



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

INTEGRAÇÃO POR APROXIMAÇÃO: SIMULAÇÃO
VIA MONTE CARLO

Janaína Fabiana de Lima Dantas

CUITÉ-PB
MAIO, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE EDUCAÇÃO E SAÚDE
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INTEGRAÇÃO POR APROXIMAÇÃO: SIMULAÇÃO
VIA MONTE CARLO

Janaína Fabiana de Lima Dantas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Unidade Acadêmica de Física e Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Alves de Sousa.

CUITÉ-PB
MAIO, 2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA NA FONTE
Responsabilidade Jesiel Ferreira Gomes – CRB 15 – 256

D192i Dantas, Janaina Fabiana de Lima.

Integração por aproximação: simulação via Monte Carlo. / Janaina Fabiana de Lima Dantas. – Cuité: CES, 2016.

74 fl.

Monografia (Curso de Licenciatura em Matemática) – Centro de Educação e Saúde / UFCG, 2016.

Orientador: Dr. Jorge Alves de Sousa.

1. Integração numérica. 2. Variável aleatória. 3. Simulação estocástica. 4. Simulação em R. I. Título.

Biblioteca do CES

CDU 51

INTEGRAÇÃO POR APROXIMAÇÃO: SIMULAÇÃO VIA MONTE CARLO

JANAINA FABIANA DE LIMA DANTAS

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jorge Alves de Sousa
Orientador

Prof. Dr. Aluizio Freire da Silva Junior
Examinador Interno

Prof. Dr. Márcio Camargo de Melo
Examinador Interno

A arte mais importante do professor é a de despertar a alegria pelo trabalho e pelo conhecimento. Queridos estudantes! Regozijo-me por vos ver hoje diante de mim, alegre juventude de um país abençoado. Lembrai-vos de que as coisas maravilhosas que ireis aprender nas vossas escolas são a obra de muitas gerações, levada a cabo por todos os países do mundo, à custa de muito entusiasmo, muito esforço e muita dor. Tudo é depositado nas vossas mãos, como uma herança, para que a aceitem, honrem, desenvolvam e a transmitam fielmente um dia aos vossos filhos. Assim nós, embora mortais, somos imortais nas obras duradouras que criamos em comum. Se tiverem esta ideia sempre em mente, encontrarão algum sentido na vida e no trabalho e poderão formar uma opinião justa em relação aos outros povos e aos outros tempos.

(Albert Einstein, in 'Como Vejo o Mundo' .)

Dedicatória

*A Deus pelo amor e pela dádiva de viver esse momento. Seu fôlego de vida em mim me
foi sustento e me deu coragem para questionar realidades e propor sempre um novo
mundo de possibilidades.*

Agradecimentos

Nesse momento, rememorando a realização desse estudo, muitas pessoas surgem no meu pensamento. Emocionada expresso à mistura de sentimentos de gratidão, amor, carinho e saudade a todos que participaram de mais esse percurso, que só foi possível pelo fato de vocês tornarem-se parte da minha história de vida.

Minha gratidão, em primeiro lugar, a Deus, por estar comigo em todos os momentos e iluminando-me, sendo meu refúgio e fortaleza nos momentos mais difíceis e que, por suas leis, possibilitou a minha chegada a esse momento. Agradeço de forma especial a minha família, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos: Aos meus pais Francisco e Juraci, que não mediram esforços para que eu chegasse até essa etapa da minha vida. Obrigada por todo o apoio e dedicação que sempre tiveram comigo, na tentativa de zelar pela minha educação. Difícil encontrar palavras que traduza minha gratidão e expresse o meu amor por vocês, assim essa vitória também é de vocês. Aos meus irmãos Maria Mislene e Marcus Antonio, pelo incentivo nas horas de desânimo, pelo consolo nos momentos de tristeza e pela presença nas alegrias de minhas conquistas. E ao meu cunhado Vanis, que já o considero como irmão, obrigada pelo o apoio e carinho recebidos ao longo desses anos. Eu amo vocês minha família!

Ao meu orientador, Jorge Alves, pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta monografia. Agradeço por transmitir seus conhecimentos e por fazer da minha monografia uma experiência positiva, sempre estando ali me orientando e dedicando parte do seu tempo a mim.

Não poderia deixar de agradecer ao meus amigos e companheiros, Acássia Dafyne, Dulcilene Lopes, Heliara Silva, Meiry Lima, Daliane Dantas, Nágila Xavier, Valdenise Norberto, Rayza Gondim, Josicleide Ferreira, Aparecida lima, Humberto Lima, Fábio Ferreira, Jair Andrade, Josevandro Barros, Marciel Santiago e Ricardo Lima. Pelo companheirismo e amizade construída ao longo dessa jornada.

À minha amiga Desiane Maiara, pelo apoio e amizade, durante esses anos. Sempre pronta a me ajudar e compartilhar os seus saberes com a maior dedicação.

As minhas lindas crianças Dayvison Luiz, Lucas Gabriel e Hemilly Beatriz, que com toda a sua inocência, nos momentos de frustrações me transmitiam paz. Eu amo vocês

muito do tamanho do universo.

Aos meus tios Afonso Lima, Almiza Lima e Carlos Dantas, onde eles representam bem todos os meus tios, por todo apoio e carinho.

Aos professores Aluizio Freires e Marcio Camargo, por terem aceitado participar como membros na banca dessa monografia. Tenho certeza que suas considerações são de grande valor para esse trabalho.

Aos mestres desta instituição que tão bem me instruíram com tão rico conhecimento e muito me acrescentaram com ímpar dedicação e amizade.

À Universidade Federal de Campina Grande, pela oportunidade de concretizar a Licenciatura em Matemática. A essa instituição, devo minha vida acadêmica e meu crescimento intelectual, cultural e político.

A todos que participaram diretamente ou indiretamente para a minha formação!

A todos vocês meus agradecimentos com todo amor e carinho!

“Algumas pessoas marcam a nossa vida para sempre, umas porque nos vão ajudando na construção, outras porque nos apresentam projetos de sonho e outras ainda porque nos desafiam a construí-los”.

Conteúdo

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Abreviaturas	xiv
1 Introdução	1
2 Integrais	5
2.1 Funções primitivas	5
2.2 Integral Definida	6
2.3 Propriedades da Integral Definida	7
2.4 O teorema do valor médio para integrais	10
2.5 Os teoremas fundamentais do cálculo	11
2.6 A Integral Dupla	13
2.7 Coordenadas polares	15
2.7.1 Gráficos de equações em coordenadas polares	15
2.8 Coordenadas polares - Integração	17
3 Variáveis Aleatórias Contínuas	18
3.1 Variáveis Aleatórias Unidimensionais	18
3.2 Variáveis Aleatórias Contínuas	19
3.3 Função de Distribuição Acumulada	19
3.4 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas	20
3.5 Funções de Variáveis Aleatórias	20
3.5.1 Eventos Equivalentes	20
3.6 Variáveis Aleatórias Contínuas	21
3.7 Variáveis Aleatórias de Duas ou Mais Dimensões	21
3.8 Distribuições de probabilidade Marginal e Condicionada	22
3.9 Variáveis Aleatórias Independentes	22

3.10	Funções de Variável Aleatória	23
3.11	Distribuição do produto e do Quociente de Variáveis Aleatórias Independentes	23
3.12	Variáveis Aleatórias n-Dimensionais	24
3.12.1	Caracterização Adicional das Variáveis Aleatórias	24
3.13	Expectância de uma função de uma variável Aleatória	24
3.14	Variáveis Aleatórias Bidimensionais	25
3.15	Propriedades de Valor Esperado	25
3.16	A distribuição da Normal	25
3.16.1	Função Distribuição Acumulada	28
3.16.2	Propriedades da Distribuição Normal	28
3.17	Tabulação da Distribuição Normal	29
3.18	A Normal Como Aproximação da Binomial	30
3.18.1	Procedimento para o Uso de uma Distribuição Normal como Aproximação de uma Distribuição Binomial	31
3.19	Correções de Continuidade	31
3.19.1	Procedimento para Correções de Continuidade	32
3.19.2	Usando probabilidade para Determinar se Resultados São Não-usuais	32
3.20	O Papel da Aproximação Normal	32
3.21	Determinação de Normalidade	33
4	Métodos Aproximados	35
4.1	Métodos Numéricos de Integração	35
4.2	Fórmulas de Newton-Cotes	35
4.3	Regra do Trapézio	36
4.4	Regra de Simpson	36
4.5	Integração de Romberg	37
4.6	Quadratura de Gauss	38
4.7	Computação Bayesiana	39
4.8	Método de Monte Carlo Simples	39
4.9	Monte Carlo via Função de Importância	41
4.10	Aplicação 1	42
4.10.1	Solução Analítica	42
4.10.2	Solução pelo Método de Monte Carlo em R	44
4.11	Aplicação 2	47
4.11.1	Solução Analítica	47
4.11.2	Solução via Método de Monte Carlo	48
4.11.3	Solução pelo Método de Monte Carlo em R	49
4.12	Aplicação 3	52
4.12.1	Solução Analítica	52

4.12.2 Solução via Método de Monte Carlo	52
4.12.3 Solução pelo Método de Monte Carlo em R	53
5 Conclusões	56

Lista de Figuras

2.1	A função $f(x)$ definida e contínua num intervalo real $[a, b]$	7
2.2	A área da região $f(c)$ é igual à área de um retângulo cuja altura é dada pelo TVM.	11
2.3	$r = 4 \cos(2\theta)$, é a rosácea de quatro pétalas.	15
2.4	Apresenta simetrias em relação aos dois eixos cartesianos.	16
2.5	O espaçamento entre os eixos de simetria entre duas pétalas consecutivas é dado por $2\pi/p$, onde p é a distância de uma pétala para outra.	16
3.1	f.d.p de uma v.a normal com média μ e desvio padrão σ . A área total sob a curva é unitária porque indica a probabilidade de todo o conjunto observado, onde dois valores quaisquer de x indica a probabilidade de ocorrência entre os valores.	26
3.2	f.d.p de uma v.a normal padrão $Z \sim N(0, 1)$	27
3.3	$f(y)$ como área.	28
3.4	f.d.c da normal padrão $Z \sim N(0, 1)$	29
4.1	Representação visual da integral $\theta = \int_0^1 xe^{x^2} dx$	41
4.2	Representação da área da integral dada pela Eq. (4.26).	45
4.3	Boxplots para 1 estimativa da integral dada pela Eq. (4.26) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 50	46
4.4	Boxplot para 50 estimativas da integral dada pela Eq. (4.26) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 50	47
4.5	Representação da área da integral dado pela Eq. (4.33).	50
4.6	Boxplot para 1 estimativa da integral dada pela Eq. (4.33) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 50	51
4.7	Boxplot para 50 estimativas da integral dada pela Eq. (4.33) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 50	51
4.8	Reresentação da área da integral dado pela Eq. (4.42).	54

4.9	Boxplot para 1 estimativa da integral dado pela Eq. (4.42) com $n =$ 20, 50, 100, 200 e 50.	55
4.10	Boxplot' para 50 estimativas da integral dado pela Eq. (4.42) com $n =$ 20, 50, 100, 200 e 50.	55

Lista de Tabelas

4.1	Resultado numérico da integral aproximada da Eq. (4.26) usando método Monte Carlo.	44
4.2	Resultado numérico da integral da Eq. (4.33) usando método Monte Carlo	49
4.3	Resultado numérico da integral da Eq. (4.42) usando método Monte Carlo	53

Lista de Abreviaturas

f.d.a	Função Distribuição Acumulada
fdp	função densidade de probabilidade
MMC	Método de Monte Carlo
TVM	Teorema do Valor Médio
v.a	Variável Aleatória

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos um método bastante conhecido na estatística que é simulação por Método de Monte Carlo. Utilizamos inicialmente uma explanação sobre integrais e coordenadas polares, ferramenta útil na determinação da integral de uma função conhecida, sendo de suma importância nas diversas áreas da aplicação. Em seguida, estudamos variáveis aleatórias contínuas com quaisquer distribuições de probabilidade, as quais são simuladas a partir de números uniformemente distribuídos em um determinado intervalo através de certas transformações. O Método de Monte Carlo é um mecanismo que gera dados a partir de um simulador de números aleatórios e das distribuições de frequências de interesse, as quais caracterizam os processos estocásticos considerados pelo modelo de simulação. Baseado nessas características do método, resolvemos integrais aproximativas através de simulação de Monte Carlo usando linguagem *R*. Resolvemos analiticamente integrais de graus de complexidades diferentes, obtendo o seu resultado exato de modo analítico e numérico. Em seguida, comparamos com o resultado via simulação de Monte Carlo com o resultado exato, obtendo assim resultados semelhantes a medida que o número de valores simulados foi aumentado.

Palavras-chave: Integração numérica, Variável aleatória, Simulação em R, Simulação estocástica, Métodos aproximativos.

ABSTRACT

In this work, we showed one statistical method that is the simulation by the Monte Carlo Method. Initially, we used an explanation about integrals and polar coordinates, useful tool in the determination of integral of a function known, which is important in various areas of applications. Then, we studied continuous random variables with any probability distributions, which are simulated from numbers uniformly distributed within a certain range by certain transformations. The Monte Carlo method is a mechanism that generates data from a simulator of random numbers and distributions of frequencies of interest which features the stochastic processes considered by the simulation model. We based on these features of the method, we solved approximates integrals through Monte Carlo simulation, using the language *R*. We solved analytically integrals of different degrees of complexity, obtaining your absolute result of analytical and numerical mode. Then, we compared with the result via Monte Carlo simulation with the absolute results, obtaining similar results according with the increasead number of simulated values.

Keywords: numerical integration, random variables, Monte Carlo Method, stochastic simulation, approximation methods.

Introdução

Os métodos de integração numérica de funções e de equações de movimentos são amplamente utilizados para resolver problemas que descrevem sistemas dinâmicos lineares e não-lineares, que são muito comuns em engenharia, física e matemática. Na resolução desses problemas, alguns métodos semi-analíticos como o do balanço harmônico são também utilizados, bem como os métodos analíticos aproximados (métodos de perturbação).

Nesse estudo de sistemas lineares e não-lineares, os resultados numéricos são fundamentais, especificamente quando se deseja comparar com resultados analíticos para analisar os resultados obtidos. Dentre os métodos de integração numérica para esses sistemas, o algoritmo Runge Kutta 4 é bastante utilizado, o qual tem sido um método para a resolução numérica (aproximação) de soluções de equações diferenciais ordinárias [1].

