



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

ROBSON KLEBSON DE LIMA

Cuité - PB

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO

TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

ROBSON KLEBSON DE LIMA

Cuité - PB

2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

L732t Lima, Robson Klebson de.

Teorema de Green e aplicações. / Robson Klebson de Lima. – Cuité: CES, 2016.

36 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2016.

Orientador: Marciel Medeiros de Oliveira.

1. Teoremas. 2. Áreas. 3. Teorema de Green. I. Título.

Biblioteca do CES

CDU 514

ROBSON KLEBSON DE LIMA

TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

TCC apresentado ao curso de Matemática do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande em cumprimento às exigências do Componente Curricular Trabalho Acadêmico Orientado, para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Comissão Examinadora:

Ms. Marciel Medeiros de Oliveira - UFCG - Cuité - PB
(Orientador)

Dr. Aluizio Freire da Silva Junior - UFCG - Cuité - PB
(Examinador)

Ms. Jussie Ubaldo da Silva - UFCG - Cuité - PB
(Examinador)

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, a Universidade Federal de Campina Grande (Campus Cuité-PB), ao Professor Marciel pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, a minha namorada Yranilza, aos meus amigos que estavam sempre do meu lado me ajudando e principalmente aos meus pais que sem eles eu não conseguiria chegar até onde cheguei. Agradeço a todos que diretamente e indiretamente fizeram parte da minha formação. O meu muito obrigado.

Aos meus pais, irmãos, professores e amigos pelos incentivos, apoio e conversas durante o longo desses anos.

”A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens ”.

René Descartes

Resumo

O Teorema de Green é um dos resultados mais importantes do cálculo vetorial e relaciona integral de linha ao longo de uma curva fechada simples suave por parte com a integral dupla sobre a região por esta curva delimitada. Nesse contexto, mostraremos inicialmente algumas noções preliminares para nos dá suporte necessário para a compreensão de nosso teorema. Em seguida desenvolvemos a demonstração do mesmo e sequencialmente mostraremos algumas de suas aplicações.

Palavras-chave: Teoremas, Áreas, Trabalho, Força e Planímetro.

Abstract

Green theorem is one of the most important results of the vector calculus and integral line relates along a simple smooth closed curve by with the double integral over the region bounded by this curve. In this context, initially we show some preliminary ideas to give the necessary support to the understanding of our theorem. Then we develop the demonstration of it and sequentially show some of its applications.

Keywords: Theorems, Areas, Work, Force and Planimeter.

Sumário

Introdução	9
1 Noções Preliminares	11
1.1 Curvas	11
2 Teoremas de Green	14
2.1 Teorema de Green	14
2.2 Extensão do Teorema de Green para regiões mais gerais	18
2.3 Extensão do Teorema de Green para regiões que contenham <i>buracos</i>	22
2.4 Duas importantes observações	24
3 Aplicações do Teorema de Green	25
3.1 Cálculo de Área usando o teorema de Green	25
3.2 Trabalho realizado pela força \vec{F}	26
3.3 Planímetro	27
4 Apêndice	32
5 Conclusão	33
Referências Bibliográficas	34

Introdução

O desenvolvimento deste trabalho é baseado numa pesquisa não muito extensa, porém de fundamental importância para a construção do mesmo. Esse texto possui uma breve descrição dos caminhos utilizados para o desenvolvimento do teorema de George Green e suas aplicações.

George Green nasceu em Nottingham em 13 de julho de 1793. Aos oito anos, Green foi enviado para a Robert Goodacre's Academy, onde estudou por 4 períodos. Aos nove anos, George Green havia recebido a educação formal que ia adquirir até os seus 40 anos. Quando Green tinha 14 anos, seu pai construiu um moinho de vento em Sneinton, uma aldeia muito próxima a Nottingham, onde George Green trabalhava junto ao capataz Willian Smith recentemente contratado por seu pai. Durante esse tempo Green ficava horas e horas no moinho esperando por ventos mais fortes para conseguir trabalhar. Muitas vezes ele usava esse tempo para estudar matemática e desenvolver seu conhecimento. Aos 24 anos, George mudou-se juntamente com seus pais para uma casa próxima ao moinho e alguns anos depois juntou-se a biblioteca de Nottingham recentemente criada.

Green publicou o seu primeiro documento "Um ensino na Aplicação de Análise Matemática para as Teorias de Eletricidade e Magnetismo" em 1828, com 35 anos. Ele conseguiu desenvolver técnicas matemáticas já mais vistas para resolver problemas que surgiram na análise. Porém, ele não conseguiu que seu trabalho fosse visto por outros matemáticos da área. Desta forma seus conceitos não tiveram um grande impacto até anos depois de sua morte. Devido sua posição social e não possuir um treinamento específico, ele foi instruído a não publicar nenhum documento oficial em jornais científicos. Por esse motivo, Green "imprimiu" seus trabalhos e espalhou entre

os matemáticos e físicos ingleses, porém não conseguiu o retorno esperado até que um matemático francês, Edward Bromhead, um matemático de Cambridge diplomado, o inspirou. Com a influência de Edward, Green finalmente conseguiu publicar seus trabalhos nos jornais científicos.

