

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
CORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

MARCIO SIQUEIRA PEQUENO NASCIMENTO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA  
VIA CAMPOS ESCALARES**

CAMPINA GRANDE

SETEMBRO

2010

MARCIO SIQUEIRA PEQUENO NASCIMENTO

**COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA  
VIA CAMPOS ESCALARES**

Dissertação apresentada a Universidade Federal de Campina grande como um dos pré-requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

**Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito**

CAMPINA GRANDE

SETEMBRO

2010

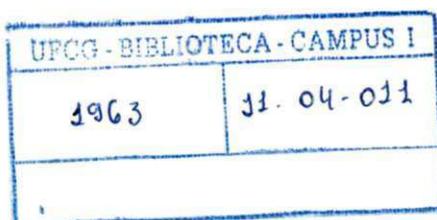
**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG**

N244c Nascimento, Marcio Siqueira Pequeno.  
Cosmologia inflacionária via campos escalares / Marcio Siqueira Pequeno Nascimento. — Campina Grande, 2010.  
71 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.  
Referências.  
Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

1. Cosmologia. 2. Inflação. 3. Campo Escalar. I. Título.

CDU – 524.85(043)

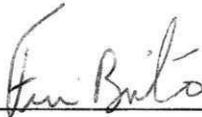


**MÁRCIO SIQUEIRA PEQUENO NASCIMENTO**

**COSMOLOGIA INFLACIONÁRIA VIA CAMPOS ESCALARES**

Dissertação aprovada em 17/11/2010

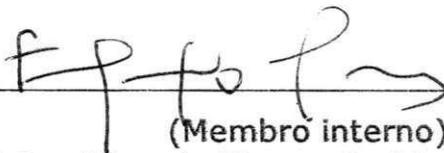
**BANCA EXAMINADORA**



---

(Presidente)

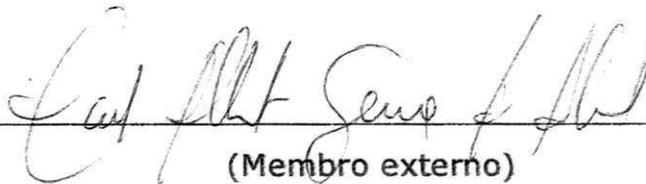
Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



---

(Membro interno)

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG



---

(Membro externo)

Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida  
CCAEE - UFPB

Ao meu Anjo de Guarda.

## **AGRADECIMENTOS**

- Ao prof. Dr. Francisco de Assis de Brito pela paciência, dedicação e incentivo que me foi oferecido durante a minha permanência nesta instituição, na qual tornou possível a realização deste trabalho através de sua orientação e da transmissão de seus conhecimentos.
- Ao Prof. Dr. Fabio Leal de Melo Dahia pelo som de suas palavras que transmitiram harmoniosamente todos os conhecimentos necessários à minha formação.
- Ao Prof. Dr. Rômulo Rodrigues da Silva pelo incentivo em sempre seguir adiante.
- A todos os professores do Departamento de Física que contribuíram para a minha formação.
- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo em todos os momentos dessa jornada espacial.
- Aos funcionários do Departamento de Física pela grata convivência durante a minha permanência neste departamento.
- Aos colegas da pós-graduação pelo excelente convívio e companheirismo, motivo pelo qual nos tornamos amigos.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a realização desse trabalho.

A ciência é uma mescla de dúvida e certeza. O bom cientista é arrogantemente humilde, o que não se reduz a um mero jogo de palavras: arrogante em relação ao método e humilde quanto à fé no seu conhecimento.

“Bachrach”

## RESUMO

Na teoria de Cosmologia Inflacionária, que tem como referencial o Universo observado, a gravitação é uma força sempre atrativa. Nunca houve qualquer evidência firme de “anti-gravitação”, em laboratório ou sistemas estelares/galácticos. Porém, isto não necessariamente foi sempre assim, e uma possível solução ao problema da origem da expansão do Universo, é de termos tido uma época onde, pelo menos de forma efetiva, a gravitação tenha sido repulsiva. De fato, as equações de Friedmann atribuem um papel importante à relação entre pressão  $p$  e a densidade de energia  $\rho$ , já que o sinal da aceleração esta determinado por ela. Abre-se assim a possibilidade de ter havido alguma época na qual a expansão do Universo foi acelerada. Este é o conceito básico da era inflacionária. Neste trabalho iremos inserir campos escalares nas equações de Friedmann através da utilização do tensor energia-momento para o exemplo mais simples de um campo escalar obtendo assim a densidade de energia e pressão de uma partícula. Feito isto, podemos obter a equação do movimento da partícula para analisar a evolução temporal do campo escalar conhecido como *inflaton*, responsável pelo início da fase inflacionária. De posse da equação do movimento da partícula, iremos utilizar o método de aproximação *slow-roll* nas densidades de energia potencial  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  e  $V(\phi) = C \cos^2 \beta\phi$  para determinarmos o campo escalar  $\phi(t)$  e o fator de escala  $a(t)$ . Com o fator de escala podemos determinar o parâmetro de desaceleração para os dois casos apresentados, e concluir que estas densidades de energia potencial podem representar um modelo de Universo que se expande aceleradamente, o que está de acordo com observações cosmológicas atuais.

## ABSTRACT

In the theory of inflationary cosmology, which has as reference the observed universe, the gravitation force is always attractive. There was never any firm evidence of "anti-gravity" in the laboratory or stellar systems/galaxies. But this was not necessarily always so, and a possible solution to the problem of the origin of the Universe expansion, is we had a time where at least effectively, gravitation has been disgusting. Indeed, the Friedmann equations give an important relationship between pressure  $p$  and energy density  $\rho$ , since the sign of the acceleration given this for her. This opens up the possibility of there having been some time in which the universe's expansion was accelerated. This is the basic concept of the inflationary era. In this work we will insert scalar fields in Friedmann equations using the energy-momentum tensor for the simplest example of a scalar field thus obtaining the energy density and pressure of a particle. This done, we can obtain the equation of motion of the particle to analyze the temporal evolution of the scalar field known as *inflaton*, responsible for the early inflationary phase. Possession of the equation of motion of the particle, we use the approximation method *slow-roll*, densities of potential energy  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  e  $V(\phi) = C \cos^2 \beta\phi$  potential to determine the scalar field  $\phi(t)$  and the scale factor  $a(t)$ . With the scale factor can determine the deceleration parameter for the two cases presented, and concludes that these potential energy densities may represent a model Universe that is expanding rapidly, which is in agreement with current cosmological observations.

## Lista de figuras

3.1 - Potencial efetivo $V_{eff}(a)$ em função do fator de escala para o Universo dominado pela radiação sobre a constante cosmológica e matéria .....	29
3.2 - Evolução do fator de escala em função do tempo para o Universo dominado pela matéria .....	32
3.3 – Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela matéria .....	32
3.4 – Evolução do fator de escala em função do tempo para o Universo dominado pela radiação.....	34
3.5 - Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela radiação.....	34
3.6 - Evolução do fator de escala em função do tempo para o Modelo de de Sitter .....	36
3.7 - Parâmetro de desaceleração para o Modelo de de Sitter .....	36
4.1 – O espectro da radiação cósmica de fundo. Este gráfico resulta dos dados do experimento FIRAS a bordo do satélite COBE e mostra não haver desvios da forma de Planck .....	38
4.2 – Evolução do campo escalar $\phi$ em função do tempo para o potencial quadrático .....	46
4.3 – Evolução do fator de escala em função do tempo para o potencial quadrático .....	47
4.4 – Parâmetro de desaceleração para o potencial quadrático .....	48
4.5 – Evolução do campo escalar $\phi$ em função do tempo $t$ para um potencial tipo cosseno quadrático .....	51
4.6 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para o potencial tipo cosseno quadrático .....	52
4.7 - Parâmetro de desaceleração para o potencial tipo cosseno quadrático .....	53
A.1 – Transporte paralelo de um vetor ao longo de um paralelogramo infinitesimal .....	55
C.1 – Passado de cones de luz em um Universo em expansão a partir de uma singularidade do Big Bang. Ilustração de horizontes de partículas em Cosmologia .....	65
D.1 – Geometria da distância do diâmetro angular .....	67

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoria Geral da Relatividade</b> .....	<b>5</b>

2.1	Introdução .....	5
2.2	Princípio da Equivalência .....	5
2.3	Dinâmica da Partícula .....	6
2.4	Propriedades do Tensor de Riemann .....	9
2.5	Tensor Energia-Momento .....	11
<b>3</b>	<b>Cosmologia Padrão</b> .....	<b>13</b>
3.1	Introdução .....	13
3.2	Métrica de Robertson-Walker .....	15
3.3	Equações de Friedmann .....	19
3.4	Densidade de energia no Universo .....	22
3.5	Parâmetro de desaceleração .....	30
3.6	Modelos cosmológicos .....	30
<b>4</b>	<b>Cosmologia Inflacionária</b> .....	<b>37</b>
4.1	Introdução .....	37
4.2	Radiação cósmica de fundo .....	38
4.3	Teoria de campo escalar em Cosmologia .....	40
4.4	Modelo de campo escalar: Potencial quadrático .....	45
4.5	Modelo de campo escalar: Potencial tipo Cosseno .....	49
<b>5</b>	<b>Conclusão</b> .....	<b>54</b>
<b>6</b>	<b>Apêndice</b> .....	<b>55</b>
A	Tensor de curvatura .....	55
B	Parâmetro de densidade .....	59
C	Horizonte de partículas .....	63
D	Distância do diâmetro angular .....	67
<b>7</b>	<b>Bibliografia</b> .....	<b>70</b>

# Capítulo 1

## Introdução

No ano de 1665 Newton ao observar a queda de uma maçã revolucionou a nossa imagem do Universo propondo que a força que atraia as maçãs para o solo e a que mantinha a Lua na órbita da Terra era de mesma natureza, unificando assim o Céu e a Terra na teoria que chamou de gravidade [1]. A força gravitacional foi a primeira a ser entendida cientificamente, embora outras três surgissem depois, porém mesmo sendo descoberta há mais de 300 anos, os cientistas não precisam mais do que as equações de Newton para traçar o curso do foguete que levou o homem a Lua.

No início do século XX, Einstein aos 26 anos descobre que a velocidade da luz é uma espécie de limite cósmico de velocidade [1, 2] e que nada no Universo consegue exceder, porém isto desafiava a gravidade de Newton que é uma força que age instantaneamente através de qualquer distância. Com o objetivo de chegar a uma imagem nova do Universo na qual a gravidade não excedesse o limite cósmico da velocidade, Einstein sugere que as três dimensões do espaço e a única dimensão de tempo estão ligadas em um só tecido de espaço-tempo tornando possível compreender a geometria deste tecido de 4 dimensões na qual corpos se movem ao longo de superfície deste tecido de espaço-tempo. Como a superfície de uma cama elástica, este tecido unificado é curvado e esticado por objetos pesados como planetas, estrelas, onde esta curvatura do espaço-tempo é que cria o que sentimos como gravidade. Portanto a Terra não se mantém em órbita apenas porque o Sol a alcança, como na teoria de Newton, mas porque ela acompanha curvas do tecido espacial causadas pela presença do Sol.

Logo hipoteticamente se o Sol desaparecesse, simulando-se assim uma catástrofe cósmica, a desordem gravitacional resultante formaria uma onda que percorreria o tecido espacial. Portanto não percebemos uma mudança na órbita em torno do Sol até que esta onda atingisse a Terra. Através de cálculos, Einstein calculou que estas ondulações da gravidade viajam na exata velocidade da luz resolvendo assim o conflito com Newton sobre a velocidade da gravidade, dando-nos a idéia exata de que realmente a força da gravidade são deformações e curvas no tecido do espaço-tempo surgindo assim a Teoria da Relatividade Geral.

Esta teoria possibilita o entendimento da dinâmica global do Universo na qual há uma relação direta entre a geometria do espaço-tempo com o conteúdo de matéria e energia. Em larga escala, a Relatividade Geral é utilizada como teoria fundamental para o estudo de Cosmologia que surge como um ramo da física graças a esta descoberta.

Observações astronômicas realizadas no telescópio do Monte Wilson, Edwin Hubble constata que o Universo sofre uma expansão progressiva [2] confirmando assim a previsão bastante natural da Teoria da Relatividade Geral. Nesta época o pensamento científico dominante era de que o Universo seria uma estrutura que deveria manter-se constante no tempo. Em virtude disso o próprio Einstein introduziu na sua teoria o conceito da *constante cosmológica* para compatibilizar seus resultados com a visão dominante de um Universo estático. Porém, Hubble através de dados observacionais, demonstra que as galáxias próximas se afastam de nós com velocidades crescentes com a distância que nos separam delas. Uma forma alternativa de descrever o estado de expansão do Universo consiste em utilizar o parâmetro de desaceleração que tem uma definição puramente cinemática e que estima a taxa de desaceleração de acordo com a taxa de expansão do Universo.

De acordo com o modelo inflacionário [3], o Universo sofreu uma rápida expansão acelerada, devido à presença de um campo escalar [4, 5, 6, 7, 8] relacionado à energia de vácuo conhecido como *inflaton*. Basicamente o que se supõe nestes modelos é que a energia

cinética do *inflaton* é pequena, e a maior parte da energia está armazenada em seu potencial. Esta energia tem uma pressão negativa, o que provoca uma expansão acelerada muito grande, em um intervalo de tempo curto, a este fenômeno denomina-se inflação.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos as idéias que motivaram Einstein no desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral a relacionar a dinâmica da partícula com a geometria do espaço-tempo, substituindo o conceito de força pela idéia da presença de matéria e de energia poder curvar o espaço-tempo. Através da utilização do tensor de curvatura, mais conhecido como tensor de Riemann, e de algumas propriedades [4, 5, 7, 9] associadas a este, tais como anti-simetria e invariância na troca de índices, podemos obter o tensor de Ricci fazendo sua contração. O traço do tensor de Ricci nos dá o escalar de curvatura que é utilizado para montar um tensor simétrico de segunda ordem com derivada covariante nula conhecido como tensor de Einstein e que pode se relacionar em Cosmologia com o tensor energia momento de um fluido perfeito ligando o conteúdo de energia e matéria com a geometria de um espaço-tempo.

No capítulo 3, discutiremos a Cosmologia Padrão através da utilização da métrica de Friedmann-Robertson-Walker e das equações de Einstein para determinar as equações de Friedmann e a equação da conservação de energia para um fluido perfeito. De acordo com a equação de estado para um fluido perfeito, iremos determinar a densidade de energia em função do fator de escala  $a(t)$  na qual serão testadas para a matéria, radiação e energia de vácuo representada pela constante cosmológica  $\Lambda$ . Também será obtido o fator de escala para os modelos cosmológicos dominados pela matéria, radiação e constante cosmológica além de gráficos do parâmetro de desaceleração nestes três períodos.

No capítulo 4 será abordado um estudo sobre as relíquias do Big Bang conhecidas como radiação cósmica de fundo que foram previstas por Gamow e confirmadas por Wilson-Penzias através da observação de interferência em satélites de comunicação e que se

encontram a uma temperatura de 2,7 K correspondente a de um corpo negro e com um alto grau de isotropia. Além do mais, será introduzida a teoria de campo escalar em Cosmologia através do tensor energia-momento que se conserva para obtermos a densidade de energia, e pressão e assim relacionarmos o campo escalar com as equações de Friedmann para obtermos a equação do movimento da partícula submetida a: (i) um potencial quadrático e (ii) potencial tipo cosseno. Através da aproximação *slow-roll*, analisaremos o comportamento da expansão acelerada do Universo através do rápido crescimento do fator de escala  $a(t)$  e do campo escalar  $\phi(t)$  para os modelos (i) e (ii) na qual serão feitas análises tais como o parâmetro de desaceleração  $q$  que é um indicador da taxa de expansão do Universo mostrando se há uma fase de aceleração ou desaceleração.

## Capítulo 2

### Teoria da Relatividade Geral

#### 2.1 Introdução

Para o Universo, a interação gravitacional na Teoria da Relatividade Geral afirma que todos os corpos sofrem a ação de um campo gravitacional e respondem a sua aplicação da mesma forma, ou seja, com a mesma aceleração de tal forma que as trajetórias descritas por uma partícula pode estar relacionadas com a curvatura do espaço-tempo, devido ao seu conteúdo de matéria e energia existente. O fato de uma fonte gravitacional curvar o espaço tempo é uma consequência direta do Princípio da Equivalência [10].

