

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

COMPACTIFICAÇÃO VIA DEFEITOS E JUNÇÕES

Heydson Henrique Brito da Silva

CAMPINA GRANDE

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

COMPACTIFICAÇÃO VIA DEFEITOS E JUNÇÕES

Heydson Henrique Brito da Silva

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586c

Silva, Heydson Henrique Brito da.

Compactificação via defeitos e junções / Heydson Henrique Brito da Silva. — Campina Grande, 2010.

44f. : il. col.

Dissertação (Mestrado em Física)- Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

Referências.

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito.

1. Teoria e Natureza dos Fenômenos. 2. Teoria dos Campos. 3. Dimensões Extras. 4. P-Branas – Soluções Topológicas. I. Título.

CDU – 53.01(043)



COMPACTIFICAÇÃO VIA DEFEITOS E JUNÇÕES

Heydson Henrique Brito da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Francisco de Assis de Brito

Dissertação aprovada por:

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito (UFCG)

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia (UFCG)

Prof. Dr. Laercio Losano (UFPB)

CAMPINA GRANDE

2010

*Aos meus pais, José Henrique e Conceição
Brito com muito carinho.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente ao senhor supremo Deus que me conduziu e possibilitou o andamento deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Brito, o qual teve grande dedicação neste trabalho, paciência e não mediu esforços enquanto disponibilidade de tempo.

Aos professores da Unidade Acadêmica de Física (UAF) pela minha formação.

Ao apoio e torcida dos meus pais, irmãos (Heythor, Heyde e Heynara), sobrinho (Hian), tios, primos e em especial meus tios Paulo Brito e Josildo Henrique que vêm me apoiando desde o tempo da graduação.

Aos meus colegas do mestrado, em especial Alex Albuquerque, André Araújo, Patrício Félix, Hermes Jesuíno e Marinoni Brito por toda ajuda concedida e companheirismo.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

À CAPES/REUNI por todo suporte financeiro.

RESUMO

Uma questão intrigante na física atual é o fato de algumas teorias proporem a existência de um número de dimensões superior ao observado fisicamente. Uma dessas teorias é a Teoria das Supercordas, a qual prevê um universo formado por nove dimensões espaciais e uma temporal. Neste trabalho apresentaremos alguns métodos de compactificação dessas dimensões em objetos de dimensões menores. O primeiro método trata de um modelo de seis campos escalares reais fornecendo seis soluções de paredes de domínios 8-dimensionais (ou 8-branas) mergulhadas no espaço-tempo $(9 + 1)$ -dimensional que se intersectam formando junções cujo espaço-tempo é 4-dimensional. Nesse método incluímos o setor fermiônico na teoria a fim de investigar se o Modelo Padrão $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ pode ser o resultado de um mecanismo de redução ou compactificação de dimensões extras. O segundo método que vamos abordar aqui trata-se de uma única parede de domínios (ou 3-brana) imersa em D -dimensões. Em todos os métodos abordados aqui tratamos essencialmente da localização de modos de campos escalares e fermiônicos.

ABSTRACT

An intriguing question in physics today is that some theories propose that the existence of a number of dimensions higher than observed physically. One of these theories is the Superstring Theory, which provides a universe composed of nine spatial dimensions and one temporal. In this work we present some methods of compactification of these dimensions to smaller dimensions. The first method is a model of six real scalar fields providing six 8-dimensional domain wall solutions (or 8-branes) embedded in $(9 + 1)$ -dimensional space-time which intersect forming junctions whose space-time is 4-dimensional. In this method we include the fermionic sector in theory to investigate whether the Standard Model $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ may be the result of a mechanism for reduction or compactification of extra dimensions. The second method that we address here it is a single domain wall (or 3-brane) embedded in D -dimensions. All the methods discussed here deal primarily to the location of fermionic and scalar field modes.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Junções de p-branas	3
2.1	“Relaxando” para 3-branas	4
2.1.1	Modelo de dois campos	4
2.1.2	Modelo de três campos	7
2.2	Compactificação por junções	10
2.2.1	Campos fermiônicos em paredes de domínios	12
2.2.2	Modos localizados bosônicos e fermiônicos	13
2.2.3	Modelo quadridimensional	16
3	Compactificação via p-branas I	20
3.1	Mecanismo de compactificação	20
3.1.1	Modelo ϕ^4	23
4	Compactificação via p-branas II: defeitos escalares globais em D-dimensões	27
4.1	Formalismo estendido	27
4.2	Aplicação	30
4.2.1	Ação efetiva para $d = 1$ e $a = 1$	32
4.2.2	Ação efetiva para $d = 1$ e $a = 3$	33
4.2.3	Ação efetiva para $d = 1$ e $a = 5$	33
4.2.4	Ação efetiva para $d = 3$ e $a = 1$	34
4.2.5	Ação efetiva para $d = 3$ e $a = 3$	35

4.2.6	Ação efetiva para $d = 3$ e $a = 5$	35
5	Comentários e Conclusões	38
A	Equações de primeira ordem e energia de Bogomol'nyi	40

Lista de Figuras

2.1	Setores conectando vácuos (em vermelho) no espaço dos campos u e v . Em roxo temos os setores 1- <i>diag</i> e em preto os setores tipo <i>borda</i>	5
2.2	Processo de bifurcação do setor 1- <i>diag</i>	6
2.3	Conexão entre os quatro vácuos.	6
2.4	Setores conectando vácuos (em vermelho) no espaço dos campos u , v e w . Em roxo temos um dos setores 1- <i>diag</i> , em verde, um dos setores 2- <i>diag</i> e em preto os setores tipo <i>borda</i>	8
2.5	Interseção de três 2-branas formando uma junção tipo 0-brana no centro.	9
3.1	Solução tipo parede de domínios (kink).	24
3.2	Potencial tipo Pöschl-Teller modificado.	25
3.3	Potencial em função dos dois campos localizados na brana.	26
4.1	Soluções estáticas em $d = 1$	34
4.2	Funções de onda normalizadas em $d = 1$	34
4.3	Potenciais para o modo ξ_0 em $d = 1$	34
4.4	Soluções estáticas em $d = 3$	36
4.5	Funções de onda normalizadas em $d = 3$	36
4.6	Potencial para o modo ξ_0 em $d = 3$	37

Capítulo 1

Introdução

Baseando-nos na nossa experiência diária acreditamos que o universo possui apenas três dimensões espaciais. Quando entramos em contato com a relatividade restrita, descobrimos que o tempo é adicionado como uma dimensão, formando um espaço-tempo $(3 + 1)$ -dimensional. Entretanto, existem teorias que sustentam a possibilidade de que os fenômenos físicos observados no nosso mundo sejam manifestações de dimensões superiores. Uma dessas teorias é a Teoria de Supercordas [1], a qual assegura a idéia de que o universo possui nove dimensões espaciais e uma temporal, ou seja, a possibilidade de vivermos em um espaço-tempo $(9 + 1)$ -dimensional. Assim, é interessante estudar métodos de compactificação desse espaço-tempo para outro $(3 + 1)$ -dimensional, a fim de entender o reflexo dessas dimensões extras no nosso mundo cuja física parece ser regida por um espaço-tempo quadridimensional.

No capítulo 2 iniciamos o trabalho apresentando os métodos de compactificação por bifurcação [2], e junção de p -branas [3]. O primeiro método trata-se essencialmente em analisar os setores formados pelas soluções de vácuos em configurações de dois e três campos. A generalização para N campos é direta. Esses setores podem se bifurcar em “meias” paredes de domínios formando junções estáveis, mas isso só é possível para certos valores do parâmetro de deformação. Este processo de bifurcação tem sido utilizado em sistemas periodicamente forçados em matéria condensada [4]. Como consequência, as junções de p -branas nos fornecem um mecanismo no qual se selecionam dimensões menores a partir de

junções ortogonais de paredes de domínios. Se o nosso espaço-tempo é $(9+1)$ -dimensional, logo devemos ter seis paredes de domínios, cuja codimensão é 1, unidas ortogonalmente a fim de se formar uma junção de dimensão espacial 3, a qual retrata o universo que experimentamos usualmente. Neste caso estamos principalmente interessados em localizar estados fermiônicos massivos e sem massa, que junto aos escalares, vivem inicialmente nas seis p -branas geradas por seis cópias de modelos ϕ^4 . Quando essas paredes se intersectam, um número de modos bem definido tem mais chances de ocorrer na junção, o que nos fornece um indício para a explicação do número de sabores de quarks e léptons no nosso universo quadridimensional observado.

Posteriormente, no capítulo 3, estudamos a compactificação numa única brana [5, 6], onde há possibilidade de localização de modos escalares na mesma. Basicamente este método trata de construir através de um campo escalar real em $p + 2$ dimensões, uma ação efetiva para vários modos (campos localizados) em $p + 1$ dimensões. Notamos que, analogamente à compactificação via Kaluza-Klein [7, 8, 9], na compactação via branas, um determinado grau de liberdade em $p + 2$ dimensões se traduz em vários graus de liberdade em $p + 1$ dimensões.

No capítulo 4 apresentamos um novo estudo que amplia o método de uma única brana descrito no capítulo anterior. Para isto, propomos uma modificação na topologia do espaço-tempo da forma $\mathcal{M}^{p+d+1} = \mathbb{M}^{p+1} \times \mathbb{R}^d$. Isso nos permite usar um modelo com potencial escalar bem mais geral que o modelo ϕ^4 [10], fornecendo assim, novos defeitos escalares globais.

Por fim, no capítulo 5 apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

A convenção utilizada neste trabalho é $\hbar = c = k_B = 1$. A métrica utilizada é $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 2

Junções de p -branas

Este capítulo introduz um método muito importante de compactificação, o qual utiliza junções de p -branas como mecanismo para selecionar dimensões inferiores. Primeiramente vamos discutir a idéia básica, a qual é baseada no simples fato de que n objetos d -dimensionais de co-dimensão 1 quando se cruzam ortogonalmente formam junções, criando uma redução dimensional de $d+1$ para $d+1-n$ dimensões, dando origem a objetos $(d+1-n)$ -dimensionais. Com essa idéia, e assumindo o ponto de vista da Teoria de Supercordas, supomos que o universo é primordialmente 10-dimensional ($9+1$). Sendo assim, deve haver seis paredes de domínios 8-dimensionais (8-branas) — objeto de co-dimensão 1 em $D=9+1$ dimensões — interceptando-se para formar uma junção 3-dimensional, a qual evolui no tempo, e com isso fornecendo o “volume-mundo” 4-dimensional exibido pelo nosso universo. Posteriormente, iremos estender esse mecanismo incluindo férmions, na tentativa de explicar o fato de o universo selecionar um certo número de famílias de quarks e léptons. Este número pode estar relacionado com o número de paredes de domínios que se cruzam. Essas paredes de domínios devem possuir apenas dois estados ligados: o modo zero e um estado ligado massivo, pelo menos para os modos fermiônicos.