A vida de George Green mudou consideravelmente após suas publicações. Com a morte de seu pai e a morte de sua mãe anos antes, ele tornou-se um homem muito rico. Deixou de trabalhar no moinho e o arrendou no ano de 1833 aos 40 anos. Com a ajuda de Bromhead ele matriculou-se em Cambridge e no ano de 1837 ele conseguiu seu diploma em matemática. Logo depois ele foi eleito por companheirismo à faculdade Gonville e Caius, mas manteve-se no posto por apenas dois anos quando ficou doente e voltou para Nottingham, onde morreu em 1841, deixando a esposa e sete filhos.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste primeiro capítulo iremos apresentar algumas definições, conceitos e exemplos necessários para chegarmos ao nosso teorema.

1.1 Curvas

Definição 1.1 (Curva) Dada uma função vetorial contínua $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, $t \in I$, chamamos **curva** o lugar geométrico dos pontos P do espaço que têm vetor posição $\vec{f}(t)$, $t \in I$. Se \vec{f} é o vetor posição de uma partícula em movimento, a curva C coincide com a trajetória da partícula.

Definição 1.2 (Curva Fechada) Uma curva é dita **fechada** se dada uma curva parametrizada $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, tem-se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Definição 1.3 (Curva Simples) Dizemos que uma curva é **simples** se cada ponto da curva corresponder a um único valor do parâmetro t (exceto quando $t = a$ e $t = b$).

Definição 1.4 (Curva Suave ou Regular) Uma curva é dita **suave** ou **regular** sempre que a curva admitir uma parametrização $\vec{r}(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que tem derivada contínua $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in I$. Quando conseguimos dividir uma curva em um número finito de curvas suaves essa curva é dita **suave por partes**.

Definição 1.5 (Curva parcialmente suave) Dada uma curva fechada simples ela é dita **parcialmente suave** quando é formada pela união finita de curvas C_k , tais que, essas curvas são simples e suaves.

Definição 1.6 (Campos Vetoriais) Seja D uma região no espaço e seja \vec{f} uma função vetorial definida em D . Então, a cada ponto $P \in D$, \vec{f} associa um único vetor $\vec{f}(P)$. A região D , juntamente com os correspondentes vetores $\vec{f}(P)$, constitui um campo vetorial. Dizemos também que \vec{f} define um campo vetorial sobre D .

Exemplo 1.1.1 Seja D a atmosfera terrestre. A cada ponto $P \in D$ associamos o vetor $\vec{v}(P)$ que representa a velocidade do vento em P . Então o vetor \vec{v} define um campo vetorial em D , chamado **Campo de Velocidade**.

Definição 1.7 (Integrais de Linha de Campos Vetoriais) Seja C uma curva suave dada por $\vec{r}(t), t \in [a, b]$. Seja $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ um campo vetorial definido e limitado sobre C . A integral curvilínea de \vec{f} , ao longo de C , que denotamos $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, é definida por

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt,$$

Sempre que a integral à direita existe.

Exemplo 1.1.2 A força variável $\vec{f} = (3x - 4y)\vec{i} + (4x + 2y)\vec{j}$ move uma partícula ao longo da curva

$$C : \begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 3t^2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2, \text{ de } (1, 0) \text{ a } (9, 12).$$

Calcule o trabalho realizado se as distâncias são medidas em cm e a força é medida em dinas.

Solução:

O trabalho é dado pela integral de linha $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, logo $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, assim,

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_C (3x - 4y)dx + (4x + 2y)dy.$$

Fazendo-se as substituições $x = 4t + 1, dx = 4, y = 3t^2$ e $dy = 6t$, temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 [3(4t + 1) - 4(3t^2)](4dt) + [4(4t + 1) + 2(3t^2)](6tdt) \\ &= \int_0^2 (36t^3 + 48t^2 + 72t + 12)dt = (9t^4 + 16t^3 + 36t^2 + 12t) \Big|_0^2 = 440 \text{ ergs.} \end{aligned}$$

A seguir vamos apresentar algumas propriedades das integrais de linhas, as quais são herança das integrais definidas.

Propriedade 1.1 (Aditividade) *Se uma curva C for formada por ligações finitas de curvas C_1, C_2, \dots, C_k pelas extremidades, então a integral de uma função sobre C é a soma das integrais sobre a curva que a compõem:*

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{C_k} \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Propriedade 1.2 (Linearidade) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}, \vec{F}, \vec{G}$ campos de vetores e C uma curva de classe C^1 , então:*

$$\int_C (a\vec{F} + b\vec{G}) \cdot d\vec{r} = a \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + b \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}.$$

Propriedade 1.3 (Inversão) *É uma troca na direção da curva C sobre a região a qual a integral de linha é aplicada resulta em uma troca no sinal algébrico da integral, isto é:*

$$\int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Capítulo 2

Teoremas de Green

Neste capítulo iremos apresentar o **Teorema de Green** com sua demonstração. Ao longo do texto usaremos o símbolo \oint para denotar o sentido positivo de uma integral curvilínea ao longo de uma curva.