#### 2.2 Princípio da Equivalência

A equivalência entre a massa inercial e a massa gravitacional segundo formulação newtoniana nos mostra experimentalmente que, no vácuo, a trajetória seguida pelos corpos em queda livre (sem interação eletromagnética fraca e forte) não depende da estrutura nem da composição química dos corpos sendo os mesmos suficientemente pequenos para evitar os efeitos da não uniformidade do campo gravitacional [7, 11, 12].

Considere a massa  $M$  da Terra, seu raio  $r$  e a massa gravitacional de uma partícula de teste  $m_G$ . Logo, o módulo da força gravitacional entre  $M$  e  $m_G$  será dado por

$$F = \frac{GMm_G}{r^2} \quad (2.1)$$

Porém, de acordo com a segunda lei de Newton, a partícula fica sujeita a uma aceleração dada por

$$F = m_I a \quad (2.2)$$

Onde  $F$  é o módulo da força que age na partícula e  $m_I$  é a massa inercial da partícula de teste que mede a “resistência” que os corpos oferecem à mudança do seu estado de movimento. Sendo  $m_G$  a medida da intensidade com que os corpos interagem gravitacionalmente, ou seja,  $m_G$  é uma fonte do campo gravitacional equivalente a uma “carga gravitacional”, logo da igualdade de (2.1) com (2.2) teremos

$$\begin{aligned} \frac{GMm_G}{r^2} &= m_I a \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= \frac{m_G}{m_I} \frac{GM}{r^2} = cte \end{aligned}$$

Portanto  $\frac{m_G}{m_I} = constante.$

Testes experimentais indicam que  $m_G = m_I$  para todos os corpos. Devido a esse fato podemos anular localmente os efeitos de um campo gravitacional com a escolha adequada de referenciais, pois todos os corpos estão sujeitos a uma mesma aceleração.

### 2.3 Dinâmica da Partícula

Considere uma partícula em queda livre em um sistema de coordenadas  $x^\mu$  que a acompanha. Portanto esse sistema é localmente inercial e de acordo com o Princípio da Equivalência nenhuma aceleração é observada, portanto [5]

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.4)$$

onde  $d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2}$  é o tempo próprio, ou seja, aquele medido no referencial da partícula.

Consideremos agora um sistema de coordenadas arbitrário  $x^\mu$  em repouso, em um campo gravitacional [7, 13]. Podemos utilizar a regra da cadeia para determinar a dinâmica da partícula vista a partir do referencial  $x^\mu$ ,

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Desenvolvendo a derivada no tempo vamos obter

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Multiplicando por  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ , vamos ter [5]

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.6)$$

A equação (2.6) representa a equação da geodésica que está associada à curva de menor comprimento entre dois pontos no espaço em uma variedade Riemanniana, onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  é chamada de conexão afim e definida como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \quad (2.7)$$

Uma vez que as derivadas de primeira ordem comutam, da equação (2.7), segue que a conexão afim é simétrica com relação aos índices inferiores,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (2.8)$$

Num referencial localmente inercial, valem as leis da relatividade restrita e não podemos perceber um campo gravitacional a partir deste. Mas, quando passamos para um referencial em repouso no campo gravitacional, percebemos que a equação de movimento escrita a partir de (2.6) apresenta um termo adicional  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$ , quando comparada à equação de movimento escrita a partir do sistema localmente inercial (2.4). Isso justamente

indica a presença de um campo gravitacional. Portanto, podemos descrever um campo gravitacional a partir da curvatura do espaço-tempo.

Em um espaço-tempo o elemento de linha assume a forma geral

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.9)$$

Onde  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico cujas componentes definem a geometria do espaço-tempo e, conseqüentemente, a dinâmica num campo gravitacional. O comprimento da curva, descrita por uma partícula em movimento, entre os pontos  $a$  e  $b$  é dado por

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \quad (2.10)$$

Onde  $\tau$  é um parâmetro da curva, ou seja,  $x^\mu(\tau)$ . Variando (2.10) com relação à  $g_{\mu\nu}$  e impondo a seguinte condição

$$\delta \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = 0 \quad (2.11)$$

Vamos obter a equação (2.6) na forma

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left( \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.12)$$

Onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left( \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right) \quad (2.13)$$

Representa a conexão afim em termos do tensor métrico.

Logo verificamos que implemento do Princípio da Equivalência [4, 5, 7] nos conduz a uma dinâmica na qual o movimento da partícula é determinado pela geometria do espaço tempo, ou seja, o conceito de força pode ser substituído pela idéia de que a matéria e a energia curvam o espaço-tempo, e este determina quais são as geodésicas que devem ser seguidas pelas partículas de teste. Então, uma vez estabelecida a forma métrica (2.9), as funções  $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ , são determinadas solucionando-se um conjunto de equações diferenciais conhecidas

como equações de Einstein, que relacionam a geometria do espaço-tempo com o conteúdo da matéria e energia, fontes do campo gravitacional.

## 2.4 Propriedades do Tensor de Riemann

O tensor de Riemann, com quatro índices, possui  $n^4$  componentes [5, 7] independentes em um espaço n-dimensional. Porém, de acordo com algumas propriedades fundamentais, podemos observar que o número de componentes independentes se reduz a  $\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$  componentes. Para 4 dimensões obtemos 20 componentes independentes. As propriedades fundamentais do tensor de curvatura são:

1º) O tensor  $R_{\mu\alpha\gamma\beta}$  é anti-simétrico com relação à troca de índices do primeiro par de índices

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} \quad (2.14)$$

2º) O tensor  $R_{\mu\alpha\gamma\beta}$  é anti-simétrico com relação à troca de índices do segundo par de índices

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} \quad (2.15)$$

3º) O tensor  $R_{\mu\alpha\gamma\beta}$  é invariante com relação à troca do primeiro par índices com o segundo

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (2.16)$$

Pode-se verificar também que a soma de permutações cíclicas dos últimos três índices desaparece, logo podemos ter

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0 \quad (2.17)$$

Usando (2.14), (2.15) e (2.16) podemos mostrar que (2.17) é equivalente a

$$R_{[\mu\nu\alpha\beta]} = 0 \quad (2.18)$$

O tensor de Riemann também satisfaz à seguinte identidade

$$\nabla_{\lambda} R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_{\beta} R_{\mu\nu\lambda\alpha} + \nabla_{\alpha} R_{\mu\nu\beta\lambda} = 0 \quad (2.19)$$

Onde a derivada covariante  $\nabla_{\lambda}$  executa a função da derivada parcial, mas de uma forma independente das coordenadas obedecendo à propriedade de linearidade e a regra de Leibniz [5]. Logo ela pode ser escrita como uma derivada parcial mais alguma transformação linear que serve como conexão para se ter um resultado covariante e que se apresenta em forma de um conjunto de matrizes conhecidas como os coeficientes da conexão. Portanto, para um vetor teremos que

$$\nabla_{\lambda} V^{\nu} = \partial_{\lambda} V^{\nu} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\nu} V^{\rho} \quad (2.20)$$

Logo esta é a expressão para a derivada covariante de um vetor em termos da derivada parcial, que nos permite determinar as propriedades de transformação da conexão  $\Gamma_{\lambda\rho}^{\nu}$ .

Outro tensor fundamental é conhecido como tensor de Ricci [5, 7], sendo o único tensor de segunda ordem que pode ser construído a partir da contração do tensor de Riemann, e que, por ser associado com os símbolos de Cristoffel é automaticamente simétrico, ou seja,  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ , como consequência das simetrias do tensor de Riemann. Portanto teremos

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\mu} R_{\sigma\mu\lambda\nu} \quad (2.21)$$

O traço do tensor de Ricci é o escalar de Ricci (ou escalar de curvatura) que é obtido através da contração do tensor de Ricci dado por

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.22)$$

Cuja interpretação está associada à curvatura Gaussiana do espaço-tempo no ponto considerado. A partir do tensor de Ricci e do escalar de curvatura, podemos montar um tensor simétrico de segunda ordem com derivada covariante nula, que é conhecido como tensor de Einstein e representado por  $G_{\mu\nu}$  definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

O tensor de Einstein é simétrico, devido à simetria do tensor de Ricci e a métrica, e é fundamental na Relatividade Geral. Verifica-se também que este tensor satisfaz as chamadas identidades contraídas de Bianchi onde

$$\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0 \quad (2.24)$$

Que desempenha um papel importante em Relatividade Geral, pois estão associadas a uma lei de conservação.

## 2.5 Tensor energia-momento

Em nossa busca de uma teoria relativística da gravitação a densidade de energia terá um papel importante [5, 7, 9, 10]. Para um sistema constituído de muitas partículas, a distribuição de matéria, energia e momento é praticamente uma distribuição contínua. Toda informação relevante sobre o comportamento do fluxo de 4-momento das partículas está contida no tensor de segunda ordem conhecido como tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . Esse objeto possui 16 componentes e é um tensor que obedece às transformações de Lorentz e pode ser representado da seguinte forma

$$T^{\mu\nu} = \rho_o u^\mu u^\nu \quad (2.25)$$

Onde  $\rho_o$  é a densidade de massa apropriada. Observe que o tensor  $T^{\mu\nu}$  é simétrico, ou seja,  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ .

A definição de  $T^{\mu\nu}$  pode ser resumida assim:

$$T^{00} = (\text{densidade de energia})$$

$$T^{0k} = T^{k0} = (\text{densidade de momentum}) = (\text{densidade de fluxo de energia})$$

$$T^{\kappa\ell} = (\text{densidade de fluxo de } \kappa\text{-momentum em } \ell\text{-direção}).$$

O tensor energia-momentum é uma função do espaço e tempo. Por exemplo, na equação (2.25) tanto a densidade de partículas como a velocidade pode variar no espaço e no tempo. O tensor energia-momentum de um sistema completo satisfaz a lei de conservação

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$$
$$\partial_0(T^{0\nu}) + \partial_i(T^{i\nu}) = 0$$

Com a interação gravitacional, tem-se

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.26)$$

Em Cosmologia, o tensor de energia-momentum de um fluido perfeito é representado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu} \quad (2.27)$$

onde  $p$  e  $\rho$  é a pressão e a densidade de energia respectivamente e  $u^{\mu}$  é a quadri-velocidade do fluido.

## **Capítulo 3**

### **Cosmologia Padrão**

#### **3.1 Introdução**

A Cosmologia estuda a dinâmica da estrutura de larga escala do Universo [4, 5, 7]. Logo dentre as forças fundamentais que existem na natureza podemos observar a força forte e fraca que são denominadas força de curto alcance e, portanto, essas forças não predominam na teoria da evolução do Universo. Para a força eletromagnética e gravitacional podemos ter a atuação destas forças no estudo da dinâmica do Universo, porém, a matéria se apresenta eletricamente neutra macroscopicamente na natureza e, portanto, a força eletromagnética não irá predominar na análise da dinâmica do Universo. Logo, em larga escala, a força gravitacional será a interação predominante no Universo. Portanto a Relatividade Geral é utilizada como a teoria fundamental para o estudo da Cosmologia.

Em larga escala, o Universo [8] apresenta-se homogêneo e isotrópico, onde para valores de escala na ordem de 100 Mpc<sup>1</sup>, as observações indicam que a distribuição de matéria no Universo é homogênea e isotrópica. Na escala local, do sistema solar, a distribuição de matéria não é homogênea devido à matéria se distribuir irregularmente, porém, em larga escala, o Universo comporta-se como se fosse um gás dentro de uma região delimitada onde as partículas se distribuem homogeneamente no espaço. Para uma escala atômica, da ordem de 10<sup>-10</sup> Å<sup>2</sup> esse gás não é homogêneo, porque é possível se observar prótons, elétrons, nêutrons com distribuições irregulares.

Independentemente da direção observada, o número de galáxias são iguais em qualquer direção confirmando a isotropia do Universo. Este fato é comprovado experimentalmente pela existência da Radiação Cósmica de Fundo, [14] que foi detectada no ano de 1965, pelos engenheiros de telecomunicações Arno Allan Penzias (1933-) e Robert Woodrow Wilson (1936-) da Bell Telephone Laboratories em New Jersey, que captaram acidentalmente essa radiação em ondas de rádio de 7,35 cm. Eles estavam estudando interferências indesejáveis nas comunicações por satélites, quando perceberam a presença de um ruído de fundo que vinha de todas as direções do céu a qualquer hora do dia. A descoberta foi considerada tão importante que os dois engenheiros receberam o Prêmio Nobel de Física em 1978. Dados mais recentes obtidos em 1989 com o satélite COBE<sup>3</sup> confirmaram essa radiação como sendo a de um corpo negro a 2,7 K. A radiação é a mesma em todas as direções e as inhomogeneidades seriam inferiores a uma parte em 100 mil. Ela teria sido

---

<sup>1</sup> Distância que uma estrela deve estar para que a paralaxe anual seja igual a 1 segundo de arco. Um parsec equivale a 3,26 anos-luz, ou cerca de 30,9 trilhões de quilômetros.

<sup>2</sup> Unidade de medida criada para aferições em nível atômico, ou para medidas de comprimento de onda da radiação. Por definição 1Å = 10<sup>-10</sup> m e seu nome é uma homenagem ao físico sueco Jonas Angström ( 1814-1874).

<sup>3</sup> Satélite norte-americano, lançado em 1989, e que operou até 1994. O seu nome provém da expressão *Cosmic Background Explorer* e conduziu três experimentos científicos destinados a estudar a radiação cósmica de primordial. Graças aos experimentos deste satélite foi possível mostrar a precisão com que a radiação de fundo obedece à lei de corpo negro, determinar esta temperatura e mostrar ainda a existência das flutuações neste fundo de radiação.

irradiada quando o Universo tinha cerca de três mil Kelvins, 380 mil anos e era 1500 vezes menor que o tamanho atual. Então a temperatura já havia baixado o suficiente para que os átomos pudessem se recombinar tornando o Universo transparente para a radiação poder escapar. Só então as galáxias começaram a se formar. A detecção da radiação cósmica de fundo corroborou fortemente na confirmação dos modelos cosmológicos dentre os quais, o previsto pelo físico norte-americano de origem russa, Georg Gamow (1904-68) que previu na década de 40 a existência dessa radiação fóssil e que são consideradas hoje como relíquias do Big Bang<sup>4</sup>.

Dados observacionais nos mostram que a via láctea (Galáxia) possui cerca de  $10^{11}$  estrelas com um diâmetro de aproximadamente  $3 \times 10^4$  pc, ou seja,  $\approx 10^5$  anos-luz. Para termos uma noção de distância, a luz para atravessar a nossa galáxia levaria 100.000 anos-luz. Porém a nossa galáxia faz parte de um aglomerado conhecido como Grupo Local que contém 30 novas galáxias com um comprimento de aproximadamente 1 Mpc. O aglomerado mais próximo do aglomerado local é chamado de aglomerado de Virgo que contém 2000 galáxias e com um comprimento de aproximadamente 5 Mpc. Portanto, é nessa escala que o Universo é considerado homogêneo. Calculando-se a densidade em regiões diferentes, percebe-se que o Universo é homogêneo, ou seja, entre um aglomerado e outro existe espaço vazio.

### **3.2 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker**

Como o Universo se apresenta homogêneo e isotrópico na distribuição de matéria, é de se esperar que o espaço-tempo tenha também essas mesmas características, ou seja, o espaço-tempo também seja homogêneo e isotrópico [12]. A esse estado, dar-se o nome de Princípio

---

<sup>4</sup> Nome genérico para representar a concepção atual de que o nosso Universo se originou de uma grande expansão inicial do espaço-tempo a cerca de 10 bilhões de anos atrás. Neste processo de expansão tanto a densidade como a temperatura e a pressão variaram enormemente proporcionando o predomínio das diversas formas de interação física conhecidas, gerando as fases ou eras cosmológicas.

