

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD
NA PRESENÇA DO MONOPOLO GLOBAL

JOSÉ ARIMATEIA DOS SANTOS ARAÚJO

CAMPINA GRANDE
2010

BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD
NA PRESENÇA DO MONOPOLO GLOBAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD
NA PRESENÇA DO MONOPOLO GLOBAL

Dissertação realizada sob orientação da
Prof. Dra. Geusa de Araújo Marques,
apresentada ao Departamento de Física,
em complementação aos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

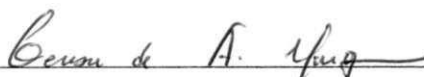
JOSÉ ARIMATEIA DOS SANTOS ARAÚJO

BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD NA PRESENÇA DO MONOPOLO GLOBAL

JOSÉ ARIMATEIA DOS SANTOS ARAÚJO

Aprovada em 27 de Agosto de 2010

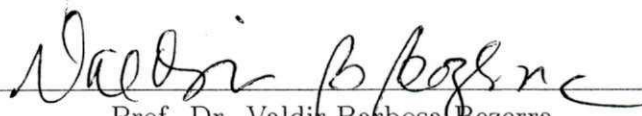
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dra. Geusa de Araújo Marques
Orientadora



Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
Examinador Interno



Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Examinador Externo

Ao Criador, Deus
À Minha Família.

AGRADECIMENTOS

À Deus Pai Todo Poderoso, que me deu saúde e perseverança para chegar até aqui.

Aos meus pais, meu irmão e meus avós, as pessoas mais importantes de minha vida.

Agradeço à Professora Geusa Marques, pela sua paciência e dedicação na orientação deste trabalho.

Ao Professor Valdir Bezerra, o qual foi de fundamental importância para a realização deste Mestrado.

A todos os professores deste departamento, e também da UFPB que compartilharam comigo seus conhecimentos ao longo do curso.

Ao amigo Justino, o qual me acompanhou durante quase toda vida acadêmica.

Aos demais colegas e amigos, que direta ou indiretamente contribuíram nesta caminhada.

E aos departamentos de Física da UFCG e UFPB, nos quais me deram suporte para realização deste trabalho.

"A natureza é exatamente simples, se conseguirmos encará-la de modo apropriado. Essa crença tem-me auxiliado, durante toda a minha vida, a não perder as esperanças, quando surgem grandes dificuldades de investigação".

Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho é feito o estudo do buraco negro de Schwarzschild na presença do monopolo global, e dos efeitos que este tipo de defeito topológico traz para a geometria do espaço-tempo. Inicialmente, com a obtenção da métrica que descreve este espaço-tempo, mostraremos como o monopolo global afeta o desvio da órbita do planeta Mercúrio, e ainda analisaremos a estabilidade das órbitas com base no cálculo dos potenciais. Em seguida consideraremos que o monopolo global possui em suas vizinhanças a quintessência e a partir da métrica obtida, considerando que os buracos negros emitem modos de vibração característicos, calcularemos os chamados modos quase-normais de vibração e as frequências associadas. Por último, ainda neste contexto, faremos o estudo da termodinâmica dos buracos negros, buscando obter leis mecânicas, análogas às leis clássicas da termodinâmica usual.

Abstract

In this paper is studied the Schwarzschild black hole in the presence of a global monopole, and the effects that this kind of topological defect brings to the spacetime geometry. Initially, using the metric which describes this space-time, we show how the global monopole affects the deviation of the orbit of the Mercury planet , and also analyze the stability of orbits based on the calculation of potentials. Then, we consider that the global monopole has in their neighborhoods the quintessence and form the metric obtained, by assuming that the black holes emit characteristic vibration modes, we calculate the so-called quasi-normal modes of vibration and the associated frequencies. Finally, even in this context, we study the thermodynamics of black holes, trying to get mechanical laws, similar to the usual classical thermodynamic laws.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Relatividade Geral	4
2.1	Fundamentos da Relatividade Geral	4
2.2	Equações de Einstein	7
2.3	Solução de Schwarzschild na presença do Monopolo global	11
2.3.1	Precessão do Periélio de Mercúrio	18
2.3.2	Estabilidade das órbitas	23
3	Buraco negro de Schwarzschild na presença do monopolo global mais Quintessência	29
3.1	Equações de movimento	29
3.2	Modos Normais de vibração	32
3.2.1	Aproximação WKB para modos normais	33
3.2.2	Aproximação assintótica para a solução interior	35

3.2.3	Equação para as frequências dos modos normais	39
4	Termodinâmica do Buraco Negro com quintessência	42
4.1	Formulação da Termodinâmica	42
4.1.1	Leis da Termodinâmica	44
4.2	Os Buracos Negros e a Termodinâmica	45
4.2.1	Leis da Termodinâmica para buracos negros	49
4.3	Capacidade Térmica	54
5	Conclusões e Perspectivas	57
	Bibliografia	59

Lista de Figuras

2.1	Potencial efetivo V em função de r , para $L = 0, b, 2b, 2b\sqrt{3}$	26
2.2	Potencial efetivo V em função de r , para $L = 4b, 7b, 10b$	27
3.1	Barreira de potencial efetivo	33
4.1	Variação do raio do horizonte de eventos com a massa	48
4.2	Capacidade térmica para o buraco negro de Schwarzschild em função de M . .	55
4.3	Capacidade térmica para o buraco negro de Schwarzschild com monopolo e quintessência em função de M	56

Capítulo 1

Introdução

A teoria relativística da gravitação apresenta-se como uma das mais belas e revolucionárias concepções da Ciência Moderna, ao sugerir que a gravidade se deve à geometria de um espaço-tempo curvo quadridimensional. Juntamente com a teoria quântica, a Relatividade Geral é um dos mais profundos desenvolvimentos da Física no século XX [1].

Cuidadosamente testada, a Relatividade Geral nos fornece o entendimento do Universo em grandes escalas de distância e é fundamental na explanação de fenômenos como o colapso gravitacional, no estudo de buracos negros, estrelas de nêutrons, ondas gravitacionais e o Big-bang.

Nesse contexto, a teoria relativística prediz que haverá a formação de buracos negros, sempre que a massa deste for comprimida em um volume menor que o chamado raio gravitacional, o qual é pequeno o suficiente, para que a força gravitacional na superfície não permita que nada escape, inclusive a luz. Isso implica que a velocidade necessária para deixar as vizinhanças de um buraco negro, ou seja, a velocidade de escape, é igual a velocidade da luz. Sendo esta a velocidade limite de propagação na natureza, o resultado é que nenhum sinal ou partícula pode deixar a região interna de um buraco negro.

Dado que sinais não podem escapar de um buraco negro, à medida que objetos físicos e

radiação caem nesta região, a superfície limite de um buraco negro, chamada horizonte de eventos, é uma superfície tipo-luz. A criação de um buraco negro, significa a formação de uma estrutura causal não-trivial no espaço-tempo. Diante dessas características específicas, novos métodos foram desenvolvidos para analisar a interação de buracos negros com campos e matéria, e também com outros buracos negros.

Embora o termo buraco negro tenha sido introduzido por Wheeler em 1967, seu estudo teórico já tem uma longa história. A possibilidade da existência de tais objetos, foi inicialmente discutida por Michell e Laplace no âmbito da teoria Newtoniana no final do século XVIII [2]. Na relatividade geral, o problema surge um ano após a teoria ter sido desenvolvida, quando Schwarzschild obteve a primeira solução exata das equações de Einstein no vácuo.

Um campo gravitacional de particular interesse, a partir do qual pode ser analisado sua interação com os buracos negros, está relacionado com o monopolo global. Este é um tipo de defeito topológico, ou seja, uma configuração estável de matéria, que pode ter sido originado em transições de fase no universo primordial. Mesmo não havendo nenhuma evidência experimental, acerca desse tipo de estrutura física, os resultados obtidos com o estudo dos monopolos globais, traz novas ideias para a relatividade geral.

Neste trabalho, portanto, consideraremos a solução de Schwarzschild, admitindo que o buraco negro está na presença do monopolo global, e a partir do da métrica obtida para esse espaço-tempo, analisaremos alguns efeitos provenientes dessa interação. O conteúdo está organizado da seguinte forma: no capítulo 2, é feita uma revisão da Teoria da Relatividade Geral, discutindo seus fundamentos e o processo de obtenção das equações de Einstein. Neste mesmo capítulo, obtemos a solução de Schwarzschild com monopolo global, e discutimos alguns efeitos inerentes à métrica desse espaço-tempo. No capítulo 3, fazemos a consideração que o buraco negro de Schwarzschild com monopolo está na presença da quintessência e

calculamos os modos normais de vibração emitidos por estes, via aproximação WKB. No capítulo seguinte, considerando este mesmo espaço-tempo, estudamos a termodinâmica dos buracos negros, em analogia com a termodinâmica usual. Por último, são apresentadas as conclusões.

Capítulo 2

Relatividade Geral

2.1 Fundamentos da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Restrita ou Especial, elaborada por Albert Einstein no início do século passado, provocou modificações profundas nos conceitos e idéias acerca da estrutura do Universo, cujas consequências ainda estão longe de serem esgotadas. Essa teoria mostrou que tempo e espaço não são mais independentes, existindo agora um relação intrínseca entre esses dois conceitos. Classicamente o espaço é considerado como tendo três dimensões, sendo o tempo uma quarta dimensão totalmente desconexa do espaço [3]. Com a Relatividade espaço e tempo se misturam, e esta interdependência é matematicamente representada pelas transformações de Lorentz ¹. Têm-se então, um novo conceito, o de espaço-tempo, uma estrutura quadridimensional, com três dimensões espaciais e uma temporal.

No que diz respeito à Teoria da Relatividade Especial, esta afirma que as leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais, não existindo nenhum referencial preferencial [7]. Isto implica, que ao se considerar uma transformação de coordenadas entre dois referenciais inerciais, as leis físicas serão invariantes sob essa transformação. Para a construção da Teoria da Relatividade Geral, deve-se considerar um princípio equivalente, porém de uma forma mais

¹Equações que relacionam as coordenadas do espaço-tempo em dois referenciais inerciais.

ampla, incluindo quaisquer transformações de coordenadas entre referenciais arbitrários.

Um outro princípio fundamental para a elaboração da Teoria da Relatividade Geral, é o princípio da equivalência, o qual afirma que: "Em um ponto qualquer de um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, tal que numa região suficientemente pequena em torno do ponto em questão, as leis da Natureza possuem as mesmas formas como em um sistema de coordenadas cartesianas, não acelerados na ausência de campo gravitacional"[8].

Na prática, esse princípio implica que as equações de movimento ou as equações de campo para as leis da Natureza, devem ser correspondentes às equações da Relatividade Especial, ao se passar para um sistema de coordenadas localmente inercial, ou seja, um referencial em queda livre.

Desta forma, um primeiro passo para se construir a Teoria da Relatividade Geral, é deixar de lado o espaço Euclideano e o sistema de coordenadas cartesianas, e adotar uma estrutura mais abrangente, ou seja, a estrutura de uma variedade Riemanniana. Para isso, se faz necessário o uso de um ferramental matemático que possa descrever essa generalidade, que é a geometria diferencial [4].

Um dos conceitos fundamentais da teoria dos tensores é o de derivada covariante. Diferentemente do sistema de coordenadas cartesianas, em um sistema curvilíneo, a diferencial de um vetor não é um vetor e a derivada parcial não é um tensor por transformações gerais de coordenadas. Isto deve-se ao fato de que a diferencial é calculada levando-se em conta a diferença entre dois vetores, em pontos infinitesimalmente separados do espaço-tempo, e que as leis de transformação para vetores dependem da posição. Sendo assim, a derivada covariante fica definida como,

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} V^{\lambda}, \quad (2.1)$$

onde $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ são os símbolos de Christoffel. No caso de um tensor de ordem arbitrária, essa definição pode ser generalizada, escrevendo-se

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= \partial_{\rho} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_l}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \\ &+ \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_l}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \dots - \Gamma_{\rho\nu_1}^{\lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma_{\rho\nu_2}^{\lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_l}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} - \dots \end{aligned}$$

Para uma melhor compreensão das derivadas covariantes, se faz necessário entender o conceito de transporte paralelo. Sabe-se que na Relatividade Especial há uma compreensão bastante clara do que vem a ser um campo vetorial constante, que é aquele cujas componentes não mudam de um lugar para outro. Porém, este conceito não é invariante por transformações gerais de coordenadas, e onde não há um sistema de coordenadas preferencial, a idéia de um campo vetorial constante não tem sentido. Por outro lado, é intuitivamente claro que um observador, ao se deslocar ao longo de uma curva arbitrária, pode transportar um vetor constante ao longo dessa curva. Esse processo é chamado de transporte paralelo. Como consequência desse processo pode-se definir uma quantidade geométrica chamada tensor de curvatura ou tensor de Riemann [5, 6] dado por

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}. \quad (2.2)$$

As propriedades algébricas do tensor de curvatura, se tornam mais claras, ao se considerar a forma covariante de $R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}$ que é definida por

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} \equiv g_{\rho\sigma} R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu}. \quad (2.3)$$

A partir dessa definição, pode-se mostrar que o tensor de curvatura é simétrico pela troca do primeiro com o segundo par de índices, ou seja, $R_{\rho\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\lambda}$ e anti-simétrico pela troca de qualquer um dos índices desses pares, $R_{\rho\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\rho\mu\nu}$. Uma outra propriedade importante do tensor de curvatura, é que a soma das permutações cíclicas dos três últimos índices é igual

a zero, podendo-se escrever

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\lambda} + R_{\rho\nu\lambda\mu} = 0. \quad (2.4)$$

O tensor de Riemann também satisfaz a uma identidade envolvendo derivadas, conhecida como identidade de Bianchi, dada por

$$\nabla_{\sigma} R_{\rho\lambda\mu\nu} + \nabla_{\lambda} R_{\sigma\rho\mu\nu} + \nabla_{\rho} R_{\lambda\sigma\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Tomando-se o traço do tensor de Riemann, têm-se o tensor de Ricci, escrito como

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} \quad (2.6)$$

e contraindo do tensor de Ricci, obtém-se o escalar de curvatura, dado por

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\rho} R_{\mu\rho}. \quad (2.7)$$

Sendo assim, com a introdução do tensor de curvatura de Riemann, motivada pela necessidade do seu uso na construção das equações de campo gravitacional, foi possível desenvolver um conjunto de equações capazes de descrever matematicamente a estrutura do espaço-tempo. Essas equações são as chamadas equações de Einstein, as quais serão, de forma geral, deduzidas a seguir.