2.1 “Relaxando” para 3-branas

2.1.1 Modelo de dois campos

Considere uma teoria de dois campos escalares reais $\phi_1 = u$ e $\phi_2 = v$. A densidade lagrangeana (ou usualmente lagrangeana) que descreve a dinâmica desses campos é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\alpha u \partial^\alpha u + \frac{1}{2}\partial_\alpha v \partial^\alpha v - \frac{1}{2}(\partial_u W)^2 - \frac{1}{2}(\partial_v W)^2, \quad (2.1.1)$$

e o superpotencial escrito como

$$W = r(u + v) - \frac{1}{r} \left(\frac{u^3}{3} + \frac{v^3}{3} \right). \quad (2.1.2)$$

Usando a equação de Euler-Lagrange para campos obtemos as seguintes equações de movimento para os campos u e v respectivamente

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = W_u W_{uu} + W_v W_{vu}, \quad (2.1.3)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = W_u W_{uv} + W_v W_{vv}, \quad (2.1.4)$$

onde $W_u = \partial W / \partial u$, $W_{uv} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)$ etc. Ao substituir o superpotencial nessas equações chegamos a

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 2u \left(\frac{u^2}{r^2} - 1 \right), \quad (2.1.5)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 2v \left(\frac{v^2}{r^2} - 1 \right). \quad (2.1.6)$$

Podemos usar o método de Bogomol’nyi, desenvolvido no Apêndice a, para trabalharmos com equações diferenciais de primeira ordem, ao invés dessas (segunda ordem). Portanto, as soluções estáticas unidimensionais são obtidas através das seguintes equações de primeira ordem

$$\frac{du}{dx} = r - \frac{u^2}{r} \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dx} = r - \frac{v^2}{r}. \quad (2.1.7)$$

Essas equações podem ser facilmente integradas fornecendo soluções de vácuos (mínimos) e soluções estáticas. As soluções de vácuo são $\bar{u} = \bar{v} = \pm r$ envolvendo uma simetria Z_4 . Esses vácuos são vértices de um quadrado no plano (u, v) (espaço dos campos). Eles formam um conjunto de 6 setores BPS independentes, cada um conectando um par

de vértices. Quatro setores são as *bordas* do quadrado, e os outros dois setores são as *diagonais*, os quais nomeamos estados *borda* e *1-diag*, como ilustrado abaixo

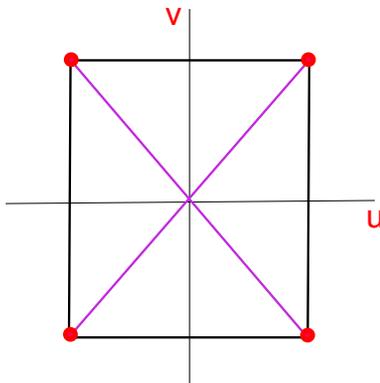


Figura 2.1: Setores conectando vácuos (em vermelho) no espaço dos campos u e v . Em roxo temos os setores *1-diag* e em preto os setores tipo *borda*.

Esses setores fornecem, a partir de (2.1.7), as seguintes soluções estáticas (kinks)

$$u_a^2 = r^2; \quad v_a^2 = r^2 \tanh^2(x) \quad \text{borda} \quad (2.1.8)$$

$$u_b^2 = v_b^2; \quad v_b^2 = r^2 \tanh^2(x) \quad \text{1-diag} . \quad (2.1.9)$$

O índice $a = 1, 2, 3, 4$ indica uma borda particular e $b = 5, 6$ indica uma diagonal particular. Essas soluções são independentes e imersas num espaço bidimensional representam paredes de domínios, ou 1-brana, separando quatro vácuos. Entretanto, existe a possibilidade de incluir um parâmetro de deformação, que denominaremos ε , o qual, dependendo do seu valor, pode permitir que uma parede de domínios se *bifurque*. Isso permite ao sistema preferir apenas soluções tipo *borda* (2.1.8) estáveis, ao invés de *1-diag* (2.1.9). É importante salientar que ao admitirmos isto, devemos adicionar à lagrangeana (2.1.1) o termo de interação $-\frac{1}{2}\varepsilon F(u, v)$, onde $F(u, v)$ é uma função dos campos, a qual mostraremos adiante.

Sendo assim, a junção pode ser representada por quatro *meias paredes* — (ver figura (2.2)) — rodadas de 90° , onde cada uma das quatro “pernas” representa metade de uma parede de domínios.

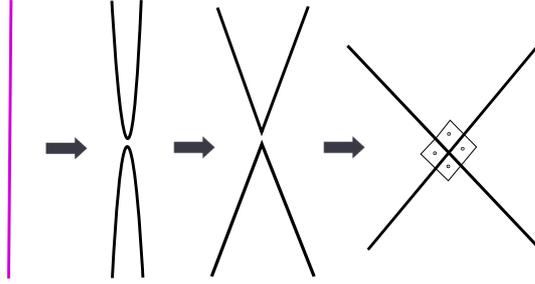


Figura 2.2: Processo de bifurcação do setor 1-*diag*.

Esses são dados pelas soluções

$$\vec{v}_1 = r(1, \tanh(y)), \quad \vec{v}_2 = r(-\tanh(x), 1), \quad (2.1.10)$$

$$\vec{v}_3 = r(-1, -\tanh(y)), \quad \vec{v}_4 = r(\tanh(x), -1). \quad (2.1.11)$$

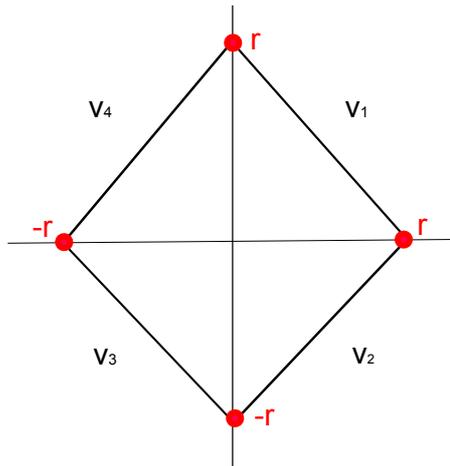


Figura 2.3: Conexão entre os quatro vácuos.

O parâmetro ε está associado às estabilidades das soluções. Ao admitirmos bifurcação, devemos então corrigir a energia de Bogomol'nyi das soluções BPS, admitindo um novo valor [11]

$$E^a = E_b^a + \frac{1}{2}\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) dx, \quad (2.1.12)$$

onde $E_b^a = |\Delta W_a|$ é a energia de Bogomol'nyi, a qual descrevemos detalhadamente no apêndice A; ε é o parâmetro de deformação. $F(u, v)$ é uma função dos campos, a qual inferimos por

$$F(u, v) = \frac{1}{2}(u^4 + v^4) - 3u^2v^2 + \frac{9}{2}. \quad (2.1.13)$$

Agora mostraremos que apenas uma das soluções (2.1.8) ou (2.1.9) é estável enquanto a outra é instável. A junção será estável quando a soma das energias de duas bordas adjacentes for menor do que qualquer diagonal, isto é, $E^a + E^{a+1} < E^b$ (condição de junção) [2, 3, 12]. Com isso, calculando a energia de Bogomol'nyi de cada setor e substituindo junto com (2.1.13) em (2.1.12), chegamos a

$$E^a + E^{a+1} = 4 + \frac{21}{2}\varepsilon, \quad a = 1, 2, 3, 4 \quad \text{borda} \quad (2.1.14)$$

$$E^b = 4 + 6\varepsilon, \quad b = 5, 6 \quad \text{1-diag} . \quad (2.1.15)$$

Note que a configuração *borda* é estável para $\varepsilon < 0$, pois nesse regime a condição de junção é satisfeita. Entretanto, a configuração *1-diag* é estável para $\varepsilon > 0$. Assim, as configurações (2.1.8) e (2.1.9) não podem ser simultaneamente estáveis. Em alguns cenários envolvendo $\varepsilon < 0$, paredes de domínios (de setores *1-diag*) separando vácuos adjacentes tendem a bifurcar em quatro “meias” paredes de domínios (dos setores *borda*) juntas, formando uma junção de duas 1-brana, e conseqüentemente formando um objeto com uma dimensão menor equivalente a uma 0-brana. Esse é um exemplo típico de mecanismo de relaxamento de dimensões, quando um universo inicialmente $(p + 1)$ -dimensional relaxa para outro $(p + 1 - 2)$ -dimensional.

2.1.2 Modelo de três campos

Estendendo para três campos, devemos usar o seguinte superpotencial

$$W = r(u + v + w) - \frac{1}{r} \left(\frac{u^3}{3} + \frac{v^3}{3} + \frac{w^3}{3} \right). \quad (2.1.16)$$

como no caso anterior, soluções estáticas unidimensionais podem ser encontradas através das equações de primeira ordem

$$\frac{du}{dx} = r - \frac{u^2}{r}, \quad \frac{dv}{dx} = r - \frac{v^2}{r} \quad \text{e} \quad \frac{dw}{dx} = r - \frac{w^2}{r}, \quad (2.1.17)$$

e as soluções de vácuo sendo $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \pm r$. Esses são vértices de um cubo no espaço dos campos (u, v, w) . Eles formam um conjunto de 8 vácuos e 28 setores BPS independentes, cada um conectando um par de vértices. Desses setores, 12 são bordas, 12 são diagonais

superficiais e 4 são diagonais internas do cubo, os quais nomeamos respectivamente por estados *borda*, *1-diag* e *2-diag*. Abaixo segue uma ilustração do que foi comentado

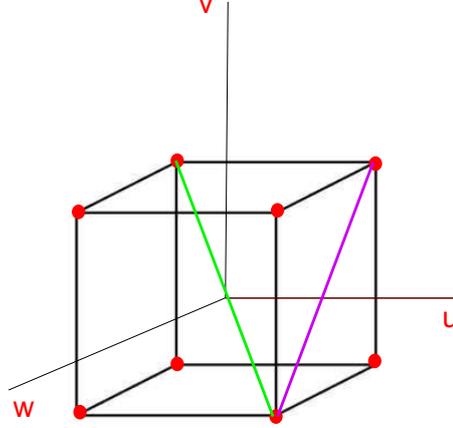


Figura 2.4: Setores conectando vácuos (em vermelho) no espaço dos campos u , v e w . Em roxo temos um dos setores *1-diag*, em verde, um dos setores *2-diag* e em preto os setores tipo *borda*.

As soluções correspondentes de cada setor são

$$u_a^2 = v_a^2 = r^2; \quad w_a^2 = r^2 \tanh^2(x), \quad \text{borda} \quad (2.1.18)$$

$$u_b^2 = r^2; \quad v_b^2 = w_b^2; \quad w_b^2 = r^2 \tanh^2(x), \quad \text{1-diag} \quad (2.1.19)$$

$$u_c^2 = v_c^2 = w_c^2; \quad w_c^2 = r^2 \tanh^2(x), \quad \text{2-diag} \quad (2.1.20)$$

onde $a = 1, 2, \dots, 12$, $b = 13, 14, \dots, 24$ e $c = 25, 26, 27, 28$ rotulam todos os setores. Mais uma vez devemos enfatizar que o sistema pode exibir o fenômeno de bifurcação, dependendo do valor de ε , com as configurações de borda estáveis. Tais configurações podem formar junções estáveis, e em três dimensões espaciais, fornecem uma junção de 2-branas. Sendo assim, a junção pode ser representada por doze “quartos” de parede rodadas de 90° , dadas pelas soluções

$$\vec{v}_a = (u_a, v_a, w_a) \quad \text{com } a=1, \dots, 12, \quad (2.1.21)$$

sendo as primeiras três soluções dadas por

$$\vec{v}_1 = r(1, \tanh(y), 1), \quad \vec{v}_2 = r(-\tanh(x), 1, 1) \quad \text{e} \quad \vec{v}_3 = r(-1, -1, -\tanh(z)). \quad (2.1.22)$$

Argumentos similares ao caso anterior podem ser usados aqui, para mostrar que a configuração das 12 bordas realmente é estável. Antes, devemos considerar que a função a ser usada em (2.1.12) deve agora estar na forma $F(u, v, w) = F(u, v) + F(u, w) + F(v, w)$. A estabilidade da junção é garantida se a soma das energias das três bordas adjacentes for menor que a anergia de algum estado *2-diag*, isto é, $E^a + E^{a+1} + E^{a+2} < E^c$. Analogamente, encontramos as energias como

$$E^a + E^{a+1} + E^{a+2} = 6 + \frac{63}{2}\varepsilon, \quad a = 1, \dots, 10 \quad (\text{borda}) \quad (2.1.23)$$

$$E^b + E^{b+1} = 6 + 27\varepsilon, \quad b = 12, \dots, 23 \quad (1\text{-diag}) \quad (2.1.24)$$

$$E^c = 6 + 18\varepsilon, \quad c = 25, \dots, 28 \quad (2\text{-diag}) \quad (2.1.25)$$

Note que a configuração das 12 bordas é estável para $\varepsilon < 0$ porque nesse regime a condição de junção é satisfeita. Por outro lado, a configuração *2-diag* é estável somente para $\varepsilon > 0$. Os estados *1-diag* têm energia intermediária e decaem em qualquer um dos casos. Assim as configurações (2.1.18), (2.1.19) e (2.1.20) não são simultaneamente estáveis. Entretanto, para nossos próprios propósitos, admitimos $\varepsilon < 0$ o que nos leva a um cenário envolvendo paredes de domínios (de setores *1-diag*) separando dois vácuos adjacentes que tendem a bifurcar em doze quartos de parede de domínios (de setores *borda*) juntos formando uma junção de 2-branas, equivalente a uma 0-brana (figura abaixo)

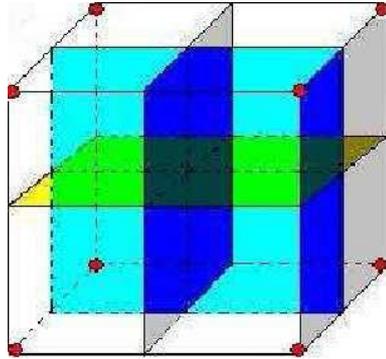


Figura 2.5: Interseção de três 2-branas formando uma junção tipo 0-brana no centro.