2.1 Teorema de Green

Teorema 2.1 (Teorema de Green) *Seja C uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, e R a região fechada delimitada por C . Se $\vec{f} = (f_1, f_2)$ é um campo vetorial contínuo com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em um domínio D que contém R , então*

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \int \int_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.1)$$

DEMONSTRAÇÃO:

Faremos a demonstração do teorema para o caso em que a curva C é suave e a região R pode ser descrita por:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ e } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \text{ e } R = \{(x, y) | c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

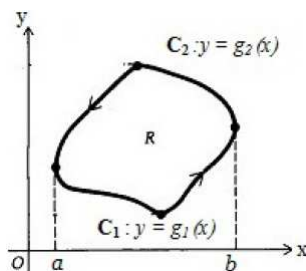


figura 2.1: Curva.

Fonte: Gilvania Ramos Borges.

Para provar (2.1), basta mostrar que:

$$\oint_C f_1 dx = - \int_R \int \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy. \quad (2.2)$$

e

$$\oint_C f_2 dy = \int_R \int \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy. \quad (2.3)$$

Primeiro vamos mostrar (2.2). Temos que a curva C pode ser dividida em duas curvas C_1 e C_2 , de equações $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$. Usando x como parâmetro, obtemos uma parametrização de C_1 , dada por:

$$C_1 : \vec{r}_1(x) = (x, g_1(x)), \quad x \in [a, b].$$

Para a curva C_2 não procederemos da mesma forma, pois o sentido positivo determinado pelos valores crescentes de $x \in [a, b]$ nos dá a orientação sobre C_2 , no sentido oposto ao desejado. Porém, podemos, parametrizar $-C_2$ e usar a propriedade de integral de linha de um campo vetorial \vec{f} que nos diz que $\int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$. Assim,

$$-C_2 : \vec{r}_2(x) = (x, g_2(x)), \quad x \in [a, b].$$

Portanto,

$$\oint_C f_1 dx = \oint_{C_1} f_1 dx + \oint_{C_2} f_1 dx = \oint_{C_1} f_1 dx - \oint_{-C_2} f_1 dx = \int_a^b f_1(x, g_1(x)) dx - \int_a^b f_1(x, g_2(x)) dx.$$

Porém, como $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ é contínua, desenvolvendo o 2º membro de (2.2) temos

$$\begin{aligned} \int_R \int \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b \left[f_1(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} \right] dx \\ &= \int_a^b [f_1(x, g_2(x)) - f_1(x, g_1(x))] dx = - \int_a^b [f_1(x, g_1(x)) - f_1(x, g_2(x))] dx. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\oint_C f_1 dx = - \int_R \int \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy = \int_a^b [f_1(x, g_1(x)) - f_1(x, g_2(x))] dx$$

Agora faremos a demonstração do teorema para o caso em que:

$$R = \{(x, y) | c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

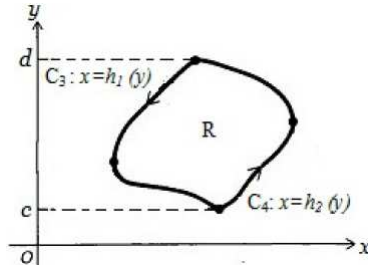


Figura 2.2: Curva.

Fonte: Gilvania Ramos Borges.

Para provarmos (2.3), basta mostrar que:

$$\oint_C f_2 dy = \int \int_R \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy.$$

Temos que a curva C pode ser descrita como C_3 e C_4 , de equações $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$.

Usando y como parâmetro, obtemos uma parametrização de C_3 , dada por:

$$C_3 : \vec{r}_3(y) = (y, h_1(y)), \quad y \in [c, d].$$

Para a curva C_4 procederemos da mesma forma. Usando y como parâmetro, obtemos uma parametrização de C_4 , dada por:

$$C_4 : \vec{r}_4(y) = (y, h_2(y)), \quad y \in [c, d].$$

Portanto,

$$\oint_C f_2 dy = \oint_{C_3} f_2 dy + \oint_{C_4} f_2 dy = \int_a^b f_2(y, h_1(y)) dy + \int_a^b f_2(y, h_2(y)) dy.$$

Por outro lado, $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ é contínua e desenvolvendo o 2º membro de (2.3) teremos

$$\begin{aligned} \int \int_R \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy &= \int_a^b \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \right] dy = \int_a^b \left[f_2(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right] dy \\ &= \int_a^b [f_2(y, h_2(x)) - f_2(y, h_1(y))] dy = - \int_a^b [f_2(y, h_1(y)) + f_2(y, h_2(y))] dy. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\oint_C f_2 dy = \int \int_R \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy = \int_a^b [f_2(y, h_1(y)) + f_2(y, h_2(y))] dy$$

■

A seguir vamos apresentar um exemplo ilustrando o Teorema de Green sendo utilizado para calcular ao longo de uma circunferência.

Exemplo 2.1.1 Calcular $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, ao longo da circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, no sentido horário, sendo $\vec{f} = (4x^2 - 9y, 9xy + \sqrt{y^2 + 1})$.