2.2 Equações de Einstein

As equações de campo gravitacional necessitam para sua dedução que sejam estabelecidos alguns axiomas baseados em princípios físicos. Esses axiomas dependem do tipo de equação que se deseja obter. De posse dessas equações, faz-se o confronto com os dados experimentais e é verificado se há concordância com estes ou não. Caso o resultado não seja satisfatório, outras hipóteses são lançadas.

Para a dedução das equações de Einstein, são escolhidos os seguintes axiomas:

- a gravitação deve ser descrita por uma métrica Lorentziana, sobre uma determinada variedade;
- as equações de movimento para a métrica devem possuir apenas dependência do conteúdo de matéria de todos os campos no espaço-tempo;
- as equações de movimento devem ser covariantes sob transformações gerais de coordenadas e, portanto, devem ter caráter tensorial;
- o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, deve satisfazer a relação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, significando que o conteúdo de energia-momento dos campos de matéria, deve ser conservado localmente;
- a matéria deve ter comportamento causal, ou seja, esta não pode viajar com velocidade superior à da luz;
- no limite de campos fracos, a gravitação de Newton deve ser válida;
- as equações de campo devem conter, no máximo, derivadas de segunda ordem.

Esta última condição, ao restringir as derivadas apenas de segunda ordem, deixa de lado o problema que seria o de escolher infinitas equações de campo. Além do mais, equações com derivadas de ordem superior a 2, necessitam que sejam impostas outras condições iniciais para se determinar a evolução do sistema de campos.

Um outro axioma que poderia ainda ser considerado, é que as equações de campo devem ser obtidas a partir de um princípio de mínima ação, na forma covariante geral.

Levando em conta as condições acima, tem-se da conservação do tensor energia-momento que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{2.8}$$

a qual obriga a ter uma quantidade geométrica covariante, contendo derivada até 2ª ordem e com divergência nula. Sendo assim, a única possibilidade é

$$(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) = aT_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

sendo $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ e Λ e a constantes a serem determinadas.

O lado esquerdo da equação (2.9) possui divergência nula pois $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$. Para mostrar que $\nabla_\mu G_{\nu}^{\mu} = 0$, temos da identidade de Bianchi que

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} \equiv 0 \quad (2.10)$$

a qual fornece

$$g^{\mu\lambda}(\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu}) \equiv 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma}^\mu + \nabla_\sigma R_{\rho\nu} - \nabla_\rho R_{\sigma\nu} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla_\mu R_{\nu\rho\sigma}^\mu = 2\nabla_{[\rho} R_{\sigma]\nu} \quad (2.13)$$

Contraindo esta expressão com $g^{\nu\sigma}$, obtém-se

$$\nabla_\mu R_\rho^\mu = \frac{1}{2}\nabla_\rho R \quad (2.14)$$

Aplicando ∇^μ a $G_{\mu\nu}$, tem-se

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = \nabla^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\nabla_\nu R - \frac{1}{2}\nabla_\nu R \quad (2.15)$$

o que implica

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.16)$$

ou seja, $G_{\mu\nu}$ possui divergência nula.

Para que a equação (2.9) esteja dimensionalmente compatível, a constante Λ deve ter dimensões de $[L^{-2}]$. Como $T_{\mu\nu}$ tem dimensões de $[ML^2T^{-2}L^{-3}]$ a constante a deve ter

dimensões de $[M^{-1}L^{-1}T^2]$. Sendo G a constante gravitacional de Newton, cujas dimensões são de $[M^{-1}L^3T^{-2}]$ e c a velocidade da luz de dimensões $[LT^{-1}]$, a constante a pode ser dada em termos dessas constantes, de tal forma que fique dimensionalmente compatível. Sendo assim, pode-se escrever que

$$a = \frac{\kappa G}{c^4} \quad (2.17)$$

sendo κ uma constante adimensional, cujo valor é 8π , obtido pela imposição de que no limite de campo fraco devemos obter o resultado Newtoniano.

A constante Λ é um parâmetro da teoria que deve ser medido e é chamada de constante cosmológica.

Dessa forma a equação (2.9) passará a ser escrita como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi GT_{\mu\nu}}{c^4} \quad (2.18)$$

Esta equação é conhecida como equação de Einstein com constante cosmológica. No vácuo, o conteúdo de massa-energia é nulo, e portanto $T_{\mu\nu}=0$. Para este caso, as equações de Einstein se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

e quando a constante cosmológica é nula,

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.20)$$

O termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ foi introduzido por Einstein de modo a alterar suas equações, com o objetivo de obter uma solução cosmológica que descrevesse um universo homogêneo, isotrópico e estático.

2.3 Solução de Schwarzschild na presença do Monopolo global

Transições de fase no Universo primitivo, podem ter dado origem a diversos tipos de defeitos topológicos, dentre os quais pode-se citar os monopolos globais, a corda cósmica e as paredes de domínio [9, 10]. No caso dos monopolos globais, esses são formados devido a uma quebra espontânea de simetria global de gauge e a maior parte da sua energia está concentrada em uma pequena região, próxima ao núcleo. Uma configuração correspondente ao monopolo global foi proposta por Barriola e Vilenkin [11]. Este modelo se constitui de um iso-triplete de campo escalar ϕ^a , cuja simetria global $O(3)$ é espontaneamente quebrada para $U(1)$. Para se estudar os monopolos globais, deve ser considerada a seguinte densidade de Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{4} \lambda (\phi^a \phi_a - \eta^2)^2, \quad (2.21)$$

sendo ϕ^a o triplete de campos isoescalares, o qual é dado por $\phi^a = \eta f(r) \frac{x^a}{r}$, com $a = 1, 2, 3$ e η é um parâmetro que está associado com a escala de energia na qual ocorreu a quebra espontânea da simetria.

Para um monopolo isolado e estático, a métrica mais geral que possui simetria esférica pode ser escrita da seguinte forma:

$$ds^2 = -c^2 A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.22)$$

Considerando agora o operador d'Alembertiano que é dado por

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (2.23)$$

nesse espaço-tempo ele adquire a forma

$$\square = -\frac{1}{c^2 A} \partial_t^2 + \left[\frac{A'}{2AB} - \frac{B'}{B^2} + \frac{B'}{2B^2} + \frac{2}{Br} \right] \partial_r + \frac{1}{B} \partial_r^2 + \frac{\cot g \theta}{r^2} \partial_\theta + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \partial_\varphi^2 \quad (2.24)$$

onde omitiu-se a dependência em r de A e B por questões de simplicidade.

Agora, é necessário resolver as equações de campo para ϕ^a . Desta forma, sendo

$$\phi^a = \eta f(r) \frac{x^a}{r} \quad (2.25)$$

tem-se

$$\phi^2 = \phi^a \phi_a = \eta f(r) \frac{x^a}{r} \eta f(r) \frac{x_a}{r} \quad (2.26)$$

$$\phi^2 = \eta^2 f^2(r) \frac{x^a x_a}{r^2} \quad (2.27)$$

$$\phi^2 = \eta^2 f^2(r) \quad (2.28)$$

já que $x^a x_a = r^2$. Sendo assim as equações de movimento serão:

$$\lambda(\phi^2 - \eta^2)\phi^a + \square\phi^a = 0. \quad (2.29)$$

Para $a = 1$, obtém-se

$$\phi^1 = \eta f(r) \frac{x^1}{r} = \eta f(r) \text{sen}\theta \cos\varphi \quad (2.30)$$

Com o uso desta equação, o operador d'Alambertiano atuando em ϕ^1 será:

$$\begin{aligned} \square\phi^1 = & \left(-\frac{1}{c^2 A} \partial_t^2 + \left[\frac{A'}{2AB} - \frac{B'}{B^2} + \frac{B'}{2B^2} + \frac{2}{Br} \right] \partial_r + \frac{1}{B} \partial_r^2 + \frac{\cotg\theta}{r^2} \partial_\theta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \partial_\varphi^2 \right) \eta f(r) \text{sen}\theta \cos\varphi \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \square\phi^1 = & \left[\frac{A'}{2AB} - \frac{B'}{B^2} + \frac{B'}{2B^2} + \frac{2}{Br} \right] \eta f'(r) \text{sen}\theta \cos\varphi + \frac{1}{B} \eta f''(r) \text{sen}\theta \cos\varphi + \\ & + \frac{\cotg\theta}{r^2} \eta f(r) \cos\theta \cos\varphi - \frac{1}{r^2} \eta f(r) \text{sen}\theta \cos\varphi - \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \eta f(r) \text{sen}\theta \cos\varphi \end{aligned} \quad (2.32)$$

Desta forma a equação de movimento (2.29) para ϕ^1 será escrita como:

$$\left[\frac{A'}{2AB} - \frac{B'}{B^2} + \frac{B'}{2B^2} + \frac{2}{Br} \right] \eta f'(r) \text{sen}\theta \cos\varphi + \frac{1}{B} \eta f''(r) \text{sen}\theta \cos\varphi + \frac{\cotg\theta}{r^2} \eta f(r) \cos\theta \cos\varphi -$$

$$-\frac{1}{r^2}\eta f(r)\text{sen}\theta\text{cos}\varphi - \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\eta f(r)\text{sen}\theta\text{cos}\varphi + \lambda[\eta^2 f^2(r) - \eta^2]\eta f(r)\text{sen}\theta\text{cos}\varphi = 0 \quad (2.33)$$

que dividida por $\eta\text{sen}\theta\text{cos}\varphi$ resulta em

$$\left[\frac{A'}{2AB} - \frac{B'}{B^2} + \frac{B'}{2B^2} + \frac{2}{Br} \right] f'(r) + \frac{1}{B} f''(r) - \frac{2}{r^2} f(r) + \lambda\eta^2 f(r)[f^2(r) - 1] = 0 \quad (2.34)$$

e ainda pode ser escrita como

$$\frac{1}{B} f''(r) + \left[\frac{2}{Br} + \frac{1}{2A} \left(\frac{A}{B} \right)' \right] f'(r) - \frac{2}{r^2} + \lambda\eta^2 f(r)[f^2(r) - 1] = 0 \quad (2.35)$$

Resolvendo agora pra $a = 2$ temos

$$\phi^2 = \eta f(r) \frac{x^2}{r} = \eta f(r) \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \quad (2.36)$$

que fornece

$$\begin{aligned} \square\phi^2 = & \left(-\frac{1}{c^2 A} \partial_t^2 + \left[\frac{A'}{2AB} - \frac{B'}{B^2} + \frac{B'}{2B^2} + \frac{2}{Br} \right] \partial_r + \frac{1}{B} \partial_r^2 + \frac{\text{cotg}\theta}{r^2} \partial_\theta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \partial_\varphi^2 \right) \eta f(r) \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \end{aligned} \quad (2.37)$$

e de forma análoga a anterior, obtém-se o seguinte resultado

$$\frac{1}{B} f''(r) + \left[\frac{2}{Br} + \frac{1}{2A} \left(\frac{A}{B} \right)' \right] f'(r) - \frac{2}{r^2} + \lambda\eta^2 f(r)[f^2(r) - 1] = 0 \quad (2.38)$$

Para ϕ^3 , o resultado será

$$\begin{aligned} \square\phi^3 = & \left(-\frac{1}{c^2 A} \partial_t^2 + \left[\frac{A'}{2AB} - \frac{B'}{B^2} + \frac{B'}{2B^2} + \frac{2}{Br} \right] \partial_r + \frac{1}{B} \partial_r^2 + \frac{\text{cotg}\theta}{r^2} \partial_\theta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \partial_\varphi^2 \right) \eta f(r) \text{cos}\theta \end{aligned} \quad (2.39)$$

que também resulta em

$$\frac{1}{B} f''(r) + \left[\frac{2}{Br} + \frac{1}{2A} \left(\frac{A}{B} \right)' \right] f'(r) - \frac{2}{r^2} + \lambda\eta^2 f(r)[f^2(r) - 1] = 0 \quad (2.40)$$

Assim as equações (2.35), (2.38) e (2.40), mostram que a equação de movimento pode ser escrita como

$$\frac{1}{B}f''(r) + \left[\frac{2}{Br} + \frac{1}{2A} \left(\frac{A}{B} \right)' \right] f'(r) - \frac{2}{r^2} + \lambda\eta^2 f(r)[f^2(r) - 1] = 0 \quad (2.41)$$

Para resolver as equações de Einstein, inicialmente será feito o cálculo do tensor energia-momento, o qual é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi^a)(\partial_\nu \phi^a) - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.42)$$

que com a Lagrangiana dada por (2.21) fica

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi^a)(\partial_\nu \phi^a) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{4} \lambda (\phi^a \phi_a - \eta^2)^2 \right] \quad (2.43)$$