Por fim, esses casos podem ser naturalmente estendidos para n campos escalares, em d dimensões espaciais, analisando a formação de junções estáveis de p -branas ($d - n$)-dimensionais. A justificativa de sempre escolhermos o parâmetro de deformação (ε)

negativo, é devido ao fato de que localização de gravidade em p -branas e junções de p -branas, exige a condição da constante cosmológica do espaço ambiente ser negativa, e isso só é possível considerando $\varepsilon < 0$ conforme discutido nas referências [2, 3]. Entretanto, nesta dissertação vamos nos concentrar na localização de campos escalares e fermiônicos.

2.2 Compactificação por junções

Nos restringimos aqui aos setores fermiônicos e escalares bosônicos de uma teoria supersimétrica em dez dimensões [13] para encontrar junções de objetos de codimensão 1. O número de dimensões é sugerido pela teoria de supercordas, e assim, nesse contexto, branas são soluções de paredes de domínios clássicas 8-dimensionais (8-branas) imersas no espaço-tempo 10-dimensional.

Entretanto nos referimos à nossa teoria, como uma teoria supersimétrica “suavemente quebrada” [11], onde uma teoria supersimétrica é perturbada sob a ação de um pequeno parâmetro ε , o qual vimos anteriormente ser responsável pela estabilidade das junções. Assim, a lagrangeana com supersimetria suavemente quebrada é escrita como segue

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_m \phi^i \partial^m \phi^i + \bar{\psi}^i \Gamma^m \partial_m \psi^i + W_{\phi^i \phi^j} \bar{\psi}^i \psi^j - V(\phi^i) - \frac{1}{2} \varepsilon F(\phi^i), \quad (2.2.26)$$

onde $m = 0, 1, 2, \dots, D - 1$ e $i, j = 1, 2, \dots, N$. O potencial escalar V é dado em termos do superpotencial W , da seguinte maneira

$$V(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^2} \right)^2 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi^N} \right)^2, \quad (2.2.27)$$

e os campos escalares no superpotencial obedecem

$$W_{\phi^i \phi^j} = \delta_{ij} W_{\phi^i \phi^i} \quad (2.2.28)$$

e

$$V(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^N) = V(\phi^1) + V(\phi^2) + \dots + V(\phi^N), \quad (2.2.29)$$

onde $W_{\phi^i \phi^j}$ representa a segunda derivada do superpotencial.

Entretanto, como se sabe [3], para que paredes de domínios se cruzem, a fim de se formar uma junção estável, suas tensões devem satisfazer a seguinte desigualdade triangular

$$|T_{i_1} + T_{i_2} + \dots + T_{i_N}| < |T_{i_1}| + |T_{i_2}| + \dots + |T_{i_N}|, \quad (2.2.30)$$

onde $i_1, i_2, \dots, i_N = 1, 2, \dots, N$ e $T_i = \Delta W_i$, o qual se comporta como um vetor presente em linhas retas (setores) e em diferentes direções no espaço dos campos $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$. Sendo que aqui estamos “deformando” a teoria, então essa desigualdade deve ser reformulada a fim de considerar o parâmetro de deformação ε

$$|T_{i_1} + T_{i_2} + \dots + T_{i_N}| = |T_{i_1}| + |T_{i_2}| + \dots + |T_{i_N}| + \lambda\varepsilon < |T_{i_1}| + |T_{i_2}| + \dots + |T_{i_N}|. \quad (2.2.31)$$

Essas equações representam as mesmas condições dadas em (2.1.23)-(2.1.25). Aqui também $\varepsilon < 0$ e λ é um número positivo que depende da escolha de $F(\phi^i) = \sum_{j>i}^N F(\phi^i, \phi^j)$. Aqui usaremos a mesma função F apresentada na seção anterior, ou seja

$$F(\phi^i, \phi^j) = \frac{1}{2}((\phi^i)^4 + (\phi^j)^4) - 3(\phi^i)^2(\phi^j)^2 + \frac{9}{2}. \quad (2.2.32)$$

Apartir da lagrangeana (2.2.26) e usando a equação de Euler-Lagrange para campos, obtemos as seguintes equações de movimento para bósons e férmions respectivamente

$$\square\phi^i + \frac{\partial V}{\partial\phi^i} - W_{\phi^i\phi^i\phi^i}\bar{\psi}^i\psi^i + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial F}{\partial\phi^i} = 0 \quad (2.2.33)$$

$$\Gamma^m\partial_m\psi^i + W_{\phi^i\phi^i}\psi^i = 0. \quad (2.2.34)$$

Para uma escolha adequada do superpotencial, encontramos soluções individuais de paredes de domínios no setor bosônico, cuja dinâmica é governada pela equação de movimento

$$\square\phi^i + \frac{\partial V}{\partial\phi^i} = 0. \quad (2.2.35)$$

Estamos interessados em soluções de paredes de domínio que se cruzem ortogonalmente para formar junções estáveis. Portanto, devemos considerar que cada campo dependa apenas de uma única coordenada espacial x^k , isto é

$$\phi(x^1, x^2, \dots, x^N) \rightarrow \phi^k(x^k) \in \{\phi^1(x^1), \phi^2(x^2), \dots, \phi^N(x^N)\} \quad (2.2.36)$$

onde x^k é uma coordenada espacial transversal à parede de domínios descrita por ϕ^k , sendo cada uma delas de codimensão 1. Sobre tais condições, paredes de domínios estáticas são governadas pelas equações

$$\frac{d^2\phi^k}{dx_k^2} = \frac{\partial V}{\partial\phi^k} \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.37)$$

o que nos permite trabalhar com as equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi^k}{dx^k} = \frac{\partial W}{\partial \phi^k} \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.2.38)$$

2.2.1 Campos fermiônicos em paredes de domínios

Vamos agora estudar os férmions no contexto da presença de uma parede de domínios [14, 15, 16, 17, 18]. As soluções fermiônicas são dadas na forma

$$\psi^k = e^{iP_\mu^{(k)}x^\mu} \chi^k(x^k), \quad (2.2.39)$$

onde $P_\mu^{(k)}$ é o quadrimomento e $\mu = 0, 1, 2, \dots, D - 2$ são índices rotulando coordenadas no “volume-mundo” da parede de domínios, excluindo assim x^k da soma. Substituindo, portanto, (2.2.39) em (2.2.34) obtemos

$$i\Gamma^\mu P_\mu^{(k)} \chi^k - \Gamma^k \partial_k \chi^k + W_{\phi^k \phi^k} \chi^k = 0. \quad (2.2.40)$$

Tomemos um referencial tal que o quadrimomento tenha apenas componente temporal, ou seja, sistema de repouso da partícula: $P_\mu^{(k)} = (E^k, 0, \dots, 0)$. Assim, (2.2.40) se torna

$$iE^k \Gamma^0 \chi^k - \Gamma^k \partial_k \chi^k + W_{\phi^k \phi^k} \chi^k = 0. \quad (2.2.41)$$

Agora, usando as propriedades das matrizes gama [19, 20] temos que

$$\Gamma^k \zeta_\pm^k = \pm \zeta_\pm^k \quad \text{e} \quad i\Gamma^0 \zeta_\pm^k = \zeta_\mp^k. \quad (2.2.42)$$

Isso nos permite escrever as equações de movimento em termos das componentes positiva e negativa do espinor χ^k . Assim, chegamos a um sistema de equações

$$(\partial_k - W_{\phi^k \phi^k}) \zeta_+^k = E^k \zeta_-^k \quad (2.2.43)$$

$$(\partial_k + W_{\phi^k \phi^k}) \zeta_-^k = -E^k \zeta_+^k. \quad (2.2.44)$$

Combinando essas duas equações, com um pouco de manipulação algébrica, chegamos às seguintes equações tipo Schroedinger

$$[-\partial_k^2 + U_\pm^k(x^k)] \zeta_\pm^k = E_k^2 \zeta_\pm^k, \quad (2.2.45)$$

com

$$U_{\pm}^k(x^k) = W_{\phi^k\phi^k}^2(x^k) \pm W'_{\phi^k\phi^k}(x^k). \quad (2.2.46)$$

Essas equações governam a dinâmica dos estados ligados fermiônicos que estão associados à paredes de domínios independentes. Para descrever paredes unidas formando uma junção, devemos considerar a equação tipo Schroedinger na forma

$$[-\nabla^2 + U_{junc}]\psi_{\pm(n_1\dots n_N)} = E_{(n_1\dots n_N)junc}^2\psi_{\pm(n_1\dots n_N)}, \quad (2.2.47)$$

onde

$$U_{junc} = U_{\pm}^1(x^1) + U_{\pm}^2(x^2) + \dots + U_{\pm}^N(x^N), \quad (2.2.48)$$

$$E_{(n_1\dots n_N)junc}^2 = E_{(n_1)1}^2 + E_{(n_2)2}^2 + \dots + E_{(n_N)N}^2, \quad (2.2.49)$$

$$\psi_{\pm(n_1\dots n_N)} = \zeta_{\pm(n_1)}^1(x^1)\dots\zeta_{\pm(n_N)}^N(x^N). \quad (2.2.50)$$

Vamos aqui considerar $n_i = 0, 1$, isto é, somente dois estados ligados que podem ser localizados em paredes de domínios individuais.

2.2.2 Modos localizados bosônicos e fermiônicos

Tomemos o caso de $N = 2$ campos escalares formando $N = 2$ paredes de domínios independentes, unindo-se para formar uma junção num espaço-tempo $(3+1)$ -dimensional. A extensão para o caso de N qualquer pode ser feito naturalmente. Inicialmente consideremos o seguinte superpotencial a ser usado

$$W(\phi_1, \phi_2) = \lambda_1 \left(\frac{\phi_1^3}{3} - a^2\phi_1 \right) + \lambda_2 \left(\frac{\phi_2^3}{3} - a^2\phi_2 \right). \quad (2.2.51)$$

As equações de primeira ordem são

$$\frac{d\phi_1}{dx^1} = \frac{\partial W}{\partial \phi_1} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi_2}{dx^2} = \frac{\partial W}{\partial \phi_2}. \quad (2.2.52)$$

Soluções que satisfazem essas equações são dadas por

$$\phi^1(x^1) = -a \tanh(\lambda_1 a x^1) \quad \text{e} \quad \phi^1(x^2) = -a \tanh(\lambda_2 a x^2), \quad (2.2.53)$$

e, usando (2.2.51) em (2.2.48) considerando o sinal positivo, obtemos os potenciais

$$U_+^1(x^1) = 4\lambda_1^2 a^2 - 6\lambda_1^2 a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a x^1), \quad (2.2.54)$$

$$U_+^2(x^2) = 4\lambda_2^2 a^2 - 6\lambda_2^2 a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a x^2). \quad (2.2.55)$$

Esses são potenciais do tipo Pöschl-Teller modificado, que é muito conhecido na literatura [21], o qual tem a forma geral $U(x^k) = A - B \operatorname{sech}^2(x^k)$ para $k = 1, 2$, com A e B sendo constantes reais. Os estados ligados normalizados têm as seguintes energias

$$E_n = A - \left[\sqrt{B + \frac{1}{4}} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2, \quad (2.2.56)$$

onde

$$n = 0, 1, \dots < \sqrt{B + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}. \quad (2.2.57)$$

O espectro discreto é composto por dois estados ligados: o modo zero e o estado excitado. Eles são dados por

$$E_{(0)1,2}^2 = 0, \quad (2.2.58)$$

$$\chi_{(0)}^{1,2} = C_0 \operatorname{sech}^2(\lambda_{1,2} a x^{1,2}), \quad (2.2.59)$$

$$E_{(1)1,2}^2 = 3\lambda_{1,2}^2 a^2, \quad (2.2.60)$$

$$\chi_{(1)}^{1,2} = C_1 \tanh(\lambda_{1,2} a x^{1,2}) \operatorname{sech}(\lambda_{1,2} a x^{1,2}). \quad (2.2.61)$$