Solução:

Como C está orientada no sentido horário, não podemos aplicar o Teorema de Green diretamente. No entanto, podemos aplicar o Teorema de Green para calcular a integral sobre a curva $-C$ e depois usar a propriedade 1.3. Temos:

$$\int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int \int_R (9y + 9) dx dy = 9 \int \int_R (y + 1) dx dy.$$

Passando para coordenadas polares, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= 9 \int_0^\pi \left[\int_0^{2\text{sen}\theta} (r\text{sen}\theta + 1)r dr \right] d\theta \\ &= 9 \int_0^\pi \left(\frac{r^3}{3} \text{sen}\theta + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{2\text{sen}\theta} d\theta \\ &= 9 \int_0^\pi \left(\frac{8}{3} \text{sen}^4\theta + 2\text{sen}^2\theta \right) d\theta \\ &= 18\pi. \end{aligned}$$

Logo, $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = -18\pi$.

2.2 Extensão do Teorema de Green para regiões mais gerais

Apesar de termos provado o Teorema de Green somente no caso particular onde R é uma região simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que R é uma união finita de regiões simples.

Seja C uma curva fechada simples e suave no plano xy com a propriedade de que retas paralelas aos eixos não a cortam em mais que dois pontos. Seja R a região limitada por C e suponha que f_1, f_2 e suas derivadas parciais de primeira ordem sejam contínuas em todos os pontos de alguma região aberta que contenha C e R . Iremos provar a forma da **Circulação-Rotacional ou Tangencial** do teorema de Green.

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Como C é formada por duas partes orientadas:

$$C_1 : y = g_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad C_2 : y = g_2(x), \quad b \geq x \geq a.$$

para todo x entre a e b , podemos integrar $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ em relação a y de $y = g_1(x)$ a $y = g_2(x)$ e obter:

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y} dy = f_1(x, y) \Big|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} = f_1(x, g_2(x)) - f_1(x, g_1(x)).$$

Dessa forma podemos integrar esta última equação em relação a x de a a b :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y} dy dx &= \int_a^b [f_1(x, g_2(x)) - f_1(x, g_1(x))] dx \\ &= - \int_a^b f_1(x, g_2(x)) dx - \int_a^b f_1(x, g_1(x)) dx \\ &= - \int_{C_2} f_1 dx - \int_{C_1} f_1 dx \\ &= - \oint_C f_1 dx. \end{aligned}$$

Portanto,
$$\oint_C f_1 dx = \int \int_R \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

De forma análoga, podemos deduzir a outra parte da prova integrando $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ primeiro em relação a x e depois em relação a y , mostrando que a curva C é decomposta em duas partes orientadas

$$C'_1 : x = h_1(y), d \geq y \geq c, \quad C'_2 : x = h_2(y), c \leq y \leq d.$$

Obtendo:
$$\oint_C f_2 dy = \int \int_R \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy.$$

Donde temos,

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \int \int_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Concluindo assim, nossa prova para a forma da Circulação-Rotacional ou Tangencial.

De forma análoga podemos observar que o Teorema de Green também se aplica a regiões retangulares. Consideremos R como uma região retangular. Notemos que a fronteira C está dividida em quatro segmentos de reta orientados.

$$C_1 : y = c, a \leq x \leq b, \quad C_2 : x = b, c \leq y \leq d$$

$$C_3 : y = d, b \geq x \geq a, \quad C_4 : x = a, d \geq y \geq c,$$

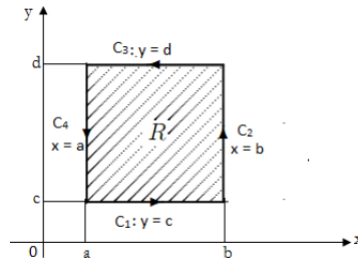


figura 2.3: Retângulo.

Fonte: Gilvania Ramos Borges.

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy &= \int_c^d (f_2(b, y) - f_2(a, y)) dy \\ &= \int_c^d f_2(b, y) dy + \int_d^c f_2(a, y) dy \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$= \int_{C_2} f_2 dy + \int_{C_4} f_2 dy.$$

Como y é constante ao longo de C_1 e C_3 , $\int_{C_1} f_2 dy = \int_{C_3} f_2 dy = 0$, assim podemos adicionar $\int_{C_1} f_2 dy + \int_{C_3} f_2 dy$ no lado direito da equação (2.4) sem alterar a igualdade. Dessa forma obtemos:

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy = \oint_C f_2 dy. \quad (2.5)$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial f_1}{\partial y} dy dx = - \oint_C f_1 dx. \quad (2.6)$$

Subtraindo a equação (2.6) da equação (2.5), novamente chegamos a

$$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Exemplo 2.2.1 Calcule a integral de linha $\oint_C x^2 y dx - y^2 x dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução:

Temos que $C : x^2 + y^2 = 1$.

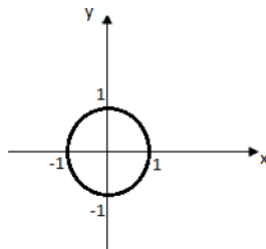


figura 2.4: Circunferência.