Cosmológico que matematicamente indica que existe uma coordenada temporal chamada de tempo cosmológico tal que as hiper superfícies são espaços homogêneos e isotrópicos. Logo a homogeneidade indica que a métrica é invariante por translações arbitrárias e a isotropia justifica que em torno de um ponto qualquer do espaço, a métrica é invariante por rotações, portanto, teremos simetria esférica em qualquer posição. Uma transformação de simetria da métrica é chamada de isometria. O gerador da isometria [5] é chamado de vetores de Killing, onde a derivada da métrica desse vetor é nula, logo

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.1)$$

Num espaço tridimensional homogêneo e isotrópico existem seis vetores de Killing linearmente independentes, ou seja, três de translação e três de rotação que gera espaços com simetria maximal, portanto o espaço tridimensional homogêneo isotrópico é um espaço com simetria máxima e sendo assim, neste espaço o tensor de Riemann pode ser escrito na seguinte forma particular

$$R_{ijkl} = k (\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \quad (3.2)$$

Onde  $k$  é uma constante de curvatura e  $\gamma_{ij}$  é a métrica do espaço, logo

$$d\ell^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (3.3)$$

Que nos dá a geometria do espaço tridimensional homogêneo e isotrópico. Portanto escolhemos arbitrariamente um ponto como origem do sistema de coordenadas. Porém, pela isotropia a métrica deve ser esféricamente simétrica em torno deste ponto, portanto, para uma métrica tridimensional com simetria esférica existe um sistema de coordenadas no qual a métrica possui as seguintes componentes

$$d\ell^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.4)$$

Onde a função desconhecida  $\lambda(r)$  pode ser determinada usando-se o tensor de Riemann. Contraíndo  $i$  com  $k$  na equação (3.2) vamos obter o tensor de Ricci dado por

$$\begin{aligned}
R_{jl} &= R_{jil}^i = k (\gamma_i^i \gamma_{jl} - \gamma_i^j \gamma_{ji}) \Rightarrow \\
&\Rightarrow R_{jl} = 2k \gamma_{jl} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Calculando o tensor de Ricci para a métrica (3.3), vamos obter os seguintes valores

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\lambda'}{r} \\
R_{22} &= 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda} \\
R_{33} &= \text{sen}^2 \theta R_{22}
\end{aligned}$$

Portanto a métrica deve satisfazer a equação (3.5) e sendo assim teremos que

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda'}{r} &= 2k \gamma_{11} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{\lambda'}{r} &= 2k e^\lambda \Rightarrow \\
\Rightarrow e^{-\lambda} \lambda' &= 2kr \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d(e^{-\lambda})}{dr} &= 2kr \Rightarrow \\
\Rightarrow e^{-\lambda} &= -kr^2 + A \tag{3.6}
\end{aligned}$$

onde A é uma constante de integração.

Para  $j = 2$  e  $l = 2$ , teremos a componente  $R_{22}$  da métrica dada por

$$\begin{aligned}
R_{22} &= 2k \gamma_{22} \Rightarrow \\
\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} r e^{-\lambda} \lambda' - e^{-\lambda} &= 2kr^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} r (2kr) - (-kr^2 + A) &= 2kr^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow 1 + kr^2 + kr^2 - A &= 2kr^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow A &= 1
\end{aligned}$$

Logo teremos

$$e^{-\lambda} = -kr^2 + A \Rightarrow$$

$$e^{-\lambda} = -k r^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e^\lambda} = 1 - k r^2 \Rightarrow$$

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - k r^2} \quad (3.7)$$

Assim, a métrica de um espaço tridimensional homogêneo e isotrópico tem a seguinte forma

$$d\ell^2 = \frac{1}{1 - k r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (3.8)$$

que representa a distância espacial própria entre eventos simultâneos, onde  $k$  representa a constante de curvatura do espaço.

Para observadores que não se movem relativisticamente em relação às galáxias, a métrica do espaço-tempo deve obedecer à linha de Universo que é uma geodésica na métrica, logo a homogeneidade e a isotropia induz que a parte espacial do tensor métrico evolua por meio de uma função universal do tempo, de modo que tendo em vista o Princípio Cosmológico, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker que descreve o Universo homogêneo e isotrópico em expansão, é representada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \right] \quad (3.9)$$

Onde  $a(t)$  é o fator de escala que é utilizado para descrever a evolução de distâncias espaciais e  $k$  é a constante de curvatura do espaço que pode assumir os valores  $-1$ ,  $0$  e  $1$  de acordo com a curvatura do espaço a que esta submetida definindo, portanto, o tamanho das superfícies no espaço. Para  $k = -1$  o espaço possui curvatura hiperbólica, e para  $k = 1$  o espaço é do tipo esférico. Quando  $k$  assume o valor zero temos um espaço plano.

Para um  $a(t)$  crescente o Universo está se expandindo, caso ele seja decrescente, ocorre uma contração. Logo para uma expansão do Universo, a distância real entre nós e os objetos observados são modificadas (em larga escala) de forma que estas alterações são

medidas através do fator de escala, que re-escala a distância co-móvel entre os objetos com o tempo, descrevendo a expansão do espaço observado.

No Universo observado, a gravitação é uma força sempre atrativa. Nunca houve qualquer evidência firme de “anti-gravitação” [4, 14, 15] em laboratório ou sistemas estelares/galácticos. Porém, isto não necessariamente foi sempre assim, e uma possível solução ao problema da origem da expansão é o de termos tido uma época onde, pelo menos de forma efetiva, a gravitação tenha sido repulsiva. De fato, as equações de Friedmann apresentadas a seguir, atribuem um papel importante à relação entre a pressão e a densidade de energia, já que o sinal da aceleração está determinado por ela. Abre-se assim a possibilidade de ter havido alguma época na qual  $\ddot{a} > 0$ , e como consequência a expansão do Universo ter sido acelerada. Este é o conceito básico da era inflacionária.

### 3.3 Equações de Friedmann

A obtenção das equações de Friedmann [6, 14, 18] pode ser realizada através do uso da métrica de Friedmann-Robertson-Walker e o do tensor energia-momento de um fluido perfeito. Utilizando as equações de Einstein representadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

Podemos verificar que para  $G_{00}$  vamos obter

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} \quad (3.11)$$

Onde

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.12)$$

e

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \quad (3.13)$$

Logo substituindo na expressão (3.10) teremos

$$G_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$G_{00} = 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3k}{a^2} \quad (3.14)$$

sabemos que

$$G_{\mu\nu} = 8 \pi G T_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

Portanto, para a componente  $G_{00}$  vamos obter  $G_{00} = 8 \pi G T_{00}$ , mas como  $T_{00} = \rho$ , ficaremos com  $G_{00} = 8 \pi G \rho$  que ao ser igualada com (3.14) nos permite obter a primeira equação de Friedmann [16] representada por

$$3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3k}{a^2} = 8 \pi G \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.16)$$

que representa a taxa de variação de expansão do fator de escala  $a(t)$ . Para a segunda equação de Friedmann, devemos encontrar o  $G_{11}$  na equação (3.10)

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} R g_{11}$$

onde

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - k r^2}$$

e

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$

E da métrica de Friedmann-Robertson-Walker temos que a componente  $g_{11} = \left( \frac{a^2}{1 - k r^2} \right)$ , portanto obtemos

$$G_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - k r^2} - \frac{1}{2} 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \left( \frac{a^2}{1 - k r^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - k r^2} - \left( \frac{3a^2}{1 - k r^2} \right) \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_{11} = \frac{-2a\ddot{a}}{1 - k r^2} - \frac{\dot{a}^2}{1 - k r^2} - \frac{k}{1 - k r^2} \quad (3.17)$$

Porém de (3.15) temos que para a componente  $G_{11}$  obtemos na equação de Einstein a seguinte representação  $G_{11} = 8 \pi G T_{11}$ , mas como  $T_1^1 = p$ , podemos rebaixar o índice para obtermos  $T_{11}$

$$T_1^1 = p \Rightarrow g^{11}T_{11} = p \Rightarrow T_{11} = p(g^{11})^{-1} \Rightarrow T_{11} = p g_{11}$$

Portanto substituindo  $T_{11}$  em (3.15) obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} G_{11} &= 8 \pi G T_{11} \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_{11} = 8 \pi G p g_{11} \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_{11} = 8 \pi G p \frac{a^2}{(1-kr^2)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora para obtermos a segunda equação de Friedmann fazemos a comparação da expressão (3.17) com a equação (3.18) na qual vamos obter

$$\begin{aligned} \frac{-2a\ddot{a}}{1-kr^2} - \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} - \frac{k}{1-kr^2} &= 8 \pi G p \frac{a^2}{(1-kr^2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow -2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k &= 8 \pi G p a^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a^2}\right) \\ \frac{-2\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} &= 8 \pi G p \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo a primeira equação de Friedmann (3.16) na relação (3.19) vamos obter

$$\begin{aligned} \frac{-2\ddot{a}}{a} - \left(\frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}\right)^2 - \frac{k}{a^2} &= 8 \pi G p \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{-2\ddot{a}}{a} - \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{k}{a^2} - \frac{k}{a^2} &= 8 \pi G p \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{-2\ddot{a}}{a} - \frac{8\pi G\rho}{3} &= 8 \pi G p \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{-2\ddot{a}}{a} &= 8 \pi G p + \frac{8\pi G\rho}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{-2\ddot{a}}{a} &= \frac{8\pi G}{3} (3 p + \rho) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{-4\pi G}{3} (3 p + \rho) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Que representa a segunda equação de Friedmann e que indica a taxa de aceleração com que o Universo [2, 5, 7] se expande em função da densidade de matéria e da pressão do fluido cósmico relacionadas com o fator de escala de expansão do Universo.

### 3.4 Densidade de energia no Universo

Em larga escala, identificamos três fontes [4] principais de distribuição de energia e matéria na Natureza. Primeiro, temos a matéria nos aglomerados, que constituem as Galáxias, Estrelas etc. A radiação cósmica que é representada pelas ondas eletromagnéticas e a constante cosmológica ( $\Lambda$ ) acrescentada por Einstein.

Nós podemos escolher o modelo de um fluido perfeito [5, 7] para, através das equações de Einstein, determinar a relação entre densidade de matéria com o fator de escala para a energia dinâmica do Universo. Considerando um fluido, isotrópico que induz a uma métrica que também é isotrópica, logo, as duas regiões irão coincidir, e sendo assim, o fluido vai estar em movimento com coordenadas co-móveis, portanto a quadri-velocidade será dada por  $U^\mu = (-1, 0, 0, 0)$ , e o tensor energia-momentum dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (3.21)$$

que torna-se

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & g_{ij}p & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Com um índice elevado, este tensor assume a forma conveniente dada por

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) \quad (3.23)$$

Observe que o traço é dado por

$$T = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p \quad (3.24)$$

Antes de conectar com a equação de Einstein é importante analisarmos que a componente zero da equação da conservação de energia é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu T^\mu{}_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} T^\lambda{}_0 - \Gamma^\lambda{}_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\rho} &= -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Que representa a equação da conservação da energia para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker para um fluido perfeito.

Para prosseguirmos, podemos escolher uma equação de estado, ou seja, a relação entre  $\rho$  e  $p$ . Muitas vezes, os fluidos perfeitos relevantes na Cosmologia obedecem à simples equação de estado dada por

$$p = w \rho \quad (3.26)$$

onde  $w$  é uma constante independente do tempo, portanto, substituindo-a em (3.25) vamos verificar que a equação da conservação da energia torna-se igual a

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + w\rho) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\rho} &= -3 \rho \frac{\dot{a}}{a} (1 + w) \Rightarrow \\ \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -3 \frac{\dot{a}}{a} (1 + w) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Integrando a equação (3.27) vamos obter que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{\dot{\rho}}{\rho} dt &= -3 (1 + w) \int_{t_0}^t \frac{\dot{a}}{a} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left( \frac{\rho(t)}{\rho_0} \right) &= -3 (1 + w) \ln \frac{a(t)}{a_0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \ln\left(\frac{\rho(t)}{\rho_0}\right) = \ln\left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^{-3(1+w)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left(\frac{\rho(t)}{\rho_0}\right) = \left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^{-3(1+w)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^{-3(1+w)} \tag{3.28}
\end{aligned}$$

que representa a densidade de energia em função do fator de escala  $a(t)$ .

Os dois exemplos mais populares de fluido cosmológico são conhecidos como a matéria e a radiação [9] que de acordo com a equação de estado, (3.26) o parâmetro  $w$  depende das condições de energia de tal forma que para  $w = 0$  teremos um período dominado pela matéria conhecida como “poeira” ou “pó” na qual a matéria não-relativística, possui essencialmente pressão zero [5]. Neste exemplo incluem-se estrelas e galáxias normais, na qual a pressão é desprezível em comparação com a densidade de energia. Portanto para  $w = 0$  a densidade de energia na matéria será dada por

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \rho_M(t) = \rho_0 \left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^{-3(1+0)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \rho_M(t) = \rho_0 \left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^{-3} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \rho_M(t) \propto a^{-3} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

que expressa a diminuição da densidade do número de partículas em função de como o Universo se expande.

A densidade de radiação pode ser utilizada para descrever qualquer radiação eletromagnética real, ou partículas massivas que se deslocam a velocidades relativamente suficientemente perto da velocidade da luz e que eles se tornem indistinguíveis dos fótons. Sendo um gás isotrópico de partículas relativísticas um fluido perfeito, existe um tensor energia-momento dado pela expressão (3.21). Também sabemos que o tensor  $T_{\mu\nu}$  para o eletromagnetismo pode ser expresso em termos da intensidade de campo como [5]

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (3.30)$$

Onde o traço deste tensor é dado por

$$T^{\mu}_{\mu} = F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} = 0 \quad (3.31)$$

Mas isso também deve igual a (3.24), então a equação de estado de um gás de fótons para a radiação será

$$\begin{aligned} T = T^{\mu}_{\mu} &= -\rho_R + 3 p_R = 0 \Rightarrow \\ -\rho_R + 3 p_R &= 0 \Rightarrow \\ p_R &= \frac{1}{3} \rho_R \end{aligned} \quad (3.32)$$

Onde  $w = \frac{1}{3}$  representa a constante para a radiação.

Um Universo em que a maioria da densidade de energia está na forma de radiação é conhecido como um Universo dominado pela radiação [17]. Logo a densidade de energia da radiação expressa pela equação (3.28) cai de acordo com a seguinte relação

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_R(t) &= \rho_0 \left[ \frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3 \left( 1 + \frac{1}{3} \right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_R(t) &= \rho_0 \left[ \frac{a(t)}{a_0} \right]^{-4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_R(t) &\propto a^{-4} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Assim, a densidade de energia da radiação cai ligeiramente mais rápido do que a densidade de energia na matéria, isto porque a densidade do número de fótons diminui na mesma forma que a densidade do número de partículas não-relativística. Acreditamos que, hoje, a densidade de energia da radiação é muito menor que a da matéria, com  $\frac{\rho_M}{\rho_R} \sim 10^3$ . No entanto, no passado o Universo era muito menor, e a densidade de energia da radiação teria dominado em tempos primordiais.

