estes vetores, assim como uma melhor noção de como estes vetores são definidos para os casos massivos. Para a construção dos vetores de polarização $\epsilon_\nu(k, \lambda)$ deve-se impor a condição de normalização:

$$\epsilon_\nu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda') = -\delta^{\lambda\lambda'}. \quad (\text{C.1})$$

O gauge de Lorentz para as polarizações $\epsilon^{(\lambda)}$, com $\lambda = 1, 2, 3$:

$$\epsilon^{(\lambda)\nu} k_\nu = 0. \quad (\text{C.2})$$

Em nosso modelo descrito no capítulo 3, observa-se que a estrutura é de um campo vetorial massivo, então escolhe-se os vetores de polarização transversais que são dados por

$$\epsilon^{(\lambda)\nu} = (0, \vec{e}^\lambda). \quad (\text{C.3})$$

Para $\lambda = 1, 2$ fica

$$\epsilon^\nu(k, 1) = (0, \vec{e}(k, 1)). \quad (\text{C.4})$$

e:

$$\epsilon^\nu(k, 2) = (0, \vec{e}(k, 2)). \quad (\text{C.5})$$

Substituindo as equações (C.4) e (C.5) em (C.2) obtemos

$$\vec{e}(k, 1) \cdot \vec{k} = \vec{e}(k, 2) \cdot \vec{k} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Para $\lambda = 3$, temos que a componente longitudinal

$$\epsilon^{(3)\nu} = (0, \vec{e}^{(\lambda)}). \quad (\text{C.7})$$

Façamos

$$\epsilon^{(3)\nu} = (A, \vec{B}), \quad (\text{C.8})$$

De (C.8) podemos afirmar que

$$\epsilon^{(\lambda)\nu} \epsilon_{\nu}^{(3)} = -\vec{e}^{\lambda} \cdot \vec{B}, \quad (\text{C.9})$$

e de (C.2)

$$\vec{e}^{\lambda} \cdot \vec{k} = 0, \quad (\text{C.10})$$

De (C.2) e (C.9), temos que

$$A \cdot \vec{k}_0 = \vec{B} \cdot \vec{k}, \quad (\text{C.11})$$

e

$$\vec{B} = w \cdot \vec{k}, \quad (\text{C.12})$$

Substituindo (C.12) em (C.11) temos

$$A \cdot \vec{k}_0 = w \cdot \vec{k}^2, \quad (\text{C.13})$$

De (C.9) temos que

$$\epsilon^{(3)\nu} \epsilon_{\nu}^{(3)} = -1, \quad (\text{C.14})$$

Então

$$A^2 - \vec{B}^2 = -1, \quad (\text{C.15})$$

Fazendo (C.13) em (C.15) temos

$$A^2 - w^2 \vec{k}^2 = -1, \quad (\text{C.16})$$

Dai

$$\frac{w^2 \vec{k}^2}{k_0^2} - w^2 \vec{k}^2 = -1, \quad (\text{C.17})$$

$$w^2 \left(\frac{|\vec{k}|^2}{k_0^2} - \vec{k}^2 \right) = -1, \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{w^2 |\vec{k}|^2}{k_0^2} \left(|\vec{k}|^2 - k_0^2 \right) = -1, \quad (\text{C.19})$$

Substituindo o resultado de (??) em (C.19)

$$\frac{w^2 |\vec{k}|^2}{k_0^2} (-m_{ef}^2) = -1, \quad (\text{C.20})$$

Dai

$$w |\vec{k}| m_{ef} = k_0, \quad (\text{C.21})$$

Portanto

$$w = \frac{k_0}{|\vec{k}|} \frac{1}{m_{ef}}, \quad (\text{C.22})$$

Substituindo o resultado de (C.22) em (C.12) temos

$$\vec{B} = \frac{k_0}{|\vec{k}|} \frac{\vec{k}}{m_{ef}}, \quad (\text{C.23})$$

Então

$$\vec{B} = \frac{k_0}{m_{ef}} \hat{k}, \quad (\text{C.24})$$

Substituindo o resultado de (C.24) em (C.11) temos

$$A = \frac{(k_0/m_{ef}) \hat{k} \cdot \vec{k}}{k_0}, \quad (\text{C.25})$$

Então

$$A = \frac{\hat{k} \cdot \vec{k}}{m_{ef}}, \quad (\text{C.26})$$

Substituindo os resultados de (C.24) e (C.26) em (C.8), temos

$$\epsilon^{(3)\nu} = \left(\frac{|\vec{k}|}{m_{ef}}, \frac{k_0}{m_{ef}} \hat{k} \right). \quad (\text{C.27})$$

que pode também ser escrita da seguinte forma

$$\epsilon^\nu(k, 3) = \left(\frac{|\vec{k}|}{m_{ef}}, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{q^o(\vec{k})}{m_{ef}} \right). \quad (\text{C.28})$$