Fonte: Gilvania Ramos Borges.

Usando coordenadas polares obtemos:

$$x = r \cos \theta \quad e \quad y = r \sin \theta \quad , \quad 0 \leq r \leq 1 \quad e \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Assim, temos que $f_1(x, y) = x^2 y$ e $f_2(x, y) = -y^2 x$. Além disso,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x^2 \quad e \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = -y^2.$$

Aplicando o Teorema de Green obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_C x^2 y dx - y^2 x dy &= \iint_R -y^2 - x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^2 \operatorname{sen}^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta \ r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{r^4}{4} \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} d\theta = -\frac{\theta}{4} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2 Calcule a integral $\oint_C [(y^2 + \sqrt{4-x^2})dx + (\ln y - 4x)dy]$ ao longo do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$ e $(0, 2)$, no sentido anti-horário.

Solução:

Seja R a região retangular representada pelos vértices acima. Temos que:

$$f_1(x, y) = y^2 + \sqrt{4-x^2} \quad e \quad f_2(x, y) = \ln y - 4x.$$

Além disso,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2y \quad e \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = -4.$$

Aplicando o Teorema de Green temos:

$$\begin{aligned} \oint_C [(y^2 + \sqrt{4-x^2})dx + (\ln y - 4x)dy] &= \iint_R -4 - 2y dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^3 -4 - 2y dx dy = \int_0^2 -4x - 2yx \Big|_0^3 dy \\ &= \int_0^2 (-4 \cdot 3 - 2y \cdot 3 - (-4 \cdot 0 - 2y \cdot 0)) dy = \int_0^2 -12 - 6y dy \\ &= -12y - 3y^2 \Big|_0^2 = -12 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - (-12 \cdot 0 - 3 \cdot 0) = -24 - 12 = -36. \end{aligned}$$

2.3 Extensão do Teorema de Green para regiões que contenham *buracos*

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Note que a fronteira C da região R é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2 .

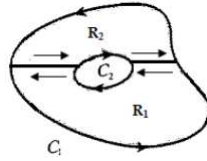


figura 2.5: Região com buraco.

Fonte: Gilvania Ramos Borges.

Admitiremos que essas curvas fronteiras são orientadas de modo que a região R esteja à esquerda quando percorrermos a curva C . Então a orientação positiva é anti-horária na curva externa C_1 , porém é horária na curva interna C_2 . Se dividirmos R em duas regiões R_1 e R_2 . Aplicando o Teorema de Green a cada uma das regiões R_1 e R_2 , obtemos:

$$\begin{aligned} & \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{R_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial R_1} f_1 dx + f_2 dy + \int_{\partial R_2} f_1 dx + f_2 dy \end{aligned}$$

Como a integral de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos:

$$\begin{aligned} & \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{C_1} f_1 dx + f_2 dy + \int_{C_2} f_1 dx + f_2 dy = \int_C f_1 dx + f_2 dy, \end{aligned}$$

que é o teorema de Green para região R .

Exemplo 2.3.1 *Sejam C_1 e C_2 duas curvas fechadas simples parcialmente suaves que não se interceptam, cada uma tendo como a origem como ponto interior. Se $f_1(x, y) =$*

$\frac{-y}{x^2+y^2}$ e $f_2(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, verifique a forma tangencial do Teorema de Green sobre a região anular $R : h^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, $0 < h < 1$.

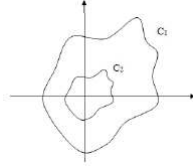


figura 2.6: Região com buraco.

Fonte: Gilvania Ramos Borges.

Solução:

A fronteira de R consiste na circunferência

$$C_1 : x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

percorrida no sentido anti-horário à medida que t aumenta, e a circunferência

$$C_2 : x = h \cos \theta, \quad y = -h \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

percorrida no sentido horário à medida que θ aumenta. As funções f_1 e f_2 e suas derivadas parciais são contínuas em R . Além disso,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)(-1) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

assim,

$$\iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R dx dy = 0.$$

A integral de $f_1 dx + f_2 dy$ sobre a fronteira de R é:

$$\begin{aligned} \int_C f_1 dx + f_2 dy &= \oint_{C_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \oint_{C_2} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt - \int_0^{2\pi} \frac{h^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{h^2} d\theta = 2\pi - 2\pi = 0. \end{aligned}$$

As funções f_1 e f_2 são descontínuas em $(0, 0)$, assim não podemos aplicar o Teorema de Green à circunferência e à região dentro dela. Devemos excluir a origem. Fazemos isso excluindo os pontos dentro de C_2 .

Poderíamos substituir a circunferência C_1 por uma elipse ou qualquer outra curva fechada simples K que cerque C_2 . O resultado ainda seria

$$\oint_K (f_1 dx + f_2 dy) + \oint_{C_2} (f_1 dx + f_2 dy) = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

O que leva a conclusão de que $\oint_K (f_1 dx + f_2 dy) = 2\pi$, para qualquer curva K desse tipo.