A necessidade de utilizar integração numérica surgiu diante de alguns problemas envolvendo funções que: não admitem uma primitiva de maneira explícita, a primitiva é muito complicada para ser analisada ou quando não há uma expressão analítica para o integrando conhecendo assim os pontos do domínio [2]. No estudo de integração numérica de funções torna-se conveniente mencionar que a interpretação da integral como sendo a área sob a curva é extremamente útil no desenvolvimento de métodos aproximados [3].

A integração numérica ainda tem sido um processo lento e oneroso em análises paramétricas, diferentemente dos outros métodos aproximados, que são extremamente rápidos. A rapidez dos métodos de perturbação trazem consigo uma menor precisão, a exemplo de alguns problemas de não-linearidade que utilizam expoentes fracionários, os quais são de difícil ou de impossível aplicação [4].

Para utilizarmos o método de integração por aproximação se faz necessário utilizar simulação. Esse termo simulação refere-se ao tratamento controlado pelo pesquisador em um ambiente, especificamente o computador, onde os problemas reais são analisados através de reproduções. Na utilização de simulação podemos observar que em alguns casos ela descreverá um sistema no qual todos os componentes são conhecidos e o seu

comportamento é dito determinístico. Em outros, os componentes são aleatórios, não havendo regra matemática que o descreva e sim o uso de estruturas probabilísticas, sendo estocástico o processo de simulação, ou seja, baseado em distribuições de probabilidade.

Para a utilização de simulações estocásticas necessita-se construir um gerador de números pseudo-aleatórios (comportamento similar aos efetivamente aleatórios), presente em mecanismos determinísticos e iterativos, o qual gera números em um intervalo $[0, N]$, para um dado valor N . O algoritmo é determinístico e prediz com certeza o próximo valor gerado, possuindo a propriedade básica necessária a um número aleatório que é uniformidade no intervalo unitário e independência entre sequências de valores [5].

No estudo de vários problemas matemáticos, recorrer ao Método de Monte Carlo (MMC) tem sido notadamente interessante, pois através de experimentos de amostragem estatísticas realizados em um computador apresentam soluções aproximadas. Diante de tantos métodos numéricos, o MMC tem tido um destaque especial, tendo em vista que aplica-se tanto a problemas com teor não probabilístico quanto àqueles com estrutura probabilística.

Um outro item interessante nesse método é que ao considerarmos n -pontos no espaço de m -dimensões que produzem uma solução aproximada, o MMC apresenta erro absoluto de estimação da ordem de $n^{-1/2}$, enquanto que os demais métodos numéricos têm erros que decrescem à taxa de $n^{-1/m}$, o que representa boa eficiência computacional [6].

A origem do nome do método e a sistemização circundam em torno de 1944, onde os precursores antes da denominação do método datam de 1873. A fundamentação teórica do método começou com A. Hall nesse mesmo ano, fazendo o que Buffon propôs em seu exemplo clássico, onde jogando uma agulha de comprimento l em um plano com linhas paralelas afastadas e de distância igual ao comprimento da agulha, descobriu que a probabilidade da agulha cruzar uma das linhas era proporcional ao número π . Em 1899 Lord Rayleigh descreveu a caminhada aleatória unidimensional, em 1931 Kolmogorov tratou os processos markovianos e em 1908 W.S.Gosset mostrou a distribuição t de *Student* [7].

Durante a segunda guerra mundial, mediante o projeto Manhattan, o método teve os primeiros usos. A aplicação inicial se remete ao estudo sobre a fissão nuclear, da bomba atômica. Até então, não havia um desenvolvimentismo sistemático, o que ocorreu apenas em 1948 através de Harris e Herman Kanh. Nesse mesmo ano, Fermi, Nicholas Metropolis e Ulam estimaram os autovalores da equação de Scrodinger.

O polonês Stanislaw Ulam foi um dos primeiros cientista a vislumbrar o computador eletrônico de propósito geral desenvolvido por John von Neumann, o qual utilizou essa máquina para obter solução de problemas que necessitavam de uma abordagem estatística, a qual ficou conhecida como MMC, homenagem sugerida por Nicholas Metropolis inspirada em um tio de Ulam, conhecido apostador do Casino de Monte-Carlo, em Mônaco.

Na sequência cronológica, somente em 1949 que o primeiro artigo sobre o método foi publicado. Dessa maneira, observa-se que vários problemas já estavam sendo resolvidos

por amostras ou ainda por variáveis aleatórias, sendo estas de fato o princípio fundamental do método.

A abordagem estatística torna necessário repetitivos experimentos, os quais são tediosos e em muitos casos impraticáveis, uma vez que envolve diversos passos e excessivas contas e números. Com o auxílio do computador, esses experimentos são possíveis e viáveis, tornando possível assim a programação, dentre elas o MMC, apresentando resultado final com a precisão que desejamos.

Os métodos numéricos de Monte Carlo utilizam amostragem estatística (em contraposição a métodos determinísticos), possuindo assim amostragem aleatória a partir de uma função distribuição, onde alguns problemas determinísticos podem ser reescritos em função de uma distribuição de probabilidades, ou seja, em forma de integração. Assim, começou a perceber uma maior difusão desse método, principalmente nas áreas de Física, Matemática e Biologia, existindo ainda trabalhos nas mais diversas áreas do conhecimento.

Dessa maneira, recorrer a simulação computacional representa uma vantagem, principalmente quando não podemos obter respostas de problemas complexos e que necessitam de protótipos inviáveis pelo custo, limitações ambientais e ainda em casos extremos como o que avaliar um vazamento tóxico.

Diante do exposto, o objetivo geral deste trabalho é utilizar um método alternativo de simulação para obtermos aproximações numéricas de integrais complexas por meio do *software* estatístico *R*.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Capítulo 2: Realizamos uma breve explanação sobre os tipos de integrais e solução em coordenadas polares. Nesse estudo, se fez necessário explicar que nas integrais temos um artifício de recuperar a função original a partir de sua derivação e ainda que utilizando o valor numérico de uma integral podemos calcular uma determinada região. Recorremos ainda a utilização de coordenadas polares, pois é possível determiná-la em cada ponto de um plano, conhecendo apenas sua distância em relação a um ponto fixo e o ângulo em relação a uma direção fixa.

Capítulo 3: Estudamos as variáveis aleatórias contínuas e seus principais pontos, onde pode-se assumir qualquer valor numérico em um determinado intervalo ou em um dado grupo de intervalos, resultando assim em um dado numérico, de modo que se pode operar um mecanismo não determinado ou ainda fazer uma experiência, a qual não está determinada e nos fornece assim resultados aleatórios.

Capítulo 4: Apresentamos os métodos computacionais, dando enfoque ao MMC, que é uma das saídas para fazer inferência quando não se conhece a distribuição de parâmetros de interesse, sendo esta uma classe de métodos estatísticos que se baseia em amostragem aleatória para obter resultados numéricos. Utilizamos a linguagem de programação no ambiente *R*, tendo em vista que para análise de dados, esta é de grande importância no que se refere a análise e interpretação de resultados. Resolvemos três funções utilizando o

método analítico, MMC analítico e ainda o método numérico de simulação via MMC em R.

Capítulo 5: Expomos uma síntese geral do nosso trabalho com explicações contextualizadas e embasadas nas ideias gerais contidas neste material.

Capítulo 2

Integrais

A integral de uma função foi desenvolvida para calcular áreas de curvas no plano cartesiano. A integral é uma ferramenta bastante utilizada em estudos algébricos e numéricos, sendo uma das ferramentas mais utilizada em matemática, física, estatística, economia e entre outras.

2.1 Funções primitivas

A função primitiva ou antederivada trata-se da função inversa da derivada [8]. Ao falarmos de função primitiva, devemos atentar para a sua definição, corolário e teoremas, os quais são:

Definição 1. Uma função $F(x)$ é chamada de uma primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I , se para todo $x \in I$, tem-se $F'(x) = f(x)$.

Teorema 2.1.1. Seja $f(x)$ contínua no intervalo I . Se $f'(x) = 0$ em todo x interior a I , então existirá uma constante k , que $f(x) = k$ para todo $x \in I$.

Corolário 2.1.2. Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções, em que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo I , logo hávera uma constante k , talque: $f(x) = g(x) + k$, para todo k em I .

Teorema 2.1.3. Se $F(x)$ for uma primitiva particular de $f(x)$ em um intervalo I , então toda primitivade f em I será dada por $F(x) + K$ onde K é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de $f(x)$ em I poderão ser obtidas de (I) , atribuindo-se certos valores a K .

Teorema 2.1.4. Seja $g(x)$ uma função diferenciável e seja o intervalo de I a imagem de $g(x)$. Suponha que $f(x)$ seja uma função em I e que $F(x)$ seja uma primitiva de $f(x)$ em I . Então, $\int f(g(x)) [g'(x)dx] = F(g(x)) + K$.

2.2 Integral Definida

Vamos apresentar agora as definições e teorema necessários para encontrar a solução de uma integral definida [9].

Definição 2. Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$, então f será **integrável** em $[a, b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda partição Δ para a qual $\|\Delta\| < \delta$, com ξ_i , no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, temos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - L \right| < \epsilon. \quad (2.1)$$

Nessas condições, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = L \quad (2.2)$$

Definição 3. Se $f(x)$ for uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a integral definida de $f(x)$ de a até b , denotada por

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (2.3)$$

será dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x, \quad (2.4)$$

se o limite existir.

Teorema 2.2.1. Se uma função for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então ela será integrável em $[a, b]$.

Definição 4. Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a medida A da área da região R é dada por

$$A = \lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \quad (2.5)$$

$$\iff A = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.6)$$

Na Fig. 2.1 mostramos a representação da medida de área A dada pela Eq. (2.6).

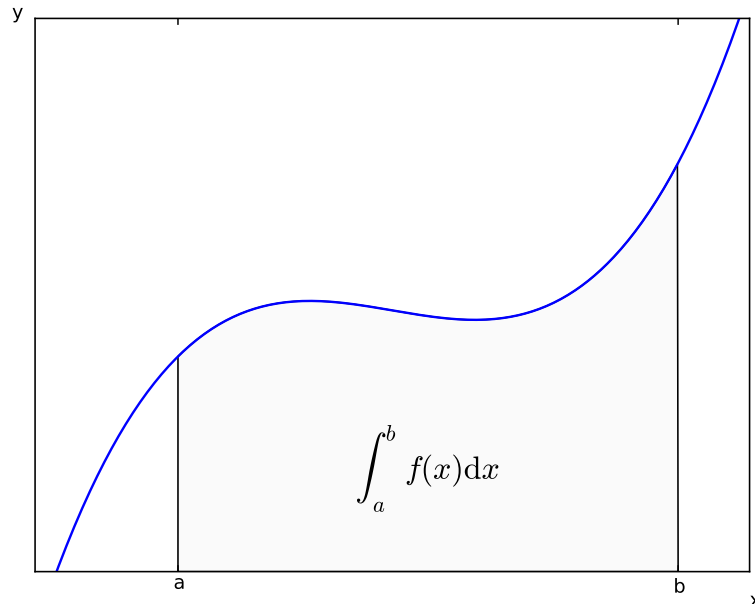


Figura 2.1: A função $f(x)$ definida e contínua num intervalo real $[a, b]$.

2.3 Propriedades da Integral Definida

O cálculo de uma integral definida a partir da definição em geral é trabalhoso, para isso torna-se necessário estabelecer método mais simples. Assim, algumas propriedades da integral foram desenvolvidas, onde necessitamos dos teoremas a seguir [10].

Teorema 2.3.1. Se Δ for qualquer partição do intervalo fechado $[a, b]$, então

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i x = b - a \quad (2.7)$$

Teorema 2.3.2. Se f for definida no intervalo fechado $[a, b]$, e se

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \quad (2.8)$$

existe, onde Δ é qualquer partição de $[a, b]$, então se k for uma constante qualquer,

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(\xi_i) \Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x. \quad (2.9)$$

Teorema 2.3.3. Se as funções f e g forem integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ será integráveis em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (2.10)$$

Demonstração. As funções f e g são integráveis no intervalo fechado $[a, b]$; seja então

$$\int_a^b f(x) dx = M \text{ e } \int_a^b g(x) dx = N. \quad (2.11)$$

Para provar que $f + g$ é integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e que $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = M + N$, precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todas as partições Δ e para todo ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$, então

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + g(\xi_i)] \Delta_i x - (M + N) \right| < \epsilon. \quad (2.12)$$

Como

$$M = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \text{ e } N = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x, \quad (2.13)$$

segue que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$ se $\|\Delta\| < \delta_1$ e $\|\Delta\| < \delta_2$, então

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - M \right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.14)$$

logo, se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, então para qualquer $\epsilon > 0$, para todas as partições Δ e para

qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, se $\|\Delta\| < \delta$,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x - N \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad (2.15)$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\left| \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - M \right) + \left(\sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x - N \right) \right| \quad (2.16)$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x - N \right| \quad (2.17)$$

fazendo a desigualdade, temos

$$\left| \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - M + \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x - N \right) - (M + N) \right| < \epsilon, \quad (2.18)$$

usando $\sum_{i=1}^n [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^n F(i) + \sum_{i=1}^n G(i)$, portanto

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x + \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x = \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \Delta_i x + g(\xi_i) \Delta_i x]. \quad (2.19)$$

Assim, substituindo essa igualdade em 2.18, podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$, para todas as partições Δ e para qualquer ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$ se $\|\Delta\| < \delta$, onde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, então:

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + g(\xi_i)] \Delta_i x - (M + N) \right| < \epsilon, \quad (2.20)$$

logo, isto prova que $f + g$ é integrável no intervalo fechado $[a, b]$ e que [8]

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (2.21)$$

□

Teorema 2.3.4. Se a função f for integrável nos intervalos fechados $[a, b]$, $[a, c]$ e $[c, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (2.22)$$

onde $a < c < b$.

Teorema 2.3.5. Se f for integrável num intervalo fechado contendo os números a , b e c , então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (2.23)$$

não importando a ordem de a , b e c .

Teorema 2.3.6. Se as funções f e g forem integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ e se

$$f(x) \geq g(x) \quad (2.24)$$

para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \quad (2.25)$$

Teorema 2.3.7. Vamos supor que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se m e M forem, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$, ou seja

$$m \leq f(x) \leq M \quad (2.26)$$

para

$$a \leq x \leq b, \quad (2.27)$$

então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \quad (2.28)$$

2.4 O teorema do valor médio para integrais

No que diz respeito ao Teorema do Valor Médio (TVM), consideraremos o teorema e a definição abaixo [11].