Bibliografia

- [1] T. Aaltonen *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **102**, 242002 (2009) [arXiv:0903.2229 [hep-ex]].
- [2] X. Liu and H. W. Ke, Phys. Rev. D **80**, 034009 (2009) [arXiv:0907.1349 [hep-ph]].
- [3] T. Aaltonen *et al.* [The CDF Collaboration], arXiv:1101.6058 [hep-ex].
- [4] N. Mahajan, Phys. Lett. B **679**, 228 (2009) [arXiv:0903.3107 [hep-ph]].
- [5] W. Chen and S. L. Zhu, Phys. Rev. D **83**, 034010 (2011) [arXiv:1010.3397 [hep-ph]].
- [6] G. J. Ding, Eur. Phys. J. C **64**, 297 (2009) [arXiv:0904.1782 [hep-ph]].
- [7] T. Branz, T. Gutsche and V. E. Lyubovitskij, Phys. Rev. D **80**, 054019 (2009) [arXiv:0903.5424 [hep-ph]].
- [8] X. Liu and S. L. Zhu, Phys. Rev. D **80**, 017502 (2009) [arXiv:0903.2529 [hep-ph]].
- [9] X. Liu, Phys. Lett. B **680**, 137 (2009) [arXiv:0904.0136 [hep-ph]].
- [10] K. Yi, arXiv:0906.4996 [hep-ex].
- [11] X. Liu, Z. G. Luo and S. L. Zhu, arXiv:1011.1045 [hep-ph].
- [12] R.J.Jaffe, Multiquark hadrons. I. Phenomenology of $Q^2 \bar{Q}^2$ mesons* [10.1103/PhysRevD.15.267].
- [13] F. Stancu, J. Phys. G **37**, 075017 (2010) [arXiv:0906.2485 [hep-ph]].
- [14] E. van Beveren and G. Rupp, arXiv:0906.2278 [hep-ph].

- [15] X. Liu, Z. G. Luo, Y. R. Liu and S. L. Zhu, Eur. Phys. J. C **61**, 411 (2009) [arXiv:0808.0073 [hep-ph]].
- [16] R. M. Albuquerque, M. E. Bracco and M. Nielsen, Phys. Lett. B **678**, 186 (2009) [arXiv:0903.5540 [hep-ph]].
- [17] Z. G. Wang, Eur. Phys. J. C **63**, 115 (2009) [arXiv:0903.5200 [hep-ph]].
- [18] Z. G. Wang, Z. C. Liu and X. H. Zhang, Eur. Phys. J. C **64**, 373 (2009) [arXiv:0907.1467 [hep-ph]].
- [19] S. I. Finazzo, X. Liu and M. Nielsen, arXiv:1102.2347 [hep-ph].
- [20] B. D. Serot, Walecka, John D., “Advances in Nuclear Physics”. New York: Plenum Press, 1986. v. 16.
- [21] J. D. Walecka. “Theoretical nuclear and subnuclear physics”. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [22] E. V. Shuryak, Phys. Rept. **61**, 71 (1980).
- [23] M. L. d. Freire and R. R. da Silva, AIP Conf. Proc. **1296**, 346 (2010) [arXiv:1003.1690 [hep-ph]].
- [24] M. L. de Farias Freire, Propriedades Termodinâmicas da Matéria de Mésons $D - \bar{D}$, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande-PB, (2009).
- [25] Silvio R.A.Salinas, Introdução à Física Estatística, 2.ed.1. reimp.- São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo,2005.
- [26] N. A. Tahir *et al.*, “The CERN Large Hadron Collider as a tool to study high-energy density matter,” Phys. Rev. Lett. **94**, 135004 (2005).
- [27] N.A. Tahir, A. Shutov, I.V. Lomonosov, V. Gryaznov, A.R. Piriz, D.H.H. Hoffmann, V.E. Fortov, V. Kain and R. Schmidt. Potential of CERN large hadron