Podemos explicar esse resultado mudando para coordenadas polares. Com

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

$$dx = -r \operatorname{sen} \theta d\theta + \cos \theta dr, \quad dy = r \cos \theta d\theta + \operatorname{sen} \theta dr,$$

temos:

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)}{r^2} d\theta = d\theta,$$

e θ aumenta em 2π à medida que percorremos K uma vez no sentido anti-horário.

2.4 Duas importantes observações

1. O Teorema de Green é um caso particular do Teorema de Stokes e Gauss. Ou seja, o Teorema de Stokes constitui uma generalização do Teorema de Green para o espaço tridimensional e pode ser utilizado para transformar determinadas integrais curvilíneas em integrais de superfície, ou vice-versa.

2. Outra forma de enunciarmos o Teorema de Green é:

Teorema de Green (Circulação-Rotacional ou forma tangencial) A circulação no sentido anti-horário de um campo $F = F_1 \vec{i} + f_2 \vec{j}$ em torno de uma curva fechada simples C no plano é igual à integral dupla de $(\operatorname{rot} F) \cdot k$ sobre a região R limitada por C .

$$\oint_C F \cdot T ds = \oint_C f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Capítulo 3

Aplicações do Teorema de Green

3.1 Cálculo de Área usando o teorema de Green

Teorema 3.1 *Se R for uma região tendo por fronteira uma curva C fechada simples suave, e A unidades de área for de R , então,*

$$A = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $f_1(x, y) = -\frac{1}{2}y$ e $f_2(x, y) = \frac{1}{2}x$. Então,

$$\begin{aligned} \oint_C -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy &= \int \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2}y \right) \right] dxdy \\ &= \int \int_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dxdy = \int \int_R dxdy. \end{aligned}$$

Como $\int \int_R dxdy$ é a medida da área de R , $\frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = A$

■

Exemplo 3.1.1 *Aplique o Teorema de Green para calcular a área da região limitada pela elipse positivamente orientada e parametrizada pelo caminho $\lambda : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow$*

\mathbb{R}^2 , $\lambda(t) = (a \cos t, b \sin t)$.

Solução:

Usando a Fórmula do teorema de Green $A = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt$ para o cálculo de áreas, temos:

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b [(a \cos t)(b \cos t) + ab \sin^2 t]dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab[\cos^2 t + \sin^2 t]dt = ab\pi.$$

3.2 Trabalho realizado pela força \vec{F} .

Considere a integral de linha $\int_C f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$, onde a curva C é dada pelas equações paramétricas

$$C : \begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

Se definimos o vetor

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b,$$

como sendo o vetor posição variável de um ponto (x, y) em C , então

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j},$$

ou na forma diferencial $d\vec{R} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$. Agora, tomando-se $\vec{F} = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$, temos

$$\vec{F} \cdot d\vec{R} = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy,$$

Logo

$$\int_C f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}.$$

Analogamente, se C é uma curva no espaço tridimensional determinada por um vetor posição variável \vec{R} .

O vetor notação $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ para integral de linha não somente tem a vantagem da rigidez, mas também sugere uma importante integração física da integral de linha. Suponha que \vec{F} representa uma força variável agindo numa partícula P que se move

ao longo da curva C . Se \vec{R} é o vetor posição variável de P , então podemos interpretar $d\vec{R}$ como representando um deslocamento infinitesimal da partícula. Logo, $\vec{F} \cdot d\vec{R}$ representa o trabalho realizado na partícula pela força \vec{F} durante seu deslocamento. Somando-se, isto é, integrando-se todos esses trabalhos infinitesimais, obtemos $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$. Logo, a integral de linha $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ representa o trabalho útil realizado pela força \vec{F} no movimento de uma partícula ao longo da curva C , desde seu ponto inicial até seu ponto terminal.

Exemplo 3.2.1 Use o Teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado ao mover um objeto no sentido anti-horário, uma vez em torno da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, se o movimento for causado pelo campo de forças $F(x, y) = (\text{sen}x - y)\vec{i} + (e^y - x^2)\vec{j}$. Suponha que o arco seja medido em metros e a força seja medida em newtons.

Solução:

Se W for o trabalho realizado, então:

$$W = \oint_C (\text{sen}x - y)dx + (e^y - x^2)dy$$

onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$. Do Teorema de Green, temos:

$$W = \int \int_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\text{sen}x - y) \right] dx dy = \int \int_R (-2x + 1) dx dy.$$

Usaremos coordenadas polares para calcular a integral dupla, com $x = r \cos \theta$ e $dx dy = r dr d\theta$. Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r \cos \theta + 1)r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r^2 \cos \theta + r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left. -\frac{2}{3}r^3 \cos \theta + \frac{r^2}{2} \right|_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3}a^3 \cos \theta + \frac{a^2}{2} \right) d\theta = \left. -\frac{2}{3}a^3 \text{sen} \theta + \frac{a^2}{2} \theta \right|_0^{2\pi} = \pi a^2. \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado foi de $\pi a^2 J$.