Uma característica [5] da Relatividade Geral, é que a fonte de energia para o campo gravitacional é o tensor energia-momentum. Na física não gravitacional, a mudança na energia a partir de um estado para outro é que é mensurável. Por exemplo, o movimento de uma partícula com a energia potencial  $V(x)$  é precisamente o mesmo que com uma energia potencial  $V(x) + V_0$ , com  $V_0$  assumindo qualquer constante. Na gravitação, porém, o valor real das questões energéticas é considerado, e não apenas as diferenças entre os estados. Esse comportamento abre a possibilidade da energia do vácuo: uma densidade de energia do espaço vazio. Uma característica que poderíamos observar, é que no vácuo não há uma direção preferencial, portanto ainda será possível ter uma densidade de energia diferente de zero se o tensor energia-momentum está associada à invariância de Lorentz com coordenadas inerciais locais. Essa invariância de Lorentz nos leva ao tensor energia-momentum correspondente, que deve ser proporcional à métrica, logo podemos descrever o termo cosmológico  $\Lambda g_{\mu\nu}$  como um fluido perfeito e escrever a seguinte relação

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}\eta_{\mu\nu} \quad (3.34)$$

Desde que  $\eta_{\mu\nu}$  seja invariante por transformadas de Lorentz podemos generalizar com coordenadas localmente inerciais arbitrárias que

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu} \quad (3.35)$$

Comparando com a equação de um fluido perfeito, o tensor energia-momentum dado pela equação (3.21) equivale à expressão acima generalizada, a menos de um sinal contrário na densidade de energia para pressão isotrópica que nos faz obter

$$p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (3.36)$$

Se dividirmos o tensor energia-momento em uma parte da matéria  $T_{\mu\nu}^M$  e uma parte de vácuo  $T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}$  a equação de Einstein fica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^M - \rho_{vac}g_{\mu\nu}) \quad (3.37)$$

Logo após a descoberta da Relatividade Geral, Einstein tentou encontrar um modelo estático cosmológico, uma vez que era o que as observações astronômicas da época indicavam. O resultado foi o Universo Estático de Einstein. Para que esta cosmologia estática resolvesse a equação de campo como uma fonte de matéria ordinária, foi necessário acrescentar um novo termo chamado de constante cosmológica<sup>5</sup>  $\Lambda$ , que entra como uma densidade de energia de vácuo expressa por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8 \pi G T_{\mu\nu} \quad (3.38)$$

Onde o valor dessa densidade é

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (3.39)$$

Portanto, para a constante cosmológica como distribuição de energia-matéria a equação de estado (3.36) nos leva a um parâmetro  $w = -1$ , em que a densidade de energia de vácuo é dada por

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_{\Lambda}(t) &= \rho_0 \left[ \frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3[1+(-1)]} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_{\Lambda}(t) &= \rho_0 \left[ \frac{a(t)}{a_0} \right]^0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_{\Lambda}(t) &= \rho_0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Portanto podemos considerar três fases distintas [7] para a evolução do Universo, sendo uma primeira época dominada pela radiação, seguida de um período dominado pela matéria e finalmente o período dominado pela constante cosmológica. Usando a constante de integração da equação de Friedmann, podemos fixar o valor atual do fator de escala  $a_0 = 1$  para simplificar. Neste caso teremos três fontes para a evolução do Universo

$$\rho = \rho_M + \rho_R + \rho_{\Lambda} \quad (3.41)$$

Onde

---

<sup>5</sup> Termo adicionado pelo próprio Einstein às suas equações de campo de forma a permitir que o Universo fosse estático, conforme sua crença inicial. Recentemente esta constante tem sido interpretada como um termo de densidade de vácuo que possivelmente poderia explicar a aceleração do Universo.

$$\rho_M = \frac{\rho_0}{a^3} \quad (3.42)$$

$$\rho_R = \frac{\rho_0}{a^4} \quad (3.43)$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (3.44)$$

Substituindo as três densidades citadas acima na equação de Friedmann (3.16) teremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{M0}}{a^3} + \frac{\rho_{R0}}{a^4} + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{a^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G \Lambda}{24\pi G} + \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{M0}}{a^3} + \frac{\rho_{R0}}{a^4} \right) - \frac{k}{a^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{R0}}{a^4} + \frac{\rho_{M0}}{a^3} \right) - \frac{k}{a^2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Definindo um potencial efetivo como sendo dado por

$$\Rightarrow V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\rho_{R0}}{a^4} + \frac{\rho_{M0}}{a^3} \right) + \frac{k}{a^2} \quad (3.46)$$

A equação (3.45) assume a seguinte forma

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} - V_{eff}(a) \quad (3.47)$$

Como  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$  é positivo, podemos fazer uma analogia com a equação de movimento de uma partícula submetida a um potencial  $V_{eff}$  expressa por

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - V_{eff}(x) \quad (3.48)$$

Portanto, a condição necessária para o fator de escala ser positivo implica que  $V_{eff}(x) \leq \frac{\Lambda}{3}$ . Para  $V_{eff}$  crítico igual a  $\frac{\Lambda}{3}$  teremos que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} - \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = 0$$

Portanto, derivando a equação (3.47) de Friedmann teremos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{\Lambda}{3} - V_{eff}(a) \Rightarrow \\
\Rightarrow \dot{a}^2 &= \left[\frac{\Lambda}{3} - V_{eff}(a)\right] a^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow 2 \dot{a} \ddot{a} &= \left[\frac{\Lambda}{3} - V_{eff}(a)\right] 2a \dot{a} + \left[\frac{-d(V_{eff})}{da}\right] \dot{a} a^2 \Rightarrow \\
\Rightarrow \ddot{a} &= \left[\frac{\Lambda}{3} - V_{eff}(a)\right] a - \frac{1}{2} \left[\frac{d(V_{eff})}{da}\right] a^2
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Para  $k = 0$ , temos que o potencial efetivo  $V_{eff}(a)$  terá um predomínio do período da matéria sobre a radiação, portanto

$$\Rightarrow V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{R0}}{a^4} + \frac{\rho_{M0}}{a^3}\right) \tag{3.50}$$

Para  $k = 1$ , teremos que o potencial efetivo  $V_{eff}(a)$  terá um predomínio do período da constante cosmológica sobre a matéria, e a radiação, portanto

$$\Rightarrow V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{R0}}{a^4} + \frac{\rho_{M0}}{a^3}\right) + \frac{1}{a^2} \tag{3.51}$$

Para  $k = -1$ , teremos que o potencial efetivo  $V_{eff}(a)$  terá um predomínio do período da radiação sobre a constante cosmológica e da matéria, logo

$$\Rightarrow V_{eff}(a) = -\frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{R0}}{a^4} + \frac{\rho_{M0}}{a^3}\right) + \frac{k}{a^2} \tag{3.52}$$

Isto nos leva a representar graficamente o potencial efetivo  $V_{eff}(a)$  em função do fator de escala dado por

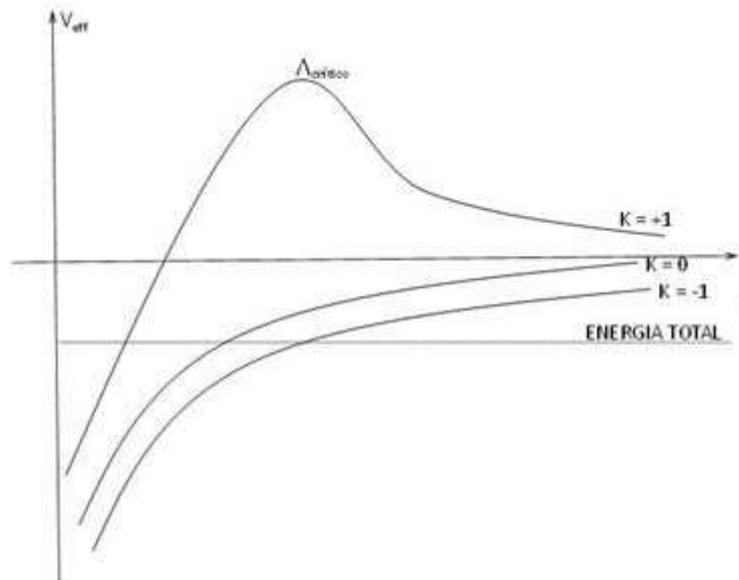


Figura 3.1 – Potencial efetivo  $V_{\text{eff}}(a)$  em função do fator de escala para o Universo dominado pela radiação sobre a constante cosmológica e matéria

### 3.5 Parâmetro de desaceleração

Uma forma alternativa de descrever o estado de expansão do Universo [11, 24], consiste em utilizar o parâmetro de desaceleração definido por

$$q = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 = - \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = - \frac{\frac{\ddot{a}}{a}}{\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2} \quad (3.53)$$

Portanto podemos determinar o fator de escala  $a(t)$  variando no tempo para alguns modelos cosmológicos e aplicarmos os resultados, obtendo o valor do parâmetro de desaceleração  $q$  que é um indicador da taxa de expansão do Universo e que mede a taxa de variação da taxa de expansão do Universo. Se  $q < 0$ , a expansão do Universo é acelerada, porém se  $q > 0$  indica uma fase de desaceleração.

### 3.6 Modelos cosmológicos

Considerando o modelo cosmológico de Einstein-de-Sitter [11], teremos que  $\Lambda = 0$ ,  $\rho_{0R} = 0$  e  $k = 0$  o que caracteriza o Universo dominado pela matéria. Portanto através da equação de Friedmann podemos encontrar o fator de escala para o período da matéria.

Partindo de (3.45), teremos

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{R0}}{a^4} + \frac{\rho_{M0}}{a^3}\right) - \frac{k}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{0}{3} + \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{0}{a^4} + \frac{\rho_{M0}}{a^3}\right) - \frac{0}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{M0}}{a^3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{M0}}{3}} \sqrt{a^{-3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{M0}}{3}} \sqrt{a^{-3}} \Rightarrow$$

fazendo  $\alpha = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{M0}}{3}}$  fica

$$\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \alpha a^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{a} = \alpha a^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

sendo  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$

$$\int a^{\frac{1}{2}} da = \int \alpha dt$$

integrando vamos obter

$$\Rightarrow \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = \alpha t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = \alpha t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2} \alpha t\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(t) = \left(\frac{3}{2} \alpha\right)^{\frac{2}{3}} (t)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(t) \sim (t)^{\frac{2}{3}} \quad (3.54)$$

que corresponde ao valor aproximado do fator de escala para o período da matéria, no qual ele cresce com o passar do tempo indefinidamente como mostra a figura 3.2

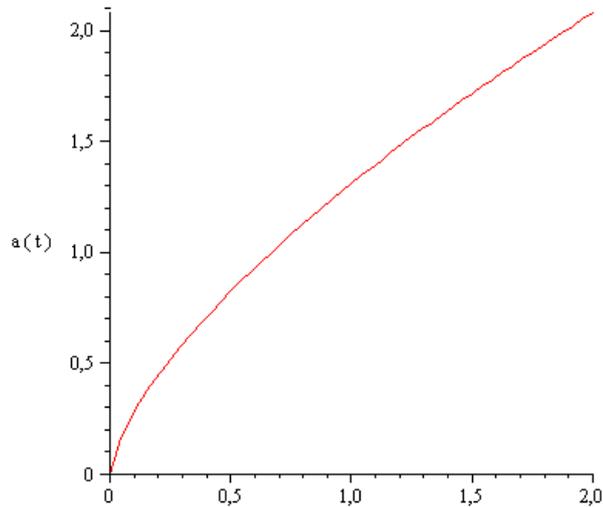


Figura 3.2: Evolução do fator de escala em função do tempo para o Universo dominado pela matéria

Como podemos observar, através de cálculos efetuados, o parâmetro neste caso resulta em  $q = \frac{1}{2}$  o que indica um período de desaceleração constante com o passar do tempo conforme indica a figura 3.3

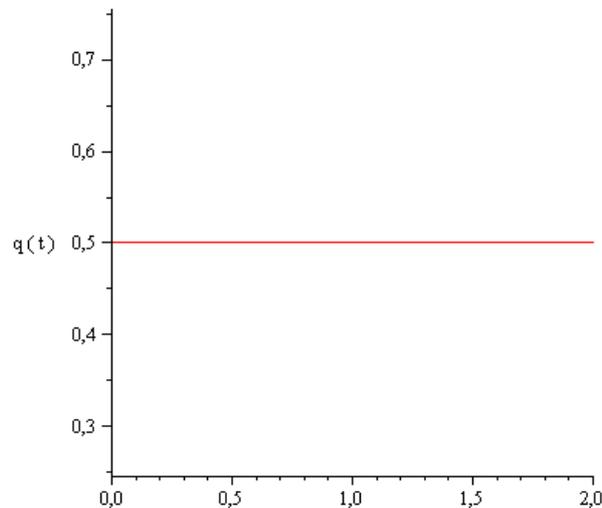


Figura 3.3: Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela matéria

Para o Universo dominado pela radiação verificamos que sendo  $\Lambda = 0$ ;  $\rho_{0M} = 0$  e  $k = 0$ , portanto, partindo de (3.45) obteremos o fator de escala para o Universo da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{0}{3} + \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{R0}}{a^4} + \frac{0}{a^3}\right) - \frac{0}{a^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{R0}}{a^4}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{R0}}{3}} \sqrt{a^{-2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

fazendo  $\alpha = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{R0}}{3}}$  fica

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} &= \alpha a^{-2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{a} &= \alpha a^{-1} \Rightarrow \end{aligned}$$

sendo  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$

$$\int a da = \int \alpha dt$$

Integrando vamos obter

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} a^2 &= \alpha t \Rightarrow \\ \Rightarrow a(t) &= (2 \alpha t)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow a(t) &\sim (t)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.55}$$

que corresponde ao valor aproximado do fator de escala para o período da radiação, no qual ele cresce com o passar do tempo indefinidamente como mostra a figura 3.4

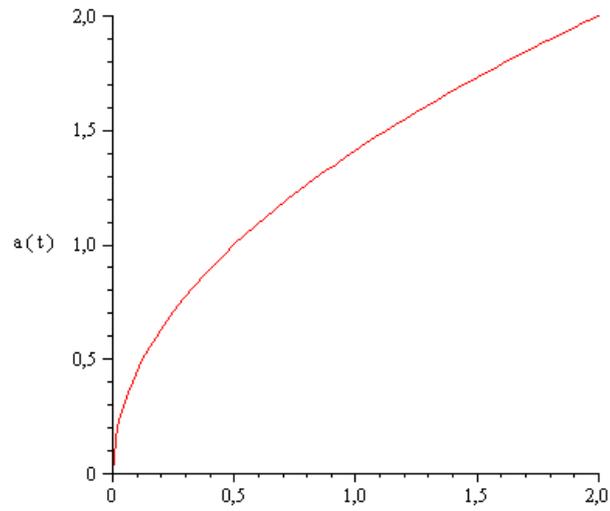


Figura 3.4: Evolução do fator de escala em função do tempo para o Universo dominado pela radiação

Como podemos observar, através de cálculos efetuados, o parâmetro neste caso resulta em  $q = 1$ , o que indica um período de desaceleração constante com o passar do tempo conforme mostra a figura 3.5

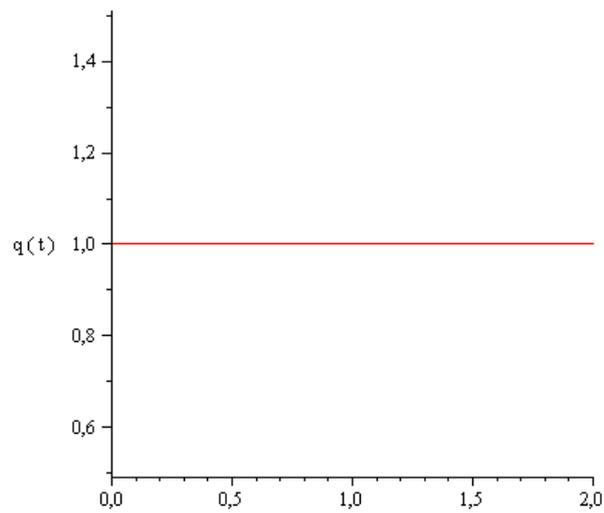


Figura 3.5: Parâmetro de desaceleração para a era dominada pela radiação

Para o Universo dominado pela constante cosmológica, que corresponde ao modelo de de Sitter temos que  $\Lambda > 0$ ,  $\rho_{0R} = 0$ ,  $\rho_{0M} = 0$  e  $k = 0$ , onde partindo da equação (3.45) iremos obter

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{0}{a^4} + \frac{0}{a^3}\right) - \frac{0}{a^2} \\ &\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{1}{a} da = \int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt \Rightarrow \end{aligned}$$

integrando vamos obter

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln a &= \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \Rightarrow \\ \Rightarrow a(t) &= e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Portanto o fator de escala para a constante cosmológica obedece a uma expansão exponencial conforme indica a figura 3.6

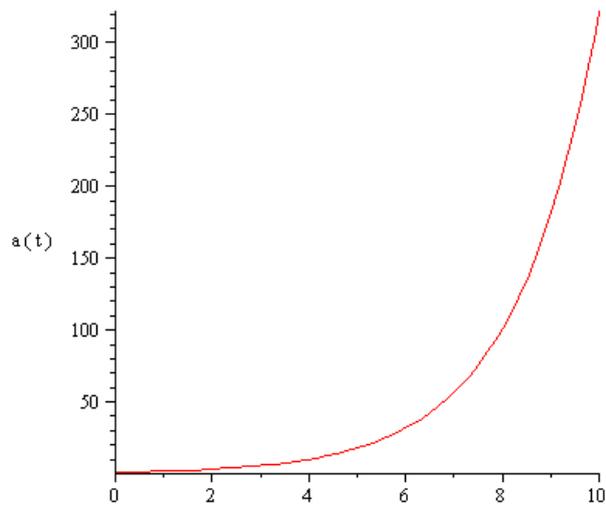


Figura 3.6: Evolução do fator de escala em função do tempo para o Modelo de de Sitter

Como podemos observar, através de cálculos efetuados, o parâmetro de desaceleração neste caso resulta em  $q = -1$ , o que indica um período de aceleração constante com o passar do tempo conforme a figura 3.7