Calculando as componentes do tensor energia-momento, será obtido o seguinte resultado

$$T_{00} = -\frac{A(r)\eta^2}{2} \left[\frac{f'^2(r)}{B(r)} + \frac{2f(r)^2}{r^2} \right] + A(r) \frac{\lambda}{4} \eta^4 [f^2(r) - 1]^2 \quad (2.44)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2} \eta^2 f'^2(r) - \frac{B(r)}{r^2} \eta^2 f^2(r) - \frac{B(r)}{4} \lambda \eta^4 [f^2(r) - 1]^2 \quad (2.45)$$

$$T_{22} = -\frac{1}{2B(r)} \eta^2 r^2 f'^2(r) - \frac{\lambda}{4} r^2 \eta^4 [f^2(r) - 1]^2 \quad (2.46)$$

$$T_{33} = -\frac{1}{2B(r)} \eta^2 r^2 f'^2(r) \text{sen}^2 \theta - \frac{\lambda}{4} r^2 \eta^4 \text{sen}^2 \theta [f^2(r) - 1]^2 \quad (2.47)$$

E para o tensor de Ricci, as componentes não-nulas são:

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{1}{4} \left(\frac{A'}{B} \right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{A'}{B} \right) \quad (2.48)$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{1}{4} \left(\frac{A'}{A} \right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{B'}{B} \right) \quad (2.49)$$

$$R_{22} = 1 - \frac{r}{2B} \left(-\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{B} \quad (2.50)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta R_{\theta\theta} \quad (2.51)$$

Em regiões distantes do núcleo, temos que $f(r) \rightarrow 1$ de acordo com [9]. Assim as componentes do tensor energia-momento associado à configuração do monopolo global, serão dadas aproximadamente por:

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{\eta^2}{r^2} \quad T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = 0 \quad (2.52)$$

Assim, sabendo-se que

$$T = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 \quad (2.53)$$

para o monopolo, as componentes do tensor energia-momento serão

$$T = -\frac{2\eta^2}{r^2} \quad (2.54)$$

Desta forma, levando esses resultados às equações de Einstein, serão obtidas as seguintes expressões:

$$-\frac{A''}{2B} + \frac{1}{4} \left(\frac{A'}{B} \right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{A'}{B} \right) = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{A''}{2A} - \frac{1}{4} \left(\frac{A'}{A} \right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{B'}{B} \right) = 0 \quad (2.56)$$

$$1 - \frac{r}{2B} \left(-\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{B} = \frac{8\pi G\eta^2}{c^4} \quad (2.57)$$

$$\left[1 - \frac{r}{2B} \left(-\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{B} \right] \text{sen}^2\theta = \frac{8\pi G\eta^2 \text{sen}^2\theta}{c^4} \quad (2.58)$$

Multiplicando a equação (2.55) por $1/A$ e (2.56) por $1/B$, obtém-se

$$-\frac{A''}{2AB} + \frac{1}{4A} \left(\frac{A'}{B} \right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{rA} \left(\frac{A'}{B} \right) = 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{A''}{2AB} - \frac{1}{4B} \left(\frac{A'}{A} \right) \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{rB} \left(\frac{B'}{B} \right) = 0 \quad (2.60)$$

e somando essas duas equações tem-se

$$\frac{1}{rB} \left[\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right] = 0 \quad (2.61)$$

da qual se pode concluir que

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \quad (2.62)$$

a qual implica em

$$\frac{d}{dr} \ln A(r) = -\frac{d}{dr} \ln B(r) \quad (2.63)$$

cuja solução é

$$A(r) = \frac{C}{B(r)} \quad (2.64)$$

na qual C é uma constante de integração. Substituindo essa relação na equação (2.57), o seguinte resultado será obtido

$$1 - \frac{r}{2B} \left(-\frac{B'}{B} - \frac{BB'}{B^2} \right) - \frac{1}{B} = \frac{8\pi G\eta^2}{c^4} \quad (2.65)$$

da qual se obtém

$$\ln \left(\frac{B}{[(8\pi G\eta^2)/c^4 - 1]B + 1} \right) = \ln r + C' \quad (2.66)$$

sendo

$$C' = \ln |\kappa| \quad (2.67)$$

Dessa forma a solução de (2.66) será:

$$\frac{1}{B} = 1 - \frac{8\pi G\eta^2}{c^4} + \frac{1}{\kappa r} \quad (2.68)$$

Da relação (2.64), fazendo-se $C = 1$, resulta em

$$A = \frac{1}{B} = 1 - \frac{8\pi G\eta^2}{c^4} + \frac{1}{\kappa r} \quad (2.69)$$

Considerando $1/\kappa = -2mG/c^2$, obtido a partir da aproximação de campo fraco, onde m é a massa do buraco negro, tem-se

$$A = \frac{1}{B} = 1 - \frac{8\pi G\eta^2}{c^4} - \frac{2mG}{c^2 r} \quad (2.70)$$

Finalmente, levando esse resultado à métrica dada por (2.22), a solução será escrita como

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} - \frac{8\pi G\eta^2}{c^4}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} - \frac{8\pi G\eta^2}{c^4}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (2.71)$$

Considerando as redefinições abaixo

$$t = \frac{T}{b} \quad (2.72)$$

$$r = bR \quad (2.73)$$

$$m = b^3 M \quad (2.74)$$

onde

$$b^2 = \left(1 - \frac{8\pi G\eta^2}{c^4}\right) \quad (2.75)$$

obtemos que a métrica dada por (2.71) assume a seguinte forma:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) dT^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)^{-1} dR^2 + b^2 R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \quad (2.76)$$

a qual representa a solução de Schwarzschild na presença do Monopolo global.

2.3.1 Precessão do Periélio de Mercúrio

Para o estudo do movimento de uma partícula de teste que se move em torno de uma estrela, deve ser considerado inicialmente a Lagrangiana, a qual é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (2.77)$$

onde λ é o parâmetro afim da curva. Usando a métrica dada por (2.76), a Lagrangiana passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{2} & \left[-c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right) \left(\frac{dT}{d\lambda} \right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right)^{-1} \left(\frac{dR}{d\lambda} \right)^2 + \right. \\ & \left. + b^2 R^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + b^2 R^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.78)$$

e as equações de Euler-Lagrange que são dadas por

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.79)$$

forneem os seguintes resultados:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[-c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right) \frac{dT}{d\lambda} \right] = 0 \quad (2.80)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(b^2 R^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) - b^2 R^2 \text{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (2.81)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(b^2 R^2 \text{sen}^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \right) = 0 \quad (2.82)$$

Da equação (2.80) segue que:

$$c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right) \frac{dT}{d\lambda} = E \quad (2.83)$$

onde E é uma constante de movimento. No limite Newtoniano, E corresponde à energia relativística da partícula.

Tomando $\theta = \frac{\pi}{2}$ radianos, ou seja, considerando o plano equatorial, a equação (2.81) fornece que $\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = 0$, e a equação (2.82) que:

$$b^2 R^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = L \quad (2.84)$$

sendo L uma constante, relacionada com o momento angular.

Para a obtenção da equação radial observamos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = P_\mu P^\mu = -\frac{m_0^2 c^2}{2} \quad (2.85)$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula. O parâmetro λ pode ser ajustado de tal forma que teremos $-2\mathcal{L} = m_0 c^2$. Isso é obtido através da relação

$$\lambda = \frac{\tau}{m_0} \quad (2.86)$$

sendo τ o tempo próprio da partícula. Desta forma, com essa reparametrização e considerando $m_0 = 1$, a Lagrangiana fornece:

$$\begin{aligned} -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 + \\ + b^2 R^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + b^2 R^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = -c^2 \end{aligned} \quad (2.87)$$

Com o uso das equações (2.83) e (2.84), a equação anterior pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{2b^2 R^2} + \frac{c^2}{2} - \frac{GM L^2}{c^2 b^2 R^3} - \frac{GM}{R} = \frac{1}{2} E^2 \quad (2.88)$$

onde foi considerado $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Considerando $R = R(\varphi)$, e fazendo a mudança de variáveis $R = \frac{1}{u}$, a equação anterior passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + b^2 u = \frac{GM b^4}{L^2} + \frac{3GM b^2 u^2}{c^2} \quad (2.89)$$

Esta equação pode ser resolvida através de um método perturbativo. Para isso é definido o seguinte parâmetro de perturbação:

$$\epsilon = \frac{3G^2M^4}{L^2c^2} \quad (2.90)$$

Sendo assim a equação (2.89) passa a ser escrita como:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + b^2u = \frac{GMb^4}{L^2} + \epsilon \left(\frac{L^2b^2u^2}{GM^3} \right) \quad (2.91)$$

Assumindo uma solução da forma

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2) \quad (2.92)$$

e adotando a convenção de que o índice ' representa a derivada primeira e o índice '' representa a derivada segunda, tem-se da equação (2.91) que:

$$\left(u_0'' + b^2u_0 - \frac{GMb^4}{L^2} \right) + \epsilon \left(u_1'' + u_1b^2 - \frac{L^2b^2u_0^2}{GM^3} \right) + O(\epsilon^2) = 0 \quad (2.93)$$

Igualando os coeficientes de cada potência de ϵ a zero, encontra-se que a solução de ordem zero é dada por

$$u_0 = \frac{GMb^2}{L^2} [1 + e \cos(b\varphi - \varphi_0)] \quad (2.94)$$

onde $e = \frac{DL^2}{GMb^2}$, sendo φ_0 e D constantes. Esta equação também pode ser escrita em termos de R fornecendo:

$$\frac{l}{R} = 1 + e \cos(b\varphi - \varphi_0) \quad (2.95)$$

onde $l = \frac{L^2}{GMb^2}$.

A equação de primeira ordem é dada por:

$$u_1'' + u_1b^2 - \frac{L^2b^2}{GM^3}u_0^2 = 0 \quad (2.96)$$

a qual substituindo u_0 da equação (2.94) com $\varphi_0 = 0$ resulta em:

$$u_1'' + u_1b^2 = \frac{Gb^6}{ML^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{2eGb^6}{ML^2} \cos(b\varphi) + \frac{e^2Gb^6}{2ML^2} \cos(2b\varphi) \quad (2.97)$$

Definindo

$$A \equiv \frac{Gb^4}{ML^2} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \quad (2.98)$$

$$B \equiv \frac{Geb^4}{ML^2} \quad (2.99)$$

$$C \equiv -\frac{Ge^2b^4}{6ML^2} \quad (2.100)$$

a equação (2.97) adquire a forma

$$u_1'' + u_1b^2 = Ab^2 + 2Bb^2\cos(b\varphi) - 3Cb^2\cos(2b\varphi) \quad (2.101)$$

cuja solução será

$$u_1 = A + Bb\varphi\sin(b\varphi) + C\cos(2b\varphi) \quad (2.102)$$

Assim a solução geral de primeira ordem para (2.91) será

$$u \approx \frac{GMb^2}{L^2} \left[1 + e\cos(\varphi')\right] + \frac{\epsilon Gb^4}{ML^2} \left[1 + e\varphi'\sin(\varphi') + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2\varphi')\right)\right] \quad (2.103)$$

onde definimos $b\varphi = \varphi'$.

A mais importante correção para u_0 é o termo que envolve $\varphi'\sin(\varphi')$, pois a cada revolução ele se torna cada vez maior. Sendo assim, desprezando-se os demais termos, na solução dada pela equação anterior, o resultado é

$$u = \frac{GMb^2}{L^2} \left[1 + e\cos(\varphi') + \frac{3M^2G^2b^2}{c^2L^2}e\varphi'\sin(\varphi')\right] \quad (2.104)$$

Fazendo $\chi = \frac{3G^2M^2b^2}{c^2L^2}\varphi'$, esta equação pode ser escrita como

$$u = \frac{GMb^2}{L^2} [1 + e\cos(\varphi') + \chi e\sin(\varphi')] \quad (2.105)$$

Se considerarmos $\chi \ll 1$, esta equação pode ser escrita na forma

$$u = \frac{GMb^2}{L^2} [1 + e\cos(\varphi' - \chi)] \quad (2.106)$$

Sendo o periélio a menor distância entre o planeta e o sol, u deve ter seu valor máximo, já que $u = 1/R$. Assim, de acordo com a equação (2.106), temos

$$\cos(\varphi' - \chi) = 1 \quad (2.107)$$

o que implica em

$$\varphi' - \chi = 2\pi \quad (2.108)$$

a qual, resolvendo para φ' , nos dá

$$\varphi' = 2\pi \left(1 - \frac{3G^2 M^2 b^2}{L^2 c^2} \right)^{-1} \quad (2.109)$$

que expandindo em primeira ordem, fornece

$$\varphi' \approx 2\pi \left(1 + \frac{3G^2 M^2 b^2}{L^2 c^2} \right) \quad (2.110)$$

Assim, para uma volta completa, o desvio da órbita será dado por

$$\Delta\varphi = \varphi' - 2\pi, \quad (2.111)$$

resultando em

$$\Delta\varphi = \left(\frac{6\pi G^2 M^2 b^2}{L^2 c^2} \right). \quad (2.112)$$

Para converter o momento angular L em quantidades mais convencionais, podem ser usadas expressões válidas para órbitas Newtonianas, já que a quantidade procurada é uma pequena perturbação. Considerando, portanto, que uma elipse neste contexto satisfaz

$$R = \frac{(1 - e^2)a}{1 + e\cos(\varphi')} \quad (2.113)$$

onde a é o semi-eixo maior da elipse e e a excentricidade.

e comparando a equação (2.113) com (2.95) encontra-se que

$$L^2 = GMb^2(1 - e^2)a \quad (2.114)$$

que substituindo em (2.112) resulta em

$$\Delta\varphi_{0b} = \frac{6\pi GM}{c^2(1-e^2)a} \quad (2.115)$$

Lembrando que $M = \frac{m}{b^3}$ a equação que fornece o desvio da órbita passa a ser escrita então na seguinte forma

$$\Delta\varphi_{0b} = \frac{6\pi Gm}{c^2 b^3 (1-e^2)a} \quad (2.116)$$

Calculando o valor desse desvio para o movimento do planeta Mercúrio em torno do sol, sabendo-se que $\eta \approx 10^{-5}$ [9], o que implica em $b \approx 0,99999$, encontra-se:

$$\Delta\varphi_{0b} = 42,9419''/\text{século} \quad (2.117)$$

Sem a presença do fator b^3 , que caracteriza o monopolo global, o resultado para o desvio seria de [15]

$$\Delta\varphi_0 = 42,9411''/\text{século} \quad (2.118)$$

O valor observado para o desvio da órbita de Mercúrio é de $43,11 \pm 0,45$. Portanto o valor previsto pela teoria está dentro desse intervalo.