Teorema 2.4.1. Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, existe um número χ em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(\chi)(b - a). \quad (2.29)$$

Definição 5. Se a função f for integrável no intervalo fechado $[a, b]$, o **valor médio** de f em $[a, b]$ será

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}. \quad (2.30)$$

Na Fig. 2.2 mostramos a representação gráfica do que é o TVM.

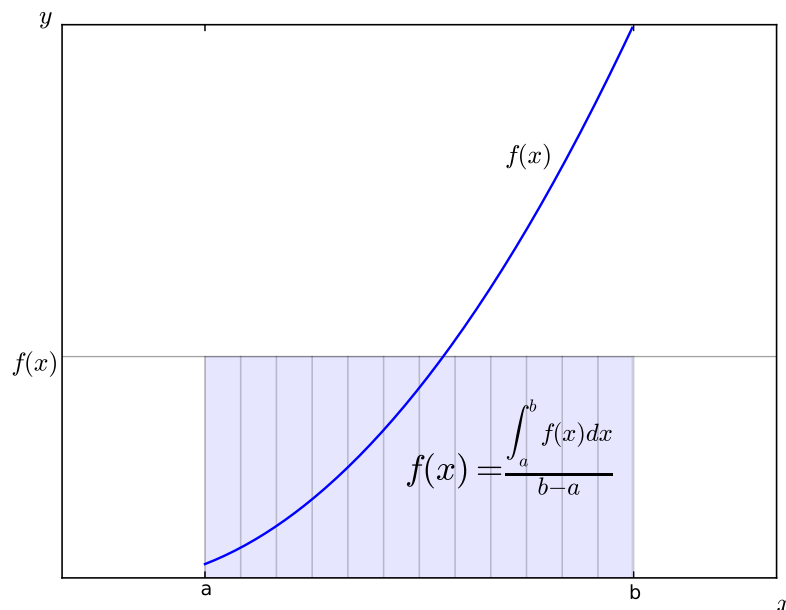


Figura 2.2: A área da região $f(c)$ é igual à área de um retângulo cuja altura é dada pelo TVM.

2.5 Os teoremas fundamentais do cálculo

Nesta seção apresentamos os teoremas fundamentais do cálculo, os quais foram mostrados independentemente por Newton e Leibniz, de modo que determinaram uma integral dedefinida por antidiferenciação.

Teorema 2.5.1 (Primeiro teorema fundamental do cálculo). Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja x qualquer número em $[a, b]$. Se F for a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (2.31)$$

então,

$$F'(x) = f(x) \quad (2.32)$$

(Se $x = a$, a derivada na Eq. (2.32) pode ser a derivada à direita e se $x = b$, a derivada na Eq. (2.32) pode ser a derivada à esquerda.)

Teorema 2.5.2 (Segundo teorema fundamental do cálculo). Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja g uma função tal que

$$g'(x) = f(x) \quad (2.33)$$

para todo x em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a) \quad (2.34)$$

(Se $x = a$, a derivada na Eq. (2.33) pode ser uma derivada à direita, e se $x = b$, a derivada na Eq. (2.33) pode ser uma derivada à esquerda.)

2.6 A Integral Dupla

Definição 6. Seja f uma função definida numa região retangular fechada R . O número L será o **limite** das somas da forma [12]

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \quad (2.35)$$

se L satisfizer a propriedade de que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para toda partição Δ , para a qual $\|\Delta\| < \delta$ e para todas as possíveis seleções do ponto ξ_i, γ_i no i -ésimo retângulo $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A - L \right| < \epsilon \quad (2.36)$$

Se tal número L existir, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = L \quad (2.37)$$

Definição 7. Uma função f de duas variáveis será dita **integrável** numa região retangular fechada R se f estiver definida em R e o número L da definição 1 existir. Esse número L será chamado de **integral dupla** de f em R , e escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int f(x, y) dA \quad (2.38)$$

Teorema 2.6.1. Se uma função de duas variáveis for contínua numa região retangular fechada R , então f será integrável em R .

Teorema 2.6.2. Seja f uma função de duas variáveis, contínua numa mesma região fechada R , no plano xy e $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) em R . Se V for a medida do volume do sólido S tendo a região R como base e tendo uma altura cuja medida é $f(x, y)$ no ponto (x, y) em R , então

$$V = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int f(x, y) dA \quad (2.39)$$

Teorema 2.6.3. Se c for uma constante e a função f for integrável numa região fechada R , então cf será integrável em R e

$$\int_R \int cf(x, y)dA = c \int_R \int f(x, y)dA \quad (2.40)$$

Teorema 2.6.4. Se as funções f e g forem integráveis numa região fechada R , então a função $f + g$ será integrável em R e

$$\int_R \int [f(x, y) + g(x, y)] dA = \int_R \int f(x, y)dA + \int_R \int g(x, y)dA \quad (2.41)$$

Teorema 2.6.5. Se as funções f e g forem integráveis na região fechada R e, além disso,

$$f(x, y) \geq g(x, y) \quad (2.42)$$

para todo (x, y) em R , então

$$\int_R \int f(x, y)dA \geq \int_R \int g(x, y)dA \quad (2.43)$$

Teorema 2.6.6. Seja a função f integrável numa região fechada R e suponha que m e M sejam dois números tais que

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad (2.44)$$

para todo (x, y) em R . Então, se A for a medida da área da região R ,

$$mA \leq \int_R \int f(x, y)dA \leq MA. \quad (2.45)$$

Teorema 2.6.7. Suponha que a função f seja contínua numa região fechada R e que a região R seja composta de duas sub-regiões R_1 e R_2 que não têm pontos em comum, com exceção de pontos em partes de suas fronteiras. Então,

$$\int_R \int f(x, y)dA = \int_{R_1} \int f(x, y)dA + \int_{R_2} \int f(x, y)dA. \quad (2.46)$$

2.7 Coordenadas polares

Um sistema de coordenadas polares no plano incide em um ponto fixo, chamado de origem e de um raio que parte do polo, chamado eixo polar. Num sistema de coordenadas, temos que associar a cada ponto P no plano um par de coordenadas polares (r, θ) , onde r é a distância de P ao polo e θ é o ângulo entre o eixo polar e o raio OP . O número r é chamado de coordenada radial de P , enquanto que θ é a coordenada angular de P . Se P estiver no polo, então $r = 0$. Mesmo diante de todas informações, ainda não há uma definição concreta de eixo polar [13].

As coordenadas polares de um ponto não são exclusivas. Na sua grande maioria, se um ponto P tiver coordenadas polares (r, θ) , então $(r, \theta + n \cdot 360^\circ)$ e $(r, \theta - n \cdot 360^\circ)$, logo serão coordenadas polares de P , para qualquer n inteiro não-negativo. Portanto, todo ponto tem um número infinito de coordenadas polares.

2.7.1 Gráficos de equações em coordenadas polares

Os teoremas para os gráficos de equações com coordenadas polares são mostrados a seguir, em conjunto com as figuras correspondentes.

Teorema 2.7.1. Se, para uma equação em coordenadas polares, obtivemos uma equação equivalente quando (r, θ) for substituído por $(r, -\theta + 2n\pi)$ ou $(-r, \pi - \theta + 2n\pi)$, onde n é um inteiro qualquer, o gráfico da equação será simétrico em relação ao eixo polar.

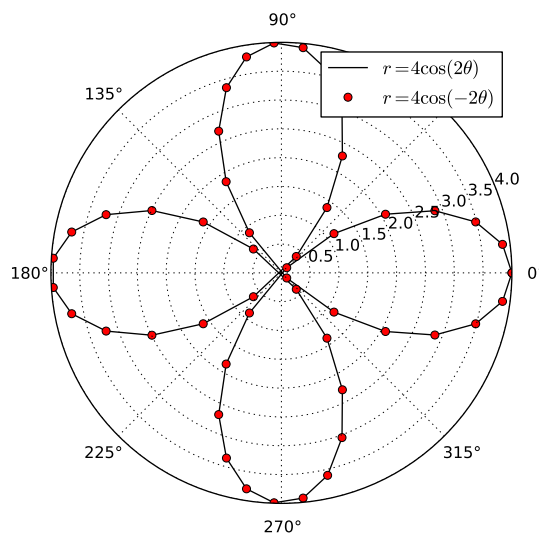


Figura 2.3: $r = 4 \cos(2\theta)$, é a rosácea de quatro pétalas.

Teorema 2.7.2. Se, para uma equação em coordenadas polares, obtivemos uma equação equivalente quando (r, θ) for substituído por $(r, \pi - \theta + 2n\pi)$ ou $(-r, -\theta + 2n\pi)$, onde n é um inteiro qualquer, o gráfico da equação será simétrico em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$.

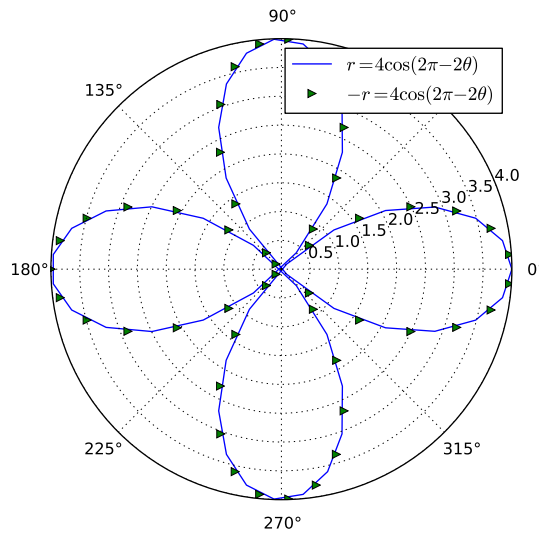


Figura 2.4: Apresenta simetrias em relação aos dois eixos cartesianos.

Teorema 2.7.3. Se, para uma equação em coordenadas polares, obtivemos uma equação equivalente quando (r, θ) for substituído por $(-r, \theta + 2n\pi)$ ou $(r, \pi + \theta + 2n\pi)$, onde n é um inteiro qualquer, o gráfico da equação será simétrico em relação á origem.

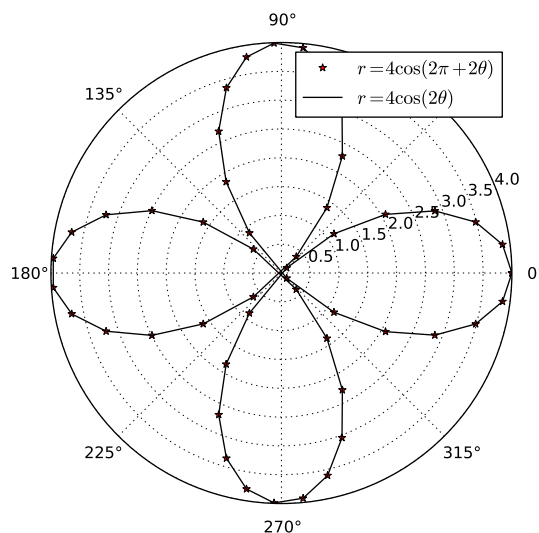


Figura 2.5: O espaçamento entre os eixos de simetria entre duas pétalas consecutivas é dado por $2\pi/p$, onde p é a distância de uma pétala para outra.

2.8 Coordenadas polares - Integração

A integral de uma função f sobre uma região R expressa em coordenadas cartesianas é dada por

$$\int \int f(x, y) dy dx. \quad (2.47)$$

Sendo a região descrita em coordenadas polares, onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, a integral é dita como

$$\int \int f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (2.48)$$

Os limites de integração serão os mais apropriados mediante o problema proposto e a ordem de integração é aquela que é mais conveniente.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Variável Aleatória (v.a) é uma função matemática, que associa cada elemento do espaço amostral a um número dos reais, ela geralmente é expressa por uma letra maiúscula qualquer. O que diferencia uma v.a das outras variáveis é que ela não vai ter uma resolução para esta variável, ela será útil quando tivermos resultados ou consequência de alguma situação, o que iremos utilizar para transformar em um valor numérico. [14]

3.1 Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Inicialmente apresentaremos a definição de variáveis aleatórias, no qual na grande maioria dos problemas práticos encontramos dois tipos de v.as: as discretas e as contínuas. Neste capítulo daremos ênfase as variáveis contínuas. [15]

Uma variável é dita contínua quando assume qualquer valor ao longo de um intervalo (número infinito), isso equivale a delinear os resultados de um experimento aleatório por meio de números ao invés de palavras, o que é uma grande regalia, pois permite um melhor tratamento matemático.

Definição 8. Seja ε um experimento e S um espaço amostral associado ao experimento. Uma função X , que associe a cada elemento $s \in S$ um número real $X(s)$ é denominado **Variável Aleatória**.

O espaço R_x , é o conjuntos de todos os valores possíveis de X , é designado algumas vezes de contradomínio. Poderemos considerar R_x como um outro espaço amostral. Se for $X(s) = s$, teremos $S = R_x$ para representar a característica numérica.

Definição 9. Sejam um experimento ε e o seu espaço amostral S . Seja X uma v.a definida em S e seja R_x seu contradomínio. Seja B um evento definido em relação a R_x , isto é, $B \subset R_x$. Então, A será definido assim:

$$A = \{s \in S / X_s \in B\} \tag{3.1}$$

Definição 10. Seja B um evento no contradomínio R_x . Nesse caso, definimos $P(B)$ da seguinte maneira.

$$P(B) = P(A), \text{ onde } A = \{s \in S / X_s \in B\} \quad (3.2)$$

3.2 Variáveis Aleatórias Contínuas

Temos que o contradomínio de X seja formado por um número finito extremamente grande, digamos que todos os valores X no intervalo $0 \leq X \leq 1$, onde a cada um dos valores está relacionado um número não-negativo.

Portanto os valores possíveis de X não são numeráveis, não podemos falar do i -ésimo valor de X , e por isso, $P(x_i)$ se torna sem sentido.

Definição 11. Diz-se que X é uma v.a contínua, se existir uma função f , denominada função densidade de probabilidade (fdp) de X que satisfaz às seguintes condições:

- (a) $f(x) \geq 0$ para todo x
- (b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (3.3)$$

- (c) Para quaisquer a, b , com $-\infty < a < b < +\infty$, teremos

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (3.4)$$

3.3 Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada nos dá uma forma de apresentar como as probabilidades são associadas aos valores ou aos intervalos de valores de uma v.a. De uma forma geral, podem ser utilizadas para determinar a distribuição de probabilidade de uma v.a X que possui distribuição discreta, distribuição contínua ou distribuição mista. A distribuição de X também pode ser inteiramente apontada por outra função que tem como vantagem fazer sentido no caso discreto quanto para o contínuo.