Esses são o espectro dos férmions ligados à parede de domínios. O espectro ligado a uma junção de paredes de domínios pode ser encontrado usando (2.2.47). Existem quatro combinações possíveis usando o modo zero e o estado excitado, que são e descritos por

$$E_{(00)junc}^2 = 0, \quad (2.2.62)$$

$$\psi_{(00)} = C_1 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a x^1) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a x^2), \quad (2.2.63)$$

$$E_{(01)junc}^2 = 3\lambda_2^2 a^2, \quad (2.2.64)$$

$$\psi_{(01)} = C_2 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a x^1) \times \tanh(\lambda_2 a x^2) \times \operatorname{sech}(\lambda_2 a x^2), \quad (2.2.65)$$

$$E_{(10)junc}^2 = 3\lambda_1^2 a^2, \quad (2.2.66)$$

$$\psi_{(10)} = C_3 \tanh(\lambda_1 a x^1) \times \operatorname{sech}(\lambda_1 a x^1) \times \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a x^2), \quad (2.2.67)$$

$$E_{(11)junc}^2 = 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) a^2, \quad (2.2.68)$$

$$\psi_{(11)} = C_4 \tanh(\lambda_1 a x^1) \times \operatorname{sech}(\lambda_1 a x^1) \times \tanh(\lambda_2 a x^2) \times \operatorname{sech}(\lambda_2 a x^2). \quad (2.2.69)$$

Vamos agora aplicar a teoria de perturbação às soluções de kink ϕ_s^k . Essa se dá como uma soma de todos os modos normais de vibração [22, 23] para $k = 1, 2$, isto é

$$\phi_s^k(x^k, y^\mu) = \phi_s^k(x^k) + \sum_n \eta_n^k(x^k) \xi_n(y^\mu). \quad (2.2.70)$$

O índice $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$ rotula as coordenadas no “volume-mundo” da junção. Substituindo a perturbação (2.2.70) na equação de movimento (2.2.35), obtemos também uma equação tipo Schroedinger para as flutuações $\eta_{n_1}^1(x^1)$ e $\eta_{n_2}^2(x^2)$ como segue

$$-\frac{d^2 \eta_{n_k}^k}{dx_k^2} + V_{kj} \eta_{n_j}^k = E_{(n_k)k}^2 \eta_{n_k}^k, \quad k = 1, 2, \quad (2.2.71)$$

onde usamos o fato de as flutuações obedecerem à equação de Klein-Gordon

$$\square \xi_n^k(y^\mu) = E_{(n_k)k}^2 \xi_n^k(y^\mu). \quad (2.2.72)$$

Aqui, V_{kj} são componentes da matriz

$$V = \begin{pmatrix} V_{\phi^1 \phi^1} & V_{\phi^1 \phi^2} \\ V_{\phi^2 \phi^1} & V_{\phi^2 \phi^2} \end{pmatrix}.$$

Os valores dessas componentes foram obtidos anteriormente (caso fermiônico), ou seja

$$V_{\phi^1 \phi^1} = 4\lambda_1^2 a^2 - 6\lambda_1^2 a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_1 a x^1), \quad (2.2.73)$$

$$V_{\phi^2 \phi^2} = 4\lambda_2^2 a^2 - 6\lambda_2^2 a^2 \operatorname{sech}^2(\lambda_2 a x^2), \quad (2.2.74)$$

$$V_{\phi^1 \phi^2} = V_{\phi^2 \phi^1} = 0. \quad (2.2.75)$$

Assim como no caso fermiônico, para cada componente de campo escalar, o espectro discreto é composto por dois estados ligados: o modo zero e o estado excitado. Assim, segue que esses são

$$E_{(0)1,2}^2 = 0, \quad (2.2.76)$$

$$\eta_{(0)}^{1,2} = C_0 \operatorname{sech}^2(\lambda_{1,2} a x^{1,2}), \quad (2.2.77)$$

$$E_{(1)1,2}^2 = 3\lambda_{1,2}^2 a^2, \quad (2.2.78)$$

$$\eta_{(1)}^{1,2} = C_1 \tanh(\lambda_{1,2} a x^{1,2}) \operatorname{sech}(\lambda_{1,2} a x^{1,2}). \quad (2.2.79)$$

Eles são o espectro dos modos escalares ligados à parede de domínios. O espectro associado a uma junção pode ser encontrado usando (2.2.47). É importante levar em consideração o fato de que esses resultados em $D = 3 + 1$ dimensões podem ser úteis em outros cenários, por exemplo, em investigações cosmológicas [12, 11].

2.2.3 Modelo quadridimensional

Vamos aqui estender os resultados obtidos nas subseções anteriores para o caso de seis campos escalares em dez dimensões. Queremos encontrar uma teoria efetiva quadridimensional para campos localizados numa junção de seis paredes de domínios 8-dimensionais e ortogonais (8-brana), em dez dimensões. Cada uma das seis dimensões extras requer um campo escalar. Assim, como cada campo descreve uma parede de domínios, unidas elas formarão uma junção de 2-branas.

A lagrangeana para estados fermiônicos localizados na junção 4-dimensional é dada pela integração da lagrangeana 10-dimensional, de onde partimos

$$\mathcal{L}_{4d}^F = \int \mathcal{L}_{10d}^F dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6, \quad (2.2.80)$$

onde a dinâmica dos férmions e o acoplamento de Yukawa são governados pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_{10d}^F = \bar{\Psi} \Gamma^M \partial_M \Psi + (W_{\phi^1 \phi^1} + \dots + W_{\phi^6 \phi^6}) \bar{\Psi} \Psi. \quad (2.2.81)$$

Podemos aplicar a decomposição espectral aos campos escalares e fermiônicos, do seguinte modo

$$\begin{aligned} \phi - \phi_s &= \eta(y^\mu; x_1, \dots, x_6) \\ &= \sum_{n_1 \dots n_6} \xi_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu) \psi^{n_1 \dots n_6}, \end{aligned} \quad (2.2.82)$$

$$\Psi(y^\mu, x_1, \dots, x_6) = \sum_{n_1 \dots n_6} \tau_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu) \psi^{n_1 \dots n_6}, \quad (2.2.83)$$

onde $n_i = 0, 1$ e $\psi^{n_1 \dots n_6} = \chi^{n_1}(x_1) \times \dots \times \chi^{n_1}(x_6)$, sendo $\chi(x_i)$ funções que satisfazem a equação (2.2.47), válida para ambos bósons e férmions. Desde que o sistema permita dois estados ligados, então devem existir 2^N *superpaceiros*, isto é, para $N = 6$, existem

$2^6 = 64$ férmions de Dirac quadridimensionais $\tau_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu)$ e $2^6 = 64$ escalares quadridimensionais $\xi_{n_1 \dots n_6}^{junc}(y^\mu)$ “vivendo” na junção. Isso nos permite escrever a seguinte lagrangeana quadridimensional (com as dimensões extras já eliminadas pela integral (2.2.80))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4d}^F &= \overline{\tau_{0 \dots 0}^{junc}} \Gamma^\mu \partial_\mu \tau_{0 \dots 0}^{junc} + \sum_{n_1 \dots n_6} \overline{\tau_{n_1 \dots n_6}^{junc}} (\Gamma^\mu \partial_\mu - E_{junc}^{n_1 \dots n_6}) \tau_{n_1 \dots n_6}^{junc} + \\ &+ \sum_{l_1 \dots l_6} \sum_{m_1 \dots m_6} \sum_{n_1 \dots n_6} g \xi_{l_1 \dots l_6}^{junc} \overline{\tau_{m_1 \dots m_6}^{junc}} \tau_{n_1 \dots n_6}^{junc}. \end{aligned} \quad (2.2.84)$$

Note que o primeiro termo descreve férmions quadridimensionais sem massa e o segundo descreve os massivos. Os acoplamentos de Yukawa são controlados pela constante g , que é calculada pelos acoplamentos nas seis dimensões extras.

Podemos observar que de todos esses estados, existe um certo número de estados degenerados para cada valor de energia. Primeiro, temos um único estado com energia nula que é o modo zero. E no caso em que $m = \sqrt{3}\lambda a$, temos 6 estados com energia m , 15 estados com energia $\sqrt{2}m$, 20 estados com energia $\sqrt{3}m$, 15 estados com energia $\sqrt{4}m$, 6 estados com energia $\sqrt{5}m$ e um único estado com energia $\sqrt{6}m$. Isso nos permite escrever a seguinte distribuição

$$\begin{aligned} (N_f, m) &= \{(1, 0), (6, m), (15, \sqrt{2}m), (20, \sqrt{3}m), \\ &(15, \sqrt{4}m), (6, \sqrt{5}m), (1, \sqrt{6}m)\}. \end{aligned} \quad (2.2.85)$$

Assim, os férmions têm uma hierarquia nas massas na lagrangeana, que é dada como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4d}^F &= \overline{\tau_0^{(0)}} \Gamma^\mu \partial_\mu \tau_0^{(0)} + \sum_{s=1}^6 \sum_{n=1}^{N_s} \overline{\tau_n^{(s)}} (\Gamma^\mu \partial_\mu - \sqrt{s}m) \tau_n^{(s)} + \\ &+ \sum_{l, l'} \sum_{m, m'} \sum_{n, n'} g^{l m' m n' n} \xi_l^{(l')} \overline{\tau_m^{(m')}} \tau_n^{(n')}, \end{aligned} \quad (2.2.86)$$

onde: $N_1 = 6, N_2 = 15, N_3 = 20, N_4 = 15, N_5 = 6, N_6 = 1$ e $l', m', n' = 0, 1, \dots, 6$.

Consideremos agora nossa configuração como um gás de junções de seis paredes de domínios 8-dimensionais. A função de partição pode ser encontrada ao considerar a energia de todos os estados fermiônicos no gás de $6M$ paredes de domínios 8-dimensionais em $(9 + 1)$ dimensões

$$\tilde{E} = \sum_{i=1}^{6M} n_i \epsilon_i, \quad \epsilon_i = 0, \epsilon \quad i = 1, 2, \dots, 6M. \quad (2.2.87)$$

Por ser um sistema de dois níveis, metade das $6M$ “partículas” ($6M$ paredes de domínios ou M junções sêxtuplas) está no estado fundamental e metade está no estado excitado. A energia na junção é portanto $\epsilon = 3$ e $\tilde{E} = E^2/\lambda^2 a^2$. Com isso, a função de partição é dada na forma

$$Z = \sum_{n_1, \dots, n_{6M}} \exp \left[-\tilde{\beta} \sum_{i=1}^{6M} n_i \epsilon_i \right] = \left[\sum_{n=0}^1 \exp(-\tilde{\beta} n \epsilon) \right]^{6M}. \quad (2.2.88)$$

A energia média por parede de domínios na junção, é dada por

$$\tilde{u}_{junc} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{\beta}} \left(\frac{\ln Z}{M} \right) = 6\epsilon \frac{e^{-\tilde{\beta}\epsilon}}{1 + e^{-\tilde{\beta}\epsilon}}, \quad (2.2.89)$$

onde $\tilde{\beta} = 1/\tilde{T}$, $\tilde{T} = \kappa T$ com κ sendo uma escala que torna \tilde{T} adimensional juntamente com $\tilde{\epsilon}$. Note que em temperaturas suficientemente altas ($\tilde{\beta}\epsilon \ll 1$), $\tilde{u}_{junc} \rightarrow 3\epsilon$. Isto significa que nesse regime, a energia da junção por parede de domínios é precisamente a mesma que a energia de *três* paredes de domínios excitadas, intersectando *três* paredes de domínios no seu estado fundamental ($\epsilon = 0$). É importante salientar que, apesar da temperatura ser alta, ela não é suficiente para permitir que os modos “escapem” da junção.