2.3.2 Estabilidade das órbitas

Será considerado agora, o movimento de uma partícula de teste no espaço tempo do monopolo global, onde através de análises qualitativas, será descrito as condições que determinam órbitas estáveis em torno do buraco negro.

Inicialmente, considerando a equação (2.88), observa-se que esta pode ser escrita na seguinte forma

$$\dot{R}^2 + V^2(R) = E^2 \quad (2.119)$$

onde foi usada a notação $\dot{R} = dR/d\lambda$ e $V^2(R)$ é um potencial efetivo dado por:

$$V^2(R) = \frac{L^2}{b^2 R^2} + 1 - \frac{2MGL^2}{c^2 b^2 R^3} - \frac{2MG}{c^2 R} \quad (2.120)$$

Isolando o termo \dot{R}^2 na equação (2.119), tem-se que

$$\dot{R}^2 = E^2 - V^2(R) \quad (2.121)$$

e sendo assim o potencial efetivo passa a ser escrito como:

$$V(R) = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \left(1 + \frac{L^2}{b^2 R^2}\right)} \quad (2.122)$$

A escolha da raiz quadrada positiva para \dot{R}^2 e $V(R)$, deve-se ao fato de estar-se considerando positiva a energia de uma partícula vinda de $R \geq 2GM/c^2$. Assim pode-se escrever

$$\dot{R} = \sqrt{E^2 - V^2(R)} \quad (2.123)$$

Apartir dessa equação, é possível estudar qualitativamente o movimento de uma partícula no espaço-tempo do monopolo global, do ponto de vista da própria ou de um observador movendo-se junto com ela, em termos de R , E e L .

Inicialmente é observado que no limite $R \rightarrow \infty$ o potencial V fornece

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \left(1 + \frac{L^2}{b^2 R^2}\right)} = 1 \quad (2.124)$$

porém sempre menor que 1, devido ao termo R^{-1} dentro da raiz ser negativo. Observa-se também que

$$V(R = 2GM/c^2) = 0 \quad (2.125)$$

o qual não está definido para $R < 2GM/c^2$.

Determinado o comportamento assintótico do potencial, pode-se agora investigar seus extremos. Para isso, tomando a derivada do potencial com relação a R , tem-se

$$\frac{dV}{dR} = \frac{1}{R^2} \frac{\frac{GM}{c^2} - \frac{L^2}{b^2 R} + \frac{3GML^2}{b^2 c^2 R^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \left(1 + \frac{L^2}{b^2 R^2}\right)}} \quad (2.126)$$

que igualando a zero, permite achar os máximos e mínimos. Sendo assim,

$$\frac{dV}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{GM}{c^2} - \frac{L^2}{b^2 R} + \frac{3GML^2}{b^2 c^2 R^2} = 0 \quad (2.127)$$

cujas soluções são dadas por

$$R_1 = \frac{6MG}{c^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12G^2M^2b^2}{L^2c^4}} \right)} \quad (2.128)$$

e

$$R_2 = \frac{6MG}{c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12G^2M^2b^2}{L^2c^4}} \right)} \quad (2.129)$$

Para saber se esses pontos são máximos ou mínimos, é necessário calcular a derivada segunda do potencial com relação a R . Fazendo isto, encontra-se que,

$$\frac{d^2V}{dR^2} = \frac{-\frac{2GM}{c^2R^3} + \frac{3L^2}{b^2R^4} - \frac{12GML^2}{b^2c^2R^5}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right) \left(1 + \frac{L^2}{b^2R^2}\right)}} - \frac{\left(\frac{GM}{c^2R^2} - \frac{L^2}{b^2R^3} + \frac{3GML^2}{b^2c^2R^4}\right)^2}{\left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right) \left(1 + \frac{L^2}{b^2R^2}\right)\right]^{3/2}} \quad (2.130)$$

Para $R = R_1$, a derivada segunda é negativa, indicando portanto que R_1 é um ponto de máximo de V . No caso em que $R = R_2$, a derivada é positiva, e assim R_2 é um ponto de mínimo de V . Sem perda de generalidade, será considerado daqui por diante que $L \geq 0$, e dessa forma, os máximos e mínimos só existem para $L \geq 2GMb\sqrt{3}/c^2$. Quando $L = 2GMb\sqrt{3}/c^2$, $R_1 = R_2 = 6GM/c^2$ e $d^2V/dR^2 = 0$, indicando assim um ponto de inflexão no gráfico de V em função de R . No caso em que $R = 6GM/c^2$, o potencial possui o seguinte valor

$$V(R = 6GM/c^2) = \sqrt{\frac{8}{9}} \quad (2.131)$$

Para $R = R_1$ e $R = R_2$, os valores do potencial são

$$V(R_1) = \sqrt{\frac{1}{3} \left[2 - \sqrt{1 - \frac{12G^2M^2b^2}{L^2c^4}} \right] \left[\frac{2}{3} + \frac{L^2c^4}{18b^2G^2M^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12G^2M^2b^2}{L^2c^4}} \right) \right]} \quad (2.132)$$

e

$$V(R_2) = \sqrt{\frac{1}{3} \left[2 + \sqrt{1 - \frac{12G^2M^2b^2}{L^2c^4}} \right] \left[\frac{2}{3} + \frac{L^2c^4}{18b^2G^2M^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12G^2M^2b^2}{L^2c^4}} \right) \right]} \quad (2.133)$$

Apartir desses valores, observa-se que para $L = 4GMb/c^2$, o valor máximo do potencial será $V(R_1) = 1$, excedendo esse valor se $L > 4GMb/c^2$.

A seguir são mostrados gráficos do potencial V em função de R . Admitimos por questões de simplicidade que $G = c = M = 1$.

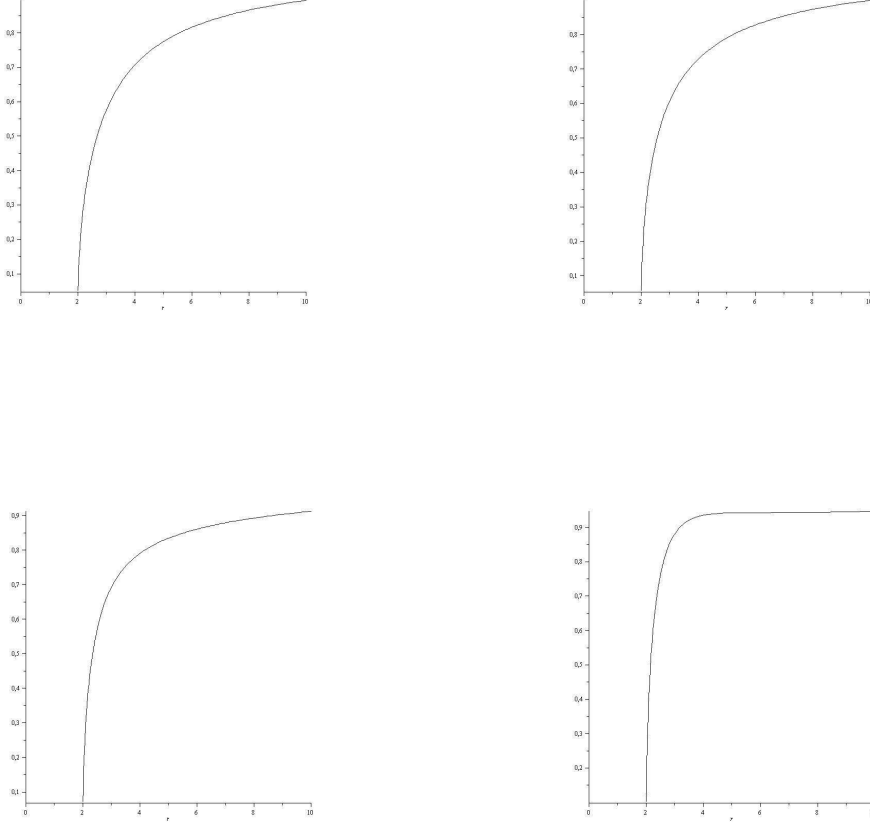


Figura 2.1: Potencial efetivo V em função de r , para $L = 0, b, 2b, 2b\sqrt{3}$.

Sabemos que os tipos de movimento dependerão dos valores de L e E . Sendo assim, há vários casos a analisar: $L < \frac{2Gm\sqrt{3}}{b^2c^2}$; $L = \frac{2Gm\sqrt{3}}{b^2c^2}$; $\frac{2Gm\sqrt{3}}{b^2c^2} < L < \frac{4Gm}{b^2c^2}$ e $L > \frac{4Gm}{b^2c^2}$.

No primeiro caso, $L < \frac{2Gm\sqrt{3}}{b^2c^2}$, vemos pelos gráficos que o potencial não possui um máximo local, indicando que qualquer que seja a energia E da partícula esta cai no buraco negro, havendo portanto, apenas uma possibilidade de movimento. No caso em que $L = \frac{2Gm\sqrt{3}}{b^2c^2}$, vimos que $E = \sqrt{\frac{8}{9}}$, indicando o único valor para o qual a partícula não é capturada pelo buraco negro. Esta energia corresponde à partícula está localizada em $r = \frac{6Gm}{b^3c^2}$. Temos assim um movimento instável em volta do buraco, de tal forma que a menor perturbação a lança na direção do buraco negro.

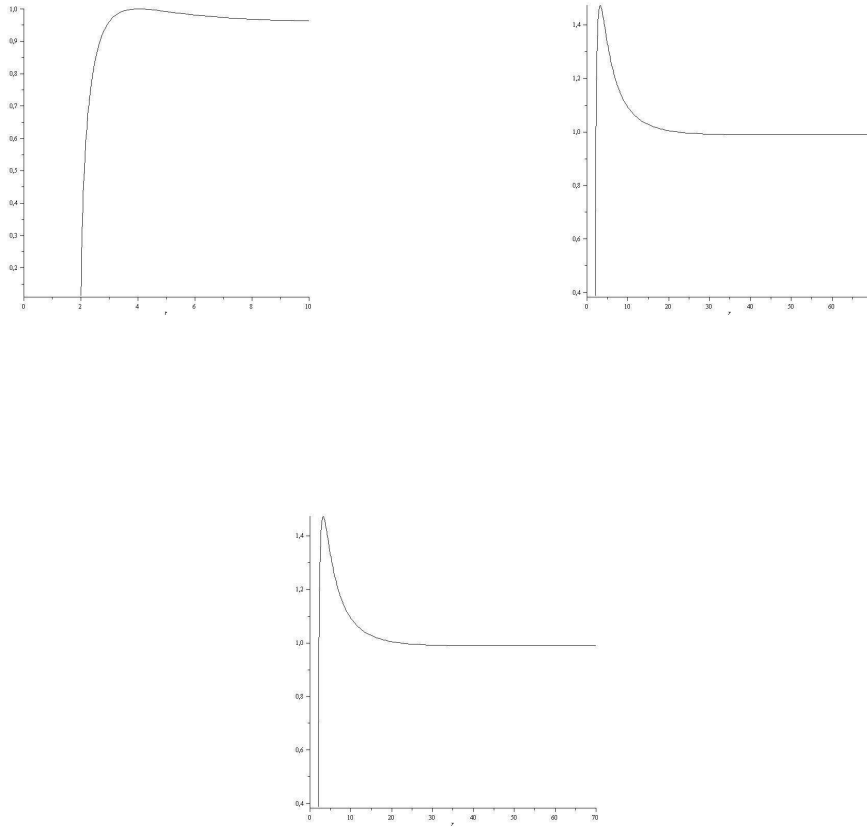


Figura 2.2: Potencial efetivo V em função de r , para $L = 4b, 7b, 10b$.

Para o caso em que $\frac{2Gm\sqrt{3}}{b^2c^2} < L < \frac{4Gm}{b^2c^2}$, vemos a presença de um máximo e um mínimo distintos para V , sendo porém o máximo menor que 1, valor do potencial quando $r \rightarrow \infty$. Assim, para uma partícula vinda do infinito, com energia superior ao máximo de V esta cairá no buraco em $r = 2GM/c^2$. Se a energia for igual ao máximo de V , ela apresenta uma órbita circular instável, em $r = r_1$. Por menor que seja a perturbação, esta pode levar a partícula em direção ao buraco negro, se sua energia for elevada, ou levá-la para órbitas estáveis, caso haja diminuição da energia. Se a energia E estiver entre o máximo e o mínimo de V , a partícula estará descrevendo órbitas limitadas, com dois pontos de retorno. Já se E for igual ao mínimo de V , a órbita será circular e estável em $r = r_2$. No caso em que $L = 4GM/b^2c^2$, a análise é semelhante à anterior, sendo que agora teremos a órbita circular instável para partículas com $E = 1$, no ponto $r = 4Gm/b^2c^2$, e a captura ocorre em $r = 2Gm/b^2c^2$, caso $E > 1$.

Para o último caso em que $L > \frac{4Gm}{b^2c^2}$, temos as seguintes situações: Se E for igual ao mínimo de V , a órbita será circular e estável em $r = r_2$; para E igual ao máximo de V , a órbita será circular instável e a menor perturbação arrastará a partícula para dentro ou para longe do buraco. Porém se E ultrapassar o máximo do potencial, a partícula cai em $r = 2Gm/b^2c^2$.