Definição 12. Seja X uma v.a, discreta ou contínua. Define-se a função F como a função de distribuição acumulada da variável aleatória $s <$ como $f(x) = P(x \leq X)$.

Teorema 3.3.1. Se X for uma v.a contínua com fdp f , então,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds \quad (3.5)$$

Teorema 3.3.2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. [Frequentemente, escrevemos isto como $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$.]

Teorema 3.3.3. Seja F a fdp de uma v.a contínua, com fdp. Então, $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, para todos x no qual F seja derivável.

3.4 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

Definição 13. Suponha-se que x seja uma v.a contínua, que tome todos os valores no intervalo $[a, b]$, no qual a e b sejam ambos finitos. Se a fdp de x for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = 0, \quad (3.6)$$

para quaisquer outros valores, diremos que x é uniformemente distribuída sobre o intervalo $[a, b]$ [16].

3.5 Funções de Variáveis Aleatórias

3.5.1 Eventos Equivalentes

Definição 14. Seja C um evento (subconjunto) associado ao contradomínio R_x , de y , como se explicou acima $B \in R_x$, definido assim: $B = \{x \in R_x : H(x) \in C\}$. B é um conjunto de todos os valores de X , tais que $H(x) \in C$. Se B e C forem relacionadas desse modo, denominaremos eventos equivalentes.

Definição 15. Seja uma v.a X definida no espaço amostral S . Seja R_x o contradomínio R_y . Para qualquer evento $C \subset R_y$, definiremos $P(C)$ assim:

$$P(C) = P[\{x \in R_x : H(x) \in C\}] \quad (3.7)$$

3.6 Variáveis Aleatórias Contínuas

Teorema 3.6.1. Seja X uma v.a contínua com fdp f , onde $f(x) > 0$, para $a < x < b$. Suponha-se que $y = H(x)$ seja uma função x estritamente monótona. Admita-se que essa função seja derivável para todo t . Então a v.a y , definida como $Y = H(X)$ possui a fdp g dada por:

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \quad (3.8)$$

onde x é expresso em termos de y . Se H for crescente, então g será não-nulo para aqueles valores de y que satisfaçam $H(a) < y < H(b)$. Se H for decrescente, então g será não-nulo para aqueles valores de y , que satisfaçam $H(b) < y < H(a)$.

Teorema 3.6.2. Seja X uma v.a contínua com fdp. Façamos $y = x^2$. Então, a v.a y tem a fdp dada por

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})] \quad (3.9)$$

3.7 Variáveis Aleatórias de Duas ou Mais Dimensões

Definição 16. Sejam ε um experimento e S um espaço amostral, associado a ε . Sejam $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$ duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$. Denominaremos (X, Y) uma v.a bidimensional.

Definição 17. (X, Y) será uma v.a contínua bidimensional se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não-numerável do plano euclidiano.

Definição 18. Seja (X, Y) uma v.a contínua tomando todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A função densidade de probabilidade de conjunto f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

(a) $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$.

(b)

$$\iint_R f(x, y) dx dy = 1 \quad (3.10)$$

Definição 19. Seja (X, Y) uma v.a bidimensional. A função de distribuição acumulada $(fd)F$ da v.a bidimensional (X, Y) é definido por:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (3.11)$$

3.8 Distribuições de probabilidade Marginal e Condi- cionada

Definição 20. Dizemos que a v.a contínua bidimensional é uniformemente distribuída sobre a região R do plano euclidiano quando $f(x, y) = ct_e$ para $(x, y) \in R$ e $c = 0$ para qualquer outra região.

Definição 21. Seja (X, Y) uma v.a contínua bidimensional com fdp conjunta f . Sejam g e h as fdp marginais de X e Y respectivamente:

A fdp de X condicionada a um dado $Y = y$ é definida por:

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, h(y) > 0 \quad (3.12)$$

A fdp de Y condicionada a um dado $X = x$ é definida por:

$$h\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, g(x) > 0 \quad (3.13)$$

3.9 Variáveis Aleatórias Independentes

Definição 22. Seja (X, Y) uma v.a contínua bidimensional. Diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente se, $f(x, y) = g(x)h(y)$ para todo (x, y) , onde f é a fdp conjunta, e g e h são as fdp marginais de X e Y , respectivamente.

Teorema 3.9.1. Seja (X, Y) uma v.a contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independente se, e somente se, $g(x | y) = g(x)$, ou equivalente, se e somente se, $h(y | x) = h(y)$, para todo (x, y) .

Teorema 3.9.2. Seja (X, Y) uma v.a bidimensional. Sejam A e B eventos cuja ocorrência (ou não ocorrência) dependa apenas de X e Y , respectivamente. Isto é, A é um subconjunto de R_x , o contradomínio de X , enquanto B é um subconjunto de R_y , o contradomínio de Y . Então, se X e Y forem v.as independentes, teremos $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

3.10 Funções de Variável Aleatória

Teorema 3.10.1. Suponhamos que (X, Y) seja uma v.a contínua bidimensional com fdp conjunta f . Sejam $Z = H_1(X, Y)$ e $W = H_2(X, Y)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam às seguintes condições:

- (a) As equações $z = H_1(x, y)$ e $w = H_2(x, y)$ podem ser univocamente resolvidas para x e y , em termos de Z e w , isto é, $x = G_1(z, w)$ e $y = G_2(z, w)$
 (b) As derivadas parciais $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ e $\frac{\partial y}{\partial w}$ existem e são contínuas.

3.11 Distribuição do produto e do Quociente de Variáveis Aleatórias Independentes

Teorema 3.11.1. Seja (X, Y) uma v.a contínua bidimensional e admita-se que X e Y sejam independentes. consequentemente, a fdp f pode ser escrita como $f(x, y) = g(x)h(y)$. Façamos $W = XY$.

Nesse caso, a fdp de W , digamos p , é dada por

$$p(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \left(\frac{-w}{u} \right) \left| \frac{1}{u} \right| du \quad (3.14)$$

Teorema 3.11.2. Seja (X, Y) uma v.a bidimensional contínua e suponhamos que X e Y sejam independentes. [portanto a fdp de (X, Y) pode ser escrita como $f(x, y) = g(x)h(y)$.] Seja $Z = X/Y$. Deste modo, a fdp de Z , digamos q , será dada por

$$q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(vz)h(v) |v| dv \quad (3.15)$$

3.12 Variáveis Aleatórias n-Dimensionais

3.12.1 Caracterização Adicional das Variáveis Aleatórias

Definição 23. Seja X uma v.a contínua com fdp f . O valor esperado de X é definido como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (3.16)$$

Pode acontecer que está integral (imprópria) não convirja. Consequentemente, diremos que $E(X)$ existirá se, e somente se,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx, \quad (3.17)$$

for finita.

Teorema 3.12.1. Seja X uniformemente distribuída sobre o intervalo $[a, b]$. Nesse caso,

$$E(X) = \frac{a + b}{2} \quad (3.18)$$

3.13 Expectância de uma função de uma variável Aleatória

Definição 24. Se Y for uma v.a contínua com fdp g , definiremos,

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)dy \quad (3.19)$$

Teorema 3.13.1. Se X for uma v.a contínua com fdp f , teremos,

$$E(Y) = E[H(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)f(x)dx \quad (3.20)$$

3.14 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Definição 25. Seja (X, Y) uma v.a bidimensional e seja $Z = H(X, Y)$ uma função real de (X, Y) . Em consequência, Z será uma v.a (unidimensional) e definiremos $E(Z)$ como Se Z for uma v.a contínua com fdp f , teremos

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz \quad (3.21)$$

Teorema 3.14.1. Seja (X, Y) uma v.a bidimensional e façamos $Z = H(x, Y)$. Se (X, Y) for uma v.a contínua com fdp conjunta f , teremos

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, y) f(x, y) dx dy \quad (3.22)$$

3.15 Propriedades de Valor Esperado

Propiedade 3.15.1. Se $X = C$, onde C é uma constante, então, $E(X) = C$.

Propiedade 3.15.2. Suponha-se que C seja uma constante e X seja uma v.a. Então, $E(CX) = CE(X)$.

Propiedade 3.15.3. Seja (X, Y) uma v.a bidimensional com uma distribuição de probabilidade conjunta. Seja $Z = H_1(X, Y)$ e $H_2(X, Y)$. Então, $E(Z + W) = E(Z) + E(W)$.

Propiedade 3.15.4. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer. Então, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Propiedade 3.15.5. Sejam n v.as X_1, \dots, X_n . Então,

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(x_n) \quad (3.23)$$

Propiedade 3.15.6. Sejam (X, Y) uma variável bidimensional e suponha que X e Y sejam independentes. Então, $E(X, Y) = E(X)E(Y)$ [17].

3.16 A distribuição da Normal

A distribuição normal é uma das mais importantes distribuições da estatística. Tendo sua importância devido a vários fatores, entre eles o teorema central do limite, o qual é

um resultado fundamental em aplicações práticas e teóricas, com o uso da distribuição normal ou gaussiana como também é conhecida, ela serve de aproximação para cálculos de outras distribuições quando o número da observação está muito grande.

Definição 26. A v.a X , que tome todos os valores reais $-\infty < x < \infty$, tem uma distribuição normal (ou Gaussiana) se sua fdp for da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x - \mu}{\sigma}\right]^2\right), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.24)$$

Gráficos

A Fig 3.1 ilustra a função de densidade para a distribuição normal padrão, determinada por valores particulares de μ e σ . A análise da curva permite concluir que as ocorrências tendem a concentrar-se em torno de uma média e se tornam mais raras ou menos prováveis à medida que dela se afastam.

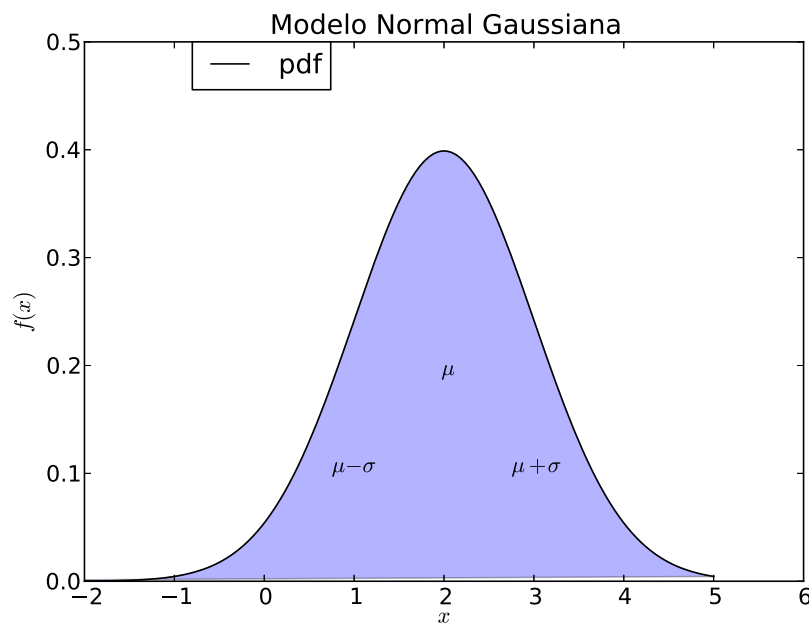


Figura 3.1: f.d.p de uma v.a normal com média μ e desvio padrão σ . A área total sob a curva é unitária porque indica a probabilidade de todo o conjunto observado, onde dois valores quaisquer de x indica a probabilidade de ocorrência entre os valores.

Momentos

Pode-se mostrar que,

$$E(X) = \mu \tag{3.25}$$

$$Var(X) = \sigma^2 \tag{3.26}$$

Além disso, $f(x; \mu; \sigma^2) \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow_{\pm}^{\pm} \infty$, $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x; \mu; \sigma^2)$, $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x; \mu; \sigma^2)$, e o valor máximo é $1/\sigma\sqrt{2\pi}$. A densidade $f(x; \mu; \sigma^2)$ é simétrica em relação à reta $x = \mu$, isto é,

$$f(\mu + x; \mu, \sigma^2) = f(\mu - x; \mu, \sigma^2) \tag{3.27}$$

para todo x real. [18]

Para simplificar a notação, denotaremos a densidade da normal simplesmente por $f(x)$ e escreveremos, simbolicamente

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, temos uma distribuição padrão ou reduzida, $N(0, 1)$ como mostramos na Fig. 3.2. Para essa a função densidade reduz-se a

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} - \infty < z < \infty. \tag{3.28}$$

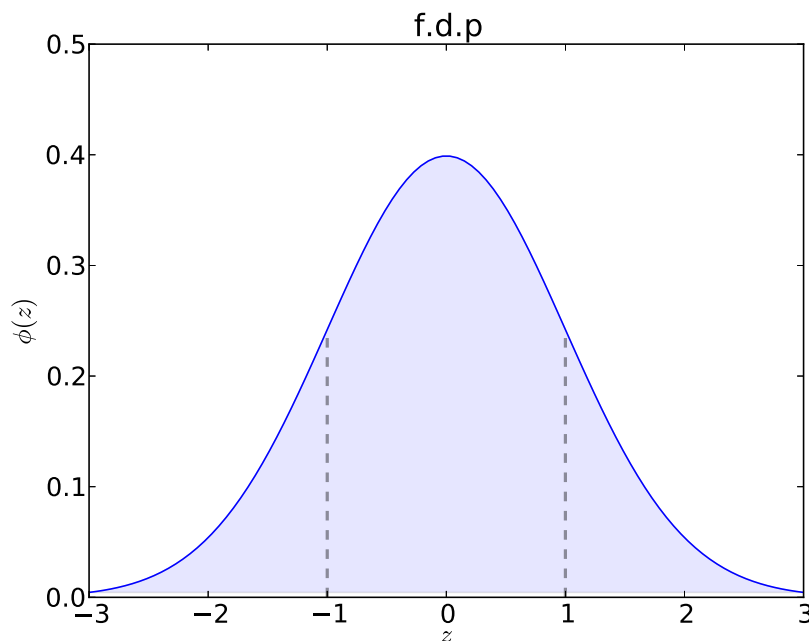


Figura 3.2: f.d.p de uma v.a normal padrão $Z \sim N(0, 1)$

3.16.1 Função Distribuição Acumulada

A Função Distribuição Acumulada (f.d.a) $F(y)$ de uma v.a normal X com média μ e variância σ^2 é obtido integrando-se $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)$ de $-\infty$ até y , ou seja

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f(x; \mu; \sigma^2) dx, y \in \mathbb{R} \quad (3.29)$$

A integral corresponde à área, sob $f(x)$, desde $-\infty$ até y , como mostra a Fig. 3.3

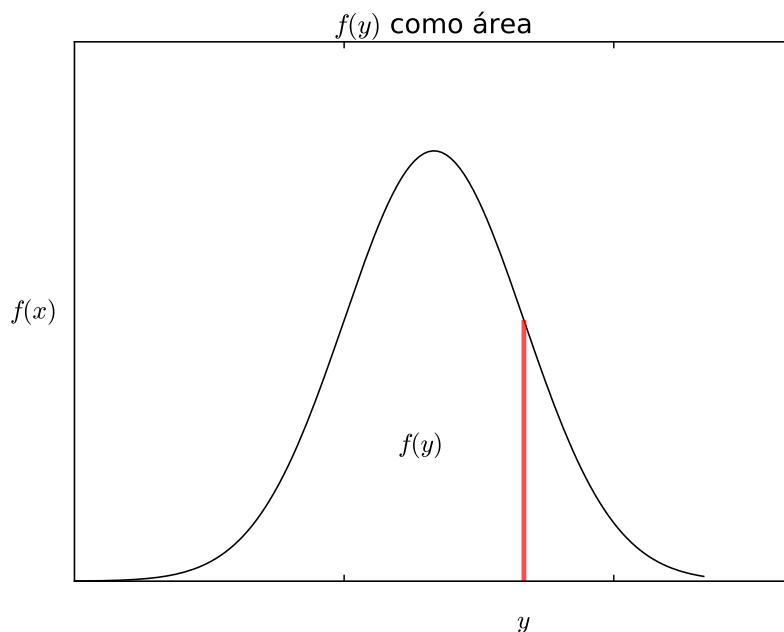


Figura 3.3: $f(y)$ como área.