Lembre-se que mencionamos o fato de 20 estados massivos contribuírem para a energia da junção nesse caso. Fazendo a média das massas não-nulas dos férmions sob a distribuição (2.2.85), chegamos a

$$\langle m \rangle = \frac{\sum_{s=1}^6 N_s \sqrt{s} m}{\sum_{s=1}^6 N_s} = 1,709m \simeq \sqrt{3}m. \quad (2.2.90)$$

Isso mostra que a classe de $N_3 = 20$ férmions distintos com massas $\sqrt{3}m$ é favorecida. Em outras palavras, em um gás de paredes de domínios em dez dimensões, a probabilidade de uma junção ser formada com a superposição de 20 estados massivos, através da combinação de *três* paredes de domínios 8-dimensionais (em seu estado fermiônico fundamental) com *três* (no estado excitado), é *maior* do que qualquer outra combinação.

Portanto, os férmions observados no mundo 4-dimensional são descritos pela lagrangeana “média”:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4d}^F &= \bar{\tau}_0^{(0)} \Gamma^\mu \partial_\mu \tau_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{20} \bar{\tau}_n^{(3)} (\Gamma^\mu \partial_\mu - \sqrt{3}m) \tau_n^{(3)} + \\ &+ \sum_{l,l'} \sum_{m,m'} \sum_{n,n'} g^{l'm'mn'n} \xi_l^{(l')} \bar{\tau}_m^{(m')} \tau_n^{(n')}. \end{aligned} \quad (2.2.91)$$

Tomando o fato de que esses estados fermiônicos possam ser embutidos num vetor coluna, o qual se transforma localmente sob o grupo $SU(3)$

$$q_n = \begin{pmatrix} \tau_n^1 \\ \tau_n^2 \\ \tau_n^3 \end{pmatrix},$$

podemos, então, dar $N_c = 3$ cores a *seis quarks* ($n = 1, 2, \dots, 6$), rotulando assim o número de sabor do quark por $N_F = 6$. Sendo assim, compreendemos $N_c N_F = 18$ graus de liberdade fermiônicos. No entanto, existem ainda 2 férmions, que em conjunto com o modo zero, dá origem a três léptons. Logo, o simples modelo (2.2.91) parece propor uma boa aproximação para descrever as seis famílias de quarks e as três de léptons.

Por fim, a dinâmica dos modos bosônicos é descrita pela lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{10d}^B &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} \eta (-\nabla^2 + U_{junc}) \eta + \\ &- \frac{1}{3!} \sum_{k=1}^6 V'''(\phi_k) \eta^3 - \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^6 V''''(\phi_k) \eta^4. \end{aligned} \quad (2.2.92)$$

Integrando essa lagrangeana nas coordenadas extras ($x_1 \dots x_6$), como análogo ao caso anterior, obtemos a lagrangeana quadridimensional do setor escalar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4d}^B &= \frac{1}{2} \sum_{n_1 \dots n_6} \partial_\mu \xi^{junc}_{n_1 \dots n_6} \partial^\mu \xi^{junc}_{n_1 \dots n_6} - V(\xi) \\ &\simeq \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_0^{(0)} \partial^\mu \xi_0^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{(20)} \partial_\mu \xi_n^{(3)} \partial^\mu \xi_n^{(3)} - V(\xi) \end{aligned} \quad (2.2.93)$$

O potencial escalar é responsável por dar soluções não-triviais de vácuo aos 21 escalares. Eles devem ser capazes de dar massas aos quarks e léptons na lagrangeana (2.2.91). Isso completa a idéia de que a física do Modelo Padrão possa ser uma manifestação de dimensões extras, isso porque seus 21 graus de liberdade podem ser baseados na exigência de que a física de altas dimensões pode se manifestar como uma física quadridimensional na junção.

Capítulo 3

Compactificação via p -branas I

Neste capítulo apresentamos uma outra alternativa para compactificação via de-
feitos, a compactificação através de uma única p -brana [5, 6]. Primeiramente mostraremos
que através de uma perturbação dos campos em torno de uma solução conhecida, ex-
pandindo em modos normais de vibração podemos obter modos localizados na brana.
Isso permite aplicar a compactificação à uma teoria de campo, em especial uma teoria de
campos escalares, usando um modelo de potencial que é muito conhecido na literatura,
como o modelo ϕ^4 .

3.1 Mecanismo de compactificação

Vamos aqui usar uma teoria de campos escalar simples para elencar as propriedades das
 Dp -branas e as possíveis localizações de campos nas mesmas. Inicialmente consideremos
uma teoria de um campo escalar imerso num espaço-tempo de dimensão $p + 2$, cuja
topologia é dada por

$$\mathcal{M}^{p+2} = \mathbb{M}^{p+1} \times \mathbb{R}^1, \quad (3.1.1)$$

onde a coordenada x não é necessariamente compactificada. Ela pode ser de comprimento
infinito. A ação é dada da seguinte maneira

$$S = \int dt d^p y dx \left[\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi) \right], \quad (3.1.2)$$

com: $M = (y^\mu, x)$ e $y^\mu = (t, y^i)$, $i = 1, 2, \dots, p$. Note que y^μ são coordenadas no “volume-
mundo” da Dp -brana imersa num espaço $(p + 2)$ -dimensional. Podemos reescrever (3.1.2)

como

$$S = \int d^{p+1}y dx \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] - V(\phi) \right\}. \quad (3.1.3)$$

Vamos agora aplicar uma perturbação, só que agora ao campo escalar ϕ , da seguinte maneira [5, 6]

$$\phi(x, y^\mu) \longrightarrow \bar{\phi}(x) + \eta(x, y^\mu), \quad (3.1.4)$$

e assim,

$$S(\phi) \longrightarrow S(\bar{\phi}, \eta). \quad (3.1.5)$$

Com isso, o potencial é expandido em torno da solução estática $\bar{\phi}$ como

$$V(\phi) = V(\bar{\phi}) + \eta V'(\bar{\phi}) + \frac{\eta V''(\bar{\phi}) \eta}{2!} + \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 + \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \quad (3.1.6)$$

onde $V'(\bar{\phi}) = \partial V(\phi)/\partial \phi$ etc. Usando a perturbação (3.1.4) nesta expansão, reescrevemos (3.1.3) do seguinte modo

$$S = \int d^{p+1}y dx \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 - V(\bar{\phi}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \eta V'(\bar{\phi}) - \frac{\eta V''(\bar{\phi}) \eta}{2!} - \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 - \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \right\}. \quad (3.1.7)$$

Da equação de movimento para $\phi(x)$ podemos escrever

$$V'(\bar{\phi}) = \frac{d^2 \bar{\phi}}{dx^2}, \quad (3.1.8)$$

e usando o fato de que $\partial_x(F\partial_x G) = \partial_x F \partial_x G + F \partial_x^2 G = 0$ na ação S , por ser um termo de superfície, temos

$$\eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2, \quad (3.1.9)$$

e

$$-\frac{d\bar{\phi}}{dx} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta \frac{d^2 \bar{\phi}}{dx^2}. \quad (3.1.10)$$

Logo, a ação (3.1.7) se torna

$$S = \int d^{p+1}y dx \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 - V(\bar{\phi}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \left(\eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \eta V''(\bar{\phi}) \eta \right) - \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 - \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \right\}. \quad (3.1.11)$$

Daí tiramos dois termos importantes:

$$T_p = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 + V(\bar{\phi}) \right] \quad (3.1.12)$$

e

$$\frac{1}{2}\eta H\eta = \frac{1}{2}\eta \left(-\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + V''(\bar{\phi}) \right) \eta, \quad (3.1.13)$$

que são respectivamente a tensão da p -brana e o termo bilinear com operador “hamiltoniano”. Assim, a ação (3.1.11) é simplificada para

$$\begin{aligned} S = & - \int d^{p+1}y T_p + \int d^{p+1}y dx \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} \eta H \eta \right. \\ & \left. - \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 - \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

que nos permite escrever uma lagrangeana para as flutuações da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(p+2)} = & T_p \delta(x) + \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} \eta H \eta \right. \\ & \left. - \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 - \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{(p+2)}}{\partial \eta} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(p+2)}}{\partial (\partial_\mu \eta)} \right] = 0, \quad (3.1.16)$$

chegamos à seguinte “equação de movimento”

$$H\eta + \frac{V'''(\bar{\phi})}{2!} \eta^2 + \frac{V''''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 + \dots = \partial_\mu \partial^\mu \eta \equiv \square_{(p+1)} \eta. \quad (3.1.17)$$

Na equação acima o termo $H\eta$ domina todos os outros termos. Com isso, apenas os termos lineares são relevantes. Portanto a equação acima torna-se

$$H\eta = \square_{(p+1)} \eta. \quad (3.1.18)$$

Essas flutuações podem ser escritas em termos de uma expansão de modos normais, da seguinte maneira

$$\eta(y^\mu, x) = \sum_n \xi_n(y) \psi_n(x). \quad (3.1.19)$$

Usando o fato de que os modos ξ são campos que descrevem partículas localizadas na p -brana, eles satisfazem, assim, a equação de Klein-Gordon

$$\square_{(p+1)}\xi_n(y) = M_n^2\xi_n(y). \quad (3.1.20)$$

Portanto, ao substituir (3.1.19) e (3.1.20) em (3.1.18), obtemos uma equação tipo Schroedinger para as massas das partículas

$$H\psi_n(x) = M_n^2\psi_n(x), \quad (3.1.21)$$

ou seja,

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) + V''(\bar{\phi})\psi_n(x) = M_n^2\psi_n(x). \quad (3.1.22)$$

Por fim, a ação efetiva é obtida ao substituir a condição de ortonormalidade

$$\int dx\psi_m(x)\psi_n(x) = \delta_{m,n} \quad (3.1.23)$$

e a expansão (3.1.19) em (3.1.14). Isto nos fornece a seguinte expressão

$$S = - \int d^{p+1}y \left[T_p + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \partial_\mu \xi_n(y) \partial^\mu \xi_n(y) + V(\xi) \right]. \quad (3.1.24)$$

Esta é portanto a ação de uma teoria de $N+1$ campos escalares localizados no “volume-mundo” de uma p -brana. O potencial $V(\xi)$ é dado por

$$V(\xi) = \int dx \left[\frac{1}{2}\eta H\eta + \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!}\eta^3 + \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!}\eta^4 + \dots \right]. \quad (3.1.25)$$

Comparando a ação original com a ação (3.1.24) podemos concluir que o método de compactificação via branas nos permitiu partir de um campo escalar real em $p+2$ dimensões para vários modos (campos localizados) em $p+1$ dimensões. Em outras palavras, assim como no mecanismo de compactificação via Kaluza-Klein, na compactação via branas, um determinado grau de liberdade em $p+2$ se traduz a vários graus de liberdade em $p+1$ dimensões.

3.1.1 Modelo ϕ^4

Nesta seção vamos mostrar uma aplicação do método de compactação via branas usando um modelo simples e muito conhecido em teoria de campos, que é o modelo ϕ^4 .

O modelo ϕ^4 é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2. \quad (3.1.26)$$

A p -brana é representada pela solução estática da equação de movimento:

$$\square_{(p+2)}\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (3.1.27)$$

Para soluções solitônicas com dependência apenas na coordenada x ao longo de \mathbb{R}^1 (comprimento infinito) e invariante ao longo de \mathbb{M}^{p+1} , (3.1.27) se torna

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (3.1.28)$$

Usando o potencial definido previamente, temos a equação de movimento

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\phi(\phi^2 - 1), \quad (3.1.29)$$

cuja solução é dada por

$$\bar{\phi} = \pm \tanh(x). \quad (3.1.30)$$

Graficamente esta solução nos fornece o que se conhece de solução tipo parede de domínios, que é dada por um “kink” e um “anti-kink”. O perfil do kink é dado pela figura que segue abaixo:

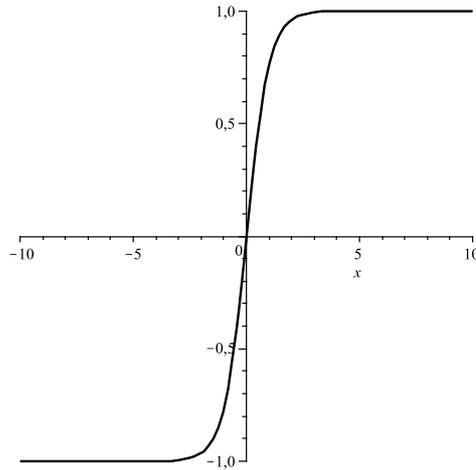


Figura 3.1: Solução tipo parede de domínios (kink).