Capítulo 3

Buraco negro de Schwarzschild na presença do monopolo global mais Quintessência

Observações astronômicas recentes [16], mostram de maneira convincente, que o Universo está em expansão acelerada, o que implica na contribuição da matéria com pressão negativa. Essa característica da pressão pode ser traduzida em termos de dois fatores: o primeiro está relacionado com o termo de constante cosmológica, e o segundo se deve a chamada quintessência [17], com a equação de estado dada pela relação entre a pressão p_q e a densidade de energia ρ_q , na forma $p_q = \omega_q \rho_q$, com o parâmetro ω_q variando no intervalo $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$, exigência para a aceleração cósmica.

3.1 Equações de movimento

Para esse modelo vamos considerar a Lagrangiana, na seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi_a - \frac{1}{4} \lambda (\phi^a \phi_a - \eta^2)^2 \quad (3.1)$$

onde, como já visto, ϕ^a é o tripleto de campos isoescalares, com $a = 1, 2, 3$. Para este caso ϕ^a é escrito como

$$\phi^a = \eta f(r) \frac{x^a}{r}, \quad (3.2)$$

com $x^a x_a = r^2$. Considerando a métrica com simetria esférica mais geral, a qual pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -c^2 A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.3)$$

onde as coordenadas esféricas r, θ, φ possuem as relações usuais com as coordenadas cartesianas x^a .

Assim as equações de movimento serão dadas por

$$\frac{1}{B} f''(r) + \left[\frac{2}{Br} + \frac{1}{2A} \left(\frac{A}{B} \right)' \right] - \frac{2}{r^2} + \lambda \eta^2 f(r) [f^2(r) - 1] = 0 \quad (3.4)$$

Para resolver das equações de Einstein, devemos considerar o tensor energia-momento da quinta essência $\tau_{\mu\nu}$. Desta forma estas passam a ser escritas como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}) \quad (3.5)$$

No caso estático e esfericamente simétrico, as componentes do tensor energia-momento da quintessência são dadas por [18]

$$\tau^t_t = \tau^r_r = \rho_q(r) \quad (3.6)$$

e

$$\tau^\theta_\theta = \tau^\varphi_\varphi = -\frac{1}{2} \rho_q(r) (3\omega_q + 1) \quad (3.7)$$

onde

$$\rho_q(r) = \frac{c}{2} \frac{3\omega_q}{r^{3(1+\omega_q)}} \quad (3.8)$$

sendo c um fator constante e ω_q é um parâmetro livre definido no intervalo $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$.

Sendo assim, obtemos que a métrica dada por (4.43), terá a seguinte forma:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \epsilon^2 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\epsilon^2 \rho_0}{\eta^2 3\omega_q r^{3\omega_q+1}} \right) dt^2 + \left(1 - \epsilon^2 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\epsilon^2 \rho_0}{\eta^2 3\omega_q r^{3\omega_q+1}} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \quad (3.9)$$

onde $\epsilon^2 = 8\pi G\eta^2/c^4$, ρ_0 é a densidade de energia da quintessência em $r = 1$.

Vamos agora considerar a equação de Klein-Gordon para um campo massivo, a qual é dada por:

$$(\square + m^2)\psi = 0 \quad (3.10)$$

Utilizando o ansatz,

$$\psi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} \frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (3.11)$$

a equação (3.9) toma a seguinte forma

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - V(r) \right) R(r) = 0, \quad (3.12)$$

onde r_* é a coordenada tartaruga, definida como

$$dr_* = \frac{dr}{\left(1 - \epsilon^2 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\epsilon^2 \rho_0}{\eta^2 3\omega_q r^{3\omega_q+1}} \right)} \quad (3.13)$$

e $V(r)$ é o potencial efetivo dado por

$$V(r) = \frac{l(l+1)f(r)}{r^2} - m^2 f(r) + \frac{f(r)f'(r)}{r}, \quad (3.14)$$

sendo $f(r) = \left(1 - \epsilon^2 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\epsilon^2 \rho_0}{\eta^2 3\omega_q r^{3\omega_q+1}} \right)$ e $f'(r)$ sua derivada com respeito a r .

Sabe-se que a dinâmica da evolução do campo, em um buraco negro, é constituída de três estágios. O primeiro está relacionado com uma onda, vinda diretamente da fonte de perturbação, e é dependente da forma do campo da onda inicial. O segundo envolve as oscilações amortecidas, ou seja, os modos quasenormais, os quais dependem apenas da

estrutura do espaço-tempo, independentemente das condições iniciais. O terceiro é uma lei de potência, relacionada com o comportamento das ondas, causado pelo espalhamento do campo gravitacional.

Os modos quasinormais possuem certas frequências complexas características, as chamadas frequências quasinormais. Esses modos, característicos dos buracos negros, correspondem às oscilações que decaem exponencialmente, devido ao buraco negro emitir radiação para o infinito, e suas frequências serem representadas por funções complexas, com a parte real representando a verdadeira frequência de oscilação e a parte imaginária responsável pela taxa de amortecimento. Esses modos satisfazem às equações de perturbação, com as condições de contorno apropriadas para as ondas que incidem no horizonte de eventos e para as ondas que emergem do horizonte de eventos para o infinito [19].

3.2 Modos Normais de vibração

Para encontrar os modos normais ou soluções ressonantes para a equação radial (3.12), vamos usar a aproximação WKB [20, 21], motivados pela similaridade entre as equações para buracos negros em teoria de perturbação e a equação de Schrodinger para um potencial barreira. Em ambos os casos a equação geral possui a forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + Q(x)\psi(x) = 0 \quad (3.15)$$

onde para nosso caso ψ representa a parte radial da variável de perturbação e $Q(x)$ será equivalente à $Q(r)$, o qual é dado por $Q(r) = \omega^2 - V(r)$. A coordenada x está relacionada com a coordenada tartaruga r_* , variando de $-\infty$ no horizonte de eventos a $+\infty$ no infinito.

Podemos representar o potencial $Q(x)$ graficamente para se ter uma ideia de seu comportamento:

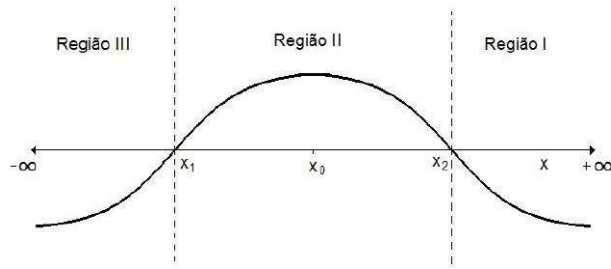


Figura 3.1: Barreira de potencial efetivo

Em analogia com o caso quântico, o campo ψ nas regiões *I* e *III* da figura, é dado aproximadamente por combinações lineares das funções de onda incidentes e ondas emergentes, as quais devem se conectar com a região *II*, onde ocorre o pico do potencial efetivo. Para essa região fazemos uma expansão de $Q(x)$ em série de Taylor em torno do seu valor máximo em $x = x_0$ incluindo termo de ordem $(x - x_0)^6$, que deve então se conectar com a região exterior.

3.2.1 Aproximação WKB para modos normais

O procedimento para encontrar os modos normais da equação padrão (3.15), consiste em usar a aproximação WKB, seguindo o método desenvolvido por [22]. Em primeiro lugar escrevemos a equação padrão na forma genérica:

$$\epsilon^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + Q(x) \psi(x) = 0 \quad (3.16)$$

sendo ϵ um parâmetro introduzido para indicar a ordem na aproximação WKB. Definimos, então, a aproximação assintótica como

$$\psi \sim e^{S(x)/\epsilon}, \quad (3.17)$$

onde $S(x)$ é expandido em potências do parâmetro ϵ da seguinte forma:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n S_n(x). \quad (3.18)$$

Substituindo na equação (3.16), até terceira ordem, o resultado é o seguinte:

$$S_0(x) = \pm i \int^x [Q(\eta)]^{1/2} d\eta \quad (3.19a)$$

$$S_1(x) = -\frac{1}{4} \ln Q(x) \quad (3.19b)$$

$$S_2(x) = \mp \frac{i}{8} \int^x \left[\frac{Q''}{Q^{3/2}} - \frac{5}{4} \frac{Q'^2}{Q^{5/2}} \right] d\eta \quad (3.19c)$$

$$S_3(x) = \frac{1}{16} \left[\frac{Q''}{Q^2} - \frac{5}{4} \frac{Q'^2}{Q^3} \right] \quad (3.19d)$$

Vamos convencionar que ondas vindo do infinito em direção ao horizonte de eventos tem sinal positivo, e ondas se afastando, indo para o infinito tem sinal negativo. Dessa forma, escrevemos que a solução geral para as regiões *I* e *III* da figura 3.1, são dadas respectivamente por:

$$\psi \approx Z_{im}^I \psi_-^I + Z_{em}^I \psi_+^I \quad (3.20)$$

$$\psi \approx Z_{im}^{III} \psi_+^{III} + Z_{em}^{III} \psi_-^{III} \quad (3.21)$$

onde Z_{im} representa a amplitude da onda imergente e Z_{em} a amplitude da onda emergente. Deve-se notar que no caso dos buracos negros $Z_{em}^{III} = 0$.

É necessário agora determinar as fórmulas que relacionam as amplitudes das ondas emergentes com as amplitudes das ondas imergentes. É preciso, portanto, determinar os coeficientes da relação linear dada por

$$\begin{bmatrix} Z_{em}^{III} \\ Z_{im}^{III} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{em}^I \\ Z_{im}^I \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Assim vamos agora considerar a solução na região *II*.

3.2.2 Aproximação assintótica para a solução interior

Na região *II* o potencial $Q(x)$ deve ser expandido em série de Taylor até termos de sexta ordem em sua derivada. Com a aproximação assintótica para a solução interior, usaremos esta para fazer a conexão com as soluções WKB. Realizando, então, a expansão de $Q(x)$ em torno do ponto de máximo x_0 , obtemos:

$$Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''z^2 + \frac{1}{6}Q_0'''z^3 + \frac{1}{24}Q_0^{(4)}z^4 + \frac{1}{120}Q_0^{(5)}z^5 + \frac{1}{720}Q_0^{(6)}z^6 \quad (3.23)$$

onde $z \equiv x - x_0$. Assim, a equação (3.16) adquire a forma

$$\epsilon^2 \frac{d^2\psi}{dz^2} + k(-z_0^2 + z^2 + bz^3 + cz^4 + dz^5 + fz^6)\psi = 0 \quad (3.24)$$

na qual

$$\begin{aligned} k &\equiv \frac{1}{2}Q_0'' & z_0^2 &\equiv -\frac{2Q_0}{Q_0''} \\ b &\equiv \frac{Q_0'''}{3Q_0''} & c &\equiv \frac{Q_0^{(4)}}{12Q_0''} \\ d &\equiv \frac{Q_0^{(5)}}{60Q_0''} & f &\equiv \frac{Q_0^{(6)}}{360Q_0''} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Definindo uma nova variável $t \propto \epsilon^{1/2}$, a qual deve expressar a solução assintótica interior, e também definindo as constantes ν , Λ e Ω , relacionadas a z_0 e reescaladas com os parâmetros b , c , d e f como

$$t \equiv \frac{(4k)^{1/4}e^{-i\pi/4}z}{\epsilon^{1/2}} \quad (3.26a)$$

$$\nu + \frac{1}{2} \equiv -\frac{ik^{1/2}z_0^2}{2\epsilon} - \epsilon\Lambda - \epsilon^2\omega \quad (3.26b)$$

$$\bar{b} \equiv \frac{1}{4}b(4k)^{-1/4}e^{i\pi/4} \quad \bar{c} \equiv \frac{1}{4}c(4k)^{-1/2}e^{i\pi/2} \quad (3.26c)$$

$$\bar{d} \equiv \frac{1}{4}d(4k)^{-3/4}e^{3i\pi/4} \quad \bar{f} \equiv \frac{1}{4}f(4k)^{-1}e^{i\pi} \quad (3.26d)$$

Dessa forma a equação(3.24) pode ser escrita como

$$\ddot{\psi} + \left[\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2 - \epsilon^{1/2}\bar{b}t^3 + \epsilon(\Lambda - \bar{c}t^4) - \epsilon^{3/2}\bar{d}t^5 + \epsilon^2(\Omega - \bar{f}t^6) \right] \psi = 0 \quad (3.27)$$

onde o ponto representa a derivada com respeito a t . Sem a presença dos termos prporcionais à potências de ϵ , as soluções para esta equação são funções cilíndricas parabólicas $D_\nu(t)$ e $D_{-\nu-1}(it)$ [22]. Considerando os termos de ϵ a solução para esta equação deve ser da forma $f(t)D_\nu[g(t)]$, onde D_ν são funções cilíndricas parabólicas. Substituindo essa solução na equação anterior, e definindo $Q(t)$ como sendo o polinômio entre colchetes, obtemos

$$\left[-f\dot{g}^2\left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}g^2\right) + \ddot{f} + Qf \right] D_\nu + (2f\dot{g} + f\ddot{g})\dot{D}_\nu = 0 \quad (3.28)$$

Fazendo a escolha $f = \dot{g}^{-1/2}$, podemos eliminar a primeira derivada de D_ν . Sendo assim, igualando o coeficiente de D_ν a zero, obtemos a seguinte equação para $g(t)$:

$$\dot{g}^2 \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}g^2 \right) + \frac{\ddot{g}^2}{2\dot{g}} - \frac{3\ddot{g}^2}{4\dot{g}^2} - Q(t) = 0 \quad (3.29)$$