Utilizamos a seguinte notação, que é universal:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \phi(z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.30)$$

O gráfico de $\Phi(z)$ é da seguinte forma:

3.16.2 Propriedades da Distribuição Normal

Propriedade 3.16.1. $f(x)$ é simétrica em relação à origem $x = \mu$, ou $\phi(z)$ é simétrica em relação à origem $Z = 0$

Propriedade 3.16.2. $f(x)$ possui um máximo para $x = \mu$, ou $\phi(z)$ possui um máximo para $Z = 0$, e neste caso sua ordenada vale $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Propriedade 3.16.3. $f(x)$ tende a zero quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$, o mesmo acontecendo com $Z \rightarrow_{\pm} \infty$. Isto é, x ou z são assíntotas de $f(x)$ ou $\phi(z)$.

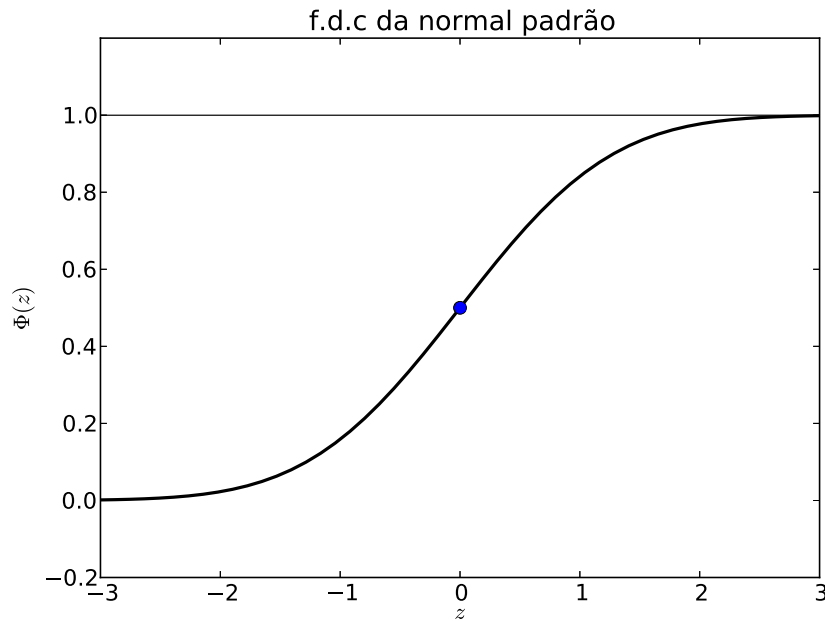


Figura 3.4: f.d.c da normal padrão $Z \sim N(0, 1)$

Propiedade 3.16.4. $f(x)$ tem dois pontos de inflexão cujas abscissas valem $\mu + \sigma$ e $\mu - \sigma$, ou $\varphi(z)$ tem dois pontos de inflexão cujas abscissas valem $+1$ e -1 .

Teorema 3.16.5. Se X tiver a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, e se $Y = aX + B$, então Y terá a distribuição $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Corolário 3.16.6. Se X tiver distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ e se $Y = (X - \mu)/\sigma$, então Y terá distribuição $N(0, 1)$.

3.17 Tabulação da Distribuição Normal

Supondo que X tenha distribuição em $N(0, 1)$. Neste caso.

$$p(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx. \quad (3.31)$$

Essa integral não pode ser calculada pelos métodos conhecidos tradicionalmente. (A grande dificuldade está em não poder o Teorema Fundamental do Cálculo, porque encontramos uma função cuja a sua seja $e^{-x^2/2}$). Logo, o métodos de integração numéricas podem ser utilizada para integrais da forma acima, e de fato $P(X \leq s)$ tem sido tabulada [19].

A *fd* da distribuição normal reduzida será denotado por Φ . Isto é,

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-x^2/2} dx \quad (3.32)$$

Vamos utilizar a tabulação da função Φ , com o propósito de calcularmos $p(a \leq X \leq b)$, onde X tem a distribuição reduzida $N(0, 1)$ visto que

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (3.33)$$

A vantagem da tabulação acima é precisa ao fato de que, se X tiver qualquer distribuição normal $N(\mu, \sigma^2)$, a função tabelada ϕ pode ser empregada para calcular probabilidade associadas a X .

Facilmente aplicaremos teorema 3.16.5 para salientar que se X tiver distribuição N , então Y terá distribuição N . Portanto,

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \quad (3.34)$$

É ainda evidente da definição de Φ que

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad (3.35)$$

Esta relação é individualmente favorável, porque na maioria das tábuas, a função ϕ está tabulada somente para valores positivos de x . Por fim, iremos calcular $P(\mu - \kappa\sigma \leq X \leq \mu + \kappa\sigma)$, onde X tem distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. A probabilidade acima pode ser demonstrada em termos da função Φ , ao se escrever:

$$P(\mu - \kappa\sigma \leq X \leq \mu + \kappa\sigma) = P\left(-\kappa \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \kappa\right) \quad (3.36)$$

$$= \Phi(\kappa) - \Phi(-\kappa) \quad (3.37)$$

Aplicando a Eq. (3.35), teremos para $\kappa > 0$

$$P(\mu - \kappa\sigma \leq X \leq \mu + \kappa\sigma) = 2\Phi(\kappa) - 1 \quad (3.38)$$

3.18 A Normal Como Aproximação da Binomial

Como uma distribuição de probabilidade binomial usa caracteristicamente apenas números inteiros para a v.a x , enquanto a aproximação normal é contínua, devemos usar uma correção de continuidade, com um número inteiro x representado pelo intervalo de

$x - 0,5$ a $x + 0,5$. Podemos utilizar uma distribuição normal para uma aproximação de uma distribuição de probabilidade binomial, muitas aplicações práticas da distribuição binomial podem ser ajustadas com o uso de programas computacionais ou calculadoras, mas neste momento iremos falar sobre o princípio de que uma distribuição binomial pode ser aproximada por uma distribuição normal [20].

Definição 27. Se uma distribuição binomial satisfaz as exigências de $np \geq 5$ e $nq \geq 5$, então a distribuição de probabilidade binomial pode ser aproximada por uma distribuição normal com média $\mu = np$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{npq}$ e com os números inteiros discretos x ajustados pela *correção de continuidade*, de modo que x é representado pelo intervalo de $x - 0,5$ a $x + 0,5$.

3.18.1 Procedimento para o Uso de uma Distribuição Normal como Aproximação de uma Distribuição Binomial

1. Determine que a distribuição normal é uma aproximação apropriada da distribuição binomial verificando $x - 0,5$ a $x + 0,5$. (caso estas condições não forem satisfeitas, então você deve utilizar um software, ou uma calculadora, ou fórmula da probabilidade binomial.)
2. Ache os valores dos parâmetros μ e σ calculando $\mu = np$ e $\sigma = \sqrt{npq}$.
3. Identifique o valor discreto x . Mude o valor discreto x substituindo pelo intervalo de $x - 0,5$ a $x + 0,5$. Esboce uma curva normal e introduza os valores de μ , σ ou $x - 0,5$ ou $x + 0,5$ conforme seja necessário.
4. Mude x , substitua por $x - 0,5$ ou $x + 0,5$, conforme seja necessário.
5. Usando $x - 0,5$ ou $x + 0,5$ no lugar de x , ache a área correspondente à probabilidade desejada, encontrando primeiro o número de acertos $z : z = (x - \mu)/\sigma$. Use agora o número de acertos z para achar a área à esquerda do valor ajustado de x . Essa área será usada agora para identificar a área correspondente à probabilidade desejada.

3.19 Correções de Continuidade

O método para o uso da distribuição normal para aproximar a distribuição binomial envolve um passo no qual mudamos um número discreto para um intervalo que está $0,5$ inferior e $0,5$ superior do número discreto. Este passo em particular é chamado correção de continuidade, em geral é difícil de se entender, onde a parti de agora vamos considera-lo com mais detalhes.

Definição 28. Quando usamos a distribuição normal (que é uma distribuição de probabilidade contínua) como aproximação da distribuição binomial (que é uma distribuição discreta), é feita uma correção de continuidade para o número inteiro discreto x na distribuição binomial, representando-se o único valor x pelo intervalo de $x - 0,5$ a $x + 0,5$ (isto é, somando e subtraindo $0,5$).

3.19.1 Procedimento para Correções de Continuidade

1. Ao usar a distribuição normal como uma aproximação da distribuição binomial, sempre use a correção de continuidade. (Ela é necessária porque estamos usando a distribuição normal contínua para aproximar a distribuição binomial discreta.)
2. Ao usar a correção de continuidade, primeiro identifique o número discreto inteiro x apropriado para o problema da probabilidade binomial.
3. Desenhe uma curva normal centrada em μ , em seguida desenhe uma faixa vertical centrada em x . Marque o limite esquerdo da faixa com o número $x - 0,5$ e marque o limite direito como número $x + 0,5+$. Considere que a área total da faixa representa a probabilidade do próprio número discreto x .
4. Agora, determine se o valor de x deve ser incluído na probabilidade desejada. Em seguida, determine quer a probabilidade de pelo menos x , no máximo x , mais do que x , menos do que x ou exatamente x . Sombreie a área à esquerda ou à direita da faixa conforme apropriado; sombreie também o interior da faixa propriamente dita se e somente se o valor de x for incluído. Essa área total sobreada corresponde à probabilidade desejada.

3.19.2 Usando probabilidade para Determinar se Resultados São Não-usuais

- **Não usualmente alto** x acontecimentos em n amostras é um número não usualmente alto de sucessos de $p(x \text{ ou mais})$ é muito pequena (tal como $0,05$ ou menor).
- **Não usualmente baixo** x acontecimentos em n amostras é um número não usualmente baixo de sucessos de $p(x \text{ ou menos})$ é muito pequena (tal como $0,05$ ou menor).

3.20 O Papel da Aproximação Normal

Na realidade, uma boa parte das aplicações práticas da distribuição de probabilidade binomial podem, agora, ser bem trabalhadas com um método computacional ou uma

calculadora (do tipo TI). A distribuição de probabilidade binomial pode ser aproximada por uma distribuição normal.

3.21 Determinação de Normalidade

Fornecemos conceitos para determinar se as exigências para uma distribuição normal são satisfeitas. Os critérios envolvem verificação visual de um histograma para conferir se tem a forma aproximada de sino, identificando-se quaisquer outliers e estabelecer um novo gráfico chamado gráfico de quantis normais

Definição 29. Um gráfico dos quantis normais (ou gráfico de probabilidade normal) é um gráfico de ponto (x, y) onde cada valor x vem do conjunto original de dados amostrais e cada valor y é o escore z correspondente ao valor esperado do quantil da distribuição normal padrão.

Procedimento para Determinar se os Dados Têm Distribuição Normal

1. Histograma: Construa um histograma. Rejeite normalidade se o histograma se afasta muito de uma forma de sino.
2. Outliers: Identifique os outliers. Rejeite normalidade se houver mais de um outlier. (Apenas um outlier pode ser um erro ou resultado de uma variação casual, mas tenha cuidado- mesmo um único outlier pode ter efeito dramático sobre os resultados).
3. Gráficos dos quantis normais: Se o histograma for basicamente simétrico e se houver no máximo um outlier, construa o gráfico dos quantis normais. Os seguintes passos descrevem um procedimento relativamente simples para a construção de um gráfico dos quantis normais, mas diferentes pacotes estatísticos usam várias outras abordagens.
 - (a) Primeiro organize os dados ordenado os valores do menor para o maior.
 - (b) Com uma amostra de tamanho n , cada valor representa uma proporção de $1/n$ da amostra. Usando o tamanho amostral conhecido n , identifique as reas de $1/2n$, $3/2n$, $5/2n$, $7/2n$ e assim por diante. Essas são as áreas acumuladas à esquerda dos valores amostrais correspondentes.
 - (c) Use a distribuição normal padrão para achar os escores z correspondentes às áreas acumuladas à esquerda encontrada no passo (b).

- (d) Combine os dados originais ordenados com os seus escores z correspondentes, encontrados no passo (c), e plote os pontos (x, y) , onde x é um valor amostral original e y é o escore z correspondente.
- (e) Examine o gráfico dos quantis normais usando os seguintes critérios: se os pontos não se aproximam de uma reta ou se os pontos exibem um padrão sistemático que não seja um padrão linear, então os dados parecem provir de uma população que não tem distribuição normal. Se o padrão dos pontos é razoavelmente próximo de uma reta, então os dados parecem provir de uma população que tem uma distribuição normal.

Métodos Aproximados

4.1 Métodos Numéricos de Integração

Notamos que as funções a serem integradas numericamente terão caracteristicamente duas formas: uma tabela de valores ou uma equação. A forma dos dados tem uma extensão importante nos enfoques usados para calcular a integral. Para os dados tabulados, permanecer limitado pelo número de pontos dados. Já se uma equação estiver disponível, é possível gerar tantos valores de $f(x)$ quantos forem necessários para alcançar a exatidão cabível.