3.3 Planímetro

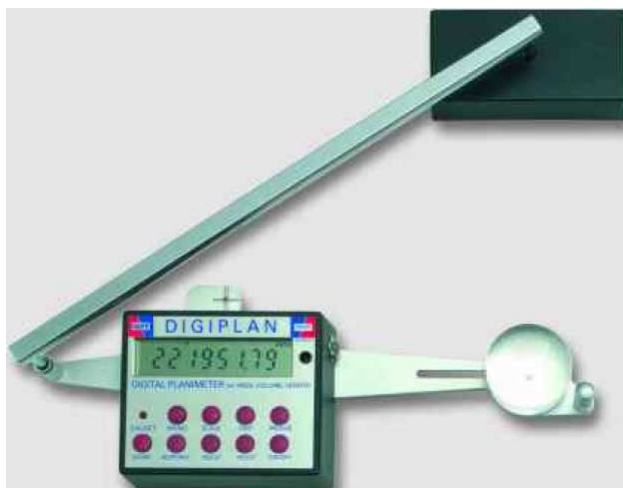


figura 3.1: Planímetro.

Fonte: Alcimar de Souza.

O *Planímetro* é um instrumento mecânico inventado pelo matemático Jacob Amsler, capaz de medir áreas planas de regiões limitadas. Este instrumento tem uma construção muito simples, possui dois braços metálicos de tamanhos iguais ou diferentes podendo variar em um ângulo de 0° a 180° entre eles. Na extremidade de um dos braços temos uma ponta que pode ser fixada na superfície plana. Na articulação desses braços fica uma pequena roda que gira enquanto o contorno da curva na superfície é feita. Nesta roda existe um contador que mede o número de voltas que o braço faz enquanto contorna a curva. Quando esta roda move-se perpendicularmente em relação ao seu eixo, ela gira e seu movimento é registrado pelo contador.

O Teorema de Green juntamente com o planímetro tem sido de grande importância para o cálculo de área de figuras planas fechadas, pois ao calcularmos uma área de uma região fechada R podemos colocar o aparelho em qualquer área fora da área que queremos calcular e com a parte móvel contornamos toda a curva fechada no sentido anti-horário (por causa do marcador) e assim calculamos a área.

Para entendermos como o Teorema de Green contribui para o funcionamento do planímetro, descreveremos o campo de funcionamento de direções definido pelo equipamento. Primeiro definiremos as coordenadas x e y . Logo após, consideremos a origem desse plano como sendo a ponta do planímetro que está fixa e assim traçamos dois eixos x e y perpendiculares entre si. Como a roda gira perpendicularmente ao braço no qual está fixada, o campo $F(x, y)$ definido pelo planímetro é perpendicular ao braço móvel e suponhamos que ele tenha módulo 1.

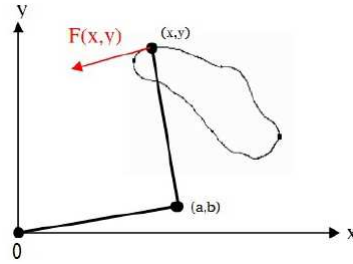


figura 3.2: Curva.

Fonte: Alcimar de Souza.

Consideremos que o braço do Planímetro tenha tamanho r . O primeiro esteja fixado na origem $(0,0)$ e o braço móvel no ponto (a,b) . Chamemos de \vec{v} o vetor que representa o braço móvel do Planímetro no ponto (a,b) . Deste modo temos que, $\vec{v} = (x - a, y - b)$ e um vetor perpendicular é $\vec{w} = (-(y - b), x - a)$. Como os braços possui comprimento r temos $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = \sqrt{(y - b)^2 + (x - a)^2} = r$. Assim, nosso campo é $F = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\frac{-(y-b)}{r}, \frac{x-a}{r} \right)$, agora determinemos os valores de a e b .

Consideremos a equação dos círculos descritas por cada um dos braços do Planímetro.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 & (I) \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 & (II) \end{cases}$$

Desenvolvendo a equação (II), temos:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

temos que,

$$a^2 + b^2 = r^2$$

assim,

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + r^2$$

ou ainda,

$$x^2 + y^2 - 2xa - 2yb = 0$$

o que implica,

$$b = \frac{x^2 + y^2 - 2xa}{2y}.$$

Agora substituindo o valor de b na equação (I) temos,

$$r^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{x^2 + y^2 - 2xa}{2y} \right)^2$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} 4y^2r^2 &= 4y^2a^2 + (x^2 + y^2 - 2xa)^2 \\ &= 4y^2a^2 + 4x^2a^2 + (x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2)a. \end{aligned}$$

Assim,

$$4(x^2 + y^2)a^2 - 4x(x^2 + y^2)a + (x^2 + y^2)^2 - 4y^2r^2 = 0.$$

Usando $R^2 = (x^2 + y^2)$ temos,

$$\begin{aligned} 4R^2a^2 - 4xR^2a + R^4 - 4y^2r^2 &= 0 \\ a^2 - xa + \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2} &= 0 \\ a^2 - xa + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2} &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\left(a - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2},$$

o que implica,

$$\begin{aligned} a - \frac{x}{2} &= \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2}} \\ a &= \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2R^2 - R^4 + 4y^2r^2}{4R^2}}. \end{aligned}$$