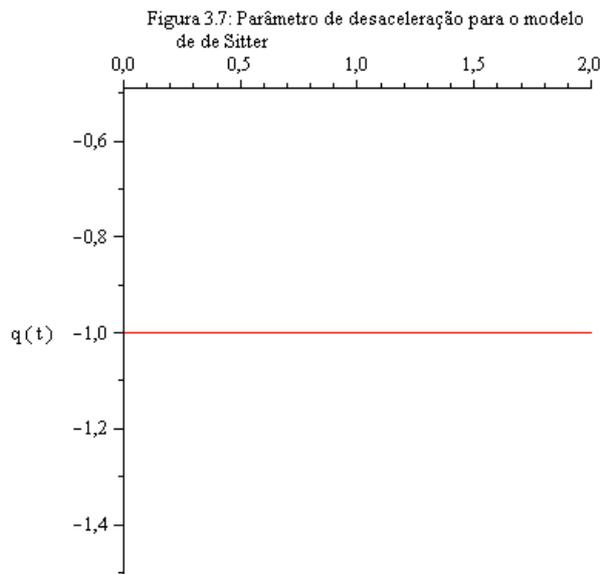


Figura 3.7: Parâmetro de desaceleração para o modelo de de Sitter

## Capítulo 4

### Cosmologia Inflacionária

#### 4.1 Introdução

A teoria do Big Bang é uma previsão da teoria da gravitação [2, 5, 7] proposta por Einstein que recebeu uma extraordinária confirmação experimental em 1964 com a descoberta da radiação<sup>6</sup> cósmica de fundo na faixa de microondas. Acredita-se que nesta, se encontram registradas as informações que, interpretadas corretamente, vão nos levar a um melhor entendimento do fenômeno de formação das galáxias e dos aglomerados de galáxias. Seja na forma de estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, podemos perceber a sua presença. No entanto essa não é a única forma de energia que preenche o nosso Universo. Igualmente presente, o campo de radiação se espalha por todo o céu seja devido aos objetos próximos no sistema solar ou às estrelas mais distantes. A existência desse fundo de radiação que permeia o Universo possui elevada isotropia e homogeneidade, e apontam para uma origem cosmológica que remonta a um passado distante, quando o fator de escala era bem menor e a densidade era muito maior. Em decorrência disso, o livre caminho médio de prótons, elétrons e da radiação deve ter sido bem menor do que é hoje. Naquela época, graças à abundante interação entre matéria e radiação, todo o meio devia certamente se encontrar em um estado muito próximo do equilíbrio termodinâmico com os fótons. Portanto a temperatura do gás de fótons devia ser exatamente a mesma da matéria. Com a expansão violenta em que este meio foi submetido, o gás de fótons resfriou, a densidade de energia diminuiu e possibilitou que os prótons e elétrons se recombinassem. Com isso, o gás de fótons desacoplou-se da matéria,

---

<sup>6</sup> Emissão devida ao gás de fótons que participa da expansão cosmológica. Este substrato de fótons não emana das estrelas ou galáxias, mas foi criado no início do Universo.

escoou livremente, e originou o fundo de fótons de baixa energia que permeia o Universo local.

## 4.2 Radiação cósmica de fundo

Dados observacionais indicam que o espaço é ocupado pela radiação eletromagnética distribuída homogênea e isotropicamente. Estudando a intensidade da radiação através do espectro de radiação [2, 4, 14, 17, 18], percebe-se que a densidade de energia da radiação com frequência em torno de  $\omega$  e  $d\omega$  é dada pela lei de Planck e obedece a seguinte equação:

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad (4.1)$$

onde,

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

Na qual  $\beta$  é um fator que se relaciona com a temperatura e com a constante de Boltzman.

Dada a frequência  $\omega$ , podemos calcular a densidade de energia que obedece a seguinte curva

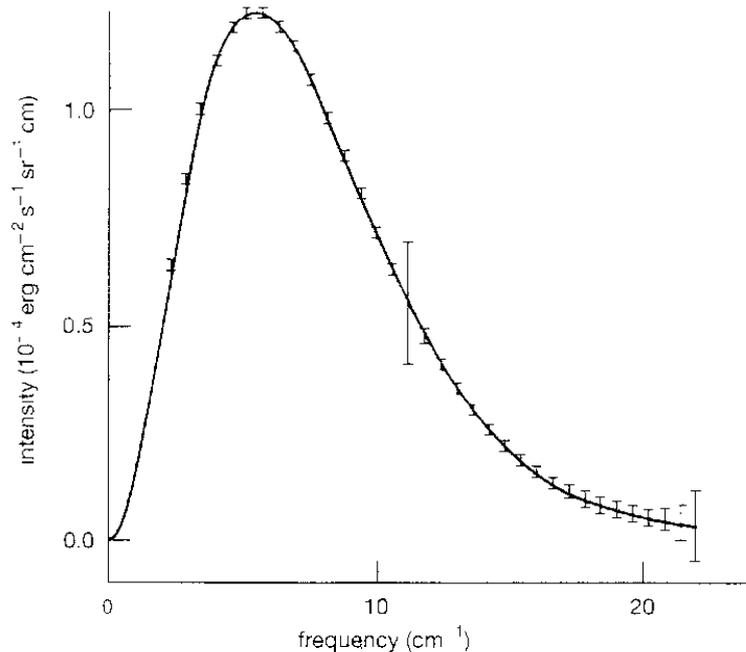


Figura 4.1: O espectro da radiação cósmica de fundo obtidos pelo satélite COBE

Pontos traçados se ajustam a uma curva que obedece [2, 15, 19] a essa equação em que a temperatura é de  $T = 2,7$  K para um fator  $\beta$ . Esta lei é conhecida como radiação de Planck, e foi obtida em 1900, quando ele estudava a radiação do corpo negro. Portanto, a matéria interage com a radiação, e sendo a matéria composta por átomos, e os átomos formados de partículas carregadas que são os prótons e os elétrons e, sabendo que a onda eletromagnética é um campo elétrico e magnético que oscila no tempo e no espaço e interage com a matéria, pois a radiação eletromagnética afeta as partículas carregadas, que sendo postas a vibrar emitem uma onda eletromagnética, então, no equilíbrio a quantidade de energia absorvida deve ser igual à quantidade de energia emitida e mantida a uma temperatura constante  $T$ .

Analisando a distribuição espectral dessa radiação cósmica, esses pontos se ajustam exatamente a lei de Planck para essa temperatura. Então a radiação cósmica de fundo que é observada em todas as direções em antenas sensíveis a distribuição espectral, obedece à lei de radiação de Planck e que corresponde à radiação térmica eletromagnética em equilíbrio térmico a uma temperatura de  $2,7$  K. Integrando em todas as frequências possíveis  $d\omega$ , a distribuição de densidade total de energia de radiação é dada por

$$\rho = \int_0^{\infty} u(\omega) d\omega \quad (4.2)$$

Resolvendo esta expressão chegaremos à equação que representa a lei de Stefan-Boltzmann para a radiação total [14] emitida e que é dada por

$$\rho_r = \frac{\pi^2 k T^4}{15 c^3 \hbar^3} \quad (4.3)$$

Esta equação independe da forma da cavidade do corpo e da natureza química das paredes. Para  $T = 2,7$  K vamos obter a densidade de energia da radiação atual na ordem de  $\rho_{r0} = 4,6486 \times 10^{-34} \text{ g.cm}^{-3}$  que tem uma frequência privilegiada. Nesta frequência a maior parte da radiação cósmica é encontrada na faixa das microondas. Como comparação, a

10.000 K temos uma faixa de frequência da luz visível emitida pelo Sol. À temperatura ambiente, temos o infravermelho que não são visíveis.

### 4.3 Teoria de campo escalar em Cosmologia

Para incluirmos campos escalares [25] nas equações de Friedmann, devemos utilizar o tensor energia-momento definido por

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_{\mu} \phi} \partial_{\nu} \phi + \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L} \quad (4.4)$$

que se conserva, pois utilizando as equações de movimento podemos verificar explicitamente que este tensor energia-momentum possui essa característica, ou seja

$$\partial_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0 \quad (4.5)$$

Se substituirmos a equação de um campo escalar real em (4.4), encontraremos o tensor de energia-momentum para o campo escalar dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi + g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (4.6)$$

Onde a lagrangeana<sup>7</sup> para um campo escalar  $\phi$  é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - V(\phi) \quad (4.7)$$

Aplicando (4.7) em (4.6) vamos encontrar

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi + g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - V(\phi) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow T_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Fazendo  $\mu = 0$  e  $\nu = 0$  vamos obter

$$T_{00} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi - g_{00} \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial^0 \phi - g_{00} V(\phi) \Rightarrow$$

---

<sup>7</sup> Expressão matemática que relaciona a energia cinética (T) e a energia potencial de um sistema físico (V). No caso de uma partícula em movimento livre em potencial tem-se que  $L = T - V$ . No caso mais geral, uma vez conhecida esta função, é possível aplicar um procedimento matemático conhecido como princípio variacional de Hamilton que permite à obtenção das equações de movimento.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow T_{00} = \partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi + V(\phi) \Rightarrow \\
\Rightarrow T_{00} &= (\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}[\partial_0\phi g^{00}\partial_0\phi + \partial_1\phi g^{11}\partial_1\phi + \partial_2\phi g^{22}\partial_2\phi + \partial_3\phi g^{33}\partial_3\phi] \\
&+ V(\phi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow T_{00} = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Mas sabendo que o tensor de energia-momento [10] possui componente  $T_{00} = \rho$ , logo comparando com a expressão (4.9) vamos obter a densidade de energia que é dada por:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{4.10}$$

Com índices dados por  $\mu = 1$  e  $\nu = 1$ , o tensor de energia-momentum para o campo escalar é dado por

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \partial_1\phi\partial_1\phi + g_{11}\mathcal{L} \Rightarrow \\
&\Rightarrow T_{11} = \mathcal{L} \Rightarrow \\
&\Rightarrow T_{11} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \Rightarrow \\
\Rightarrow T_{11} &= -\frac{1}{2}(\partial_0\phi g^{00}\partial_0\phi + \partial_1\phi g^{11}\partial_1\phi + \partial_2\phi g^{22}\partial_2\phi + \partial_3\phi g^{33}\partial_3\phi) - V(\phi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow T_{11} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - V(\phi) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Mas como o tensor de energia-momento possui a componente  $T_{11} = p$ , logo comparando com a expressão (4.10) vamos obter a pressão dada por:

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \tag{4.12}$$

Voltando as equações (3.16) e (3.30) de Friedmann para efetuar as substituições da densidade de energia  $\rho$  e da pressão  $p$  que correspondem as expressões (4.10) e (4.12) obteremos as seguintes expressões em função do campo escalar

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2} . \quad (4.13)$$

Para a segunda equação de Friedmann temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} \left\{ 3 \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] + \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \right\} \Rightarrow \quad (4.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} \{ [2\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)] \} \Rightarrow$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-8\pi G}{3} [ \dot{\phi}^2 - V(\phi) ] \quad (4.15)$$

Na equação da conservação de energia para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker com fluido perfeito, representada pela equação (3.25), substituindo os valores de densidade e pressão obtemos a seguinte equação

$$\Rightarrow \dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] + \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} \ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \dot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi}^2 = 0$$

dividindo a equação por  $\dot{\phi}$  fica

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (4.16)$$

Representando  $\frac{\dot{a}}{a}$  como sendo a taxa relativa de crescimento do Universo, ou seja, taxa de expansão indicada como sendo o parâmetro de Hubble<sup>8</sup>, simbolizado por H, logo a equação (4.16) fica

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + 3 H \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (4.17)$$

Vemos que o parâmetro de Hubble atua como um termo de atrito [15]. O campo tende a diminuir o potencial, mas quando H é muito grande o movimento vai sendo amortecido.

<sup>8</sup> Esta taxa de expansão foi introduzida por Hubble para reproduzir o fato observacional de que as galáxias próximas se afastam com velocidades crescentes com as distâncias que nos separam delas ( $V = H_0 d$ ). Acredita-se atualmente que o valor desta constante seja da ordem de  $(65 - 72) km . s^{-1} . Mpc^{-1}$ .

Portanto, um campo escalar com um potencial suficientemente pequeno vai diminuindo muito lentamente, levando a uma energia cinética muito menor que a energia potencial  $V(\phi)$ .

Portanto o tensor de energia-momentum é então

$$T_{\mu\nu} \approx -V(\phi)g_{\mu\nu} \quad (4.18)$$

onde,  $\phi \approx \text{constante}$ . Comparando com o tensor de energia-momento de vácuo dado pela equação (3.35), vemos que o potencial de campo escalar é quem imita a energia do vácuo.

Como um exemplo simples, podemos citar o potencial quadrático [5, 7, 18],  $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ . Então (4.17) descreve um oscilador harmônico amortecido e mais de um amortecimento irá ocorrer se  $H > m$ .

Da equação (4.17) do movimento da partícula podemos analisar a evolução temporal do campo escalar, pois de acordo com o princípio cosmológico, o Universo é homogêneo e isotrópico, portanto varia somente como função do tempo, ou seja,  $\phi = \phi(t)$ . Logo a equação de Fredmann (3.16) torna-se

$$\left(\frac{\dot{\phi}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (4.19)$$

Na equação (4.19), se  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  teremos que  $\rho = V(\phi_0)$  e  $p = -V(\phi_0)$ , então podemos obter um regime de aceleração positiva quando a pressão for negativa, onde  $p = -\rho$  e percebemos que de acordo com a equação da pressão de um fluido perfeito (4.12) e da densidade de energia (4.10) esta condição é satisfeita desde que o termo cinético permaneça subdominante, sendo desprezível com relação ao termo potencial. Com esta condição, o potencial escalar torna-se máximo, e como a expansão é acelerada, o potencial deve variar lentamente nesse período. Logo teremos que  $V \approx \text{constante}$ , ou  $\frac{\partial V}{\partial \phi} = \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é um valor muito pequeno. Essa aproximação [4, 5, 7] é conhecida como aproximação de *slow-roll* (rolamento lento), caracterizando uma expansão acelerada. No regime *slow-roll*,  $\dot{\phi} \approx \text{constante}$  e  $\ddot{\phi} \approx 0$  de tal forma que a equação do movimento (4.16) pode ser escrita como

$$3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (4.20)$$

E pela consideração de que  $V \approx$  constante, a equação de Friedmann fica

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G V_0}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{a} \frac{da}{dt} &= \sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{1}{a} da &= \int \sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} dt \Rightarrow \end{aligned} \quad (4.21)$$

Integrando vamos obter

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln a &= \sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} t \Rightarrow \\ \Rightarrow a(t) &= e^{\sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} t} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Portanto concluímos que independente da forma do potencial, a aproximação *slow-roll* [20] sempre fornecerá uma solução exponencial de tal forma que  $p = -\rho = -V$  semelhante ao que ocorre no modelo para o Universo dominado pela constante cosmológica, que corresponde ao modelo de de Sitter apresentado no capítulo 3. Neste período o *inflaton*<sup>9</sup> evoluirá do estado de falso vácuo para o estado de vácuo verdadeiro quando  $\frac{\partial V}{\partial \phi}$  não for pequeno, o que corresponde ao término do regime inflacionário em que o potencial chega ao seu mínimo e o termo cinético não é mais desprezível e, de acordo com a equação (4.17), o *inflaton* sofre oscilações amortecidas e perde energia, a qual reaquece o Universo.

---

<sup>9</sup> Campo escalar responsável pela inflação e que é submetido a um potencial  $V(\phi)$ .