Considerando $Q(t)$ uma expansão da forma

$$Q(t) = \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n/2} Q_n(t) \quad (3.30)$$

onde $Q_n(t)$ é um polinômio, tal que temos uma expansão similar para $g(t)$:

$$g(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n/2} A_n(t) \quad (3.31)$$

sendo $A_n(t)$ um polinômio em t . Substituindo na equação (3.29), igualando os coeficientes de cada potência da ordem $\epsilon^{1/2}$ e definindo o operador L_t por

$$L_t = \frac{d^3}{dt^3} + 4 \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2 \right) \frac{d}{dt} - t \quad (3.32)$$

é obtido um conjunto de equações para $A_n(t)$ onde cada polinômio pode ser escrito na forma

$$A_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i}^n t^{n+1-2i} \quad \text{com} \quad (n+1-2i) \geq 0 \quad (3.33)$$

Para valores de n ímpar, o número de potências distintas de t é igual ao número de coeficientes a_{2i}^n . Assim podemos resolver para estes coeficientes igualando cada coeficiente de t igual a zero. Já para valores de n par, o número de potências distintas de t , excede em um o número de coeficientes desconhecidos. Para este caso porém, aparecem as constantes Λ e Ω , as quais podem ser escolhidas convenientemente para fornecer soluções consistentes. Dessa forma, obtemos para essas constantes:

$$\Lambda = \frac{1}{2}(3\bar{c} - 7\bar{b}^2) + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 (6\bar{c} - 30\bar{b}^2) \quad (3.34a)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) (1155\bar{b}^4 - 918\bar{b}^2\bar{c} + 67\bar{c}^2 + 190\bar{b}\bar{d} - 25\bar{f}) + \\ & - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^3 (2820\bar{b}^4 - 1800\bar{b}^2\bar{c} + 68\bar{c}^2 + 280\bar{b}\bar{d} - 20\bar{f}) \end{aligned} \quad (3.34b)$$

Para a região *II*, a solução geral pode ser escrita como

$$\psi \approx \dot{g}^{-1/2} [AD_{\nu}(g(t)) + BD_{-\nu-1}(ig(t))] \quad (3.35)$$

que usando formas assintóticas apropriadas das funções cilíndricas parabólicas [22], obtemos

$$\begin{aligned} \psi \approx & \dot{g}^{-1/2} \left\{ Ag^{\nu} e^{-g^2/4} \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2g^2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{8g^4} - \dots \right] + \right. \\ & \left. + B(ig)^{\nu-1} e^{g^2/4} \left[1 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2g^2} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{8g^4} + \dots \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.36a)$$

para $x/\epsilon^{1/2} \rightarrow \infty$, e

$$\begin{aligned} \psi \approx & \dot{g}^{-1/2} \left\{ \left[A + B \frac{(2\pi)^{1/2} e^{-i\pi\nu/2}}{(\nu+1)} \right] g^{\nu} e^{-g^2/4} \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2g^2} + \dots \right] + \right. \\ & \left. + \left[B e^{3i\pi(\nu+1)/2} - A \frac{(2\pi)^{1/2} e^{i\pi\nu}}{\Gamma(-\nu)} \right] g^{\nu-1} e^{g^2/4} \left[1 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2g^2} + \dots \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.36b)$$

quando $x/\epsilon^{1/2} \rightarrow -\infty$.

Para fazer a conexão com a solução interior, devemos estabelecer os zeros da função $Q(z)$, que denotaremos por \bar{z} e que são dados por:

$$\begin{aligned} \bar{z} = \pm z_0 + \frac{1}{2}bz_0^2 \pm \frac{1}{8}(5b^2 - 4c)z_0^3 - \frac{1}{2}(2b^3 - 3bc + d)z_0^4 \pm \\ \frac{1}{128}(231b^4 - 504b^2c + 224bd + 112c^2 - 64f)z_0^5 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Podemos agora, então escrever $Q(z)$ na forma

$$Q(z) = k[-\bar{z}^2 + z^2 + b(z^3 - \bar{z}^3) + c(z^4 - \bar{z}^4) + d(z^5 - \bar{z}^5) + f(z^6 - \bar{z}^6)] \quad (3.38)$$

Para a menor ordem de aproximação, próximo de z_0 , podemos aproximar $\bar{z} = z_0$ e $Q(z) = k(z^2 - z_0^2)$. Assim teremos

$$\frac{S_0}{\epsilon} \approx \pm \frac{ik^{1/2}z^2}{2\epsilon} \pm \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pm \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{2z}{z_0}\right), \quad S_1 \approx -\frac{1}{4}\ln(kz^2), \quad \text{para } z \geq z_0 \quad (3.39)$$

$$\frac{S_0}{\epsilon} \approx \mp \frac{ik^{1/2}z^2}{2\epsilon} \mp \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \mp \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \ln\left(-\frac{2z}{z_0}\right), \quad S_1 \approx -\frac{1}{4}\ln(kz^2), \quad \text{para } z \leq -z_0 \quad (3.40)$$

Substituindo esses resultados nas equações (3.17)-(3.21), obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \psi \approx [Z_{im}^I e^{-ik^{1/2}z^2}/2\epsilon(z/\epsilon^{1/2})^{-(\nu-1)}(4k)^{-(\nu-1)/4} e^{i\pi(\nu+1)/4} R + \\ + Z_{em}^I e^{ik^{1/2}z^2}/2\epsilon(z/\epsilon^{1/2})^\nu (4k)^{\nu/4} e^{-1\pi\nu/4} R^{-1}] (4/\epsilon^2 k e^{i\pi})^{1/8}, \quad \text{para } z \geq z_0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

e

$$\begin{aligned} \psi \approx [Z_{im}^{III} e^{-ik^{1/2}z^2}/2\epsilon(-z/\epsilon^{1/2})^{-(\nu-1)}(4k)^{-(\nu-1)/4} e^{i\pi(\nu+1)/4} R + \\ + Z_{em}^{III} e^{ik^{1/2}z^2}/2\epsilon(-z/\epsilon^{1/2})^\nu (4k)^{\nu/4} e^{-1\pi\nu/4} R^{-1}] (4/\epsilon^2 k e^{i\pi})^{1/8}, \quad \text{para } z \leq z_0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde

$$R = (\nu + 1/2)^{(\nu+1/2)/2} e^{-(\nu+1/2)/2} \quad (3.43)$$

Substituindo $g(t)$ para a menor ordem nas equações (3.36a) e (3.36b), temos respectivamente, para $z \geq z_0$ e $z \leq z_0$, as seguintes soluções

$$\begin{aligned} \psi \sim & A e^{ik^{1/2}z^2/2\epsilon} (z/\epsilon^{1/2})^\nu (4k)^{\nu/4} e^{-i\pi\nu/4} + \\ & + B e^{ik^{1/2}z^2/2\epsilon} (z/\epsilon^{1/2})^{-(\nu+1)} (4k)^{-(\nu+1)/4} e^{-i\pi(\nu+1)/4} \end{aligned} \quad (3.44)$$

e

$$\begin{aligned} \psi \sim & \left[A + B \frac{(2\pi)^{1/2} e^{-i\pi\nu/2}}{\Gamma(\nu + 1)} \right] e^{ik^{1/2}z^2/2\epsilon} (-z/\epsilon^{1/2})^\nu (4k)^{\nu/4} e^{3i\pi\nu/4} + \\ & + \left[B e^{3i\pi(\nu+1)/2} - A \frac{(2\pi)^{1/2} e^{i\pi\nu}}{\Gamma(-\nu)} \right] e^{-ik^{1/2}z^2/2\epsilon} (-z/\epsilon^{1/2})^{-(\nu+1)} (4k)^{-(\nu+1)/4} e^{-3i\pi\nu/4} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Igualando os coeficientes das equações (3.42) e (3.44) e também de (3.43) e (3.45), obtemos

$$\begin{bmatrix} Z_{em}^{III} \\ Z_{im}^{III} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e^{i\pi\nu} & iR^2 e^{i\pi\nu} (2\pi)^{1/2} / \Gamma(\nu + 1) \\ R^{-2} (2\pi)^{1/2} / \Gamma(-\nu) & -e^{i\pi\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{em}^I \\ Z_{im}^I \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

que nos fornece as relações entre as amplitudes das ondas nas regiões I e III da figura 3.1.

3.2.3 Equação para as frequências dos modos normais

Podemos usar agora a equação (3.46), para determinar as fórmulas das frequências normais para buracos negros, assumindo as condições de contorno já impostas. No caso de buracos negros, devemos ter a condição $Z_{im}^{III} = 0$, e para os modos normais $Z_{im}^I = 0$. De acordo com a equação (3.46), estas condições são satisfeitas apenas quando $\Gamma(-\nu) = \infty$. Isso implica que ν deve ser um inteiro não negativo, para o caso de frequências com a parte real positiva. Para as frequências com a parte real negativa, teremos agora as condições de contorno $Z_{em}^{III} = Z_{im}^I = 0$. Isso só pode ser satisfeito quando $\Gamma(\nu + 1) = \infty$, o que implica que ν assumirá valores inteiros negativos.

Apartir dessas condições podemos escrever (3.26b) como

$$n + \frac{1}{2} \equiv -\frac{ik^{1/2}z_0^2}{2\epsilon} - \epsilon\Lambda - \epsilon^2\omega \quad (3.47)$$

onde

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{ para } Re \omega > 0 \quad e \quad n = -1, -2, \dots \text{ para } Re \omega < 0 \quad (3.48)$$

Fazendo $\epsilon = 1$ e substituindo as equações (3.25), (3.26) e (3.34) em (3.47), obtemos

$$i\frac{Q_0}{(2Q_0'')^{1/2}} - \Lambda(n) - \Omega(n) = n + \frac{1}{2} \quad (3.49)$$

Sendo Q uma função da forma $Q = \omega^2 - V_0$, podemos escrever

$$i\frac{\omega^2 - V_0}{(-2V_0'')^{1/2}} - \Lambda(n) - \Omega(n) = n + \frac{1}{2}$$

que resulta em

$$\omega^2 = V_0 - i(-2V_0'')^{1/2} \left[\Lambda(n) + \Omega(n) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.50)$$

definindo agora

$$\tilde{\Lambda} \equiv \frac{\Lambda}{i} \quad e \quad \tilde{\Omega} \equiv \frac{\Omega}{n + 1/2} \quad (3.51)$$

podemos escrever as frequências normais na forma

$$\omega^2 = [V_0 + (-2V_0'')^{1/2}\tilde{\Lambda}(n)] - i(n + 1/2)(-2V_0'')^{1/2}[1 + \tilde{\Omega}(n)] \quad (3.52)$$

onde

$$\Lambda(n) = \frac{1}{(-2Q_0'')^{1/2}} \left\{ \frac{1}{8} \left[\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right] \left[\frac{1}{4} + \alpha^2 \right] - \frac{1}{288} \left[\frac{Q_0'''}{Q_0''} \right]^2 (7 + 60\alpha^2) \right\} \quad (3.53)$$

e

$$\begin{aligned} \Omega(n) = \frac{n + 1/2}{2Q_0''} & \left\{ \frac{5}{6912} \left[\frac{Q_0'''}{Q_0''} \right]^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \left[\frac{Q_0''''Q_0^{(4)}}{Q_0''^3} \right] (51 + 100\alpha^2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2304} \left[\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right]^2 (67 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \left[\frac{Q_0'''Q_0^{(5)}}{Q_0''^2} \right] (19 + 28\alpha^2) - \frac{1}{288} \left[\frac{Q_0^6}{Q_0''} \right] (5 + 4\alpha^2) \right\} \quad (3.54) \end{aligned}$$

sendo $\alpha = n + \frac{1}{2}$.

A equação (3.51) se aplica a qualquer problema físico governado pela equação (3.15), com as condições de contorno apropriadas para os modos normais. Em particular, esta se aplica à determinação de ressonâncias próximas ao pico de uma barreira de potencial.

Capítulo 4

Termodinâmica do Buraco Negro com quintessência

4.1 Formulação da Termodinâmica

O estudo da Termodinâmica teve início com a observação de que a matéria agregada pode existir em estados macroscópicos estáveis que não mudam no tempo [23]. Estes estados de equilíbrio são caracterizados por propriedades mecânicas definidas, tais como cor, tamanho e textura que variam quando há variação de temperatura. No entanto, qualquer estado de equilíbrio pode ser reproduzido, trazendo a substância ao mesmo estado de equilíbrio. Estando nesse estado, todas as variações cessam e o sistema irá permanecer para sempre nesse estado, desde que não haja a influência de um agente externo. Esta estabilidade e a possibilidade de reprodução dos estados de equilíbrio é observada em todos os sistemas que fazem parte do mundo em nossa volta. Desta forma a Termodinâmica tem sido capaz de descrever, com notável precisão, uma grande variedade de sistemas em todo o intervalo de temperaturas experimentalmente acessíveis, variando de $10^{-4}K$ a 10^6K , sendo considerada uma teoria universal da matéria.

A Termodinâmica se baseia em quatro leis [24], as quais para serem melhor compreendidas, devemos introduzir alguns conceitos básicos.

Um sistema está em equilíbrio termodinâmico se as variáveis mecânicas não mudam no tempo e se não existe nenhum processo macroscópico de calor presente. Esse sistema pode se encontrar separado de outro por uma parede fixa e adiabática, ou seja, que não permite a transferência de matéria, calor e trabalho mecânico entre os sistemas. Se a parede for condutora, mudanças nas variáveis de estado de um sistema causarão mudanças nas variáveis de estado do outro sistema, pois esta parede permite a troca de calor, diferentemente da parede adiabática.

Entre os sistemas termodinâmicos, é útil distinguir três tipos de sistemas: um sistema isolado é aquele que é envolto por uma parede fixa e impermeável, que não permite troca de calor ou matéria com as vizinhanças. Um sistema fechado é envolto por uma parede condutora, através da qual calor pode ser trocado com o meio externo, porém matéria não. Já o sistema aberto é aquele no qual calor e matéria podem ser trocados com o meio externo.