Vamos falar de duas técnicas para avaliar casos nos quais a função é dada. A primeira é aperfeiçoada na extrapolação de Richardson, que é um método para combinar duas estimativas numéricas para a integral para conseguir um terceiro valor, mais apurado. O algoritmo computacional para praticar a extrapolação de Richardson de uma maneira alternativa e competente é chamado integração de Romberg. Essa técnica é recorrente e pode ser usada para gerar uma estimativa da integral dentro de uma tolerância de erro pré-especificada.

O segundo método é chamado quadratura de Gauss, as fórmulas utilizam valores de x que estão distribuídos entre a e b , de uma maneira que é determinada uma avaliação da integral muito mais apurada [21].

4.2 Fórmulas de Newton-Cotes

Nas fórmulas utilizadas de Newton-Cotes o conceito de polinômio que aproxime $f(x)$ razoavelmente é que este polinômio insira $f(x)$ em pontos $[a, b]$ igualmente separados. Avaliemos a partição do intervalo $[a, b]$ em subintervalos, de comprimento h , $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Assim $x_{i+1} - x_i = h = (b - a)/n$.

As fórmulas fechadas são do tipo: $x_0 = a, x_n = b$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \quad (4.1)$$

$$\simeq A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + \dots + A_nf(x_n) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i). \quad (4.2)$$

emos os coeficientes A_i determinados de acordo como grau do polinômio aproximado [22].

4.3 Regra do Trapézio

Para a determinação da regra do trapézio, é utilizado a formula de Lagrange para expressar o polinômio $p_1(x)$ que interpole $f(x)$ em x_0 e x_1 , temos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1 dx \quad (4.3)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x - x_1)}{-h} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{h} f(x_1) \right] dx = I_T \quad (4.4)$$

Assim temos, $I_T = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$ dois pontos do extremo do intervalo, fez-se passar uma que é a área do trapézio de altura $h = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$. Foi aproximada pela área sob esta reta. Que é a formula dos trapézios [23].

4.4 Regra de Simpson

Quando o termo de erro abrange a derivada de 4º grau de f , a regra de Simpson produz resultados exatos quando aplicada a qualquer polinômio de 3º grau ou inferior:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\epsilon) \quad (4.5)$$

Definição 30. O grau de precisão de uma fórmula de quadratura é o maior valor positivo inteiro n tal que a fórmula é exata para x^k , para quaisquer $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Teorema 4.4.1. Suponha que $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$ indique a fórmula fechada de Newton-Cotes com $(n + 1)$ pontos, com $x_0 = a, x_n = b$ e $h = (b - a)/n$. Então, existe um $\epsilon \in (a, b)$ para o qual

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{n+2}(\epsilon)}{(n + 2)!} \int_0^n t^2(t - 1) \dots (t - n) dt, \quad (4.6)$$

se n for par e $f \in C^{n+2}[a, b]$, e

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{n+1}(\epsilon)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)\dots(t-n)dt, \quad (4.7)$$

se n for impar e $f \in C^{n+1}[a, b]$.

4.5 Integração de Romberg

A integração de Romberg é um projeto usado para aprimorar a precisão do valor estimado de uma integral que aplica continuamente a formula de extrapolação de Richardson. O esquema usa uma série de estimativas iniciais da integral. A estimativa e o erro associados com a aplicação múltiplas da regra do trapézio podem ser representados da seguinte forma:

$$I = I(h) + E(h) \quad (4.8)$$

Onde I é o valor exato da integral, $I(h)$ é aproximação por aproveitamento da regra do trapézio com n intervalos com tamanho do passo $h = (b-a)/n$ e $E(h)$ é o erro de truncamento. Se fizermos duas estimativas separadas usando tamanhos de passo h_1 e h_2 e apresentarmos os valores exatos para o erro, então:

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \quad (4.9)$$

A partir de agora usaremos que o erro da aplicação múltipla da regra do trapézio pode ser representado pela a seguinte equação.

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f^{''} \quad (4.10)$$

com $n = (b-a)/h$

$$E \cong -\frac{(b-a)^3}{12} h^2 f^{''} \quad (4.11)$$

Usando $f^{''}$ constante independente do tamanho do passo, a equação acima, pode ser usada para determinar que a razão entre os dois erros, que será:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_2^2} \quad (4.12)$$

Usando está fórmula conseguimos remover o termo $f^{''}$ do cálculo. Logo em seguida

conseguimos ter acesso a informações embutida na equação (4.4), sem utilizarmos o conhecimento da segunda derivada, vamos reorganizar a equação (4.5), para obter:

$$E(h_1) \cong E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \quad (4.13)$$

onde substituiremos na equação (4.2):

$$E(h_1) + E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 \cong I(h_2) + E(h_2) \quad (4.14)$$

onde resolveremos, assim:

$$E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2} \quad (4.15)$$

Portanto, encontramos uma estimativa de erro de truncamento em termos da integral e seus tamanhos de passos, logo esta estimativa pode ser substituída por:

$$I = I(h_2) + E(h_2) \quad (4.16)$$

para termos um cálculo mais apurado, teremos:

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1} [I(h_2) - I(h_1)] \quad (4.17)$$

4.6 Quadratura de Gauss

As fórmulas de integração numéricas ou quadraturas, conhecidas como equações de Newton-Cotes, tem como características destas fórmulas a estimativa da integral como valores da função igualmente espaçada. Logo as posições dos pontos são predeterminadas ou fixa.

A regra do trapézio é fundamentada em assumir a área sob uma reta unindo os valores da função nas extremidades do intervalo de integração. A fórmula usada para calcular essa área é:

$$I \cong (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (4.18)$$

em que a e b são os limites de integração e $b - a$ é a largura do intervalo de integração. Como a regra do trapézio fala que deve passar pelas extremidades, existe casos em que a formula resulta em erros grandes.

Quadratura de Gauss é o nome de uma classe de técnicas para praticar tais táticas. As fórmulas de quadratura de Gauss descritas aqui são chamadas de fórmulas de

Gauss-Legendre. Vamos aproveitar para mostrar como as fórmulas de integração numérica e como a regra do trapézio podem ser descritas usando-se o método dos coeficientes indeterminados. Logo esse método será utilizado para deduzir as fórmulas de Gauss-Legendre [24].

4.7 Computação Bayesiana

Todos os algoritmos que serão vistos aqui, não se baseiam por meio de determinações, todos requerem a simulação de números (não verdadeiro) aleatórios de alguma distribuição de probabilidades. Em geral, a única restrição para o número de simulações são o tempo de computação e a capacidade de armazenamento dos valores simulados. Assim, se houver qualquer suspeita de que o número de simulações é escasso, a abordagem mais simples consiste em simular mais valores [25].

4.8 Método de Monte Carlo Simples

A ideia do método é exatamente escrever a integral que se deseja calcular como um valor esperado. Para incluir o método considere o problema de calcular a integral de uma função $g(\theta)$ no intervalo (a, b) ,

$$I = \int_a^b g(\theta) d\theta. \quad (4.19)$$

Podemos reescrever esta integral da seguinte forma:

$$I = \int_a^b (b-a)g(\theta) \frac{1}{b-a} d\theta = (b-a)E[g(\theta)] \quad (4.20)$$

Temos θ como uma variável aleatória com distribuição $U(a, b)$. Assim, modificamos o problema de avaliar a integral no problema estatístico para encontra-se uma média, $E[g(\theta)]$. Se temos uma amostra aleatória de tamanho n , $\theta_1, \dots, \theta_n$ da distribuição uniforme no intervalo (a, b) teremos também uma amostra de valores $g(\theta_1), \dots, g(\theta_n)$ da função $g(\theta)$ e a integral acima pode ser encontrada pela média amostral,

$$\hat{I} = (b-a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\theta_i) \quad (4.21)$$

Não é difícil ver que este cálculo não é viável já que

$$E(\hat{I}) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n E[g(\theta_i)] = (b-a)E[g(\theta)] = \int_a^b g(\theta) d\theta \quad (4.22)$$

Iremos usar o seguinte algoritmo:

1. gere $\theta_1, \dots, \theta_n$ da distribuição $U(a, b)$;
2. calcule $g(\theta_1), \dots, g(\theta_n)$;
3. calcule a média amostral $\bar{g} = \sum_{i=1}^n g(\theta_i)/n$
4. calcule $\hat{I} = (b - a)\bar{g}$

Podemos resolver a integral $\theta = \int_0^1 x e^{x^2} dx$ utilizando simulação de MMC via software de programação em R , onde apresentamos o algoritmo utilizado e a saída no terminal, respectivamente.

Algoritmo

```

U<-runif(100, 0, 1)
GU<-U*\exp(U*U)
theta<-mean(GU)
print(theta)

```

R

Saída no Terminal

```

> U<-runif(100, 0, 1)
+ GU<-U*\exp(U*U)
+ theta<-mean(GU)
+ print(theta)
[1] 0.865422

```

R

Na Fig. 4.1 mostramos a representação da integral. Uma grande vantagem dos métodos de simulação é que após uma amostra de vetores aleatórios ser gerada podemos facilmente calcular características das distribuições marginais e condicionais.

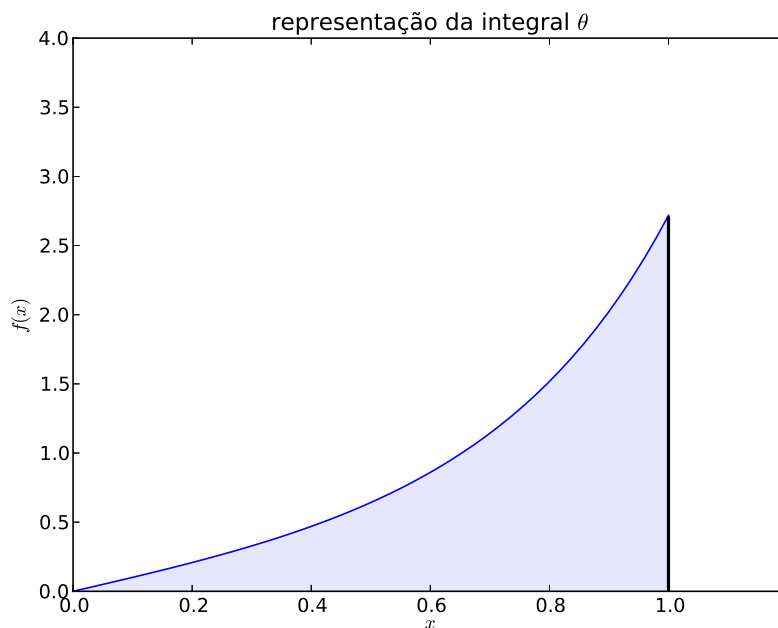


Figura 4.1: Representação visual da integral $\theta = \int_0^1 xe^{x^2} dx$.

4.9 Monte Carlo via Função de Importância

Em muitas situações pode ser muito difícil ou mesmo impossível simular valores da distribuição que virá mais a frente. Neste caso, pode-se apelar por uma função $q(\theta)$ que seja de fácil amostragem, frequentemente chamada de função de importância. O procedimento é usualmente chamado de amostragem por importância.

Se $q(\theta)$ for uma função de densidade definida no mesmo espaço onde a variação de θ então, a integral

$$I = \int_a^b g(\theta)p(\theta)d\theta = E[g(\theta)] \quad (4.23)$$

pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$I = \int \frac{g(\theta)p(\theta)}{q(\theta)}g(\theta)dx = E \left[\frac{g(\theta)p(\theta)}{q(\theta)} \right] \quad (4.24)$$

Assim, temos a disposição uma amostra aleatória $\theta_1, \dots, \theta_n$, onde é tomada da distribuição q o estimador de Monte Carlo da integral acima, fica:

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(\theta_i)p(\theta_i)}{q(\theta_i)} \quad (4.25)$$

tem as mesmas propriedades de Monte Carlo simples.

Logo no começo não há restrições quanto à escolha da densidade de importância q ,

porém na hora de usar, alguns cuidados devem ser tomados. Pode-se mostrar que a escolha é ótima no sentido de minimizar a variância do estimador consiste em tomar $q(\theta) \propto g(\theta)p(\theta)$.

4.10 Aplicação 1

Considerando a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right), -\infty < x < \infty \quad (4.26)$$

vamos mostrar que f é uma fdp legítima. Temos $f(x) \geq 0$, devemos ainda verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

4.10.1 Solução Analítica

Calcularemos esta integral de forma analítica. Escrevendo a função dada pela Eq. (4.26) na forma de uma integral, temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx.$$

Fazendo $t = \left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]$, onde $x - \mu = \sigma t \Rightarrow x = \sigma t + \mu \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sigma \Rightarrow dx = \sigma dt$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} [t]^2\right) \sigma dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-\frac{t^2}{2}} dt = I \end{aligned}$$

Devemos usar um artifício para calcular esta integral, que é considerar no lugar de I , o quadrado desta integral, a saber I^2 . Deste modo,

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-\frac{t^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-\frac{s^2+t^2}{2}} ds dt \end{aligned} \quad (4.27)$$

Vamos usar coordenadas polares para calcular esta integral dupla, onde

$$\begin{aligned} s &= r \cos \alpha \\ t &= r \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

Devemos determinar o elemento de área $dsdt$, utilizando a matriz jacobiana

$$J = \det \left(\frac{\partial(s, t)}{\partial(r, \alpha)} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial \alpha} \end{vmatrix}. \quad (4.28)$$

Resolvendo as derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial r} &= \cos \alpha, & \frac{\partial t}{\partial r} &= \operatorname{sen} \alpha \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha} &= -r \operatorname{sen} \alpha, & \frac{\partial t}{\partial \alpha} &= r \cos \alpha \end{aligned}$$

e as substituindo na Eq. (4.28), temos que

$$J = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -r \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & r \cos \alpha \end{vmatrix} = r \cos^2 \alpha + r \operatorname{sen}^2 \alpha = r.$$

O elemento de área em coordenadas polares é

$$dsdt = Jdrd\alpha = rdrd\alpha.$$

Como s e t variam entre $-\infty$ e $+\infty$, r varia de 0 a ∞ , enquanto α varia entre 0 e 2π . Portanto,

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r \exp^{-\frac{r^2}{2}} dr d\alpha.$$

Para facilitar, vamos fazer a integral de dr , chamando $u = -\frac{r^2}{2}$ e $du = -\frac{2r}{2} dr \Rightarrow du = -rdr \Rightarrow dr = -\frac{du}{r}$, logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} r \exp^{-\frac{r^2}{2}} dr &= - \int r \exp^u \frac{du}{r} \\ &= - \int \exp^u du = - \exp^u + c = - \exp^{-\frac{r^2}{2}} + c. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Voltando para a integral dada na Eq. (4.27), temos que

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(- \exp^{-\frac{r^2}{2}} \right)_0^{\infty} d\alpha \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\alpha = \frac{1}{2\pi} (\alpha)_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1. \quad (4.31)$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x - \mu}{\sigma} \right]^2 \right) dx = 1. \quad (4.32)$$

4.10.2 Solução pelo Método de Monte Carlo em R

Resolvendo numericamente a integral em R, utilizando o algoritmo

```

Algoritmo
f<-function(x) dnorm(x)
integrate(f,-Inf, Inf) #integracao exata

```

R

obtemos no terminal 1 *with absolute error* $< 9.4e - 05$.