#### 4.4 Modelo de campo escalar: potencial quadrático

Considere o modelo mais simples de um campo escalar  $\phi$  com massa  $m$  e com a densidade de energia potencial dada por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (4.23)$$

Logo substituindo na equação que governa a evolução temporal do campo escalar vamos obter

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial[\frac{1}{2}m^2\phi^2]}{\partial \phi} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Onde o termo  $3H\dot{\phi}$  pode ser interpretado como um termo de atrito. A equação de Friedmann para um Universo homogêneo contendo o campo escalar  $\phi$  aparece como segue

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{4\pi G m^2 \phi^2}{3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m\phi \end{aligned} \quad (4.25)$$

Se o campo escalar  $\phi$  inicialmente era grande, o parâmetro de Hubble  $H$  era grande demais, de acordo com a equação (4.26). Isso significa que o termo de atrito  $3H\dot{\phi}$  era muito grande e portanto o campo escalar estava se movendo muito lentamente, como uma bola em um líquido viscoso [8]. Portanto nesta fase, a densidade de energia do campo escalar, ao contrário da densidade de matéria ordinária, permanece praticamente constante, e a expansão

do Universo continuou com uma velocidade muito maior do que a velha teoria cosmológica. Devido ao rápido crescimento da escala do Universo e um movimento lento do campo  $\phi$ , logo após o início deste regime temos que  $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$  logo na equação (4.24) vamos ter

$$3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0 \quad (4.27)$$

Substituindo (4.26) em (4.27) vamos obter

$$\begin{aligned} 3\sqrt{\frac{4\pi G}{3}}m\phi\dot{\phi} + m^2\phi &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{12\pi G}\dot{\phi} &= -m \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\phi} &= -\frac{m}{2\sqrt{3\pi G}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi &= -\frac{m}{2\sqrt{3\pi G}} \int dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi &= \phi_0 - \frac{m}{2\sqrt{3\pi G}} t \end{aligned} \quad (4.28)$$

Construindo o gráfico de  $\phi(t)$  vamos ter o seguinte comportamento

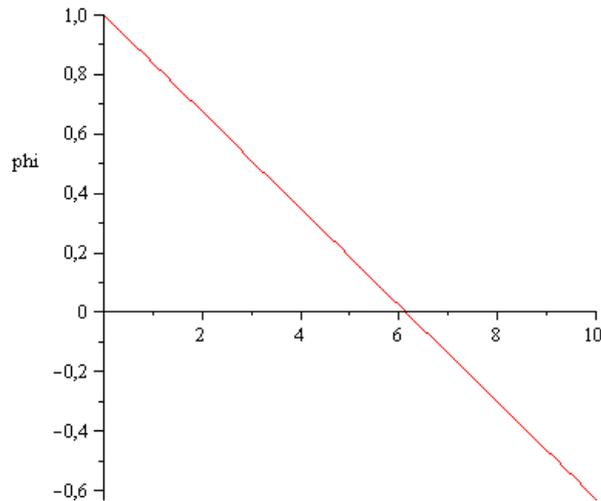


Figura 4.2: Evolução do campo escalar phi em função do tempo t para o potencial quadrático

Agora substituindo a equação (4.28) na equação (4.26) podemos determinar  $a(t)$  para este campo escalar  $\phi$ . Portanto fica

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m \left( \phi_0 - \frac{m}{2\sqrt{3\pi G}} t \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{da}{a dt} &= 2 m \sqrt{\frac{\pi G}{3}} \phi_0 - \frac{m^2}{3} t \Rightarrow \\ \int_{a_0}^a \frac{da}{a} &= \int \left( 2 m \sqrt{\frac{\pi G}{3}} \phi_0 - \frac{m^2}{3} t \right) dt \\ \ln \frac{a}{a_0} &= 2 m \sqrt{\frac{\pi G}{3}} \phi_0 t - \frac{m^2}{3} t^2 \\ a &= a_0 e^{\left( 2 m \sqrt{\frac{\pi G}{3}} \phi_0 t - \frac{m^2}{3} t^2 \right)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Construindo o gráfico através do Maple [26], vamos obter o seguinte comportamento do fator de escala do Universo em função do tempo

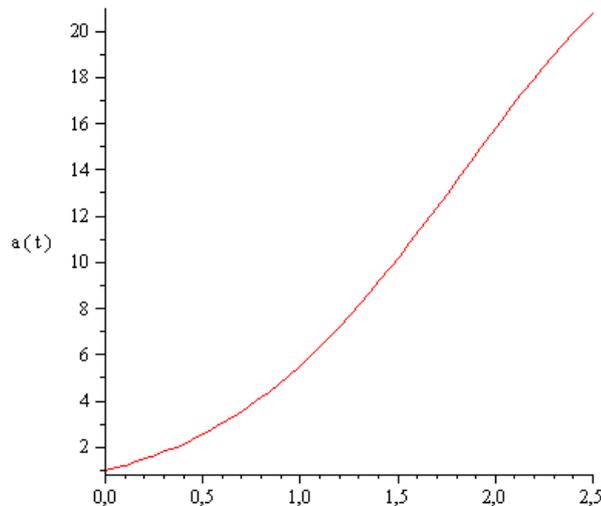


Figura 4.3: Evolução do fator de escala em função do tempo para o potencial quadrático

Após determinarmos o fator de escala  $a(t)$  variando no tempo como mostra a equação (4.29), podemos aplicar os resultados obtidos no parâmetro de desaceleração  $q$ . Logo realizando as respectivas derivações no fator de escala e substituindo em (3.53) que representa o parâmetro de desaceleração, vamos obter para a densidade de energia potencial dada por (4.26) o seguinte valor

$$q := -\frac{1}{2} \frac{-3 + 6 \pi G \phi_0^2 - 4 m \sqrt{3} \sqrt{\pi} \sqrt{G} \phi_0 t + 2 m^2 t^2}{\left(-\sqrt{3} \sqrt{\pi} \sqrt{G} \phi_0 + m t\right)^2} \quad (4.30)$$

Construindo o gráfico [26] vamos obter o seguinte comportamento para o parâmetro de desaceleração

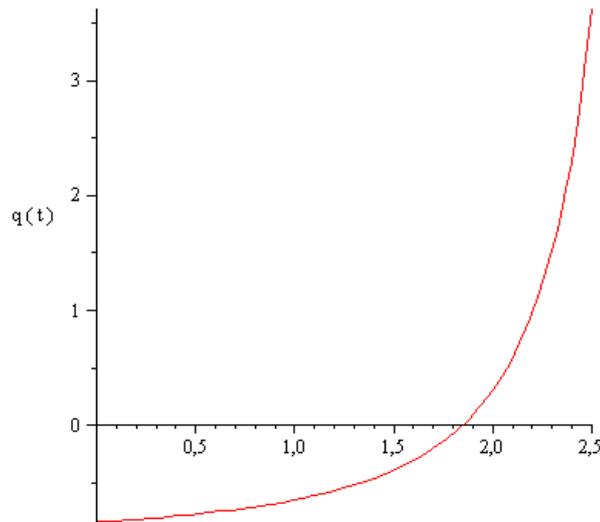


Figura 4.4: Parâmetro de desaceleração para o potencial quadrático

O que indica uma fase de expansão acelerada para este tipo de potencial.

## 4.5 Modelo de campo escalar: potencial tipo cosseno

Aqui seguimos um dos modelos sugeridos há algum tempo atrás [27] onde vamos verificar o comportamento da evolução do fator de escala  $a(t)$  e do campo escalar  $\phi(t)$  para um potencial dado por:

$$V(\phi) = C \cos^2 \beta \phi \quad (4.31)$$

Onde  $\beta$  e  $C$  são constantes. Portanto no regime *slow roll* a equação que governa a evolução temporal do campo escalar vai ser

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3 H \dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 H \dot{\phi} + C \frac{\partial(\cos^2 \beta \phi)}{\partial \phi} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 H \dot{\phi} - 2C\beta \sin \beta \phi \cos \beta \phi &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 H \dot{\phi} - C\beta \sin 2\beta \phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Substituindo (4.31) na equação de Friedmann (4.25) vamos obter

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} [C(\cos^2 \beta \phi)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G C}{3}} |\cos \beta \phi| \end{aligned} \quad (4.33)$$

Substituindo (4.33) em (4.32) onde  $\frac{\dot{a}}{a} = H$ , vamos obter

$$\begin{aligned} 3 \sqrt{\frac{8\pi G C}{3}} |\cos \beta \phi| \dot{\phi} - C\beta \sin 2\beta \phi &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} &= \frac{C\beta \sin 2\beta \phi}{3 \sqrt{\frac{8\pi G C}{3}} |\cos \beta \phi|} \Rightarrow \end{aligned}$$

Fazendo  $F = \frac{3}{c\beta} \sqrt{\frac{8\pi G C}{3}}$ , vamos ficar com

$$\frac{F |\cos \beta \phi|}{\sin 2\beta \phi} d\phi = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F |\cos \beta \phi|}{2 \sin \beta \phi \cos \beta \phi} d\phi = dt \Rightarrow$$

Consideramos o intervalo  $\beta \phi$  tal que  $|\cos \beta \phi| = \cos \beta \phi$  o que implica em  $t < t_0$  portanto integrando fica

$$\Rightarrow \int \frac{d\phi}{\sin \beta \phi} = \frac{2}{F} \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \ln(\csc \beta \phi - \cot \beta \phi) = \frac{2(t - t_0)}{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \csc \beta \phi - \cot \beta \phi = e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{F}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \beta \phi} - \frac{\cos \beta \phi}{\sin \beta \phi} = e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{F}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 \frac{\beta \phi}{2}}{\sin \beta \phi} = e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{F}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 \frac{\beta \phi}{2}}{2 \sin \frac{\beta \phi}{2} \cos \frac{\beta \phi}{2}} = e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{F}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\beta \phi}{2} = e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{F}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{2}{\beta} \arctan \left[ e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{F}} \right] \quad (4.34)$$

Construindo o gráfico de  $\phi$  vamos obter o seguinte comportamento:

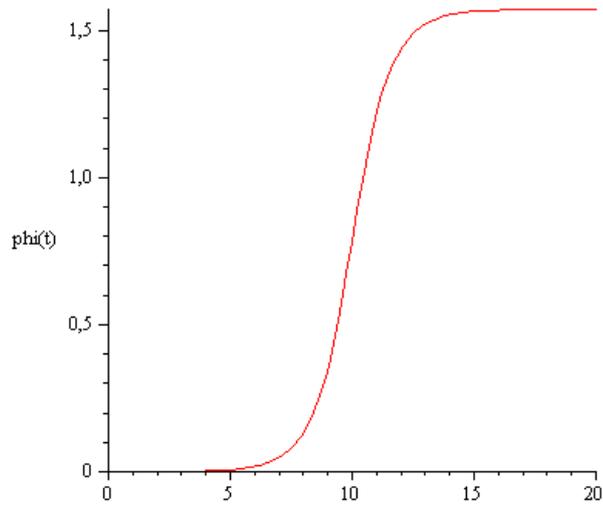


Figura 4.5: Evolução do campo escalar phi em função do tempo para o potencial tipo cosseno ( $t_0=10$ ).

Substituindo (4.34) em (4.33) vamos determinar  $a(t)$  para (4.31). Da equação (4.33) vamos ter

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G C}{3}} |\cos\beta\phi| \\ \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G C}{3}} \left| \cos\beta \left\{ \frac{2}{\beta} \arctan \left[ e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{F}} \right] \right\} \right| \\ \Rightarrow \frac{da}{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G C}{3}} \left| \cos\beta \left\{ \frac{2}{\beta} \arctan \left[ e^{\frac{2\beta(t-t_0)}{F}} \right] \right\} \right| dt \end{aligned} \quad (4.35)$$

Integrando (4.35) em função do tempo, vamos obter a seguinte equação para o fator de escala  $a(t)$  dado por

$a :=$

$$e^{-\frac{2}{3} \frac{1}{\beta \left( -e^{\frac{2\beta t_0}{F}} + e^{\frac{2\beta t}{F}} \right)}} \left( F \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\left( -e^{\frac{2\beta t_0}{F}} + e^{\frac{2\beta t}{F}} \right)^2}{\left( e^{\frac{2\beta t_0}{F}} + e^{\frac{2\beta t}{F}} \right)^2}} \frac{C G}{\left( e^{\frac{2\beta t_0}{F}} + e^{\frac{2\beta t}{F}} \right) \sqrt{6} \left( -\ln \left( e^{\frac{2\beta t_0}{F}} + e^{\frac{2\beta t}{F}} \right) + \ln \left( e^{\frac{\beta t}{F}} \right) \right)} \right)$$

(4.36)

Construindo o gráfico para  $a(t)$ , onde  $C := 1$ ;  $G := 1$ ;  $F := 1$ ;  $\beta := 1$ ;  $t_0 := 10$ ; vamos obter a seguinte curva que mostra o comportamento do fator de escala para um potencial do tipo cosseno dado por

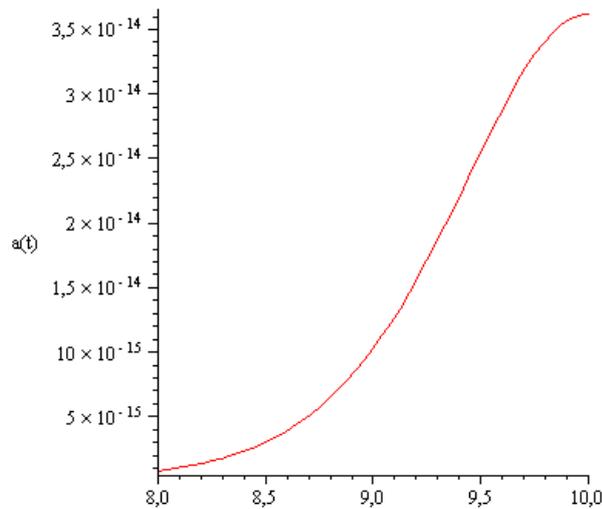


Figura 4.6: Evolução do fator de escala para o potencial tipo cosseno ( $t_0 = 10$ ) para  $t < t_0$ .

Para o potencial dado por (4.31) vamos obter o parâmetro de desaceleração de acordo com a equação (3.53) que nos fornece um resultado igual a

$$\begin{aligned}
q := & -\frac{1}{6} \left( \left( \sqrt{\pi} \sqrt{6} e^{6t} - 3 e^{4t+2t_0} \sqrt{\pi} \sqrt{6} \right. \right. \\
& + 6 e^{4t+2t_0} \sqrt{\frac{(e^{2t_0} - e^{2t})^2}{(e^{2t_0} + e^{2t})^2}} + 3 e^{2t+4t_0} \sqrt{\pi} \sqrt{6} \\
& + 6 e^{2t+4t_0} \sqrt{\frac{(e^{2t_0} - e^{2t})^2}{(e^{2t_0} + e^{2t})^2}} - \sqrt{\pi} \sqrt{6} e^{6t_0} \left. \right) \sqrt{6} \Bigg) / \\
& \left( (-e^{6t_0} + 3 e^{2t+4t_0} - 3 e^{4t+2t_0} + e^{6t}) \sqrt{\pi} \right)
\end{aligned}
\tag{4.37}$$

Construindo o gráfico de  $q$  vamos obter o seguinte comportamento para o parâmetro de desaceleração

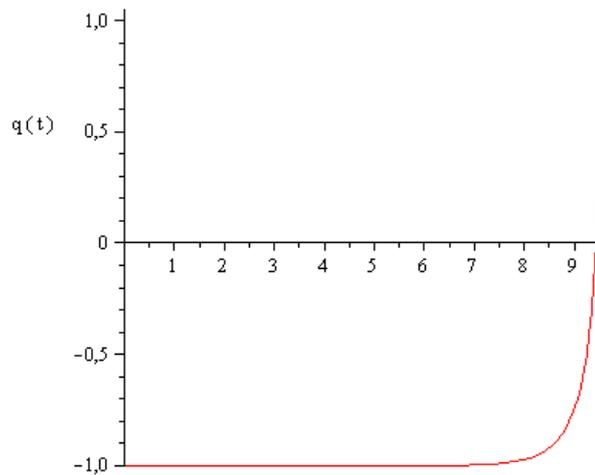


Figura 4.7: Parâmetro de desaceleração - potencial tipo cosseno ( $t_0 = 10$ ) para  $t < t_0$

Que indica um período de aceleração do Universo para  $t < t_0$ .

## Conclusão

A Cosmologia Inflacionária está respaldada em base desenvolvida por Einstein através da Teoria Geral da Relatividade na qual relaciona o conceito de matéria e energia com a curvatura do espaço-tempo. Assim relacionando-se o tensor de Einstein com o conteúdo de energia e matéria podemos mostrar que utilizando a métrica de Friedmann-Robertson-Walker vamos obter as equações de Friedmann e através delas analisar o período inflacionário do Universo na qual houve uma expansão exponencial do fator de escala semelhante ao estágio inflacionário do tipo de Sitter. Através da aplicação da teoria de campo escalar em Cosmologia verificamos que a componente que domina a evolução do Universo neste período, o *inflaton* pode ser representado pelo potencial de um campo escalar. Neste trabalho utilizamos o potencial quadrático e o potencial tipo cosseno para analisar a expansão acelerada do Universo através da aproximação *slow-roll* e assim verificamos que o comportamento da evolução do fator de escala  $a(t)$  e do campo escalar  $\phi(t)$  para estes dois tipos de energia potencial satisfazem ao modelo teórico de de Sitter apresentado. Através da definição do parâmetro de desaceleração  $q(t)$ , foi verificado que de fato este período inflacionário ocorre, de forma que o Universo se expande aceleradamente. De acordo com as observações das flutuações no fundo de radiação cósmica associadas às justificativas da análise do parâmetro de desaceleração, podemos observar que esta era inflacionária de fato ocorre.