Com relação às mudanças de um estado de equilíbrio a outro, estas podem ocorrer de forma reversível ou irreversível. Uma mudança reversível é aquela em que o sistema permanece infinitesimalmente próximo do equilíbrio termodinâmico, e esta ocorre quase-estaticamente. Tais mudanças podem sempre ser revertidas sem causar qualquer alteração nos estados termodinâmicos do universo. Já a mudança irreversível ou espontânea, ocorre sempre de forma rápida e na maioria das vezes dá origem a fluxos e efeitos de atrito. Após uma mudança desse tipo o sistema não pode retornar a seu estado termodinâmico original sem alterar o estado termodinâmico do universo.

Assim, podemos agora enunciar as leis da termodinâmica da seguinte forma:

- *Lei Zero: dois corpos, cada um em equilíbrio termodinâmico com um terceiro corpo, estão também em equilíbrio termodinâmico um com o outro.*
- *Primeira Lei: a energia é conservada.*

- *Segunda Lei: para um sistema isolado a entropia nunca diminui.*
- *Terceira Lei: a entropia é mínima no limite $T \rightarrow 0$.*

Abaixo discutiremos um pouco mais sobre cada uma destas leis.

4.1.1 Leis da Termodinâmica

Lei Zero

Esta lei é de fundamental importância para a termodinâmica experimental, pois permitiu-nos introduzir o conceito de termômetro para medir a temperatura de vários sistemas de forma reprodutível [23]. Verifica-se que ao colocar um termômetro em contato com um sistema de referência, como a água no ponto tríplice ¹, as variáveis mecânicas que descrevem o estado termodinâmico do termômetro assumem os mesmos valores. Se em seguida o termômetro é colocado em contato com um terceiro corpo e as variáveis mecânicas não mudam, então dizemos que o terceiro sistema, o termômetro e a água estão a mesma temperatura.

Primeira Lei

A primeira lei nos diz que existe uma quantidade de energia no sistema, chamada energia interna E , que pode variar devido a realização de trabalho pelo sistema ou absorção de calor [23]. Sendo assim, a variação na energia interna devido a esses processos, pode ser escrita como

$$dE = dQ - dW \tag{4.1}$$

O trabalho dW pode ser realizado devido a mudanças em qualquer variável extensiva mecânica ou variáveis químicas.

¹Ponto no qual a água coexiste nos estados sólido, líquido e gasoso.

Segunda Lei

Essa lei afirma que a variação de entropia de um sistema e suas vizinhanças, é positiva e tende a zero para processos que se aproximam da reversibilidade [23]. Através da segunda lei, introduzimos uma nova variável de estado, a entropia S . A entropia nos dá a medida do grau de desordem de um sistema e também nos dá um meio para calcular a estabilidade dos estados termodinâmicos. Ela ainda fornece uma importante ligação entre processos reversíveis e processos irreversíveis.

No caso em que os processos são reversíveis a variação na entropia é dada por

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (4.2)$$

que de acordo com a equação (4.1), pode ser escrita na seguinte forma

$$TdS = dE + dW \quad (4.3)$$

Terceira Lei

A terceira lei afirma que a diferença de entropia entre estados conectados por processos reversíveis tende a zero quando a temperatura se aproxima de zero [23]. Assim um sistema no zero absoluto tende a seu estado quântico mais baixo e nesse sentido torna-se completamente ordenado. Sendo a entropia considerada a medida da desordem, em $T = 0$ esta deve ter seu valor mais baixo.

4.2 Os Buracos Negros e a Termodinâmica

A semelhança entre as leis termodinâmicas e as leis físicas dos buracos negros, motivou Bekenstein [25] e Stephen Hawking [26] a estabelecer analogias entre essas leis. Para que se possa estabelecer uma conexão entre as leis da Termodinâmica e as leis mecânicas que descrevem

os buracos negros, precisamos inicialmente calcular a área do horizonte de eventos. Sabemos que esta é dada por [27]

$$A = \int_{R=r_H} (\sqrt{g}) d\theta d\varphi \quad (4.4)$$

sendo g o determinante da parte angular da métrica.

Dessa forma, para uma métrica com simetria esférica, temos que g é dado por $g = r^4 \text{sen}^2\theta$. Assim temos que a área do horizonte de eventos [26] será

$$A = \int_{0, R=r_H}^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi r_H^2 \text{sen}\theta d\theta \quad (4.5)$$

onde, estamos aqui definindo $r \equiv r_H$. O resultado é então

$$A = 4\pi r_H^2 \quad (4.6)$$

Para a solução de Schwarzschild, temos que o raio do horizonte de eventos é dado por $r_H = 2GM/c^2$. Assim a área do horizonte pode ser escrita como

$$A = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} \quad (4.7)$$

e se considerarmos o monopolo global, com o raio do horizonte de eventos $r_H = 2Gm/b^2 c^2$, de acordo a métrica (2.76), esta será dada por

$$A = \frac{16\pi G^2 m^2}{b^4 c^4} \quad (4.8)$$

Para o caso em que há a presença da quintessência, precisamos inicialmente encontrar o raio do horizonte de eventos r_H . Sabemos que este é dado por

$$g_{tt}(r = r_H) = 0 \quad (4.9)$$

ou seja

$$1 - \epsilon^2 - \frac{2MG}{c^2 r_H} - \frac{\epsilon^2 \rho_0 r_H}{2\eta^2} = 0. \quad (4.10)$$

Observe da eq. (4.10) que na ausência da quintessência ($\rho_0 = 0$) e ausência do monopolo ($\eta = 0$), o raio do horizonte de eventos r_H é igual a $\frac{2MG}{c^2}$ como já é bem conhecido para o raio do horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild [26].

Para resolver a equação (4.10), e obter o raio do horizonte de eventos r_H , observamos inicialmente que esta pode ser escrita como

$$\frac{\epsilon^2 \rho_0}{2\eta^2} r_H^2 - (1 - \epsilon^2) r_H + \frac{2GM}{c^2} = 0 \quad (4.11)$$

cuja solução é

$$r_H = \frac{(1 - \epsilon^2) \pm \sqrt{(1 - \epsilon^2)^2 - \frac{4\epsilon^2 \rho_0 MG}{c^2 \eta^2}}}{\frac{\epsilon^2 \rho_0}{\eta^2}}. \quad (4.12)$$

a qual é válida, apenas para o caso em que $\frac{\epsilon^2 \rho_0}{2\eta^2} \neq 0$.

Com o objetivo de analisarmos qualitativamente esse resultado, consideremos inicialmente que o termo sob a raiz, pode ser escrito como

$$\sqrt{(1 - \epsilon^2)^2 - \frac{32\pi G^2 M \rho_0}{c^6}} \quad (4.13)$$

onde usamos o fato que $\epsilon^2 = 8\pi G\eta^2/c^4$.

Sem perda de generalidade, vamos considerar $0 < \rho_0 \ll 1$, tal que

$$\frac{32\pi G^2 M \rho_0}{c^6} \ll (1 - \epsilon^2)^2.$$

Assim escrevemos

$$\sqrt{(1 - \epsilon^2)^2 - \frac{32\pi G^2 M \rho_0}{c^6}} = (1 - \epsilon^2) \left(1 - \frac{32\pi G^2 M \rho_0}{c^6 (1 - \epsilon^2)^2}\right)^{1/2} \quad (4.14)$$

o qual, expandindo até segunda ordem, fornece

$$\sqrt{(1 - \epsilon^2)^2 - \frac{32\pi G^2 M \rho_0}{c^6}} \approx (1 - \epsilon^2) \left(1 - \frac{16\pi G^2 M \rho_0}{c^6 (1 - \epsilon^2)^2} - \frac{128\pi^2 G^4 M^2 \rho_0^2}{c^{12} (1 - \epsilon^2)^4}\right) \quad (4.15)$$

Substituindo esse resultado na equação (4.12), e considerando o sinal negativo, já que este fornece as soluções particulares, obtemos

$$r_H \approx \frac{2MG}{c^2} \left[1 + \frac{8\pi G^2 M}{c^6} \rho_0 (1 - \epsilon^2)^{-2} \right] (1 - \epsilon^2)^{-1}, \quad (4.16)$$

que é o raio do horizonte de eventos para um buraco negro, na presença do monopolo global e quintessência.

Podemos ter uma ideia da influência da quintessência na alteração do raio do horizonte de eventos, analisando o gráfico abaixo:

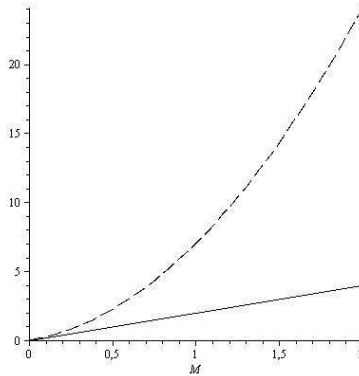


Figura 4.1: Variação do raio do horizonte de eventos com a massa

onde a linha contínua corresponde ao raio de Schwarzschild e a tracejada com a presença da quintessência. Observamos então, a partir deste gráfico, que o raio do horizonte de eventos do buraco negro de Schwarzschild, para uma determinada massa, é sempre maior quando consideramos o termo de quintessência. Isso implica que a quintessência altera a geometria do espaço-tempo a sua volta.

Calculando agora, a área do horizonte de eventos, para o buraco negro com monopolo global e quintessência, encontramos

$$A = \frac{16\pi M^2 G^2}{c^4} \left[1 + \frac{8\pi G^2 M}{c^6} \rho_0 (1 - \epsilon^2)^{-2} \right]^2 (1 - \epsilon^2)^{-2}, \quad (4.17)$$

Em 1971 Stephen Hawking estabeleceu que a área do horizonte de eventos A de um buraco negro nunca diminui em qualquer processo físico, podendo no entanto, aumentar ou

permanecer constante durante o processo. Dessa forma podemos escrever que:

$$\Delta A \geq 0 \quad (4.18)$$

Podemos agora estabelecer as leis da termodinâmica para buracos negros em paralelo com as usuais leis da termodinâmica. Essa relação é feita a seguir.

4.2.1 Leis da Termodinâmica para buracos negros

Através de parâmetros do buraco negro, como a gravidade de superfície κ , a massa m e a área do horizonte de eventos A , são estabelecidas quatro leis mecânicas em paralelo com as leis da termodinâmica:

Lei Zero

O horizonte de eventos é descrito por uma quantidade κ [26, 28], a gravidade de superfície, que é a aceleração gravitacional experimentada por uma partícula de teste em sua superfície, a qual, possui o mesmo valor sobre o todo o horizonte. Essa constante κ está relacionada com a temperatura física do buraco negro T_H por

$$T_H = \frac{\hbar c}{k_B} \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{\hbar c}{4\pi k_B} \left| \frac{d}{dr} g_{tt}(r = r_H) \right| \quad (4.19)$$

onde κ é definida como

$$\kappa = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g^{rr}}{-g_{tt}}} \frac{dg_{tt}}{dr} \Big|_{r=r_H} \quad (4.20)$$

e k_B é a constante de Boltzmann. Para calcularmos quantitativamente a temperatura T_H , com a métrica dada por (3.9), sabendo que o parâmetro ω_q pertence ao intervalo $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$, vamos considerar, para efeito de análise $\omega_q = -\frac{2}{3}$.

Logo a temperatura T_H será dada por

$$T_H = \frac{\hbar}{4\pi k_B c} \left(\frac{2GM}{r_H^2} + \frac{\epsilon^2 \rho_0^2 c^2}{2\eta^2} \right) \quad (4.21)$$

onde r_H é dado pela eq. (4.16). Observe que a temperatura T_H depende de ρ_0 e de η , e quando fazemos esses dois parâmetros irem a zero, ou seja, na ausência do monopolo global e da quintessência, recuperamos o resultado já bem conhecido para o buraco negro de Schwarzschild [26].

Primeira Lei

Essa lei nos dá a variação da massa do buraco negro, quando este vai de uma estado estacionário a outro. Pode ser expressa da seguinte forma [16]:

$$c^2 dM = \left(\frac{\kappa}{8\pi} \right) dA + \textit{termos de trabalho} \quad (4.22)$$

Definindo

$$S_{bn} = \frac{Ak_B c^3}{4\hbar G} \quad (4.23)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e usando a equação (4.19), podemos escrever a segunda lei como

$$c^2 dM = T_H dS_{bn} + \textit{termos de trabalho}, \quad (4.24)$$

que é análoga a primeira lei da termodinâmica

$$dE = TdS + \textit{termos de trabalho} \quad (4.25)$$

Assim da equação (4.24) identificamos o termo dS_{bn} , como a variação na entropia do buraco negro, a qual é dada pela equação (4.23). Dessa forma, vemos que entropia do buraco negro é igual a um quarto da área do horizonte de eventos.

Expressando a entropia S_{bn} na forma dimensionalmente correta, a equação (4.23) fornece

$$S_{bn} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar} = C_{Hawking} A \quad (4.26)$$

onde $C_{Hawking}$ é conhecida como constante de Hawking [29]. Com a área dada por (4.6), obtemos a entropia do buraco negro com monopolo global,

$$S_{bn} = \frac{4\pi k_B G m^2}{\hbar b^4 c} \quad (4.27)$$

e para o caso em que consideramos a quintessência, a entropia é dada por

$$S_{bn} = \frac{4\pi K_B M^2 G}{\hbar c} \left[1 + \frac{8\pi G^2 M}{c^6} \rho_0 (1 - \epsilon^2)^{-2} \right]^2 (1 - \epsilon^2)^{-2}, \quad (4.28)$$

Essa relação entre a entropia do buraco negro e a área do horizonte de eventos, foi de fato encontrada por Hawking, feita com base na aplicação da teoria quântica de campos. Esta mostra que os buracos negros absorvem ou emitem partículas como se fossem corpos térmicos com a temperatura Hawking, T_H .