Pelo MMC implementamos o algoritmo em R, onde resolvemos a integral da Eq. (4.26), cujo $dnorm(x)$ é a densidade da distribuição dada pela fdp. Conforme n aumenta, o resultado se aproxima do verdadeiro valor, como verificamos na Tabela 4.1.

```

Algoritmo
int.fdp = function(n, a, b) {
x = runif(n, a, b)
# n iniciou em 1000 até 100000000
y = dnorm(x)
int.fdp = (b - a) * mean(y) #metodo monte carlo
return(int.fdp)
}

```

R

Na Fig. 4.2, mostramos que existe uma variação considerável na estimativa da integral, isto se chama “erro de Monte Carlo” e decresce conforme aumentamos o número de simulações. Repetindo o experimento com $n = 1000000$ a variação será bem menor. Evolução deste erro conforme se aumenta o número de simulações fica bem evidente.

Nas aplicações que resolvemos utilizando o MMC, apresentamos gráficos que mostram a eficácia do método, onde utilizando o boxplot e executando a função 50 vezes para as simulações, observamos o "erro de Monte Carlo", o qual decresce conforme aumentamos

Tabela 4.1: Resultado numérico da integral aproximada da Eq. (4.26) usando método Monte Carlo.

n- número de observações	Resultado
1000	$1.358598e^{-06}$
10000	1.807096
100000	0.9383038
1000000	1.058059
10000000	1.040077
100000000	1.0099891

o número de simulações.

Ao utilizarmos o boxplot, o mesmo permite que possamos avaliar a simetria dos dados, a dispersão e a existência ou não de *outliers*, sendo adequado para compararmos os conjuntos de simulações e a quantidade de erros correspondentes para cada categoria.

No boxplot estão os quartil inferior e superior delimitando, respectivamente, as cercas superior e inferior, as quais constituem limites. Além desses, os dados passam a ser *outliers*.

Na Fig. 4.3 verifica-se que ao realizarmos apenas uma estimativa para $n = 20, 50, 100, 200$ e 500, $a = 0$ e $b = 1$ observamos a existência de outliers. Ao aumentarmos para 50 estimativas, como observamos na Fig. 4.4, o número de erro para a simulação de número 500 é menor e inexistente outlier.

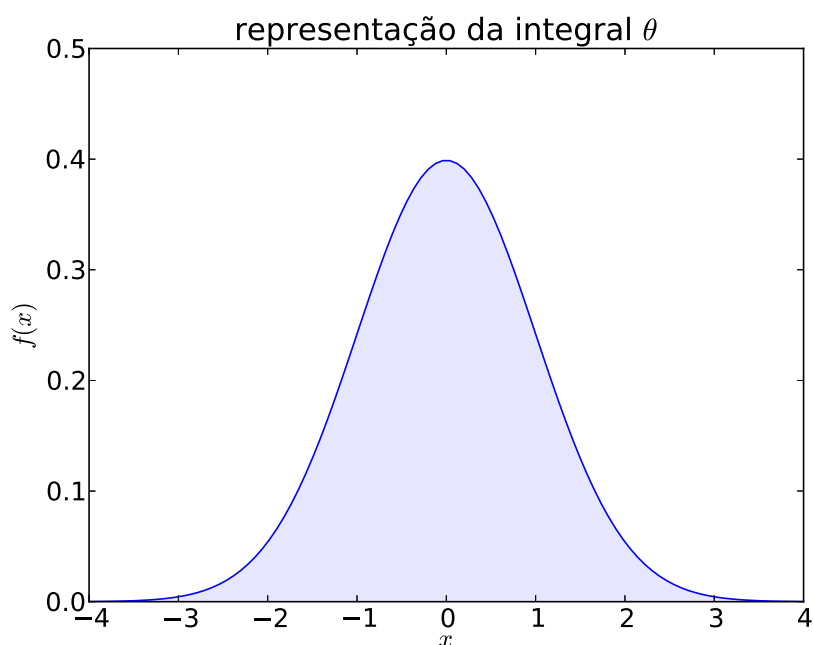


Figura 4.2: Representação da área da integral dada pela Eq. (4.26).

Algoritmo para Gerar Boxplot

```

int.fdp = function(n, a, b) {
  x = runif(n, a, b)
  y = dnorm(x)
  int.fdp = (b - a) * mean(y) #metodo monte carlo
  return(int.fdp)
}
n = c(20, 50, 100, 200, 500)
y = matrix(0, ncol = length(n), nrow = 50)
for (j in 1:length(n)) {
  m = NULL
  for (i in 1:50) m = c(m, int.fdp(n[j], 0, 1))
  y[, j] = m
}
boxplot(data.frame(y), names = n)

```

R

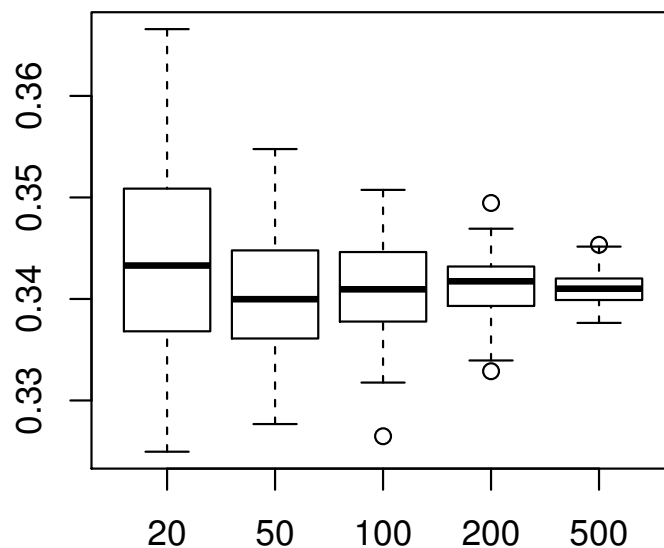


Figura 4.3: Boxplots para 1 estimativa da integral dada pela Eq. (4.26) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 500 .

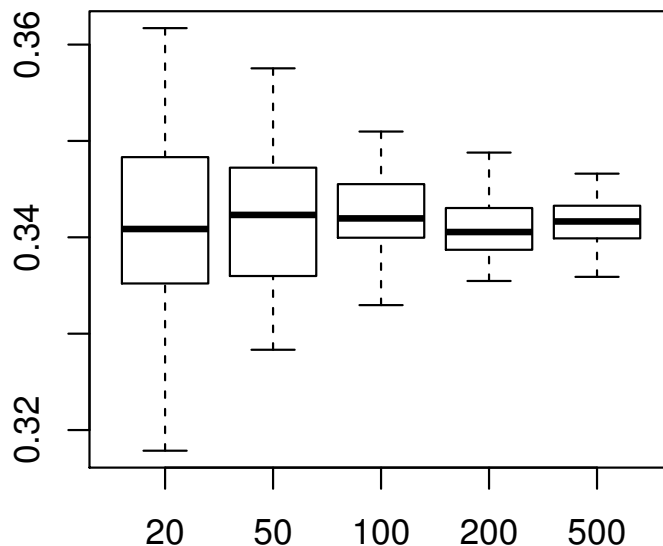


Figura 4.4: Boxplot para 50 estimativas da integral dada pela Eq. (4.26) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 500 .

4.11 Aplicação 2

Nesta aplicação, desejamos calcular uma aproximação para a integral

$$\theta_2 = \int_1^3 \exp^{-x} dx, \quad (4.33)$$

utilizando de simulação Monte Carlo.

4.11.1 Solução Analítica

Inicialmente, calcularemos esta integral de forma analítica. Portanto, temos que o valor exato para θ_2 é dado por

$$\int_1^3 \exp^{-x} dx = [-\exp^{-x}]_1^3 = -\exp^{-3} + \exp^{-1} \quad (4.34)$$

$$= -0,049787 + 0,367879 = 0,318092. \quad (4.35)$$

4.11.2 Solução via Método de Monte Carlo

Considerando o MMC, temos que a integral utilizada é do tipo

$$\theta = \int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x, \quad (4.36)$$

sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ com $n = 1, \dots, 100$, e $f(x_i) = e^{-x_i}$ com $i = 1, \dots, 100$.

O valor aproximado da integral é dado por

$$\langle \theta_2(n) \rangle = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (4.37)$$

onde todas x_i são observações independentes de uma distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$. Portanto, para a Eq. (4.33) temos que

$$\langle \theta_2(100) \rangle = \frac{3-1}{100} \sum_{i=1}^{100} e^{(-x_i)}. \quad (4.38)$$

Logo, a integral pode ser escrita como

$$(3-1) \int_1^3 \frac{e^{-x}}{3-1} dx, \quad (4.39)$$

que será aproximada usando 100 valores simulados da distribuição uniforme no intervalo $[1, 3]$ e de valor aproximado de $2 \sum_{i=1}^{100} e^{(-x_i)}$.

A e^{-x} é função de densidade de uma variável aleatória, onde $X \sim exp(1)$. De forma exata,

$$\int_1^3 e^{-x} dx = Pr(x < 3) - Pr(x < 1), \quad (4.40)$$

onde

$$Pr(x < 3) = \int_0^3 e^{-x} dx = -e^x \Big|_0^3 = -e^{-3} + e^0$$

e

$$Pr(x < 1) = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^x \Big|_0^1 = -e^{-1} + e^0$$

. Desse modo,

$$\int_1^3 e^{-x} dx = -e^{-3} + e^0 + e^{-1} - e^0 = -0,049787 + 0,367879 = 0,318092. \quad (4.41)$$

4.11.3 Solução pelo Método de Monte Carlo em R

Aplicamos o algoritmo abaixo para calcular uma aproximação para θ em diversos valores de n , plotar a curva da função e calcular o resultado exato da integral.

Algoritmo

```
#metodo monte carlo
f<-function(x) exp(-x)
n=100 # n de 100 a 10000000
theta<-mean(f(runif(n,1,3)))*(3-1)
print(theta)
integrate(f,1,3) #integracao exata
#grafico da funcao
curve(f(x),1,3, xlab="x", ylab="f(x)")
```

R

Conforme n aumenta, o resultado se aproxima do verdadeiro valor conforme o resultado mostrado na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Resultado numérico da integral da Eq. (4.33) usando método Monte Carlo

n - número de observações	Resultado
100	0.3565906
1000	0.3196586
10000	0.3169927
100000	0.3186645
1000000	0.3179756
10000000	0.3181011
100000000	0.3180888

No algoritmo, a saída no terminal para o resultado exato foi [1] 0.3180924 *with absolute error* $< 3.5e - 15$. Na Fig. 4.5 mostramos que quanto maior for o valor de n , mais preciso será o resultado.

Utilizando o algoritmo a seguir, onde executamos `int.exp` 50 estimativas com $n = 20, 50, 100, 200$ e 500 , $a = 1$ e $b = 3$, existindo assim uma variável considerável na estimativa da integral. Nas Figs. 4.6-4.7, mostramos os boxplots da integral com simulações, onde "erro de Monte Carlo" decresce conforme aumentamos o número de simulações, o qual poderá ser cada vez mais menor de acordo com o aumento do número n . Veja que a evolução erro é menor conforme se aumenta o número de simulações, o que torna-se bem evidente. Boxplots para 50 estimativas da integral com simulações.

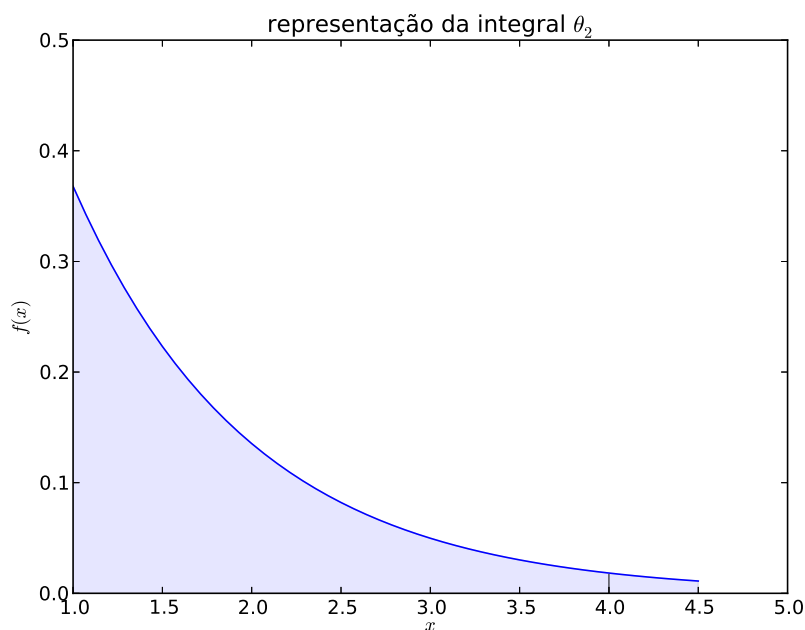


Figura 4.5: Representação da área da integral dado pela Eq. (4.33).

Algoritmo para Gerar Boxplot

```
#metodo monte carlo
  int.exp = function(n, a, b) {
x = runif(n, a, b)
y = exp(-x)
int.exp = (b - a) * mean(y)
return(int.exp)
}
n = c(20, 50, 100, 200, 500)
y = matrix(0, ncol = length(n), nrow = 50)
for (j in 1:length(n)) {
m = NULL
for (i in 1:50) m = c(m, int.exp(n[j], 1, 3))
y[, j] = m
}
boxplot(data.frame(y), names = n)
```

R

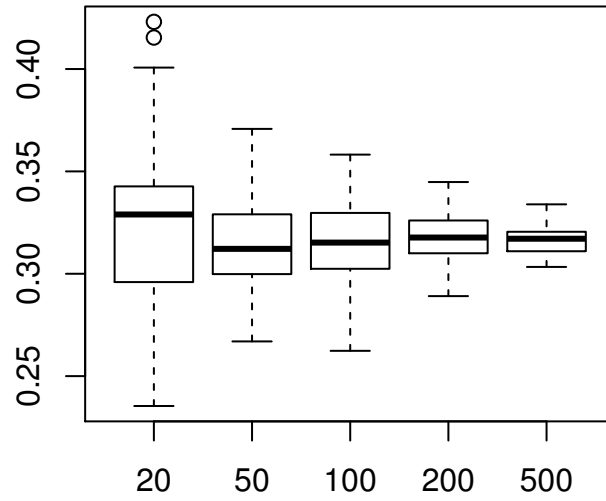


Figura 4.6: Boxplot para 1 estimativa da integral dada pela Eq. (4.33) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 500 .