Para achar o espectro localizado na p -brana, usamos a equação tipo Schroedinger que obtemos

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) + V''(\bar{\phi})\psi_n(x) = M_n^2\psi_n(x), \quad (3.1.31)$$

com:

$$V''(\bar{\phi}) = 4 - 6\text{sech}^2(x). \quad (3.1.32)$$

Esse potencial é do tipo Pöschl-Teller modificado e possui dois estados

$$\psi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sech}^2(x) \quad \text{para } M_0^2 = 0 \quad (3.1.33)$$

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}\tanh(x)\text{sech}(x) \quad \text{para } M_1^2 = 3. \quad (3.1.34)$$

Graficamente, esse potencial tem o seguinte comportamento:

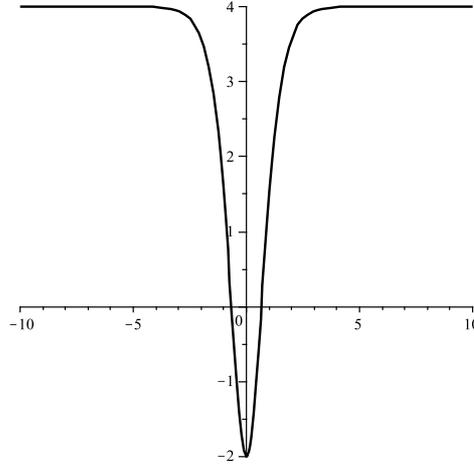


Figura 3.2: Potencial tipo Pöschl-Teller modificado.

A ação efetiva é obtida, como mostrado na seção anterior, pela seguinte expressão

$$S = - \int d^{p+1}y T_p + \int d^{p+1}y dx \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2}\eta H \eta - \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!}\eta^3 - \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!}\eta^4 + \dots \right]. \quad (3.1.35)$$

onde

$$T_p = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 + V(\bar{\phi}) \right] = \frac{4}{3}. \quad (3.1.36)$$

Como temos apenas duas autofunções (ψ_0 e ψ_1), η é dada pela expansão

$$\eta(y^\mu, x) = \xi_0(y)\psi_0(x) + \xi_1(y)\psi_1(x), \quad (3.1.37)$$

que junto à relação de ortonormalidade, tornam a ação efetiva na forma

$$S = - \int d^{p+1}y \left[T_p + \frac{1}{2}\partial_\mu \xi_0(y)\partial^\mu \xi_0(y) + \frac{1}{2}\partial_\mu \xi_1(y)\partial^\mu \xi_1(y) + V(\xi) \right]. \quad (3.1.38)$$

Esta é portanto a ação de uma teoria de dois campos escalares localizados no “volume-mundo” de uma p -brana.

O potencial é dado por

$$V(\xi) = \int dx \left[\frac{1}{2} \eta H \eta + \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 + \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \right]. \quad (3.1.39)$$

Substituindo as autofunções, as derivadas acima e integrando em x , obtemos

$$V(\xi) = \frac{1}{2} (M_0^2 \xi_0^2 + M_1^2 \xi_1^2) + \frac{9\sqrt{6}\pi}{64} \xi_0^2 \xi_1 + \frac{3\sqrt{6}\pi}{32} \xi_1^3 + \frac{18}{35} \xi_0^2 \xi_1^2 + \frac{9}{35} \xi_0^4 + \frac{9}{70} \xi_1^4, \quad (3.1.40)$$

ou ainda, substituindo as massas $M_0 = 0$ e $M_1 = \sqrt{3}$ obtemos

$$V(\xi) = \frac{3}{2} \xi_1^2 + \frac{9\sqrt{6}\pi}{64} \xi_0^2 \xi_1 + \frac{3\sqrt{6}\pi}{32} \xi_1^3 + \frac{18}{35} \xi_0^2 \xi_1^2 + \frac{9}{35} \xi_0^4 + \frac{9}{70} \xi_1^4. \quad (3.1.41)$$

Graficamente, temos

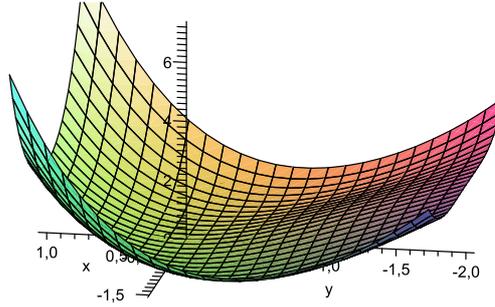


Figura 3.3: Potencial em função dos dois campos localizados na brana.

Note que o potencial só possui um mínimo na origem. Isto quer dizer que há impossibilidade de aparecer um kink “dentro” da brana. A possibilidade de encontrá-lo é admitida usando uma teoria de compactificação de p -branas com uma dimensão extra compacta [6], a qual não será abordada no nosso estudo. Nessa teoria é possível obter um modo cuja massa quadrada é negativa (modo taquiônico), onde esse modo será responsável pela existência de kinks dentro da brana.

Capítulo 4

Compactificação via p -branas II: defeitos escalares globais em D -dimensões

Neste capítulo estendemos o formalismo desenvolvido no capítulo anterior aqui denominaremos *formalismo estendido*. Este agora, trata de abranger não só uma coordenada extra “fora” da p -brana. Agora podemos ter d coordenadas espaciais extras que admitimos posteriormente ter simetria esférica. Com isso usamos um novo modelo proposto em [10] que comporta certos parâmetros e fornece vários defeitos escalares globais, os quais discutiremos detalhadamente a seguir. Aplicamos a teoria de compactificação via branas e observamos a localização de campos nas p -branas.

4.1 Formalismo estendido

Considere agora uma teoria de um campo escalar imerso num espaço-tempo $(p+d+1)$ -dimensional, cuja topologia é

$$\mathcal{M}^{p+d+1} = \mathbb{M}^{p+1} \times \mathbb{R}^d, \quad (4.1.1)$$

onde $M = (y^\mu, q)$, com $q = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ e $y^\mu = (t, y^i)$ ($i = 1, 2, \dots, p$). Ou seja, y^i são as coordenadas no “volume-mundo” da Dp -brana imersa num espaço $(p+d+1)$ -dimensional. Note que agora temos d coordenadas extras infinitas fora da p -brana, ou seja, não são

necessariamente compactas. A ação é dada por

$$S = \int dt d^p y dx_1 dx_2 \dots dx_d \left[\frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi) \right], \quad (4.1.2)$$

a ação acima pode ser reescrita convenientemente da seguinte maneira:

$$S = \int d^{p+1} y d^d q \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \right)^2 - (\nabla_q \phi)^2 \right] - V(\phi) \right\}, \quad (4.1.3)$$

com $d^d q = dx_1 dx_2 \dots dx_d = r^{d-1} dr d\Omega(d-1)$, sendo $d\Omega(d-1) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ o ângulo sólido visto do centro de uma esfera S^{d-1} mergulhada em d dimensões extras arbitrárias [1, 24, 25, 26] e Γ é a função gama. O índice q rotulado no operador nabla indica que o mesmo só atua nas coordenadas extras (fora da p -brana).

Vamos aplicar a teoria de perturbação ao campo ϕ do seguinte modo

$$\phi(q, y^\mu) \longrightarrow \bar{\phi}(q) + \eta(q, y^\mu), \quad (4.1.4)$$

com isso,

$$S(\phi) \longrightarrow S(\bar{\phi}, \eta). \quad (4.1.5)$$

Isso nos permite expandir o potencial em torno da solução solitônica de uma maneira análoga ao que fizemos no capítulo anterior. Assim, a ação é reescrita como

$$S = \int d^{p+1} y d^d q \left\{ -\frac{1}{2} (\nabla_q \bar{\phi})^2 - V(\bar{\phi}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} (\eta \nabla_q^2 \eta - \eta V''(\bar{\phi}) \eta) - \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 - \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \right\}, \quad (4.1.6)$$

que é uma ação para as flutuações η da p -brana, não esquecendo da notação $V'''(\bar{\phi}) = \partial^3 V(\phi) / \partial \phi^3$ etc. Desta ação, podemos identificar dois termos importantes: a tensão da p -brana (T_p) e o termo bilinear com o operador “Hamiltoniano” ($\eta H \eta$),

$$T_p = \int d^d q \left[\frac{1}{2} (\nabla_q \bar{\phi})^2 + V(\bar{\phi}) \right] \quad (4.1.7)$$

e

$$\frac{1}{2} \eta H \eta = \frac{1}{2} \eta (-\nabla_q^2 + V''(\bar{\phi})) \eta. \quad (4.1.8)$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
S &= - \int d^{p+1}y T_p + \int d^{p+1}y d^d q \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} \eta H \eta \right. \\
&\quad \left. - \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 - \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \right].
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Essa ação nos permite escrever uma lagrangeana para as flutuações, dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(p+d+1)} &= T_p \delta^d(q) + \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2} \eta H \eta \right. \\
&\quad \left. - \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 - \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \right].
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Usando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{(p+d+1)}}{\partial \eta} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(p+d+1)}}{\partial (\partial_\mu \eta)} \right] = 0 \tag{4.1.11}$$

obtemos a seguinte “equação de movimento”

$$H \eta + \frac{V'''(\bar{\phi})}{2!} \eta^2 + \frac{V''''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 + \dots = \partial_\mu \partial^\mu \eta \equiv \square_{(p+d)} \eta. \tag{4.1.12}$$

No regime linear temos

$$H \eta = \square_{(p+d)} \eta. \tag{4.1.13}$$

Escrevendo as flutuações η em termos de uma expansão de modos normais

$$\eta(y^\mu, q) = \sum_n \xi_n(y) \psi_n(q), \tag{4.1.14}$$

substituindo em (4.1.13) e admitindo que os modos $\xi_n(y)$ são campos que descrevem partículas localizadas na p -brana satisfazendo a equação de Klein-Gordon

$$\square_{(p+d)} \xi_n(y) = M_n^2 \xi_n(y) \tag{4.1.15}$$

obtemos, então, uma equação do tipo Schroedinger que governa as massas M_n^2 das partículas dada por

$$-\nabla_q^2 \psi_n(q) + V''(\bar{\phi}) \psi_n(q) = M_n^2 \psi_n(q). \tag{4.1.16}$$

Por outro lado, admitindo a seguinte condição de ortonormalidade para as funções de onda $\psi(q)$

$$\int d^d q \psi_m(q) \psi_n(q) = \delta_{m,n}, \tag{4.1.17}$$

substituindo a expansão (4.1.14) na ação (4.1.9) e integrando em q , obtemos a ação efetiva

$$S = - \int d^{p+1}y \left[T_p + \sum_{n=0}^N \partial_\mu \xi_n(y) \partial^\mu \xi_n(y) + V(\xi) \right], \quad (4.1.18)$$

onde o potencial para os modos é escrito como

$$V(\xi) = \int d^d q \left[\frac{1}{2} \eta H \eta + \frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} \eta^3 + \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} \eta^4 + \dots \right]. \quad (4.1.19)$$

Portanto, para soluções estáticas com dependência na coordenada $q(x_1, x_2, \dots, x_d)$ ou, em coordenadas esféricas, $q(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{(d-1)})$ ao longo de \mathbb{R}^d (comprimento infinito) e invariante ao longo de \mathbb{M}^{p+1} , escrevemos a seguinte equação de movimento

$$\nabla_q^2 \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (4.1.20)$$

4.2 Aplicação

Aqui iremos aplicar todo formalismo desenvolvido na seção anterior usando agora um potencial mais geral que o modelo ϕ^4 [10] que é dado da seguinte maneira

$$V(\phi, r) = \frac{1}{2r^{2d-2}} W_\phi^2. \quad (4.2.21)$$

A primeira derivada do superpotencial ($W_\phi = \partial W / \partial \phi$) é dada por

$$W_\phi = \left(\phi^{\frac{a-1}{a}} - \phi^{\frac{a+1}{a}} \right). \quad (4.2.22)$$

Onde d é a dimensão do espaço e $a = 1, 3, 5, \dots$. Note que ao fazermos $d = 1$ e $a = 1$ em (4.2.21) reproduzimos o modelo ϕ^4 . O formalismo de primeira ordem também pode ser aplicado à esse modelo, ou seja, soluções de equações diferenciais de segunda ordem são satisfeitas por equações diferenciais de primeira ordem. Assim, para configurações de campos estáticos e radiais em d dimensões, temos

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^{d-1}} W_\phi. \quad (4.2.23)$$

Ao substituirmos (4.2.22) na equação acima, considerando o sinal positivo, obtemos a solução

$$\bar{\phi}(r) = \tanh^a \left[\frac{1}{a} \left(\frac{r^{2-d}}{d-2} \right) \right]. \quad (4.2.24)$$

Os argumentos para a escolha do parâmetro a ser ímpar são baseados no fato de que ao considerar $a = 2, 4, \dots$, as soluções exibidas não conectam os mínimos 0 e ± 1 , ou seja, as soluções não exibem esses valores assintóticos dos campos, o que não condiz com um defeito topológico [10].