## Apêndice A

### Tensor de Curvatura

O transporte paralelo [5, 24, 28] de um vetor em torno de um circuito fechado em um espaço curvo levará a uma transformação do vetor. Considere dois campos vetoriais  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  tais que  $[\bar{v}, \bar{w}] = 0$ . Com as curvas integrais de  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  construímos um “paralelogramo infinitesimal” conforme indica a figura Fig. (A.1)

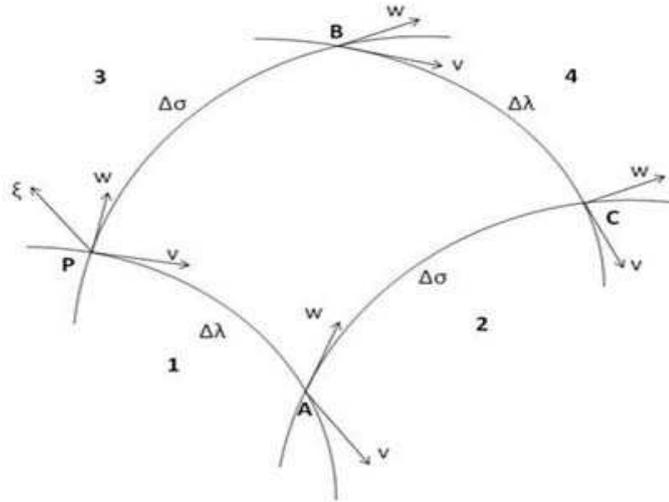


Figura A.1 – Transporte paralelo de um vetor ao longo de um paralelogramo infinitesimal

Para transportarmos um terceiro vetor  $\bar{\xi}$  ao longo deste paralelogramo devemos efetuar o transporte de  $\bar{\xi}_P$  até o ponto A ao longo do lado 1. Logo o vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva obedece à equação

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \left( \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \left( \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow d\xi^\mu &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi_A^{*\mu} - \xi_P^\mu &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \xi_A^{*\mu} = \xi_P^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda \quad (\text{A.1})$$

onde  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha$  é calculado no ponto p.

Agora efetuando o segundo transporte de  $\xi_A^*$  do ponto A até o ponto C ao longo do lado 2 na curva vamos obter

$$\Rightarrow \xi_C^{*\mu} = \xi_A^{*\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(A) \xi_A^{*\alpha} \bar{\omega}_A^\beta d\sigma \quad (\text{A.2})$$

Onde

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_A) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_p + \bar{v} d\lambda)$$

Note que:  $x_A^\mu = x_p^\mu + v^\mu d\lambda$  portanto teremos que

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_A) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_p) + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} v^\gamma d\lambda$$

Onde  $\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma}$  é calculado no ponto p.

Logo ao longo do caminho 1→2 vamos ter

$$\begin{aligned} \Rightarrow \xi_C^{*\mu} &= (\xi_P^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda) - \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_p) + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} v^\gamma d\lambda \right) (\xi_P^\alpha - \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta v^\rho d\lambda) \left( \omega_p^\beta + \frac{\partial \omega_p^\beta}{\partial x^\kappa} v^\kappa d\lambda \right) d\sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow \xi_C^{*\mu} = \\ &(\xi_P^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha v^\beta d\lambda) - (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \omega^\beta d\sigma) - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{\partial \omega_p^\beta}{\partial x^\kappa} v^\kappa d\lambda d\sigma + \\ &\Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\eta\rho}^\alpha \xi^\eta v^\rho \omega^\beta d\lambda d\sigma - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} v^\gamma \xi^\alpha \omega^\beta d\lambda d\sigma \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

Agora vamos efetuar o transporte de  $\bar{\xi}_P$  de P até B pelo lado 3. Com isso vamos obter

$$\Rightarrow \xi_B^* = \bar{\xi}_P^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \bar{\xi}_P^\alpha \omega^\beta d\omega \quad (\text{A.4})$$

Transportando o vetor  $\xi_B^*$  de B até C ao longo do lado 4 vamos ter

$$\Rightarrow \xi_C^* = \xi_B^{*\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi_B^{*\alpha} v^\beta d\lambda \quad (\text{A.5})$$

Mas sabemos que

$$x_B^\mu = x_p^\mu + \omega_p^\mu d\sigma, \text{ logo vem que}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} x_B &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(x_P + \bar{\omega} d\sigma) \Rightarrow \\ \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} x_B &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} x_P + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\mu} \omega^{\gamma} d\sigma\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

Sabendo que

$$\begin{aligned}v^{\beta}(x_P) &= v^{\beta}(x_P + \omega_P d\sigma) \Rightarrow \\ \Rightarrow v^{\beta}(x_P) &= v^{\beta}(x_P) + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \omega^{\kappa} d\sigma\end{aligned}\quad (\text{A.7})$$

Logo ao longo do caminho 3→4 vamos ter

$$\begin{aligned}\Rightarrow \bar{\xi}_C^{*\mu} &= \left( \xi_P^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^{\alpha} \omega^{\beta} d\sigma \right) \\ &- \left( \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(x_P) + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \omega^{\gamma} d\sigma \right) \left( \xi_P^{\alpha} - \Gamma_{\eta\rho}^{\alpha} \xi^{\eta} \omega^{\rho} d\sigma \right) \left( v_P^{\beta} \right. \\ &\left. + \frac{\partial v_P^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \omega^{\kappa} d\sigma \right) d\lambda \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{\xi}_C^{*\mu} = \\ &\left( \xi_P^{\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^{\alpha} \omega^{\beta} d\sigma \right) - \left( \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^{\alpha} v^{\beta} d\lambda \right) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^{\alpha} \frac{\partial v_P^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \omega^{\kappa} d\sigma d\lambda + \\ &\Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} \Gamma_{\eta\rho}^{\alpha} \xi^{\eta} \omega^{\rho} v^{\beta} d\sigma d\lambda - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \omega^{\gamma} \xi^{\alpha} v^{\beta} d\sigma d\lambda\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Vamos comparar  $\bar{\xi}_{1,2}^{\mu}$  com  $\bar{\xi}_{3,4}^{\mu}$  fazendo a variação. Portanto vamos ter:

$$\begin{aligned}\delta \xi^{\mu} &= \xi_{(1,2)}^{*\mu} - \xi_{(3,4)}^{*\mu} \Rightarrow \\ \delta \xi^{\mu} &= \left[ \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\mu} \xi^{\alpha} v^{\beta} \omega^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\mu} \xi^{\alpha} \omega^{\beta} v^{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\eta\rho}^{\alpha} \xi^{\eta} v^{\rho} \omega^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\eta\rho}^{\alpha} \xi^{\eta} \omega^{\rho} v^{\beta} \right. \\ &\left. + \left( \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^{\alpha} \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \omega^{\kappa} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^{\alpha} \frac{\partial \omega^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} v^{\kappa} \right) \right] d\lambda d\sigma \Rightarrow\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Sendo o colchete de Lie igual a zero e que é dado por:

$$\left( \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^{\alpha} \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \omega^{\kappa} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^{\alpha} \frac{\partial \omega^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} v^{\kappa} \right) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Portanto vamos focar com a seguinte equação

$$\begin{aligned} \delta \xi^\mu &= [\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\alpha v^\beta \omega^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu \xi^\alpha \omega^\gamma v^\beta + \Gamma_{\eta\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \xi^\alpha v^\beta \omega^\gamma - \Gamma_{\eta\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \xi^\alpha \omega^\gamma v^\beta] d\lambda d\sigma \\ &\Rightarrow \\ \Rightarrow \delta \xi^\mu &= [\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu + \Gamma_{\eta\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\eta - \Gamma_{\eta\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta] \xi^\alpha v^\beta \omega^\gamma d\lambda d\sigma \Rightarrow \\ \lim_{\substack{d\lambda \rightarrow 0 \\ d\sigma \rightarrow 0}} \frac{\delta \xi^\mu}{d\lambda d\sigma} &= [\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu + \Gamma_{\eta\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\eta - \Gamma_{\eta\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta] \xi^\alpha v^\beta \omega^\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Onde a quantidade finita avaliada no ponto P representa o Tensor de Riemann dado por:

$$R_{\alpha\gamma\beta}^\mu = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu + \Gamma_{\eta\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\eta - \Gamma_{\eta\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\eta \quad (\text{A.12})$$

Pode-se demonstrar que a nulidade de todas as componentes do tensor de Riemann implica que a forma métrica fundamental descreve uma variedade plana, fisicamente significando a não presença de um campo gravitacional. Sendo um tensor de Riemann [5] do tipo (1, 3), para n = 4 o número de componentes corresponde a 256.

## Apêndice B

### Parâmetro de densidade

A densidade crítica  $\rho_c$  é definida como a densidade necessária para que a constante de curvatura se torne nula, ou seja, o valor que determina quanto vale o termo de curvatura  $k$  correspondendo a um Universo com geometria plana. Se o conteúdo total do Universo é precisamente este valor (ao que indicam os dados observacionais atuais), então podemos conferir que a curvatura é precisamente zero, e a geometria espacial é Euclidiana. Sendo a equação de Friedmann dada por (3.16) podemos escrever para a densidade crítica [19, 20] o seguinte valor

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (\text{B.1})$$

Onde  $\rho_c = 1,96 \times 10^{-29} h^2 \text{ gcm}^{-3}$  é a densidade crítica e  $h = \frac{H}{100} \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ . A partir do valor da densidade crítica medido experimentalmente, inferimos se o Universo é fechado, aberto ou plano. A densidade crítica é usada para a parametrização das medidas de densidade dos constituintes do Universo. Define-se o parâmetro de densidade de energia  $\Omega$  por

$$\Omega = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (\text{B.2})$$

Onde  $i$  expressa a densidade correspondente a cada constituinte do Universo que esta sendo considerado, ou seja, podemos ter o parâmetro de densidade da matéria  $\Omega_M$ , da radiação  $\Omega_R$ , da constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$ . Logo teremos

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda \Rightarrow \\ \Omega &= \frac{\rho_M}{\rho_c} + \frac{\rho_R}{\rho_c} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Como a definição do parâmetro de densidade expressa uma comparação entre uma dada densidade de algum constituinte com a densidade crítica. Da equação (3.16) vamos ter

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow (H)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{H^2}\right) \\
&\Rightarrow 1 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho}{H^2} - \frac{k}{a^2 H^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1 = \frac{\rho}{\rho_c} - \frac{k}{a^2 H^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 1 = \Omega - \frac{k}{a^2 H^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{k}{a^2 H^2} = \Omega - 1 \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Portanto se  $\rho > \rho_c$  teremos que  $\Omega > 1$  logo  $\kappa > 0$  o que indica que o Universo é fechado (geometria esférica). Se  $\rho < \rho_c$  teremos que  $\Omega < 1$  logo  $\kappa < 0$  o que indica um Universo aberto (geometria hiperbólica). Para  $\rho = \rho_c$  teremos  $\Omega = 1$  portanto  $\kappa = 0$ , logo a geometria do Universo é plana.

O parâmetro de densidade [7, 14] da radiação atual pode ser calculado hoje usando a constante de Hubble o qual é muito pequeno comparado com as outras fontes e é dado por

$$\Omega_{0R} = \frac{\rho_{0R}}{\rho_{0c}} \sim 10^{-4} \tag{B.5}$$

Da equação (3.33) que representa a densidade de radiação em função do fator de escala sabemos que

$$\rho_R \sim \frac{1}{a^4} \tag{B.6}$$

Logo podemos concluir que de (4.3) e (A.18), a temperatura da radiação cai como inverso do fator de escala, ou seja

$$T_R \sim \frac{1}{a} \tag{B.7}$$

Assim quando  $a \rightarrow zero$  verificamos que  $T \rightarrow \infty$ , o que nos leva a uma temperatura de radiação altíssima. Portanto o Universo deveria ser muito diferente do que é hoje. A energia

térmica era muito alta indicando uma agitação térmica elevada o que impedia as partículas de formar estruturas, não existindo assim nem átomos nem moléculas devido às intensas colisões entre partículas, o que indica que o Universo primitivo (primordial) seria formado de gás ultra-relativístico constituído de partículas elementares (quarks, elétrons, neutrinos, fótons...).

Quando o Universo se expande, a temperatura vai diminuindo fazendo surgir dois efeitos diretos devido ao resfriamento. O primeiro, é que algumas partículas deixam de existir devido a sua instabilidade proporcionada pela alta temperatura e conseqüentemente período de vida curto.

Nas colisões as partículas são formadas. Para que isso ocorra a energia de colisão deve ser igual, no mínimo, a energia de repouso da partícula para que ela seja formada na colisão, porém, com o resfriamento ela entra em extinção, ou seja, as partículas existem para  $T > T_c$ .

O outro fenômeno que se destaca é a formação de novas estruturas devido à diminuição da temperatura. O acoplamento forma, neste período, partículas mais complexas. Sendo assim, três quarks podem se juntar para formar um próton, porém isso só vai acontecer quando a energia de ligação for maior que a energia térmica. Para formar um átomo de hidrogênio, por exemplo, que é o mais simples, temos que um próton deve capturar um elétron. A energia de ligação do elétron com o próton é da ordem de 13 eV, portanto para ter-se formado, a temperatura deve estar aproximadamente na faixa dos 4000 K. Com essa temperatura podemos calcular o fator de escala, e com ele encontra-se o *red shift* que é da ordem de  $z \approx 1200$ .

Neste instante acontece o desacoplamento entre a matéria e a radiação à temperatura de 4000 K. A radiação eletromagnética interage fortemente com as partículas carregadas e o campo elétrico e magnético, que oscilando encontra partículas carregadas as agitam havendo assim uma forte interação entre a radiação e a matéria carregada. Então antes do acoplamento para formar uma estrutura neutra temos cargas positivas e negativas soltas em forma de

plasma semelhante a um gás a aproximadamente 4000 K. Quando os elétrons se juntam com os prótons, os fótons podem caminhar por longos percursos sem se espalharem, pois a matéria fica praticamente neutra neste período, então ocorre o desacoplamento da matéria com a radiação. Logo, fótons caminham livremente até que o Universo torna-se transparente a  $T < 4000 K$ , e assim, os fótons podem se propagar. Esse período é chamado de período da recombinação, pois o fóton deixa de ser espalhado pela matéria a esse *red shift*. Então a radiação cósmica de fundo que nós detectamos atualmente é constituída desses fótons que podem se propagar através do Universo e que por terem sido desacoplados da matéria no período da recombinação chegam aos nossos detectores atualmente e são considerados como relíquias do Big Bang, pois nos mostram o passado remoto do Universo.

Sabendo o valor de  $a$  atual podemos determinar a distância em que esses fótons se encontravam. Portanto podemos detectar o raio da superfície do último espalhamento.

Para esses fótons que chegaram até nos hoje, tendo-se o tempo de emissão, podemos determinar em que ponto foi emitido. Essa radiação isotrópica forma uma superfície conhecida como superfície do último espalhamento. Ponto onde os fótons podem caminhar livremente e atingir os nossos detectores hoje. Como nos sabemos, de observações experimentais, o Universo é homogêneo e isotrópico e sua temperatura de radiação sempre é de 2,7 K em qualquer direção. Isto cria um mistério conhecido como problema do horizonte. Existe uma pequena diferença da ordem de  $10^{-5}$ . Devido a estas pequenas flutuações [14], surgiram os aglomerados. Se não tivesse flutuação o Universo seria monótono, isotrópico e homogêneo, portanto o desafio para o modelo é conhecido como problema do horizonte.