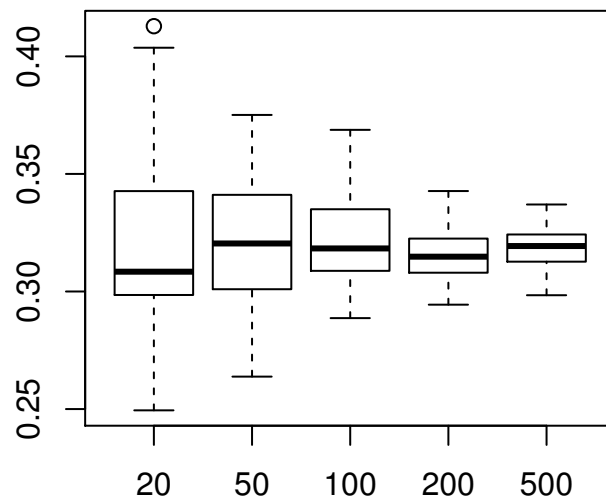


Figura 4.7: Boxplot para 50 estimativas da integral dada pela Eq. (4.33) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 500 .

4.12 Aplicação 3

Nessa aplicação, consideramos a integral

$$\theta_3 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx. \quad (4.42)$$

4.12.1 Solução Analítica

Resolveremos a integral analiticamente utilizando o método por substituição trigonométrica. Veja que podemos escrever θ_3 da seguinte maneira

$$\theta_3 = \int_0^1 \frac{1}{1^2+x^2} dx. \quad (4.43)$$

Considerando 1 e x os catetos de um triângulo retângulo e $\sqrt{1^2+x^2}$ a hipotenusa, temos assim as relações

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1^2+x^2}},$$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{1^2+x^2}},$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{x}{1}.$$

Observe que utilizando a relação de $\cos(\alpha)$, $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+x^2}$ e $\text{tg}(\alpha) = x$, onde $dx = \sec^2(\alpha)$, o que nos permite escrever

$$\int_0^1 \frac{1}{1^2+x^2} dx = \int_0^1 \cos^2(\alpha) \sec^2(\alpha) d\alpha. \quad (4.44)$$

Sabemos que $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{\sec^2(\alpha)}$, logo

$$\int_0^1 \frac{1}{1^2+x^2} dx = \int_0^1 \cos^2(\alpha) \sec^2(\alpha) d\alpha = \int_0^1 d\alpha = \alpha|_0^1. \quad (4.45)$$

Retornando a variável x , $x = \text{tg}(\alpha)$ e $\alpha = \text{tg}^{-1}(x)$. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{1^2+x^2} dx = \text{tg}^{-1}|_0^1 = \text{tg}^{-1}(1) - \text{tg}^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} = 0.78539816. \quad (4.46)$$

4.12.2 Solução via Método de Monte Carlo

Pelo MMC, utilizando o mesmo procedimento da sessão 4.11.2,

$$\int_0^1 \frac{1}{1^2+x^2} dx = Pr(x < 1) - Pr(x < 0) = \text{tg}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}. \quad (4.47)$$

4.12.3 Solução pelo Método de Monte Carlo em R

Algoritmo

```
f<-function(x) 1/(1+x^2)
n=100 # n de 100 a 1000000
theta<-mean(f(runif(n,0,1)))*(1-0) #metodo monte carlo
print(theta)
integrate(f,0,1) #integracao exata
curve(f(x),-0.7,0.7, xlab="x", ylab="f(x)")
```

R

Conforme n aumenta, o resultado se aproxima do verdadeiro valor cuja saída no terminal para o resultado exato foi [1] 0.7853982 *with absolute error* $< 8.7e - 15$ como visto na tabela 4.3.

Na Fig. 4.8 mostramos que a aproximação pode ser tão acurada quanto se deseje, bastando aumentar o valor de n . É importante notar que n está sob nosso controle aqui, e não se trata do tamanho da amostra de dados.

Utilizando o algoritmo abaixo, onde executamos **int.div** com 1 até 50 estimativas para $n = 20, 50, 100, 200$ e 500 , $a = 0$ e $b = 1$, existindo assim uma variável considerável na estimativa da integral. Nas Figs. 4.9-4.10, mostramos os boxplots da integral com simulações, onde "erro de Monte Carlo" decresce conforme aumentamos o número de simulações. Veja que a evolução deste erro conforme se aumenta o número de simulações se torna bem evidente.

Tabela 4.3: Resultado numérico da integral da Eq. (4.42) usando método Monte Carlo

n- número de observações	Resultado
100	0.7766158
1000	0.7793186
10000	0.7860363
100000	0.7855211
1000000	0.7853376

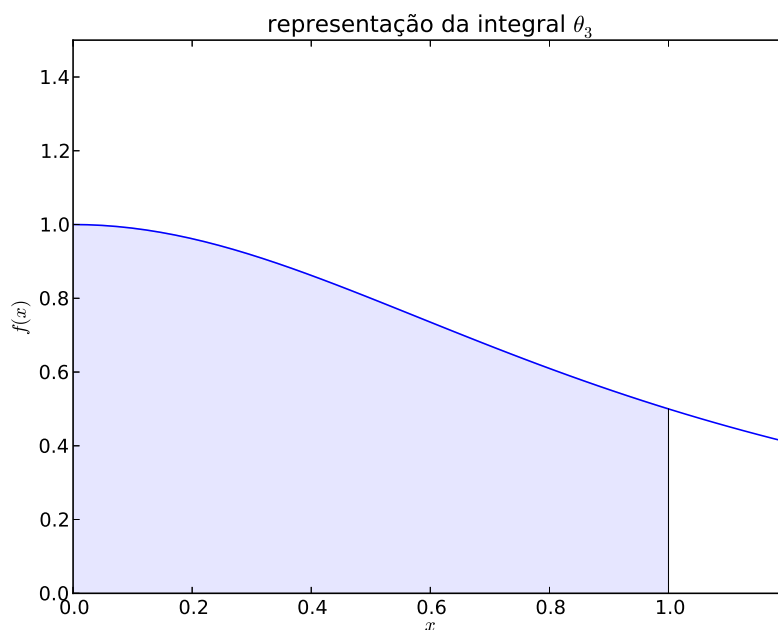


Figura 4.8: Reresentação da área da integral dado pela Eq. (4.42).

Algoritmo para Gerar Boxplot

```
#metodo monte carlo
  int.div = function(n, a, b) {
x = runif(n, a, b)
y = 1/(1+x^2)
int.div = (b - a) * mean(y)
return(int.div)
}
n = c(20, 50, 100, 200, 500)
y = matrix(0, ncol = length(n), nrow = 50)
for (j in 1:length(n)) {
m = NULL
for (i in 1:50) m = c(m, int.div(n[j], 0, 1))
y[, j] = m
}
boxplot(data.frame(y), names = n)
```

R

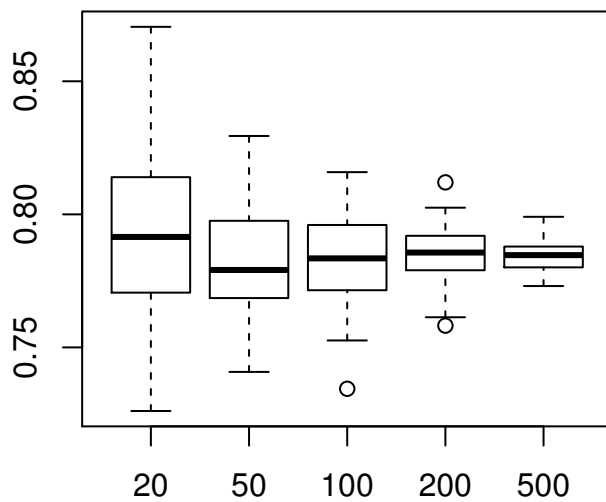


Figura 4.9: Boxplot para 1 estimativa da integral dado pela Eq. (4.42) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 500 .

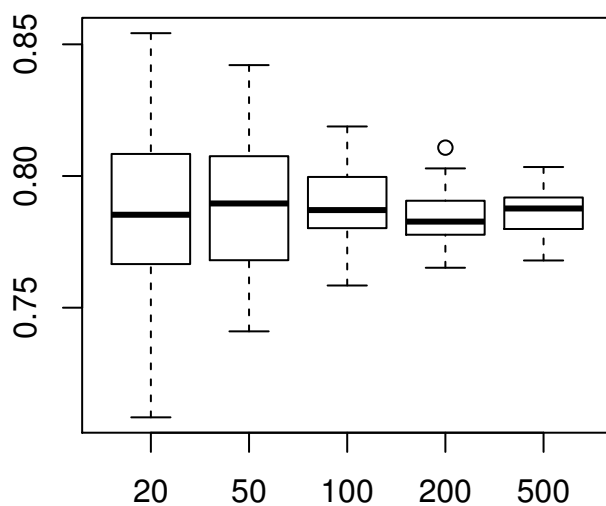


Figura 4.10: Boxplot' para 50 estimativas da integral dado pela Eq. (4.42) com $n = 20, 50, 100, 200$ e 500 .

Conclusões

Neste trabalho falamos sobre integração por aproximação utilizando simulação via MMC, mostrando que este é um método estatístico utilizado em simulações cujo o estado é indeterminado. Assim, o modelo baseado no interesse de origem dos eventos aleatórios, onde o objetivo é permitir a observação do desempenho de uma variável de interesse ou quando as suposições de um modelo são violados. Para obter resultados confiáveis, torna-se necessário conhecer a distribuição da estatística.

Em diversas situações reais, a complexidade ou ainda a dimensão do problema acaba exigindo as ferramentas de simulações computacionais. Conceitualmente simples, o MMC apresenta uma técnica de grande aplicabilidade e uso em diversas áreas do conhecimento, com diversas aplicações em áreas como a física, matemática, biologia, gestão de riscos em projetos e diversas áreas onde exista incerteza e se precise simular comportamentos.

O MMC pode ser aplicado em problemas de tomada de decisão a qual envolva risco e incerteza, como situações nas quais o comportamento das variáveis envolvidas com o problema não é de natureza determinística.

Como exemplos podemos utilizar a aplicação em física médica em especial na área de radioterapia. A determinação de parâmetros dos feixes de radiação produzidos em Acelerador de Partículas Linear (LINACS), especialmente aqueles difíceis ou impossíveis de medir, foi realizada com o auxílio do MMC. Ainda contribui na determinação da distribuição de dose em pacientes que se submetem à radioterapia é um dos processos mais importantes no tratamento de câncer e, portanto, requer alta qualidade em seus resultados [7].

De um modo geral, é reconhecido que os MMCs atualmente, são uma das ferramentas mais precisas para a obtenção desses resultados. Acrescentando-se o fato de que a capacidade computacional de processadores aumentou muito nestes últimos anos.

Portanto, na aplicação prática deste trabalho, consta-se a eficiência do método, onde as estimativas simuladas foram muito próximas dos valores calculados de forma exata.

Bibliografia

- [1] SANTOS, D. M. G. Amplificação de pequenos sinais em osciladores parametricamente forçados. Dissertação de Mestrado, UFCG-Campina Grande-PB, 2015.
- [2] BURDEN, R. L.; FAIRES, D. Análise numérica, thomson. *São Paulo*, 2008.
- [3] GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB*. [S.l.]: Bookman Editora, 2009.
- [4] PASQUETTI, E. *Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2008.
- [5] BUSTOS, O.; FRERY, A. C. *Simulação estocástica: teoria e algoritmos*. [S.l.]: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1992.
- [6] PRESS, W. H. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. [S.l.]: Cambridge university press, 2007.
- [7] YORIYAZ, H. Método de monte carlo: princípios e aplicações em física médica. *Revista Brasileira de Física Médica*, v. 3, n. 1, 2009.
- [8] LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica, vol. 1, editora harbra ltda. *São Paulo*. 685p.
- [9] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo a: Funções. *Limites, Derivação, Integração*. SP. Makron, 1992.
- [10] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo, volume i. *Editora LTC*, 1995.
- [11] LEITHOLD, L. Cálculo com geometria analítica, vol. 2. *Harbra Ltda., Sao Paulo*, 1994.
- [12] GONCALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo b: funções de várias variáveis integrais duplas e triplas*. [S.l.]: Makron Books, 1999.

- [13] HOWARD, A. *Cálculo: Um Novo Horizonte*. [S.l.]: Porto Alegre: Bookman, 1999.
- [14] MEYER, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística. In: *Probabilidade: aplicações à estatística*. [S.l.]: Livro Técnico, 1970.
- [15] FONSECA, J. S.; MARTINS, G. d. A.; TOLEDO, G. L. *Estatística Aplicada*. [S.l.]: Sao Paulo: Atlas, 1988.
- [16] CRESPO, A. A. *Estatística fácil*. Editora Saraiva, 1999.
- [17] FONSECA, G. d. A. M. Jairo Simon da. *Curso de Estatística*. [S.l.]: atlas, 2006.
- [18] MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. d. O. *Estatística básica*. rev. e atual. São Paulo: Saraiva.
- [19] TRIOLA, M. F. et al. *Introdução à estatística*. [S.l.]: Ltc Rio de Janeiro, 2005.
- [20] KAZMIER, L. J. *Estatística Aplicada à Administração e Economia*. [S.l.]: Bookman, 2007.
- [21] CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos numéricos para engenharia*. [S.l.]: AMGH Editora, 2009.
- [22] LOPES, V. L. d. R.; RUGGIERO, M. A. G. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Sao Paulo: McGraw-Hill, 1988.
- [23] BARROSO, L. et al. *Ml cálculo numérico (com aplicações)*. 2ª edição. Editora Harbra, São Paulo, 1987.
- [24] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; PALMAS, O. *Análisis numérico*. [S.l.]: Thomson Learning México, 2002.
- [25] EHLERS, R. S. Inferência bayesiana. *Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC-USP*, 2011.