- collider to study high-energy-density states in matter J. Phys. IV France 133, 1085-1088, (2006).
- [28] H. Satz, arXiv:1101.3937 [hep-ph].
- [29] W. Greiner, S.Schramm,E.Stein, Quantum Chromodynamics, New York, Springer-Verlag, (2002).
- [30] W. Greiner, J.Reinhart, Quantum Eletrodynamics, New York, Springer-Verlag, (2003).
- [31] H. Yukawa. On the interaction of elementary particle I. Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 17 (1935) 48.
- [32] H. Yukawa; S. Sakata. On the Theory of β - disintegration an allied phenomenon. Proc. Phys. Math. Soc. Japan. 17 (1935) 379.
- [33] C. M. G. Lattes, ; Muirhead, H.; Occhialini, G. P. S.; Powell, C. F. Processes Involving Charged Mesons, "Nature", Volume 159, p. 694-697 (1947).
- [34] E. Gardner, ; Lattes, C. M. G. Production of mesons by the 184-inch Berkeley cyclotron. "Science", v.107, p.270-271, (1948).
- [35] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), JP G 37,07051 (2010) (URL: <http://pdg.lbl.gov>).
- [36] H.Francis; A.D. Martin;Quarks and Leptons, an introductory Course in Modern Particles Physics, John Wiley and Sons, USA (1984).
- [37] W. Greiner, Berndt Muller, Quantum Mechanics - symetries, Springer-Verlag, Germany(1994).
- [38] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons, Phys. Lett. 8, (1964), 214 and G. Zweig, CERN preprints 8182/TH. 401 and 8414/TH. 412 (1964) (unpublished).
- [39] G. Zweig. Preprint. CERN-8419-TH-412, 1964.

- [40] G. Zweig. “An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking I”, CERN-8182-TH-401, (1964).
- [41] X. L. Wang *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. Lett. **99**, 142002 (2007) [arXiv:0707.3699 [hep-ex]].
- [42] S. K. Choi *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. Lett. **91**, 262001 (2003) [arXiv:hep-ex/0309032].
- [43] D. E. Acosta *et al.* [CDF II Collaboration], Phys. Rev. Lett. **93**, 072001 (2004) [arXiv:hep-ex/0312021].
- [44] C. Z. Yuan [Belle Collaboration], arXiv:0910.3138 [hep-ex].
- [45] R. R. da Silva; O Problema de Superfície Nuclear na Teoria Relativística de Campo Médio, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, (2001)
- [46] D. V. Anchishkin and A. V. Nazarenko, “Liquid-like phases of $\pi^+ \pi^-$ matter,” J. Phys. Stud. **10**, 93 (2006) [arXiv:nucl-th/0611040].
- [47] A. Delfino, J. B. da Silva, M. Malheiro, M. Chiapparini and M. E. Bracco, “Hadronic entropy enhancement and low density QGP,” J. Phys. G **28**, 2249 (2002) [arXiv:hep-ph/0212302].
- [48] Z. G. Tan; A. Bonasera, “Mean field effects in the quark-gluon plasma,” Nucl. Phys. A **784**, 368 (2007) [arXiv:nucl-th/0611071].
- [49] S. K. Ghosh, S. C. Phatak; P. K. Sahu, “Quark hadron phase transition and hybrid stars,” Z. Phys. A **352**, 457 (1995) [arXiv:nucl-th/9407009].
- [50] F. Close, A Cebola Cósmica, Lisboa, Edições 70, (1983).
- [51] G. S. F. Stephans; critRHIC: the RHIC low energy program; J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **32** S447-S453, (2006).

- [52] M. Xu, M. Yu; L. Liu; The second-order phase transition in the QCD phase diagram and a new approach for locating the critical point using RHIC low-energy-scan data; *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **36** 06404, (2009).
- [53] M. Asakawa; QCD critical point and experimental observables; *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **36** 064042, (2009).
- [54] E. V. Shuryak, "Physics of the pion liquid," *Phys. Rev. D* **42** (1990) 1764.
- [55] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos*, Edusp, São Paulo, (2002)
- [56] M. Kaku, *Quantum Field Theory: a modern introduction*, Oxford, New York (1993).
- [57] W. Greiner, J. Reinhard, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Germany (1996)
- [58] Y. R. Liu, M. Oka, M. Takizawa, X. Liu, W. Z. Deng and S. L. Zhu, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 014011 [arXiv:1005.2262 [hep-ph]].