Para o espectro localizado na brana, só usaremos a primeira autofunção, que denominaremos ψ_0 . A justificativa para isto é o simples fato de que podemos fatorar a equação tipo Schroedinger, isto é, escrevendo

$$H = Q^\dagger Q \quad (4.2.25)$$

com

$$Q = r^{d-1} \frac{d}{dr} + W_{\phi\phi}, \quad (4.2.26)$$

$$Q^\dagger = -r^{d-1} \frac{d}{dr} + W_{\phi\phi}, \quad (4.2.27)$$

e aplicando a um estado ψ , reproduzimos a equação tipo Schroedinger (4.1.16). Isso garante que H seja quadrático e portanto só tem um estado ligado, ou seja o modo zero ψ_0 .

Para determiná-lo devemos resolver a seguinte equação de autovalor com $M_0 = 0$

$$H\psi_0 = M_0^2\psi_0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{r^{d-1}} \left[r^{d-1} \frac{d}{dr} + W_{\phi\phi} \right] \psi_0 = 0.$$

Cuja solução é

$$\psi_0 = \exp \left[- \int \frac{W_{\phi\phi}}{r^{d-1}} dr \right]. \quad (4.2.28)$$

Portanto, como temos apenas a autofunção ψ_0 , a tensão (4.1.7) tem a mesma forma, mas a ação efetiva (4.1.18) e o potencial (4.1.19) sofrem uma pequena modificação

$$S = - \int d^{p+1}y [T_p + \partial_\mu \xi_0(y) \partial^\mu \xi_0(y) + V(\xi)], \quad (4.2.29)$$

$$T_p = \int d^d q \left[\frac{1}{2} (\nabla_q \bar{\phi})^2 + V(\bar{\phi}) \right] \quad (4.2.30)$$

e

$$V(\xi_0) = \int d^d q \left[\frac{V'''(\bar{\phi})}{3!} (\xi_0 \psi_0)^3 + \frac{V''''(\bar{\phi})}{4!} (\xi_0 \psi_0)^4 \right]. \quad (4.2.31)$$

Note que consideramos até o termo de quarta ordem em $V(\xi_0)$.

Nas subseções seguintes iremos calcular a tensão da p -brana (4.2.30) e o potencial (4.2.31) para certos valores da dimensão d e do parâmetro a . Com obtemos a ação efetiva (4.2.29) para cada caso.

4.2.1 Ação efetiva para $d = 1$ e $a = 1$

Substituindo $d = 1$ e $a = 1$ na solução (4.2.24) obtemos a solução estática

$$\bar{\phi} = \tanh(-x). \quad (4.2.32)$$

Para $d = 1$ devemos fazer a seguinte troca ao integrar $d^d q = r^{d-1} dr d\Omega(d-1) \rightarrow dx$, e assim, como estamos em uma dimensão, trocamos r por x em todas equações. Portanto, usando $W_{\phi\phi} = \partial W_\phi / \partial \phi$ com $d = 1$ e $a = 1$, substituindo em (4.2.28) e integrando em x , encontramos a seguinte autofunção

$$\psi_0 = \text{sech}^2(x), \quad (4.2.33)$$

que normalizada, tem a seguinte forma

$$\Psi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sech}^2(x). \quad (4.2.34)$$

A tensão da p -brana é obtida substituindo a solução $\bar{\phi}$ em (4.2.30) e integrando em x . o resultado obtido foi

$$T_p = \frac{4}{3}. \quad (4.2.35)$$

Substituindo a autofunção normalizada (4.2.34) e as derivadas do potencial em (4.2.31) realizando a integral, obtemos o potencial para o modo ξ_0 da forma

$$V(\xi_0) = \frac{9}{35} \xi_0^4. \quad (4.2.36)$$

Como tínhamos comentado anteriormente, esse caso recai na teoria ϕ^4 . Note que a única diferença dos resultados obtidos no modelo ϕ^4 e nesta, é que aqui consideramos apenas o modo *zero*, ou seja, fazendo $\psi_1 \rightarrow 0$ naquele desenvolvimento, recaímos a todos os resultados obtidos aqui.

4.2.2 Ação efetiva para $d = 1$ e $a = 3$

Analogamente ao caso anterior, usando agora $a = 3$, obtemos respectivamente a solução estática $\bar{\phi}$ e a função de onda normalizada

$$\bar{\phi} = \tanh^3 \left(-\frac{x}{3} \right), \quad (4.2.37)$$

$$\Psi_0 = - \left(\frac{\sqrt{12}\sqrt{35}}{12} \right) \tanh^2 \left(\frac{x}{3} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{3} \right). \quad (4.2.38)$$

No caso da tensão T_p , obtemos seu valor divergindo para o infinito. Quando $a = 3, 5, \dots$ para $d = 1$, outro mínimo aparece ($\bar{\phi} = 0$) [10] e com isso há divergência de massa. Por outro lado, o potencial encontrado foi

$$V(\xi_0) = \frac{5425}{24057} \xi_0^4, \quad (4.2.39)$$

4.2.3 Ação efetiva para $d = 1$ e $a = 5$

Nesse caso, a solução $\bar{\phi}$ e a autofunção normalizada foram calculados como

$$\bar{\phi} = \tanh^5 \left(-\frac{r}{5} \right), \quad (4.2.40)$$

$$\Psi_0 = - \left(\frac{\sqrt{20}\sqrt{99}}{20} \right) \tanh^4 \left(\frac{x}{5} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{5} \right), \quad (4.2.41)$$

e a tensão divergindo, como justificado no caso $a = 3$. Por fim, o potencial $V(\xi_0)$ é dado por

$$V(\xi_0) = \frac{5643}{203125} \xi_0^4, \quad (4.2.42)$$

Nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3 mostramos o comportamento gráfico das soluções estáticas $\bar{\phi}$, funções de onda normalizadas Ψ e dos potenciais para os modos $V(\xi_0)$ em $d = 1$ e $a = 1, 3, 5$. A convenção utilizada, será respectivamente para $a = 1$, $a = 3$ e $a = 5$, as cores vermelha, verde e azul.

Por outro lado, é de se notar que ao substituirmos $d = 2$ na solução (4.2.24) não teremos uma solução admissível, devido ao argumento da tangente hiperbólica. Portanto, não obteremos também ação efetiva e potencial.

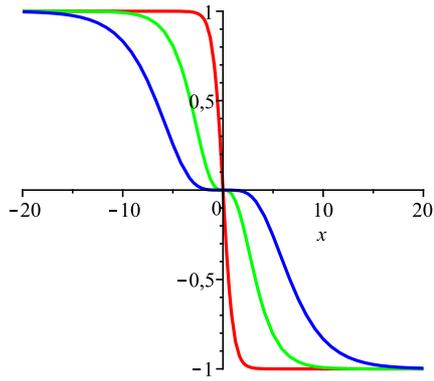


Figura 4.1: Soluções estáticas em $d = 1$.

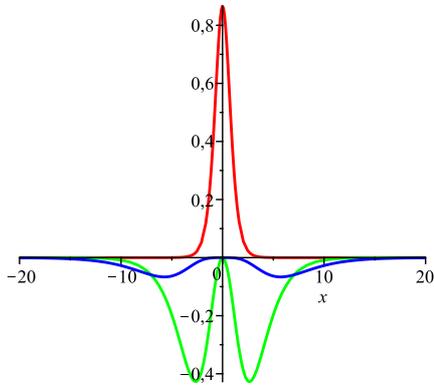


Figura 4.2: Funções de onda normalizadas em $d = 1$.

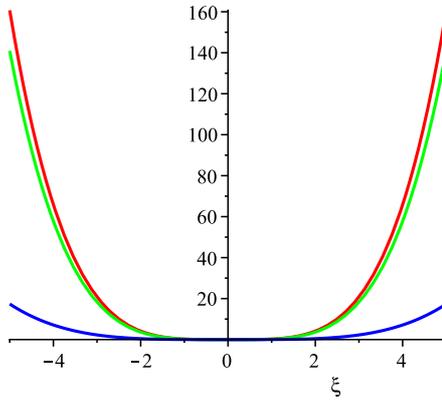


Figura 4.3: Potenciais para o modo ξ_0 em $d = 1$.

4.2.4 Ação efetiva para $d = 3$ e $a = 1$

A solução (4.2.24) para $d = 3$ e $a = 1$ tem a forma

$$\bar{\phi} = \tanh\left(\frac{1}{r}\right). \quad (4.2.43)$$

Quando $d = 3$ temos que $d^d q = r^{d-1} dr d\Omega(d-1) \rightarrow 4\pi r^2 dr$. Assim, a autofunção

obtida foi

$$\psi_0 = \text{sech}^2(1/r), \quad (4.2.44)$$

a qual não é possível normalizar, pois há divergência na integral. Sendo assim, não é possível calcular o potencial $V(\xi_0)$. Portanto, a ação efetiva neste caso só dependerá da tensão da p -brana. O seu valor encontrado é dado por

$$T_p = 4\pi \left(\frac{1}{36} \pi^2 + \frac{1}{6} \right). \quad (4.2.45)$$

4.2.5 Ação efetiva para $d = 3$ e $a = 3$

A solução obtida foi

$$\bar{\phi} = \tanh^3 \left(\frac{1}{3r} \right) \quad (4.2.46)$$

com a correspondente autofunção normalizada

$$\Psi_0 = -2.057 \tanh^2 \left(\frac{1}{3r} \right) \text{sech}^2 \left(\frac{1}{3r} \right). \quad (4.2.47)$$

A tensão e o potencial obtidos são dados respectivamente por

$$T_p = 4\pi \left(\frac{9}{140} \pi^2 + \frac{27}{70} \right) \quad (4.2.48)$$

e

$$V(\xi_0) = 0.95\pi\xi_0^4. \quad (4.2.49)$$

4.2.6 Ação efetiva para $d = 3$ e $a = 5$

Por fim, quando $d = 3$ e $a = 5$ obtemos $\bar{\phi}$ e Ψ_0 com os seguintes valores

$$\bar{\phi} = \tanh^5 \left(\frac{1}{5r} \right) \quad (4.2.50)$$

$$\Psi_0 = \frac{21.51 \text{senh}^4 \left(\frac{1}{5r} \right)}{\left[\text{senh} \left(\frac{1}{5r} \right) + \text{cosh} \left(\frac{1}{5r} \right) \right]^2 \text{cosh}^6 \left(\frac{1}{5r} \right) \left[-\text{senh} \left(\frac{1}{5r} \right) + \text{cosh} \left(\frac{1}{5r} \right) \right]^2}, \quad (4.2.51)$$

onde

$$T_p = 4\pi \left(\frac{125}{1188} \pi^2 + \frac{16195}{12474} \right) \quad (4.2.52)$$

e

$$V(\xi_0) = 485.66\pi\xi_0^4. \quad (4.2.53)$$

Nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6 mostramos o comportamento gráfico das soluções estáticas $\bar{\phi}$, funções de onda normalizadas Ψ e dos potenciais para os modos $V(\xi_0)$ em $a = 1, 3, 5$, sendo $d = 3$ dimensões. A convenção utilizada será a mesma, isto é, $a = 1$, $a = 3$ e $a = 5$, são representadas pelas cores vermelha, verde e azul respectivamente

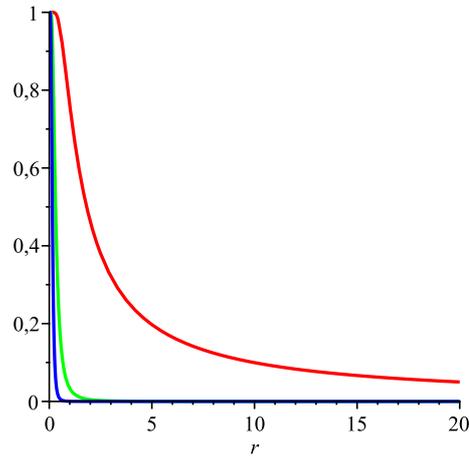


Figura 4.4: Soluções estáticas em $d = 3$.