Segunda Lei

Dessa lei temos que, em processo clássico a área do horizontes de eventos nunca diminui, ou seja,

$$dA \geq 0, \quad (4.29)$$

o que também se aplica à entropia do buraco negro.

Observa-se porém, que a segunda lei para buracos negros pode ser violada, quando efeitos quânticos são considerados [30]. Classicamente, um buraco negro só emite ondas gravitacionais o que corresponderia a uma temperatura nula. No entanto, após a lei das áreas ser estabelecida Stephen Hawking constatou através da teoria quântica de campos que os buracos negros emitem radiação, mesmo aqueles que não possuem carga e nem rotação. Foi constatado que estes irradiam bósons e férmions com espectro térmico a uma temperatura T . Essa radiação ficou conhecida como radiação Hawking.

Um outro ponto que deve ser considerado é que a lei das áreas é mais estrita do que a segunda lei da termodinâmica. Para um sistema contendo vários buracos negros, a lei das áreas tanto é válida para o sistema como um todo, como para um buraco negro tomado isoladamente. Isso significa que não é possível transferir área de um buraco negro para outro.

No caso da termodinâmica, para um sistema fechado a entropia nunca diminui, porém pode haver transferência desta quantidade entre os subsistemas.

Ainda temos a questão da evaporação dos buracos negros, outro fato que pode contradizer a lei das áreas, pois permitiria que os buracos negros desaparecessem. Para analisar esse fato vamos considerar um buraco negro como sendo um absorvedor perfeito, ou seja, com absorptividade 1, com temperatura dada pela equação (4.19). E também vamos considerar o coeficiente de transmissão do potencial efetivo como sendo 1, ou seja, a distribuição dessa radiação se comporta como um corpo negro [26]. Sabendo-se que a potência irradiada por um corpo negro é proporcional à quarta potência de T , temos a lei de Stefan-Boltzmann para a potência irradiada por unidade de área, como sendo

$$j = \sigma T^4, \quad (4.30)$$

onde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2$ é a constante de Stefan-Boltzmann. Explicitamente essa lei pode ser escrita como

$$j = \frac{\pi^2 k_B^4}{60c^2 \hbar^3} T^4 \quad (4.31)$$

sendo $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{J/K}$ a constante de Boltzmann, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{J.s}$ a constante de Planck normalizada e c a velocidade da luz.

Dessa forma a potência total irradiada pelo buraco negro é dada multiplicando-se j pela área do horizonte de eventos dada por (4.6). Fazendo isto obtemos

$$P = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 M^2} \quad (4.32)$$

Sendo $E = Mc^2$ a energia do buraco negro temos

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dM}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = -P = -a \frac{1}{M^2} \quad (4.33)$$

onde

$$a = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2} \quad (4.34)$$

que integrando obtemos

$$M^3 = -3ac^{-2}t + d = -3\beta t + d \quad (4.35)$$

onde d é uma constante de integração e $\beta = ac^{-2}$. Usando a condição inicial que em $t = 0$, $M = M_0$, obtemos

$$M(t) = (M_0^3 - 3\beta t)^{1/3}, \quad (4.36)$$

o que nos fornece o tempo necessário para a evaporação completa do buraco negro

$$t = \frac{M_0^3}{3\beta}. \quad (4.37)$$

No caso de um buraco negro com massa inicial $M_0 = M_S$, onde M_S é a massa do sol, podemos estimar que o tempo necessário para sua evaporação será de

$$t = 2,1011.10^{67} \text{anos} \quad (4.38)$$

Considerando, que o buraco negro está na presença do monopolo global, temos que a potência total irradiada será dada por

$$P = \frac{\hbar c^6 b^{12}}{15360\pi G^2 m^2} \quad (4.39)$$

e com o procedimento análogo ao anterior, encontramos que o tempo de evaporação do buraco negro, nesse caso, será de

$$t = 2,1013.10^{67} \text{anos} \quad (4.40)$$

Os valores encontrados são portanto, muitas ordens de grandeza superiores ao valor estimado para a idade do Universo, do qual se pode concluir que estes buracos não tiveram tempo suficiente para evaporarem de tal maneira que sua área não sofreu uma variação significativa.

Terceira Lei

De acordo com a terceira lei, é impossível atingir, em um tempo finito, o limite $\kappa = 0$. Pra esse valor, temos de acordo com a equação (4.19), que a temperatura do buraco negro será nula, porém a entropia não.

4.3 Capacidade Térmica

A capacidade térmica está incluída no grupo das chamadas funções resposta, em termodinâmica, as quais são quantidades mais acessíveis ao experimento. Através destas, podem ser obtidas informações sobre como uma variável de estado específica sofre alteração, quando certos parâmetros são mantidos fixos. Também é possível obter uma medida do tamanho das flutuações de um sistema termodinâmico.

Para o cálculo da capacidade térmica de buracos negros, inicialmente consideremos a equação (4.24), ou seja, a segunda lei da termodinâmica para buracos negros. A partir desta equação identificamos que o termo de massa, é o equivalente ao termo de entropia da termodinâmica usual. Sendo assim, podemos expressar a capacidade térmica da seguinte forma

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \implies C = c^2 \frac{\partial M}{\partial T} \quad (4.41)$$

sendo M a massa do buraco negro e T sua temperatura.

Inicialmente usando a expressão para a temperatura do buraco negro de Schwarzschild [18], podemos escrever sua massa como

$$M = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G T} \quad (4.42)$$

Calculando a capacidade térmica obtemos

$$C = -\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G T^2} \quad (4.43)$$

que pode ser escrita na forma

$$C = -\frac{8\pi k_B G M^2}{\hbar c^3} \quad (4.44)$$

Observando essa equação, podemos ver que a capacidade térmica sempre será negativa e que se $M \rightarrow \infty$, $C \rightarrow -\infty$. Classicamente, uma capacidade térmica negativa significa que o sistema é termodinamicamente instável, ou seja, presta a colapsar.

Abaixo temos a variação da capacidade térmica em função da massa M para um buraco negro de Schwarzschild:

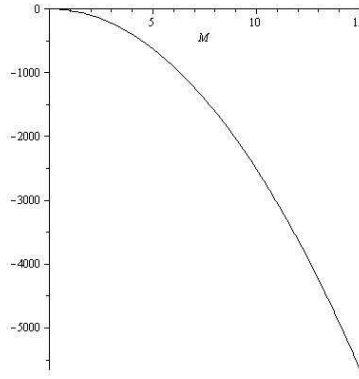


Figura 4.2: Capacidade térmica para o buraco negro de Schwarzschild em função de M

Incluindo agora, os termos do monopolo e quintessência para a expressão da temperatura, ou seja a equação (4.21), podemos escrever que sua capacidade térmica será dada pela seguinte expressão

$$C = -c^2 \left[\frac{\hbar c^5 (1 - \epsilon^2)}{8\pi G k_B M^2 \left(1 + \frac{8\pi G^2 M \rho_0}{(1 - \epsilon^2) c^6}\right)^2} + \frac{2\hbar c G \rho_0 (1 - \epsilon^2)}{k_B M \left(1 + \frac{8\pi G^2 M \rho_0}{(1 - \epsilon^2) c^6}\right)^3} \right]^{-1} \quad (4.45)$$

Apartir dessa expressão, observamos como no caso de Shwarzschild, que a capacidade térmica sempre assumirá valores negativos. No caso em que $M \rightarrow \infty$, $C \rightarrow -\infty$. Quando $\rho_0 = 0$ e $\epsilon = 0$, a expressão se reduz à equação (4.44), como era de se esperar.

O gráfico a seguir mostra a variação da capacidade térmica com a temperatura. Assumimos

que $\rho_0 = 0,1$ e $\epsilon = 0.001$.

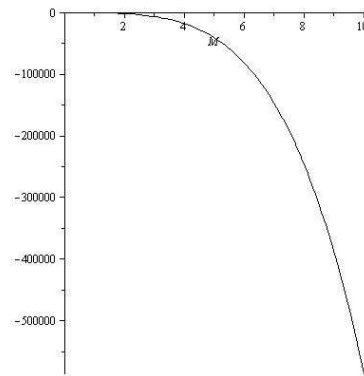


Figura 4.3: Capacidade térmica para o buraco negro de Schwarzschild com monopolo e quintessência em função de M

Vemos que a presença da quintessência faz com que a capacidade térmica diminua mais rapidamente do que no caso de Schwarzschild. Portanto, contribui para alterar as quantidades termodinâmicas do buraco negro.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho analisamos alguns efeitos que o monopolo global traz para a métrica do espaço-tempo gerada pelo buraco negro de Schwarzschild. Partindo da consideração que este tipo de defeito topológico pode ter surgido em transições de fase de um Universo primitivo, resolvemos inicialmente as equações de Einstein e foi então obtida a métrica que descreve este cenário. A partir daí pode-se verificar as alterações que surgem no cálculos dos potenciais efetivos e a consequente estabilidade das órbitas, assim como a alteração no desvio do periélio do planeta Mercúrio. Em seguida, consideramos que o buraco negro de Shwarzschild, além de estar na presença do monopolo global, possui em suas vizinhanças a quintessência. Com a alteração da métrica, produzida por essa nova fonte de energia, procedemos ao cálculo dos modos normais de vibração, ou seja, vibrações características emitidas pelos buracos negros. Por último, com a analogia estabelecida entre as leis mecânicas que descrevem os buracos negros e as leis termodinâmicas usuais, calculamos algumas quantidades físicas de interesse termodinâmico.

Observamos na secção (2.3.1), que o monopolo global introduz uma pequena correção no desvio da órbita do planeta Mercúrio, porém o resultado ainda está no intervalo de variação

previsto pela teoria. Com relação à estabilidade das órbitas, como mostrado na secção (2.3.2), o resultado para os potenciais efetivos também são alterados. Neste espaço-tempo, estes agora passam a depender do parâmetro b , característico do monopolo global. No capítulo 3, com o cálculo dos modos normais de vibração emitidos pelos buracos negros, vimos que estes dependendo diretamente dos potenciais, também são afetados pelos parâmetros relacionados ao monopolo global e à presença da quintessência. Por último, no capítulo 4, com o estudo da termodinâmica dos buracos negros, observamos que o termo de quintessência, altera o raio do horizonte de eventos, fazendo com que este tenha uma maior dimensão em relação ao raio de Shwarzchild, quando considerado um mesmo valor para a massa do buraco negro. Ainda temos, como mostrado, que a quintessência, faz com que a capacidade térmica dos buracos negros diminua mais rapidamente com o aumento de sua massa

Outras considerações a serem feitas a respeito desse espaço-tempo, como por exemplo, o desvio do periélio de mercúrio, análise da estabilidade das órbitas, o cálculo de captura de partículas pelo buraco negro; a generalização dos cálculos apresentados para buraco negro carregado e com rotação; extensão para Brans-Dicke com quintessência; análise do impacto deste modelo de quintessência na formação de estruturas cósmicas; influência da quintessência no decaimento de partículas; estudo do efeito Casimir gravitacional no espaço-tempo do buraco negro bi-dimensional no cenário de quintessência e o cálculo da polarização do vácuo, serão objeto de estudos posteriores.

Bibliografia

- [1] Hartle, J. B. *Gravity - An Introduction to Einstein's General Relativity* (University of California, 2002).
- [2] Valeri P. Frolov and Igor D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments* (Copenhagen, 1997).
- [3] Robert M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 1984).
- [4] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, 1985).
- [5] Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press, 1984).
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley e Sons, Canadá, 1976).
- [7] Sean Carrol, *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity* (Addison Wesley, New York, 2004).
- [8] Charles W. Misner and John Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1970)
- [9] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, 1994).
- [10] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* 9, 1387 (1976); A. Vilenkin, *Phys. Rep.* 121, 263 (1985).
- [11] Manuel Barriola e Alexander Vilenkin, *Phys. Lett.* **63**, 341 (1989).

- [12] Ruppeiner, G., *Phys. Rev. A* **20**, 1608 (1979).
- [13] Naresh Dadhich, *Schwarzschild black hole with a global monopole charge* (1997).
- [14] Hawking, S. W., *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344 (1971)
- [15] H. C. Ohanian e R. Ruffini. *Gravitation and spacetime*, W. W. Norton e Company, (1976).
- [16] Xin-zhou Li, Ping Xi e Xiang-hua Zhai, *Phys. Lett.* **B666**, 125 (2008).
- [17] Ping Xi, *Astrophys Space Sci.* **321**, 47 (2009).
- [18] V. V. Kiselev, *Class. Quantum Grav.* **20** 1187-1197 (2003).
- [19] S. Chandrasekhar *The Mathematical Theory of Black Holes*(Oxford University, New York, 1983).
- [20] Sai Iyer and Clifford M. Will, *Physical Review D.* **35**, 12 (1987).
- [21] Chun Yan Wang, Yuan Xing Gui e FuJun Wang, *Astrophys Space Sci.* **323**, 395-399 (2009).
- [22] C. M. Bender and S. A. Orszag *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*(McGraw-Hill, New York, 1978).
- [23] L. E. Reichl *A Modern Course in Statistical Physics*(John Wiley e Sons, New York, 1998).
- [24] Callen, Herbert B. *Thermodynamics an a Introduction to Thermostatistics*(John Wiley e Sons, New York, 1985).
- [25] Bekenstein , J. D., *Phys. Rev. D* **7**, 949, 2333 (1973).
- [26] S.W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974); Ídem, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [27] Davi Giugno, *Buracos Negros e Termodinâmica* (São Paulo, 2001).

- [28] Shuang-Qing Wu e Jun-Jin Peng, *Class.Quant.Grav.***24**, 5123 (2007).
- [29] S. Hawking *O Universo numa casca de noz* (Editora Mandarim, São Paulo, 2002).
- [30] Narit Pidokrajt, *Black Hole Thermodynamics* (Stockholm University, 2003).