Agora obtemos,

$$a = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2R^2 - R^4 + 4y^2r^2}}{2R}$$

ou seja,

$$a = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}$$

Com a escolha de um valor positivo para a implica que o caminho a ser percorrido pelo braço móvel do Planímetro é o sentido anti-horário. Com o valor de a definido, o valor de b aparece, como sendo:

$$b = \frac{y}{2} + \frac{x\sqrt{R^2x^2 - R^4 + 4y^2r^2}}{2Ry}$$

ou seja,

$$b = \frac{y}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}.$$

Calculando os valores de a e b temos que o campo para o Planímetro é:

$$f(x, y) = -\frac{1}{r}(y - b) = \frac{1}{r} \left(-\frac{y}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right)$$

e

$$g(x, y) = -\frac{1}{r}(x - a) = \frac{1}{r} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1} \right).$$

Derivando as duas equações acima vamos obter:

$$r \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2} + \frac{8xyr^2}{\frac{2}{x^2+y^2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}}$$

e

$$r \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} + \frac{8xyr^2}{\frac{2}{x^2+y^2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}}$$

Fazendo

$$r \frac{\partial g}{\partial x} - r \frac{\partial f}{\partial y} = r \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1$$

e

$$K = r \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1$$

logo

$$K = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{r}.$$

Percebemos que se aplicarmos o Teorema de Green ao Planímetro, a constante que multiplica a área só depende do comprimento dos braços, ou seja,

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \frac{1}{r}$$

* Área cercada por C .

Então para o funcionamento do Planímetro é necessário sabermos o comprimento dos braços, o diâmetro da roda colocada perpendicularmente ao braço móvel e o número de voltas dadas pela roda que é marcado pelo contador ao percorrer a curva fechada C no sentido anti-horário, essas medidas são dadas pelas variáveis r para o comprimento dos braços, d para o diâmetro e k para o número de voltas dadas pela roda. O campo determinado pelo Planímetro é $F(x, y) = (f, g)$. Então:

$$k\pi d = \int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \frac{1}{r}$$

* Área cercada por C , ou seja, $A_c(C) = k\pi dr$.

Capítulo 4

Apêndice

Teorema 4.1 (Teorema de Stokes) *Seja S uma superfície suave por parte, delimitada por uma curva fechada, simples, suave por partes, C . Então, se \vec{g} é um campo vetorial contínuo, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio que contém $S \cup C$, temos:*

$$\int \int_S \text{rot} \vec{g} \cdot \vec{n} ds = \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{r},$$

onde a integração ao longo de C é efetuada no sentido determinado pela orientação de S .

Teorema 4.2 (Teorema da Divergência de Gauss) *Sejam Ω um sólido limitado por uma superfície fechada S , formada por um número finito de superfícies e \vec{n} a normal externa unitária. Se as componentes $\vec{V}(x, y, z)$ têm derivadas parciais contínuas em Ω , então*

$$\int \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \text{div } \vec{V} dA.$$

Capítulo 5

Conclusão

No decorrer deste trabalho podemos observar que o Teorema de Green é de fundamental importância no cálculo de integrais curvilíneas, pois faz uso das derivadas parciais para estabelecer uma junção entre integrais de linha e integrais duplas, tornando assim o cálculo dessas funções mais simples. Observamos também que a junção do Teorema de Green ao Planímetro é de fundamental importância para o cálculo de áreas de regiões fechadas. Vimos que as aplicações deste Teorema abrange elementos na Matemática, na Física e na Engenharia tornando-o assim, objeto essencial para nossos estudos.

Referências Bibliográficas

- [1] ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J. *Física Matemática: Métodos Matemáticos Para Engenharia e Física* 6^aed. Rio de Janeiro, Elsevier, 2007.
- [2] GONÇALVES, Marian Buss; FLEMMING, Diva Marília. *Cálculo A: Funções, Limite, Derivação e Integração*. 6^aed. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2007.
- [3] GONÇALVES, Marian Buss; FLEMMING, Diva Marília. *Cálculo B: Funções de Várias Variáveis, Integrais Múltiplas, Integrais Curvilíneas e de Superfície*. 6^aed. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2007.
- [4] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3^aed. São Paulo, Harbra Ltda, 1990.
- [5] REIS, Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. *Geometria Analítica* 2^aed. Rio de Janeiro, L.T.C, 2007.
- [6] STEWART, James. *Cálculo, volume II*. 5^aed. São Paulo, Thomson Learning, 2007.
- [7] BORGES, Gilvania Ramos. *O Teorema de Green e Aplicações*. Disponível em <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/4280/1/PDF> (Acessado em 07/ 05/ 2016).
- [8] BRAGA, Alcimar de Souza. *Teorema de Green e Aplicações*. Disponível em <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/AlcimardeSouzaBraga.pdf> (Acessado em 07/ 05/ 2016).
- [9] Disponível em <http://www.ime.uerj.br/calculo/LivroIII/cap9.pdf> (Acessado em 16/12/2015).

- [10] Disponível em <http://www.professores.uff.br/salete/trabalu/HistoriaMat.pdf>
(Acessado em 16/12/2015).