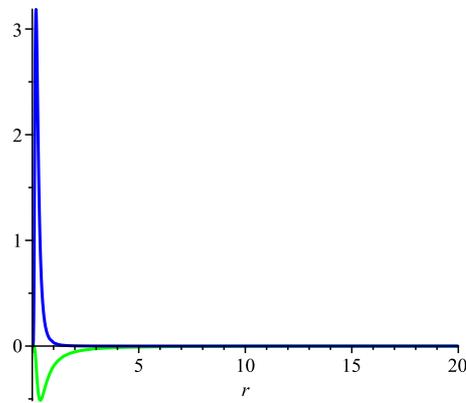


Figura 4.5: Funções de onda normalizadas em $d = 3$.

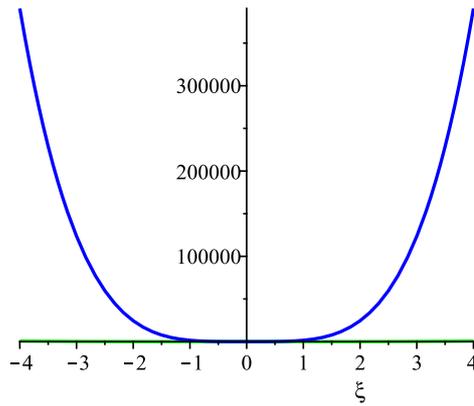


Figura 4.6: Potencial para o modo ξ_0 em $d = 3$.

A conclusão mais importante que tiramos deste capítulo é que os defeitos globais embora quebrem a invariância da simetria de translação porque o potencial escalar possui dependência explícita com as coordenadas espaciais através de r , é possível encontrar teorias efetivas cujos potenciais são tipo ξ_0^4 . Esses potenciais não possuem dependência explícita com as coordenadas da p -brana, logo são potenciais que respeitam a simetria de translação. Neste sentido podemos concluir que neste processo de compactificação surge um mecanismo no qual uma teoria que quebra a invariância de translação em dimensões mais altas, recupera a simetria de translação em dimensões menores. Isto está de certa forma de acordo com as idéias mais recentes sobre a possibilidade da quebra da simetria de translação em altas energias ao mesmo tempo em que se abre a possibilidade de se sondar dimensões extras do nosso Universo.

Capítulo 5

Comentários e Conclusões

Diante do trabalho apresentado podemos destacar muitos pontos que nos deram uma melhor clareza no que diz respeito à compactificação de dimensões extras. O processo de bifurcação nos deu um olhar mais detalhado do que se pode acontecer em setores formados por soluções topológicas que conectam vácuos de uma teoria. Particularmente, temos observado que soluções (ou setores) diagonais podem se bifurcar, por um processo espontâneo, formando junções de branas estáveis. No modelo de dois campos, vimos que um setor diagonal pode se bifurcar em quatro “meias” paredes, enquanto no modelo de três campos uma diagonal se bifurca em doze “quartos” de parede. Isso porque o número de vácuos fornecido pela teoria proposta é sempre 2^n , onde n é o número de campos. Também foi importante observar o fato de que o parâmetro de deformação sempre ser negativo para que ocorra uma junção estável de soluções tipo bordas, e que ao mesmo tempo está relacionado, no contexto de localização de gravidade, ao fato de a constante cosmológica de todo o espaço ambiente (aonde se encontra a p -brana) ser negativa (espaço AdS).

No que se refere a junções de branas, é importante levar em conta o mecanismo de “relaxação” de dimensões extras. Vimos que ao se partir de um universo primordialmente $(9 + 1)$ -dimensional, são necessárias seis paredes de domínios 8-dimensionais (8-branas) que se cruzando ortogonalmente fornecem uma junção 3-dimensional (3-brana), a qual pode evoluir no tempo exibindo o nosso universo $(3+1)$ -dimensional. Vimos também que

ao considerar o setor fermiônico na nossa teoria, obtemos $2^6 = 64$ modos localizados na junção, de tal forma que apenas 20 estados massivos degenerados e 1 não-massivo são estatisticamente favoráveis a “viver” na junção 3-dimensional. A isso foi interpretado como números quânticos $N_c = 3$ cores e $N_F = 6$ sabores de quarks, mais três léptons incolores. Como mencionado, esses 21 graus de liberdade fermiônicos são os que compõem o setor fermiônico do Modelo Padrão. Ou seja, de acordo com esse cenário a física do Modelo Padrão pode ser uma manifestação de dimensões extras, que na junção, se manifesta como uma física quadridimensional.

Sobre o método de compactificação via branas, podemos concluir que esse método se atém, assim como no método de junção de branas, à localizar modos na própria brana, mas não numa junção. Vimos que o ponto de partida foi uma perturbação dos campos em torno de uma solução conhecida, expandindo em modos normais de vibração. Tomamos esse conjunto de modos descritos por autofunções e autovalores, que integramos em todo o espaço. O resultado foi uma teoria efetiva localizada num “objeto” de dimensão menor, ou seja, uma brana. Isso mostra que um determinado grau de liberdade em p dimensões se traduz em vários graus de liberdade em $p - 1$ dimensões.

Por fim, estendemos o método via branas, adicionando mais d graus de liberdade à topologia do espaço em que a brana está mergulhada. Ao aplicar o modelo estendido do potencial, vimos que os resultados foram satisfatórios, pois, além de reproduzir os resultados do modelo ϕ^4 quando $d = 1$ e $a = 1$, os potenciais dos modos forneceram apenas um único mínimo. Isso, analogamente ao modelo ϕ^4 , pode sugerir que apliquemos nossos resultados a uma dimensão extra compacta e verificar se também são observados modos taquiônicos. Portanto, isso serve como perspectiva de trabalhos.

Apêndice A

Equações de primeira ordem e energia de Bogomol'nyi

Seja uma teoria de dois campos escalares reais ϕ e χ , os quais se referem ao setor bosônico de uma teoria supersimétrica. A lagrangeana que descreve a dinâmica desses campos é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V, \quad (\text{A.1})$$

onde $V = V(\phi, \chi)$ é um potencial real. O índice μ rotula o espaço-tempo $(d, 1)$ -dimensional. O potencial é dado em termos de uma função suave dos campos $W = (\phi, \chi)$, que no contexto de supersimetria, denominamos superpotencial. Assim como segue

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{1}{2}W_\chi^2, \quad (\text{A.2})$$

sendo $W_\phi = \partial W/\partial\phi$ etc. Usando a equação de Euler-Lagrange para os campos escalares ϕ e χ , obtemos as seguintes equações de movimento

$$\square\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (\text{A.3})$$

e

$$\square\chi + \frac{\partial V}{\partial\chi} = 0, \quad (\text{A.4})$$

onde $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o operador d'Alembertiano. Para campos estáticos e unidimensionais, isto é, $\phi = \phi(x)$ essas equações se reduzem a

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{\partial V}{\partial\chi} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Usando (A.2) em (A.5) e (A.6) obtemos as equações de movimento em função do superpotencial

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi}. \quad (\text{A.8})$$

Há uma grande dificuldade de encontrar soluções dessas equações, pois são equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Daí a importância do *método de Bogomol'nyi* [27]. Tomemos a equação (A.5), multiplicando por $d\phi/dx$

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} \frac{\partial V}{\partial\phi} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \frac{dV(\phi)}{dx}, \quad (\text{A.10})$$

integrando em x os dois lados da equação (desconsiderando o outro campo por enquanto) e admitindo que o potencial seja da forma $V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2$ obtemos a seguinte equação de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi. \quad (\text{A.11})$$

analogamente para o campo χ (agora fazendo o campo $\phi = 0$)

$$\frac{d\chi}{dx} = W_\chi. \quad (\text{A.12})$$

No entanto, mesmo para os campos acoplados, ou seja, mantendo ambos $\phi, \chi \neq 0$, é de se notar que soluções satisfeitas pelas equações de primeira ordem (A.11) e (A.12) também são satisfeitas pelas equações de segunda ordem (A.7) e (A.8). Isto significa uma grande redução de trabalho, pois dispomos agora de equações de primeira ordem desacopladas.

Outro aspecto muito importante é o fato de se calcular a densidade de energia (ou tensão) de uma parede de domínios. Calcula-se a densidade de energia como

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 + W_\chi^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Podemos somar e subtrair termos, de forma que a equação acima se torna

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} - W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} - W_\chi \right)^2 \right] + \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(W_\phi \frac{d\phi}{dx} + W_\chi \frac{d\chi}{dx} \right). \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Note que os termos quadráticos são positivos, sendo zero o seus valores mínimos. Ao considerar as equações de primeira ordem (A.11) e (A.12) a primeira integral se anula. E usando o fato de que $\frac{dW}{dx} = \left(W_\phi \frac{d\phi}{dx} + W_\chi \frac{d\chi}{dx} \right)$ obtemos então

$$E = E_B = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|, \tag{A.15}$$

a qual denominamos energia de Bogomol'nyi (E_B), que é calculada nos valores assintóticos dos campos. As configurações em geral possuem energia maior que esse valor. Entretanto, soluções cujas energias são iguais à energia de Bogomol'nyi são denominadas soluções BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) [28].

Bibliografia

- [1] B. Zwiebach, A First Course in String Theory (Cambridge University Press 2004).
- [2] D. Bazeia, F. A. Brito and L. Losano, Europhys. Lett. **76**, 374 (2006); [arXiv:hep-th/0512331].
- [3] D. Bazeia, F. A. Brito and R.C. Fonseca, [arXiv:hep-th/08093048].
- [4] C. Elphick, A. Hagberg, E. Meron, Phys. Rev. Lett. **80**, 5007 (1998).
- [5] B. Zwiebach, JHEP **0009**, 028 (2000); [arXiv:hep-th/0008227].
- [6] F.A. Brito, JHEP **0508**, 036 (2005); [arXiv:hep-th/0505043].
- [7] V. A. Rubakov Phys.Usp.**44**, 8713 (2001)
- [8] Gregory Gabadadze; [ArXiv:hep-ph/0308112].
- [9] M. J. Duff; [ArXiv:hep-th/9410046].
- [10] D. Bazeia, J. Menezes and R. Menezes, Phys. Rev. Lett. **91**, 241601 (2003).
- [11] C. A. G. Almeida, D. Bazeia and L. Losano, J. Phys. A **34**, 3351 (2001); [arXiv:hep-th/0103166].
- [12] D. Bazeia, F.A. Brito, Phys. Rev. Lett. **84**, 1094 (2000).
- [13] G. W. Gibbons and N. D. Lambert, Phys. Lett. B **488**, 90 (2000); [arXiv:hep-th/0003197].
- [14] K. Ito, M. Naganuma, H. Oda and N. Sakai, Nucl. Phys. B **586**, 231 (2000); [arXiv:hep-th/0004188].

- [15] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. D *13*, 3398 (1976).
- [16] D. B. Kaplan and M. Schmaltz, Phys. Lett. B **368**, 44 (1996); [arXiv:hep-th/9510197].
- [17] J.R. Morris and D. Bazeia, Phys. Rev. D **54**, 5217 (1996); [arXiv:hep-ph/9607396].
- [18] D. Stojkovic, Phys. Rev. D **63**, 025010 (2001); [arXiv:hep-ph/0007343].
- [19] Greiner W., Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations, 3^a edição Springer.
- [20] Bjorken, J.D. And Drell S. D., Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill Book Company.
- [21] P.M. Morse and H. Feshbach, “Methods of Theoretical Physics”, (McGraw-Hill, New York, 1953), p.1650.
- [22] H. Goldstein, Classical Mechanics, 2nd Edition, Addison-Wesley, 1980.
- [23] Sakurai J.J., Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc 1985.
- [24] Arfken, G.B. and Weber, H.J. Mathematical Methods for Phycists, 6a edição.
- [25] Spiegel, M. R. Mathematical Handbook, Schaum’s Outline series.
- [26] Michio Kaku, Quantum Field Theory: A modern introduction, Oxford University Press.
- [27] E. B. Bogomolnyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [28] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**,760 (1975).