## Apêndice C

### Horizonte de partículas

Considere a métrica de Fridmann-Robertson-Walker em coordenadas co-móvel<sup>10</sup> dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (\text{C.1})$$

Ou em termos dessa variável

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ d\chi^2 + S_k(\chi) d\Omega^2 \right] \quad (\text{C.2})$$

Onde  $\chi$  é a cordenada comóvel [21]. Para voltar à forma (C.1) basta substituir  $r = S_k(\chi)$  de forma que

$$S_k(\chi) = \text{sen}(\chi), \quad \text{se } k = +1;$$

$$S_k(\chi) = \chi, \quad \text{se } k = 0$$

$$S_k(\chi) = \text{senh}(\chi), \quad \text{se } k = -1$$

Para um sinal luminoso radial onde  $\theta = cte, \phi = cte$  e  $ds = 0$  a métrica fica dada por

$$\begin{aligned} 0 &= -dt^2 + a^2(t) d\chi^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow dt = a(t) d\chi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{\chi_e}^{\chi_0} d\chi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta\chi = \chi_0 - \chi_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

O horizonte de partículas associada ao ponto p delimita a região que contém os eventos que poderiam ter influenciado esse evento, logo a distância do horizonte [21] de evento de partículas será

$$d_h(t_p) = a(t_p) \Delta\chi_p \quad (\text{C.4})$$

---

<sup>10</sup> Sistema de coordenadas que acompanha a expansão do Universo, de tal forma que um observador estacionário que participa da expansão terá a mesma coordenada em todos os instantes.

Onde  $\Delta\chi_p$  é a distância comóvel percorrida pela luz entre os instantes  $t_p$  e  $t_e = 0$  logo

$$d_h(t_p) = a(t_p) \int_0^{t_p} \frac{dt}{a(t)}$$

Mas:  $a = a(t) \Rightarrow da = \dot{a} d(t) \Rightarrow dt = \frac{da}{\dot{a}} \frac{a}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{H} \frac{da}{a}$ , então

$$d_h(t_p) = a(t_p) \int_0^{a_p} \frac{da}{Ha^2} \quad (C.5)$$

Da equação de Friedman temos que

$$H = H_0 \left[ \sum \Omega_{i0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{ni} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (C.6)$$

Onde  $\Omega_{i0}$  representa o parâmetro de densidade.

Considere um Universo dominado pela radiação onde  $\kappa = 0$ , pois a radiação vai dominar sobre o tipo de curvatura, e seja  $t_p = t^*$  o tempo de recombinação, ou seja, aquele onde a radiação se desacopla da matéria e surge a radiação cósmica de fundo. Vamos obter a distância do horizonte  $d_h$  de um evento no instante da recombinação

$$d_h(a^*) = a^* \int_0^{a^*} \frac{da}{Ha^2} \Rightarrow \quad (C.7)$$

$$\Rightarrow d_h(a^*) = a^* \int_0^{a^*} \frac{da}{H_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_h(a^*) = H_0^{-1} \left( \frac{a^*}{a_0} \right)^2 \quad (C.8)$$

Usando o fator de *red shift*<sup>11</sup> de tal forma que

$$1 + z = \frac{a_0}{a} \Rightarrow \frac{a}{a_0} = (1 + z)^{-1} ,$$

Logo, substituindo vamos ter

$$\Rightarrow d_h(a^*) = H_0^{-1} (1 + z^*)^{-2} \quad (C.9)$$

Dado um evento qualquer no tempo da recombinação de desacoplamento podemos calcular o tamanho da região das partículas que contém aquele evento. Por outro lado,

---

<sup>11</sup> Deslocamento das linhas espectrais observadas nos objetos distantes, como galáxias e quasares. Segundo a Relatividade Geral o *red shift* cosmológico é uma decorrência da taxa de expansão do espaço-tempo.

estamos analisando um ponto em  $t^*$  no desacoplamento da matéria [5] conforme mostra a Figura C.1

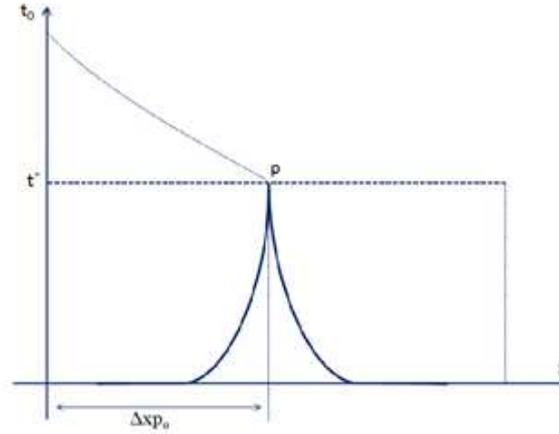


Figura C.1: Passado de um cone de luz em um Universo em expansão a partir de uma singularidade do Big Bang

Onde  $\Delta x_{p_0}$  representa a distância co-móvel percorrida pelo fóton entre os instantes  $t^*$  e  $t_0$ , então vamos ter:

$$\Delta x_{p_0} = \int_{t^*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \quad (C.10)$$

$$\Rightarrow \Delta x_{p_0} = \int_{a^*}^{a_0} \frac{da}{Ha^2} \quad (C.11)$$

Entre  $t^*$  e  $t_0$  vamos admitir que a matéria seja dominante, logo teremos

$$H = H_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (C.12)$$

E conseqüentemente  $\Delta x_{p_0}$  fica

$$\Rightarrow \Delta x_{p_0} = \frac{H_0^{-1}}{a_0^{\frac{3}{2}}} \int_{a^*}^{a_0} \frac{da}{a^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \quad (C.13)$$

$$\Rightarrow \Delta x_{p_0} = \frac{2 H_0^{-1}}{a_0^{\frac{3}{2}}} \left[ a_0^{\frac{1}{2}} - a^{*\frac{1}{2}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x_{p_0} = \frac{2 H_0^{-1}}{a_0} \left[ 1 - \left( \frac{a^*}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (C.14)$$

Calcular a distância física no tempo da recombinação implica em determinar o raio  $\ell$  da superfície do último espalhamento, então

$$\ell = a^* \Delta x_{p_0} \Rightarrow \quad (C.15)$$

$$\Rightarrow \ell = 2H_0^{-1} \left( \frac{a^*}{a_0} \right) \left[ 1 - \left( \frac{a^*}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Rightarrow \quad (C.16)$$

$$\Rightarrow \ell = 2H_0^{-1} [1 + z^*]^{-1} \left[ 1 - (1 + z^*)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (C.17)$$

Para  $z^* = 1200 \Rightarrow \left[ (1 + 1200)^{-\frac{1}{2}} \right] \rightarrow 0$ , logo podemos desprezar este termo, portanto o raio da superfície do último espalhamento será

$$\Rightarrow \ell = 2H_0^{-1} [1 + z^*]^{-1} \quad (C.18)$$

Comparando as distâncias  $\ell$  e  $d_h$  obteremos

$$\frac{\ell}{d_h} = \frac{2H_0^{-1} [1 + z^*]^{-1}}{H_0^{-1} (1 + z^*)^{-2}} \Rightarrow \quad (C.19)$$

$$\frac{\ell}{d_h} = 2 [1 + z^*] \Rightarrow \quad (C.20)$$

$$\frac{\ell}{d_h} \approx 2 z^* \Rightarrow \frac{\ell}{d_h} \sim 2 \cdot 1200 \Rightarrow \frac{\ell}{d_h} \sim 2400 \Rightarrow \ell \sim 2400 d_h \quad (C.21)$$

Com  $\ell \gg d_h$ , como explicar que os fótons oriundos de várias direções possuem a mesma temperatura que a das outras direções sem haver interação mútua, ou seja, como o Universo pode ser tão homogêneo e isotrópico se ele surgiu de regiões causalmente desconectadas? A inflação do Universo será a resposta.

Sabemos que a radiação por ser isotrópica em alto grau, se constitui em um desafio para o modelo cosmológico, porque os fótons hoje observados vieram de um período de recombinação e, entre esse instante, percorre-se uma longa distância. Sendo o tamanho do horizonte muito menor que o raio da superfície do último espalhamento, não se tem conexão causal.

## Apêndice D

### Distância do diâmetro angular ( $d_A$ )

Considere  $\delta$  o ângulo visto por um observador O de uma dada fonte que possui diâmetro próprio  $D$ , localizada em  $\chi_e$  e cuja radiação, analisada hoje [23], foi emitida no instante  $t_e$ . Considerando a geometria da figura 4.3, e que  $\delta \ll 1$  temos que

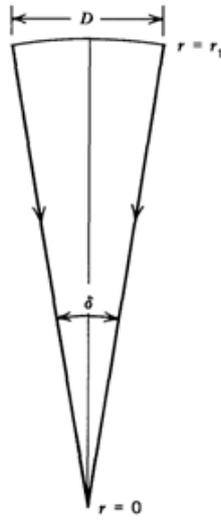


Figura D.1: Geometria da distância do diâmetro angular

$$d_A = \frac{D}{\delta} \quad (\text{D.1})$$

Na métrica de Fridmann-Robertson-Walker, a distância [24] do diâmetro angular  $d_A$  é dada por

$$d_A = a_e r_e \quad (\text{D.2})$$

Onde para a superfície do último espalhamento  $\chi_e$  é a distância comóvel do emissor até o agente, logo a distância do diâmetro angular coincide com a distância da superfície do último espalhamento no período de recombinação, então:

$$d_A = a^* \chi_e \Rightarrow \quad (\text{D.3})$$

$$d_A = a^* \int_{t^*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \ell \quad (\text{D.4})$$

Então podemos determinar o ângulo submetido por uma região do tamanho do horizonte com diâmetro próprio [13, 22] igual ao tamanho do horizonte  $d_{horiz}$  na superfície do último espalhamento.

$$\delta = \frac{2 d_{horiz}}{\ell} \Rightarrow \delta \sim (z^*)^{-1} \quad (\text{D.5})$$

Logo calculando teremos

$$\frac{2 d_{horiz}}{\ell} = (z^*)^{-1} \Rightarrow \frac{\ell}{d_{horiz}} = 2z^*$$

Fazendo  $z^* \sim 10^3 \rightarrow \delta \sim 10^{-3} \text{ rad} \rightarrow \delta \sim 0,06^\circ$

A região causalmente subtendida esta conectada por um ângulo de  $0,06^\circ$ , então o tamanho do horizonte tem que ser maior do que a distância do diâmetro angular, ou seja

$$d_{horiz}(a^*) > l(a^*) \quad (\text{D.6})$$

Esta condição pode ser satisfeita se admitirmos que o Universo primordial passou por uma fase de rápida expansão conhecida como fase inflacionária. Logo para uma expansão exponencial, no período inflacionário podemos ter a evolução do fator de escala em função do tempo dada por

$$a(t) = a(\tilde{t}) e^{H_I(t-\tilde{t})} \quad (\text{D.7})$$

Onde  $\tilde{t}$  representa o início da fase inflacionária ou

$$a(t) = a_I e^{-H_I(t_I-t)} \quad (\text{D.8})$$

Onde  $t_I$  indica o fim da fase inflacionária e  $H = \frac{\dot{a}}{a} = H_I$  corresponde ao parâmetro de Hubble que é constante durante a fase inflacionária.

Logo o tamanho do horizonte no período de recombinação será dado por

$$d_{Horiz} = a^* \int_0^{t^*} \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \quad (\text{D.9})$$

$$d_{Horiz} = a^* \left[ \int_0^{\tilde{t}} \frac{dt}{a(t)} + \int_{\tilde{t}}^{t_I} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_I}^{t^*} \frac{dt}{a(t)} \right] \quad (\text{D.10})$$

Como o tamanho do horizonte é pequeno vamos ignorar as partes extremas da integral, e sendo assim a distância do horizonte fica

$$d_{Horiz} = a^* \int_{\tilde{t}}^{t_I} \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \quad (D.11)$$

$$d_{Horiz} = a^* \int_{\tilde{t}}^{t_I} \frac{dt}{a_I} e^{-H_I(t-t_I)} \Rightarrow \quad (D.12)$$

$$d_{Horiz} = \frac{a^*}{a_I H_I} \left[ - (1 - e^{-H_I(\tilde{t}-t_I)}) \right] \Rightarrow \quad (D.13)$$

$$d_{Horiz} = \frac{a^*}{a_I H_I} \left[ e^{H_I(\Delta t_I)} \right] \quad (D.14)$$

onde  $\Delta t_I = t_I - \tilde{t}$

Sabendo que

$$\ell \simeq 2 H_0^{-1} \frac{a^*}{a_0} \quad (D.15)$$

comparando (4.45) com (4.46) teremos:

$$d_{horiz}(a^*) > l(a^*) \Rightarrow \quad (D.16)$$

$$\Rightarrow \frac{a^*}{a_I H_I} e^{H_I(\Delta t_I)} > \frac{2a^*}{H_0 a_0} \Rightarrow \quad (D.17)$$

$$\Rightarrow e^{H_I(\Delta t_I)} > \frac{a_I H_I}{H_0 a_0} \quad (D.18)$$

Com essa análise, verificarmos que a origem do período inflacionário pode ser justificada por uma expansão exponencial.

Segundo [5], uma expansão verdadeiramente exponencial não é necessária, pois para qualquer expansão acelerada, a curvatura do espaço irá diminuir em relação à densidade de energia, e a distância do horizonte vai crescer rapidamente. Para começarmos uma fase inflacionária, postula-se a existência de um campo escalar responsável pela inflação e que é submetido a um potencial  $V(\phi)$ , o *inflaton*  $\phi$ .

## Bibliografia

- [1] THIEL, R. **E a Luz se Fêz**. O Romance da Astronomia, 2<sup>a</sup> edição, Edições Melhoramentos.
- [2] SOUZA, R. E. **Introdução à Cosmologia**. Edusp, 2004.
- [3] A. H. Guth, Phys. Rev D 23, 347 (1981).
- [4] COLLINS, P. D. B., MARTIN, A. D., SQUIRES, E. J. **Particle Physics and Cosmology**, Wiley, 1989.
- [5] CARROLL, S. **Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity**. Addison-Wesley, 2004. California.
- [6] DODELSON, S. **Modern Cosmology**. AP, 2003.
- [7] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press.
- [8] MUKHANOV, V. F. **Physical Foundations of Cosmology**. Cambridge University Press, 2005. Cambridge.
- [9] OHANIAN, H. C. **Gravitation and Spacetime**. W. W. Norton & Company, 1976.
- [10] RIBAS, M. O., em **Modelos Cosmológicos Acelerados com Campos Fermiônicos**, tese de Doutorado, 32, UFPA, 2008.
- [11] CARMELI M. **Group Theory and General Relativity**. Mc Graw-Hill, 1977.
- [12] PAPAPETROU A. **Lectures on General Relativity**. D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [13] SOUZA, R. C. em **Modelos Cosmológicos pela Simetria de Noether**, dissertação de mestrado, 7, UFPR, 2009.
- [14] HORVATH, J. E.[*et al*], LUGONES, G., Jr., S.S., TEIXEIRA, R., ALLEN, M.P. **Cosmologia Física**. Editora Livraria da Física.
- [15] HARWING S., ISRAEL, W. **Three hundred years of gravitation**. Cambridge
- [16] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry**. Academic Press, 1983. University Press, 1987.
- [17] ISLAM, J.N. **An Introduction to Mathematical Cosmology**. Cambridge University Press, 1992.
- [18] HAWKING, S. **O Universo numa Casca de Noz**. Editora Arx, 2002.

- [19] RAINE, T. J., THOMAS, E. G. **An Introduction to the Science of Cosmology**. IOP Publishing Ltd, 2001.
- [20] BERRY, M. **Principles of Cosmology and Gravitation**. CUP, 1976.
- [21] OLIVEIRA, M. C. B. em **Inflação Cósmica e Teorias Escalar-Tensoriais da Gravitação**, dissertação de mestrado, 20, UFRJ, 2010.
- [22] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [23] TORÍBIO, A. M. V. em **Análise de Modelos Cosmológicos de Unificação da Matéria e Energia Escuras no Universo**, tese de Doutorado, 33, UFRJ, 2007.
- [24] SCHUTZ, B. F. **Geometrical Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press, 1980.
- [25] KAKU, M. **Quantum Field Theory A modern introduction**. Oxford University Press.
- [26] ANDRADE, L. N. **Introdução à Computação Algébrica com o Maple**. Sociedade Brasileira de Matemática.
- [27] OLINTO, A. V. et. al **“Natural Inflaton with Pseudo Nambu-Goldstone Bosos”**. Volume 65, Number 26, p. 3233, Physical Review Letters,
- [28] MISNER, C.W., THORNE, K.S., WHEELER, J.A. **Gravitation**. W. H. Freeman and company São Francisco, 1970.